Capítulo 12
Geometria métrica: poliedros

Para pensar

1. Tetraedro
2. 8 vértices, 12 arestas e 6 faces.

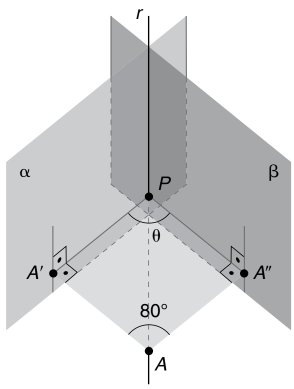
Exercícios propostos

1. **a)** A reta $\overleftrightarrow{AE}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{BF}$; logo, os ângulos formados pelas retas reversas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são aqueles formados por $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CG}$. Como a face $BCFG$ é um quadrado, temos que $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são perpendiculares; logo, um ângulo formado por $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ mede 90°.

b) A reta $\overleftrightarrow{HF}$ é a projeção ortogonal da reta $\overleftrightarrow{AF}$ sobre o plano pl(EGH); logo, um ângulo agudo formado por $\overleftrightarrow{AF}$ e pl(EGH) é $A\hat{E}H$, cuja medida indicamos por α.
No triângulo AFH, temos:
$\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

c) O plano pl(ADE) é perpendicular à reta comum $\overleftrightarrow{EF}$ aos planos pl(ABE) e pl(FGH); logo, as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são perpendiculares a $\overleftrightarrow{EF}$. Assim, um ângulo agudo formado por pl(ABE) e pl(FGH) é $A\hat{E}H$, cuja medida indicamos por β.
No triângulo AEH, temos:
$\text{tg}\ \beta = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \beta = 45°$

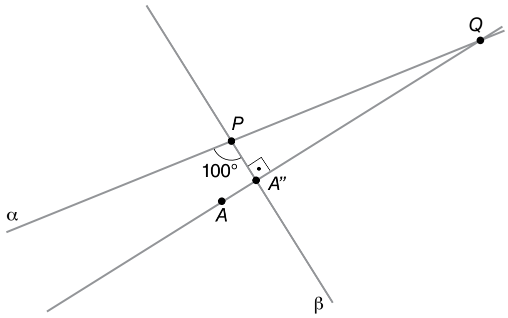
2. **a)** Sendo P o ponto comum à reta r e ao plano pl($AA'A''$), temos que os ângulos formados por α e β são os ângulos formados pelas retas $\overleftrightarrow{OA'}$ e $\overleftrightarrow{OA''}$.



Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero plano $PAA'A''$ é 360°, temos que a medida θ do ângulo $A'\hat{P}A''$ é dada por:
$\theta + 90° + 90° + 80° = 360° \Rightarrow \theta = 100°$
Logo, um ângulo obtuso formado por α e β mede 100°.

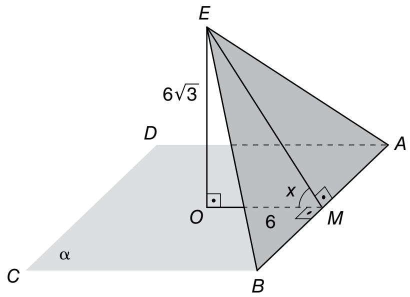
b) Um ângulo agudo γ formado por α e β é suplementar a um obtuso θ formado por eles. Assim:
$\gamma + \theta = 180° \Rightarrow \gamma + 100° = 180°$
$\therefore\ \gamma = 80°$
Logo, um ângulo agudo formado por α e β mede 80°.

c) Na figura, observamos uma secção contendo $\overleftrightarrow{AA''}$ e perpendicular à reta r em um ponto P, com $Q = \alpha \cap \overleftrightarrow{AA''}$:



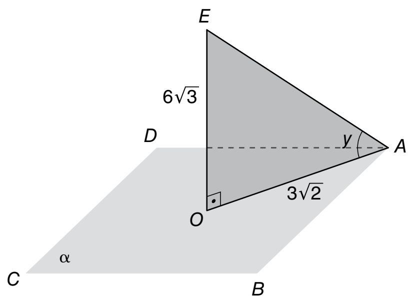
Como 100° é a medida do ângulo externo do triângulo PQA'', relativo ao vértice P, concluímos que $100° = 90° + m(PQA'') \Rightarrow m(PQA'') = 10°$. Logo, a medida de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{AA''}$ e pelo plano α é 10°.

