Matemática

PRINCIPAIS NOTAÇÕES

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

(a, b) – par ordenado

A^t – matriz transposta da matriz A

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

I – matriz identidade de ordem 2

A^{-1} – matriz inversa da matriz A

c

Seja f: IR → IR a função definida por

$$f(x) = 2\text{sen } 2x - \cos 2x.$$

Então:

A ( ) f é ímpar e periódica de período π.

B ( ) f é par e periódica de período π/2.

C ( ) f não é par nem ímpar e é periódica de período π.

D ( ) f não é par e é periódica de período π/4.

E ( ) f não é ímpar e não é periódica.

Resolução

1) $f(x) = 2 \text{ sen } 2x - \cos 2x =$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ sen } 2x - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2x\right)$$

Existe $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ independente de x tal que

$\cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Assim,

$f(x) = \sqrt{5}\,(\cos\alpha \,.\, \text{sen } 2x - \text{sen }\alpha \,.\, \cos 2x) \Rightarrow$

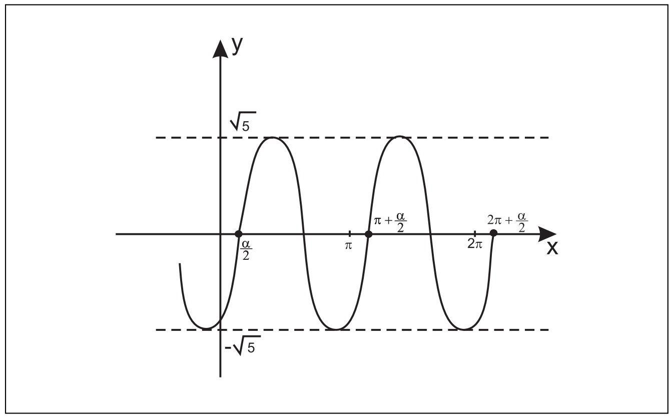
$\Rightarrow f(x) = \sqrt{5} \,.\, \text{sen }(2x - \alpha)$

2) **f não é par nem ímpar**, pois existe $x \in$ IR tal que

$f(-x) = \sqrt{5} \,.\, \text{sen}[2(-x) - \alpha] = -\sqrt{5} \,.\, \text{sen }(2x + \alpha)$

e portanto $f(-x) \ne f(x)$ e $f(-x) \ne -f(x)$

3) f é periódica de período $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$



d

O valor de

$\text{tg}^{10}x - 5\text{tg}^8x \sec^2x + 10\text{tg}^6x \sec^4x - 10\text{tg}^4x \sec^6x +$
$+ 5\text{tg}^2x \sec^8x - \sec^{10}x$, para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, é:

A ( ) 1 B ( ) $\dfrac{-\sec^2x}{1 + \text{sen}^2x}$ C ( ) $-\sec x + \text{tg } x$

D ( ) – 1 E ( ) zero

Resolução

Para $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ temos:

$\text{tg}^{10}x - 5\,\text{tg}^8x \sec^2x + 10\,\text{tg}^6x \sec^4x - 10\,\text{tg}^4x \sec^6x +$
$+ 5\,\text{tg}^2x \sec^8x - \sec^{10}x = (\text{tg}^2x - \sec^2x)^5 =$

$$= \left(\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x} - \frac{1}{\cos^2x}\right)^5 = \left(\frac{\text{sen}^2x - 1}{\cos^2x}\right)^5 = \left(\frac{-\cos^2x}{\cos^2x}\right)^5 =$$

$= (-1)^5 = -1$

a

Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz M inversível tal que:

$$A = M^{-1} BM.$$

Então:

A ( ) $\det(-A^t) = \det B$

B ( ) $\det A = -\det B$

C ( ) $\det(2A) = 2 \det B$

D ( ) Se det B $\neq$ 0 então det (– AB) < 0
E ( ) det (A – I) = – det (I – B)

Resolução
Sendo A e B matrizes quadradas de ordem 2 e M uma matriz inversível tem-se
$A = M^{-1} . B . M \Rightarrow \det A = \det (M^{-1} . B . M) \Rightarrow$

$\det A = \det M^{-1} . \det B . \det M = \dfrac{1}{\det M} . \det B . \det M \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = \det B.$

Assim
$\det (-A^t) = (-1)^2 . \det (A^t) = \det A = \det B$

d

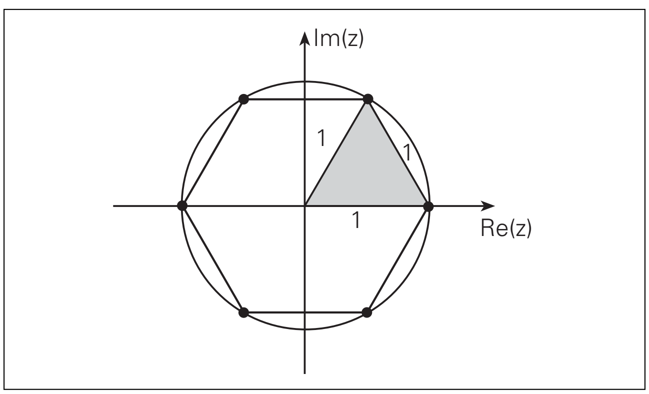
Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

A ( ) $\sqrt{3}$ B ( ) 5 C ( ) π

D ( ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ E ( ) 2π

Resolução
As soluções da equação $z^6 = 1$ são as seis raízes sextas do número 1. Já que uma dessas raízes é igual a 1, elas pertencem a uma circunferência de raio 1, centro na origem e a dividem em 6 partes iguais determinando um hexágono regular.
A área desse polígono é dada por

$A = 6 . \dfrac{1^2 . \sqrt{3}}{4} = \dfrac{3 . \sqrt{3}}{2}$



b

Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então, o número complexo $z = x + iy$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

A ( ) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$ B ( ) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$

C ( ) i e 1 D ( ) $-i$ e 1

E ( ) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

Resolução
Se x e y forem números reais tais que
$x^3 - 3xy^2 = 1$, $3x^2y - y^3 = 1$ e $z = x + yi$ então:

$z^3 = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3 = 1 + i$

Se $z^3 = 1 + i$ então:

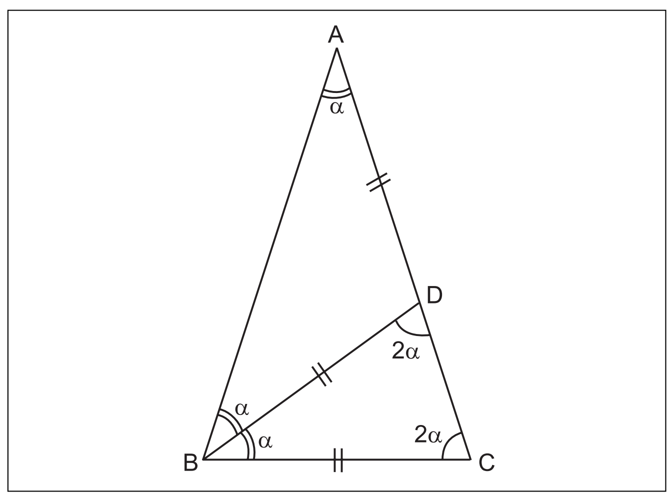
$|z^3| = \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow |z^3| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z| = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z| = \sqrt[6]{2}$

c

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

A ( ) 23° B ( ) 32° C ( ) 36°
D ( ) 40° E ( ) 45°

Resolução



1) Seja α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADB é isósceles de base $\overline{AB}$ temos: $D\hat{A}B = D\hat{B}A = \alpha$.
2) $B\hat{D}C = 2\alpha$ pois é ângulo externo do triângulo ABD.
3) ΔCBD é isósceles de base $\overline{CD} \Rightarrow B\hat{C}D = B\hat{D}C = 2\alpha$.
4) ΔABC é isósceles de base $\overline{BC} \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2\alpha$.

Assim, no triângulo CBD temos:
$2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$.

e

Seja (a_1, a_2, a_3, ...) uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

A ( ) $\frac{8}{27}$ B ( ) $\frac{20}{27}$ C ( ) $\frac{26}{27}$

D ( ) $\frac{30}{27}$ E ( ) $\frac{38}{27}$

Resolução

Na progressão geométrica infinita (a_1, a_2, a_3, ...) de razão $q = a_1$, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$ temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 3 \,.\, a_1 = \frac{a_1}{1-a_1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{3} \,.$$

Logo, na progressão geométrica infinita $\left(\frac{2}{3} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{27} ;...\right)$ a soma dos três primeiros termos é:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{38}{27} \,.$$

d

O valor de $y \in IR$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$, é:

A ( ) $\frac{1}{2}$ B ( ) $\frac{1}{3}$ C ( ) 3

D ( ) $\frac{1}{8}$ E ( ) 7

Resolução

Para $y > 0$ e $y \neq 1$, temos:

$\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \,.\, \log 7}{\log y} = \frac{\log 7}{2 \,.\, \log y} + \frac{\log 7}{\log (2y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\log y} = \frac{1}{2 \,.\, \log y} + \frac{1}{\log (2y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\log y} = \frac{\log (2y) + 2 \,.\, \log y}{2 \,.\, \log y \,.\, \log (2y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{\log (2y) + 2 \,.\, \log y}{2 \,.\, \log (2y)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4 \,.\, \log (2y) = \log (2y) + 2 \,.\, \log y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \,.\, \log (2y) = 2 \,.\, \log y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \,.\, \log 2 + 3 \,.\, \log y = 2 \,.\, \log y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log y = -3 \,.\, \log 2 \Leftrightarrow \log y = \log 2^{-3} \Leftrightarrow y = 2^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{8}$

c

O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

A ( ) 12! B ( ) (8!)(5!) C ( ) 12! – (8!) (5!)

D ( ) 12! – 8! E ( ) 12! – (7!)(5!)

Resolução

1) O número de anagramas da palavra **vestibulando** é:

$$P_{12} = 12!$$

2) O número de anagramas da palavra **vestibulando** que apresentam as cinco vogais juntas é:

$$P_8 \,.\, P_5 = 8! \,.\, 5!$$

3) Logo o número de anagramas da palavra **vestibulando** que não apresentam as cinco vogais juntas é:

$$12! - 8! \,.\, 5!$$

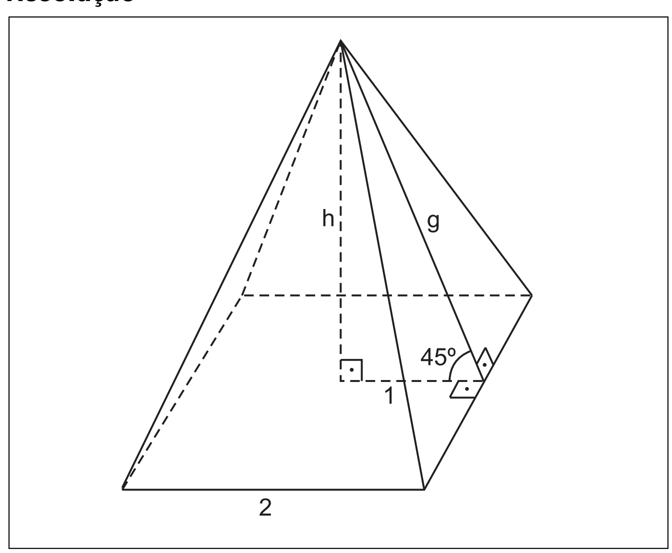
d

Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45°. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

A ( ) $\sqrt{2}$ B ( ) $\frac{1}{3}$ C ( ) $\sqrt{6}$

D ( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E ( ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolução



Sendo h e g, respectivamente, as medidas em centímetros da altura e do apótema dessa pirâmide, tem-se:

1) $\text{tg } 45° = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = 1$

2) $\cos 45° = \dfrac{1}{g} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{g} \Leftrightarrow g = \sqrt{2}$

Sendo A_b e A_ℓ, respectivamente, as áreas em centímetros quadrados, da base e da superfície lateral dessa pirâmide, tem-se:

3) $A_b = 2^2 \Leftrightarrow A_b = 4$

4) $A_\ell = 4 \cdot \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow A_\ell = 4\sqrt{2}$

Assim: $\dfrac{A_b}{A_\ell} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e

Seja f: **R** → **R** a função definida por

$$f(x) = -3a^x,$$

onde a é um número real, $0 < a < 1$. Sobre as afirmações:

(I) $f(x + y) = f(x)\,f(y)$, para todo $x, y \in$ **R**.

(II) f é bijetora.

(III) f é crescente e $f(\,]0, +\infty[\,) =]-3, 0[$.

Podemos concluir que:

A ( ) Todas as afirmações são falsas.

B ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.

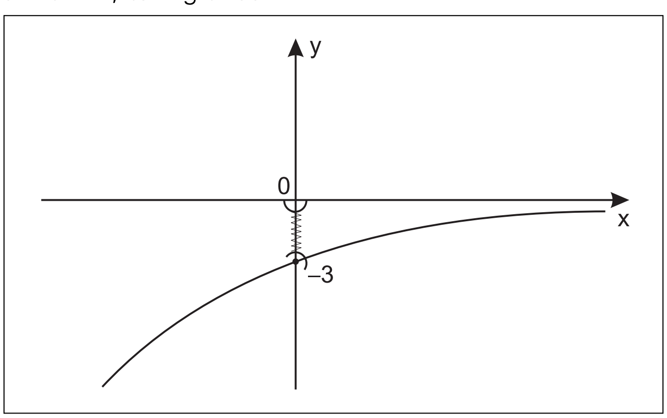
C ( ) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E ( ) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Resolução

A função f: IR → IR definida por $f(x) = -3a^x$, com $0 < a < 1$, tem gráfico:



Pode-se, então, concluir que:

I) $f(x + y) = -3a^{x+y} = -3a^x \cdot a^y = f(x) \cdot a^y \neq f(x) \cdot f(y)$;

II) não é sobrejetora, pois $Im(f) = IR^*_- \neq IR = CD(f)$;

III) é crescente no intervalo $]0; +\infty[$ e o conjunto imagem dos elementos deste intervalo é $f(\,]0; +\infty[\,) =]-3, 0[$ como se pode ver no gráfico.

Assim, somente a afirmação III é verdadeira.

a

Sejam as funções f: IR → IR e g: A ⊂ IR → IR, tais que

$$f(x) = x^2 - 9 \quad e \quad (f \circ g)(x) = x - 6,$$

em seus respectivos domínios. Então, o domínio A da função g é:

A ( ) $[-3, +\infty[$ B ( ) IR

C ( ) $[-5, +\infty[$ D ( ) $]-\infty, -1[\;\cup\; [3, +\infty[$

E ( ) $]-\infty, \sqrt{6}\,[$

Resolução

De f: IR → IR I $f(x) = x^2 - 9$, g: A ⊂ IR → IR e

(fog) (x) = = x – 6 obtém-se:

$(fog)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 - 9 = x - 6 \Rightarrow g(x) = \pm\sqrt{x + 3}$.

Como $g(x) \in IR$ tem-se: $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

Assim, $D(g) = A = [-3; +\infty[$

d

Considere a, b ∈ IR e a equação

$$2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^x + b = 0$$

Sabendo que as três raízes reais x_1, x_2, x_3 desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então a – b vale:

A ( ) 5 B ( ) – 7 C ( ) – 9 D ( ) – 5 E ( ) 9

Resolução

$2e^{3x} + a \cdot e^{2x} + 7 \cdot e^x + b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(e^x)^3 + a \cdot (e^x)^2 + 7 \cdot (e^x) + b = 0$ é uma equação do $3^{\underline{o}}$ grau em e^x.

As raízes da equação são $-\alpha$, 0 e α, pois formam uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero.

Das relações de Girard decorre:

$$\begin{cases} e^{-\alpha} + e^0 + e^\alpha = -\dfrac{a}{2} \\[2mm] e^{-\alpha} \cdot e^0 + e^{-\alpha} \cdot e^\alpha + e^0 \cdot e^\alpha = \dfrac{7}{2} \\[2mm] e^{-\alpha} \cdot e^0 \cdot e^\alpha = -\dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\alpha} + 1 + e^\alpha = -\dfrac{a}{2} \\[2mm] e^{-\alpha} + 1 + e^\alpha = \dfrac{7}{2} \\[2mm] 1 = -\dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{2} = \dfrac{7}{2} \\[2mm] -\dfrac{b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a - b = (-7) - (-2) = -5$$

c

Seja a um número real tal que o polinômio

$$p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$$

admite apenas raízes reais. Então:

A ( ) $a \in [2, \infty[$ B ( ) $a \in [-1, 1]$

C ( ) $a \in]-\infty, -7]$ D ( ) $a \in [-2, -1[$

E ( ) $a \in]1, 2[$

Resolução

1) Sendo 1 e – 1 raízes do polinômio $p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$, e aplicando o dispostivo de Briott-Rufini, tem-se:

1	2	a	0	– a	– 2	– 1	1
1	3	a + 3	a + 3	3	1	$\boxed{0}$	–1
1	2	a + 1	2	1	$\boxed{0}$		

Assim, $p(x) = (x - 1) . (x + 1) . (x^4 + 2x^3 + (a + 1)x^2 + x + 1) \Leftrightarrow$

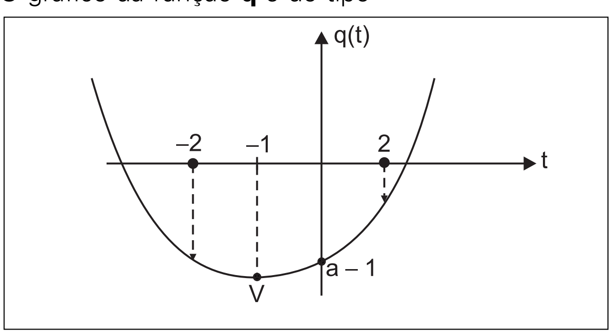
$$\Leftrightarrow p(x) = (x-1).(x+1).x^2.\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + (a+1)\right],$$

$\forall x \neq 0$ (zero não é raiz de p(x))

2) Para que p(x) admita apenas raízes reais, o polinômio $q(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + (a + 1)$ deverá admitir somente raízes reais.

3) Fazendo $x + \frac{1}{x} = t$, tem-se $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ e $q(t) = t^2 + 2t + (a - 1)$. Lembrando que $x + \frac{1}{x} \leq -2$ ou $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x \in IR^*$, conclui-se que as raízes do polinômio q(t) devem ser reais e não pertencer ao intervalo]– 2; 2[.

4) O gráfico da função **q** é do tipo



do que se conclui que $q(-2) \leq 0$ e $q(2) \leq 0$.

5) De $q(-2) \leq 0$, tem-se $(-2)^2 + 2 . (-2) + a - 1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$.
De $q(2) \leq 0$, tem-se $2^2 + 2 . 2 + a - 1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -7$.
Assim, $a \leq -7$ e $a \in]-\infty; -7]$.

a

Seja p(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de p(x) por x – 2 obtém-se um quociente q(x) e resto igual a 26. Na divisão de p(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente h(x) e resto 8x – 5. Sabe-se que q(0) = 13 e q(1) = 26. Então, h(2) + h(3) é igual a:

A ( ) 16 B ( ) zero C ( ) – 47

D ( ) – 28 E ( ) 1

Resolução

Do enunciado, tem-se:

1) $p(x) = (x - 2) . q(x) + 26$

2) $p(2) = (2 - 2) . q(2) + 26 \Leftrightarrow p(2) = 26$

3) $p(0) = (0 - 2) . q(0) + 26 \Leftrightarrow p(0) = -2 . 13 + 26 \Leftrightarrow p(0) = 0$

4) $p(1) = (1 - 2) . q(1) + 26 \Leftrightarrow p(1) = -1 . 26 + 26 \Leftrightarrow p(1) = 0$

5) $p(x) = (x^2 + x - 1) . h(x) + 8x - 5$

Como p(x) é um polinômio de grau 4 com coeficientes reais, resulta que h(x) é um polinômio de grau 2 com coeficientes reais, ou seja: $h(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in IR^*$, $b \in IR$ e $c \in IR$.

Assim:

$p(x) = (x^2 + x - 1) . (ax^2 + bx + c) + 8x - 5$ (I)

Fazendo-se sucessivamente, x = 0, x = 1 e x = 2 na igualdade (I), tem-se:

1º) $p(0) = (-1) . c + 8 . 0 - 5 \Leftrightarrow 0 = -c - 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{c = -5}$ (II)

2º) $p(1) = (1 + 1 - 1) . (a + b + c) + 8 - 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 = a + b + c + 3 \Leftrightarrow \boxed{a + b + c = -3}$ (III)

3º) $p(2) = (4 + 2 - 1) . (4a + 2b + c) + 16 - 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 26 = 5 . (4a + 2b + c) + 11 \Leftrightarrow \boxed{4a + 2b + c = 3}$ (IV)

De (II), (III) e (IV), temos

a = 2, b = 0 e c = – 5

e portanto:

$h(x) = 2x^2 - 5 \Rightarrow h(2) = 3$ e $h(3) = 13 \Rightarrow h(2) + h(3) = 16$

b

Sejam $a, b \in IR$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

A ( ) $\frac{a}{b} = 11$ B ( ) $\frac{b}{a} = 22$ C ( ) $ab = \frac{1}{4}$

D ( ) ab = 22 E ( ) ab = 0

Resolução

1) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases}$

Para que o sistema admita infinitas soluções, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$2)\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema admita infinitas soluções, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -b & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = 11$$

Logo, de (1) e (2) temos: $\frac{b}{a} = 22$

c

Sejam as matrizes reais de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}$$

Então, a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:

A ( ) $a + 1$

B ( ) $4(a + 1)$

C ( ) $\frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$

D ( ) $\frac{1}{4}(1 + 2a + a^2)$

E ( ) $\frac{1}{2}(5 + 2a + a^2)$

Resolução

Se $A = \begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}$, então:

1) $A . B = \begin{bmatrix} a^2 + a + 2 & a^2 + 3a + 2 \\ a + 1 & a + 3 \end{bmatrix}$ e $\det(A . B) = 4$.

2) Seja $(A . B)^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

$$x = \frac{A_{11}}{\det(AB)} = \frac{(-1)^2 . (a+3)}{4} \text{ e}$$

$$w = \frac{A_{22}}{\det(AB)} = \frac{(-1)^4 . (a^2 + a + 2)}{4}$$

3) Logo, a soma dos elementos da diagonal principal de $(A . B)^{-1}$ é:

$$x + w = \frac{a+3}{4} + \frac{a^2 + a + 2}{4} = \frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$$

a

A inequação

$$4x \log_5(x + 3) \geq (x^2 + 3) \log_{\frac{1}{5}}(x + 3)$$

é satisfeita para todo $x \in S$. Então:

A ( ) $S =]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$

B ( ) $S =]-\infty, -3[\cup [-1, +\infty[$

C ( ) $S =]-3, -1]$

D ( ) $S =]-2, +\infty]$

E ( ) $S =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

Resolução

Para $x > -3$, temos:

$4x \log_5(x + 3) \geq (x^2 + 3) . \log_{1/5}(x + 3) \Leftrightarrow$

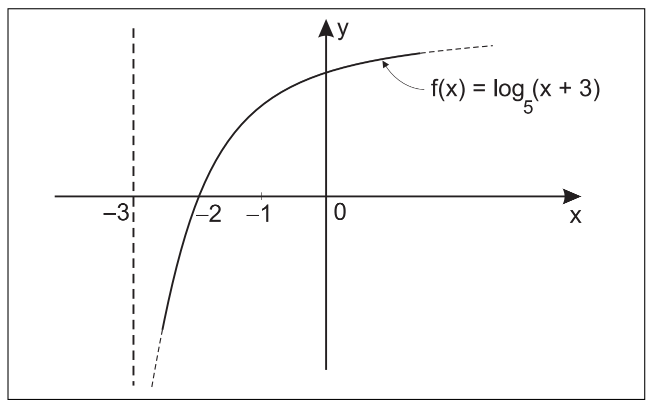
$\Leftrightarrow 4x \log_5(x + 3) \geq -(x^2 + 3) . \log_5(x + 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x . \log_5(x + 3) + (x^2 + 3) . \log_5(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow$

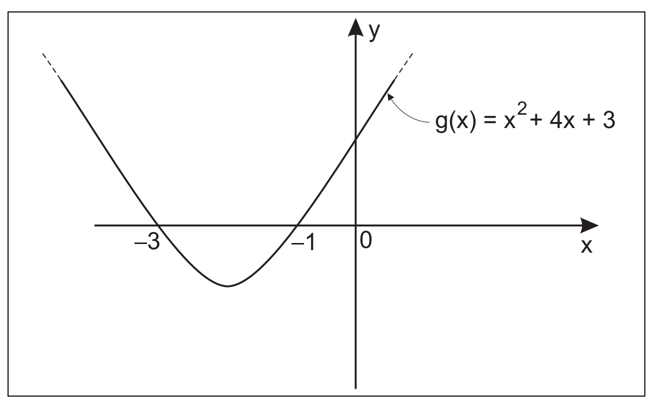
$\Leftrightarrow \log_5(x + 3) . [x^2 + 4x + 3] \geq 0.$

Fazendo-se $f(x) = \log_5(x + 3)$ e $g(x) = x^2 + 4x + 3$, resulta:

I)



II)



Como $f(x) . g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \text{ e } g(x) \leq 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \geq 0 \end{cases}$

conclui-se que:

$$-3 < x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1$$

Assim: $S =]-3; -2] \cup [-1; +\infty[$

b

A soma das raízes da equação

$\sqrt{3}$ tg x $-\sqrt{3}$ sen 2x + cos 2x = 0,

que pertencem ao intervalo [0, 2π], é:

A ( ) $\dfrac{17\pi}{4}$ B ( ) $\dfrac{16\pi}{3}$ C ( ) $\dfrac{15\pi}{4}$

D ( ) $\dfrac{14\pi}{3}$ E ( ) $\dfrac{13\pi}{4}$

Resolução

$$\sqrt{3}\ .\ \text{tg } x - \sqrt{3}\ .\ \text{sen }(2x) + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ .\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x} - 2\ .\ \text{sen } x\ .\ \cos x\right) + \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ .\left(\frac{\text{sen } x - 2\ .\ \text{sen } x\ .\ \cos^2 x}{\cos x}\right) + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\ .\ \text{sen } x}{\cos x}\ .\ (1 - 2\ .\ \cos^2 x) + \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ .\ \text{tg } x\ [-\cos(2x)] + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x)\ .\ (1 - \sqrt{3}\ .\ \text{tg } x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Então:

1º) $\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + n\ .\ \pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\ .\ \dfrac{\pi}{2}$

Para $0 \le x \le 2\pi$, temos:

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

2º) $\text{tg } x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + n\ .\ \pi$

Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6}$

A soma das raízes da equação é:

$$S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{16\pi}{3}$$

b

Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

A ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.

B ( ) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

C ( ) Apenas (I) é verdadeira.

D ( ) Apenas (III) é verdadeira.

E ( ) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

Resolução

Sendo **d** o número de diagonais e **n** o número de lados do polígono, temos:

I) Verdadeira

$$d = n \Leftrightarrow \frac{n\ .\ (n-3)}{2} = n \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } n = 5$$

Como $n \ge 3$, temos n = 5 e, portanto, o único polígono é o pentágono.

II) Falsa

$$d = 4n \Leftrightarrow \frac{n\ .\ (n-3)}{2} = 4n \Leftrightarrow n^2 - 11n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 11$$

Como $n \ge 3$, temos n = 11 e, portanto, existe um polígono que satisfaz a condição d = 4n. É o undecágono.

III) Verdadeira

Seja $k \in \mathbb{N}$, a razão entre o número de diagonais e o número de lados.

Assim,

$$\frac{d}{n} = k \Leftrightarrow d = n\ .\ k \Leftrightarrow \frac{n\ .\ (n-3)}{2} = n\ .\ k$$

Como $n \ge 3$, temos:

$$\frac{n-3}{2} = k \Leftrightarrow n - 3 = 2k \Leftrightarrow n = 2k + 3$$

e, portanto, n é ímpar.

e

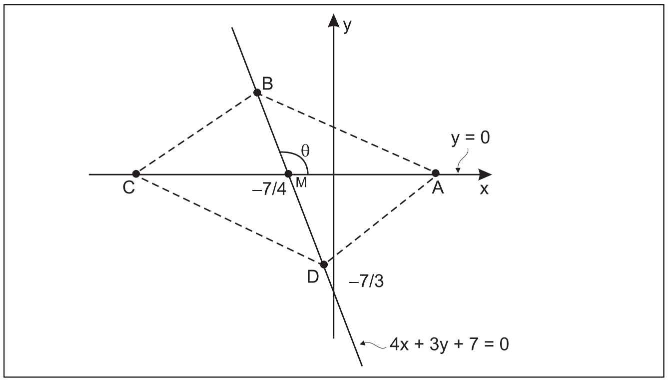
As retas y = 0 e 4x + 3y + 7 = 0 são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4cm e 6cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

A ( ) $\dfrac{36}{5}$ B ( ) $\dfrac{27}{4}$ C ( ) $\dfrac{44}{3}$

D ( ) $\dfrac{48}{3}$ E ( ) $\dfrac{48}{5}$

Resolução

A partir do enunciado, podemos ter a seguinte figura.



A reta $4x + 3y + 7 = 0$ tem coeficiente angular $m = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = -\dfrac{4}{3}$ e, portanto, $\text{sen}\,\theta = \dfrac{4}{5}$.

A área do triângulo AMB é igual a $\dfrac{AM \,.\, MB \,.\, \text{sen}\,\theta}{2}$

e portanto $\dfrac{3 \,.\, 2 \,.\, \dfrac{4}{5}}{2} = \dfrac{12}{5}$

Como o paralelogramo é constituído de 4 triângulos de mesma área, temos:

$A_{\text{paralelogramo}} = 4 \,.\, \left(\dfrac{12}{5}\right) = \dfrac{48}{5}$

b

Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo m e n, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

A ( ) m = 9, n = 7
B ( ) m = n = 9
C ( ) m = 8, n = 10
D ( ) m = 10, n = 8
E ( ) m = 7, n = 9

Resolução

1) Sejam **a** e **b**, respectivamente, o número de faces triângulares e quadrangulares do poliedro original. Assim, como o poliedro possui 16 arestas, temos:

$$\frac{3a + 4b}{2} = 16 \Leftrightarrow 3a + 4b = 32$$

2) Como o poliedro original possui **m** faces e **n** vértices, temos:

$$\begin{cases} m = a + b \\ n - 16 + m = 2 \end{cases} \Rightarrow n + a + b = 18$$

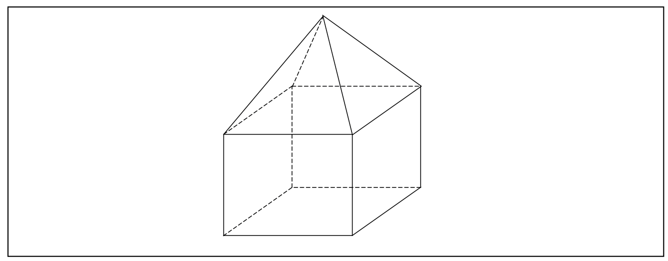
3) O novo poliedro possui (n – 1) vértices e (b + 1) faces quadrangulares. Assim, o número de arestas do novo poliedro é $\dfrac{4 \,.\, (b + 1)}{2} = 2b + 2$ e, portanto,

$$n - 1 - (2b + 2) + b + 1 = 2 \Leftrightarrow n = b + 4$$

4) De (1), (2) e (3), temos:

$$\begin{cases} 3a + 4b = 32 \\ m = a + b \\ n + a + b = 18 \\ n = b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ m = 9 \\ n = 9 \end{cases}$$

Um poliedro convexo que satisfaz as condições do problema é o da figura seguinte.

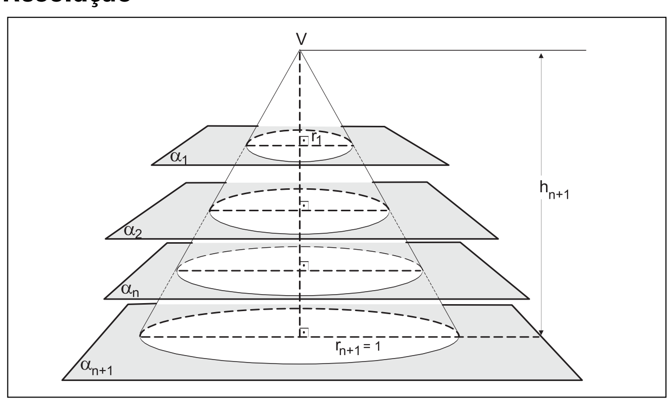


c

Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se n planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando n + 1 cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. Então, o volume, em cm^3, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

A ( ) $\dfrac{\pi}{33}$
B ( ) $\dfrac{2\pi}{33}$
C ( ) $\dfrac{\pi}{9}$
D ( ) $\dfrac{2\pi}{15}$
E ( ) π

Resolução



Sendo g_i, h_i e r_i, respectivamente, as medidas em centímetros, da geratriz, altura e raio da base do i-ésimo cone; e V_i o volume desse cone, com i natural e $1 \le i \le n + 1$, de acordo com o enunciado, temos:

1) $2r_{n+1} = 2 \Leftrightarrow r_{n+1} = 1$

2) $g^2_{n+1} = h^2_{n+1} + r^2_{n+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = h^2_{n+1} + 1^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h_{n+1} = 2$

3) $V_{n+1} = \dfrac{\pi}{3} \cdot r^2_{n+1} \cdot h_{n+1} \Leftrightarrow V_{n+1} = \dfrac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_{n+1} = \dfrac{2\pi}{3}$

4) $\dfrac{V_{n+1}}{V_1} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{V_1} = 2 \Leftrightarrow V_1 = \dfrac{\pi}{3}$

Os volumes $V_1, V_2, V_3, ..., V_{n+1}$ formam uma progressão aritmética crescente, cuja soma é igual a 2π e cuja razão V_t corresponde ao volume do tronco de cone, em centímetros cúbicos, determinado por dois planos paralelos consecutivos.

Assim:

5) $\dfrac{(V_1 + V_{n+1}) \cdot (n + 1)}{2} = 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot (n + 1)}{2} = 2\pi \Leftrightarrow \pi\,(n + 1) = 4\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 3$

6) $V_{n+1} = V_1 + n \cdot V_t$

Logo: $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 3 \cdot V_t \Leftrightarrow 3\,V_t = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow V_t = \dfrac{\pi}{9}$

e

Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente,

$5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20$ e $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$.

Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

A ( ) A elipse de equação $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1$.

B ( ) A hipérbole de equação $\dfrac{(y+1)^2}{5} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$.

C ( ) O par de retas dadas por $y = \pm (3x - 1)$.

D ( ) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.

E ( ) A circunferência centrada em (9, 5) e raio $\sqrt{120}$.

Resolução

1) A hipérbole H, de equação

$$5 \cdot (x+3)^2 - 4 \cdot (y-2)^2 = -20 \Leftrightarrow \frac{(y-2)^2}{5} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1,$$

tem centro C (–3; 2) e focos na reta de equação $x = -3$. Sendo $f^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow f = 3$, resulta focos F_1 (–3; 5) e F_2 (–3; – 1).

2) A parábola T, de equação $(y - 3)^2 = 4 \cdot (x - 1)$, tem vértice V (1; 3).

3) O lugar geométrico descrito no enunciado é tal que $PF_1^2 + PF_2^2 = 3 \cdot PV^2$.

Portanto:

$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 + (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 3 \cdot [(x - 1)^2 + (y - 3)^2] \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 18x - 10y - 14 = 0$,

que é a equação de uma circunferência de centro C (9; 5) e raio $r = \sqrt{120}$.

d

Considere o paralelogramo ABCD onde A = (0, 0), B = (– 1, 2) e C = (– 3, – 4). Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

A ( ) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ e D = (– 2, – 5)

B ( ) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ e D = (– 1, – 5)

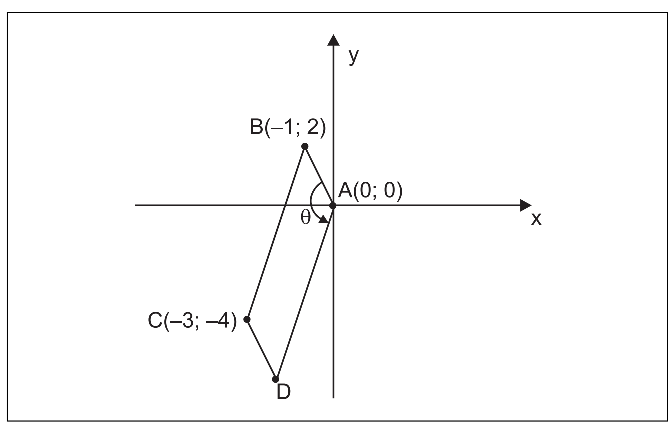
C ( ) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ e D = (– 2, – 6)

D ( ) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ e D = (– 2, – 6)

E ( ) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ e D = (– 2, – 5)

Resolução

Considerando-se o paralelogramo ABCD com vértices **consecutivos** A(0; 0), B(–1; 2) e C(–3; –4), temos:



1) $x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 0 + (-3) = (-1) + x_D \Rightarrow x_D = -2$

$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 0 + (-4) = 2 + y_D \Rightarrow y_D = -6$

Portanto, D(–2; –6).

2)
$$\left.\begin{array}{l} m_{\overline{AB}} = \dfrac{2-0}{-1-0} = -2 \\[2ex] m_{\overline{AD}} = \dfrac{-6-0}{-2-0} = 3 \\[2ex] \text{tg}\,\theta = \dfrac{m_{\overline{AD}} - m_{\overline{AB}}}{1 + m_{\overline{AD}} \cdot m_{\overline{AB}}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{3-(-2)}{1+3\cdot(-2)} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Como os ângulos internos distintos de um paralelogramo são suplementares, e um deles é $3\pi/4$, o outro deve ser obrigatoriamente $\pi/4$.

COMENTÁRIO

Com quatorze questões de Álgebra, cinco de Geometria, três de Trigonometria e três de Geometria Analítica, os examinadores propuseram uma prova de Matemática com alto grau de dificuldade, exigindo, acima de tudo, muita paciência e determinação por parte dos candidatos.

Conforme a tradição, neste vestibular as questões propostas foram em sua maioria difíceis, com enunciados longos e rebuscados, exigindo dos vestibulandos um profundo conhecimento teórico dos temas abordados.

É muito provável que mesmo os candidatos mais bem preparados não tenham tido tempo suficiente para resolver, com acerto, todas as vinte e cinco questões da prova e, certamente, deixaram o local do exame bastante extenuados.