3. **a)** Sendo M o ponto médio do lado $\overline{AB}$, temos que $E\hat{M}O$ é um ângulo agudo formado pelos planos α e pl(ABE). Assim, sendo x a medida do ângulo formado pelos planos α e pl(ABE), temos:



$\text{tg}\ x = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°$, pois é medida de um ângulo agudo.

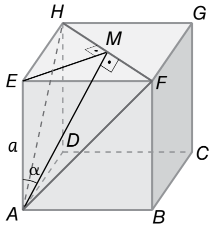
b) A medida de cada diagonal do quadrado $ABCD$ é $12\sqrt{2}$ cm e, portanto, $OA = 6\sqrt{2}$ cm. Assim, sendo y a medida de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{EA}$ e pelo plano α, temos:



$\text{tg}\ y = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
Como x e y são ângulos agudos, com $\text{tg}\ y < \text{tg}\ x$, pois $\frac{\sqrt{6}}{2} < \sqrt{3}$, concluímos que $y < x$.

4. Sendo M o ponto médio de $\overline{HF}$, temos que $\overline{EM} \perp \overline{HF}$ e $\overline{AM} \perp \overline{HF}$, pois os triângulos AFH e EFH são isósceles de base $\overline{HF}$. Assim, temos que o plano pl(AFH) é perpendicular ao plano pl(AEM); portanto, a reta $\overleftrightarrow{AM}$ é a projeção ortogonal de $\overleftrightarrow{AE}$ sobre o plano pl(AFH).

Deduzimos, então, que um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AE}$ forma com o plano pl(AFH) é $E\widehat{A}M$, cuja medida indicamos por α. Sendo a a medida da aresta do cubo, esquematizamos:



$EM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

No triângulo AEM, concluímos:

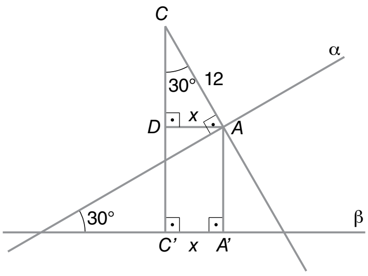
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ou seja, a tangente de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AE}$ forma com o plano pl(AFH) é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. I. Como $\overline{AB}$ é paralelo a β, temos que a projeção ortogonal $\overline{A'B'}$, de $\overline{AB}$ sobre β, é congruente a $\overline{AB}$; logo, $A'B' = AB = 16$ cm.

II. Como $C\widehat{A}B$ é reto, $\overline{AB}$ é paralelo a β e $\overline{AC}$ é não perpendicular a β, temos que a projeção ortogonal $C'\widehat{A}'B'$, de $C\widehat{A}B$ sobre β é, também, um ângulo reto.

III. O esquema abaixo representa um perfil da figura do enunciado, em que o segmento $\overline{A'C'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre β; $\overline{AD} \,//\, \overline{A'C'}$; e x é a medida, em centímetro, do segmento $\overline{A'C'}$.



No triângulo ACD, temos:

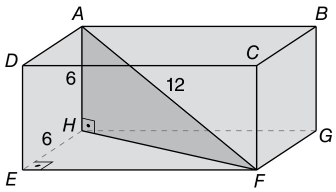
$$\text{sen}\ 30° = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{12}$$

$\therefore\ x = 6$

Por I, II e III, temos que a projeção ortogonal do triângulo ABC sobre o plano β é um triângulo $A'B'C'$, retângulo em A', com $A'B' = 16$ cm e $A'C' = 6$ cm. Assim, a área S do triângulo $A'B'C'$ é dada por:

$$S = \frac{16 \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 48\ \text{cm}^2$$

6.



$AF = 12$ cm

$AH = EH = 6$ cm

a) $(HF)^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow (HF)^2 = 108$

$\therefore\ HF = 6\sqrt{3}$

Logo, a distância entre os pontos H e F é $6\sqrt{3}$ cm.

b) $\begin{cases} (EF)^2 + (HE)^2 = (HF)^2 \\ HE = 6 \\ HF = 6\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (EF)^2 + 6^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2$

$\therefore\ EF = 6\sqrt{2}$

Logo, a distância entre os pontos E e F é $6\sqrt{2}$ cm.

c) A projeção ortogonal de A sobre pl(EFG) é o ponto H. Como $AH = 6$ cm, concluímos que a distância entre A e pl(EFG) é 6 cm.

d) A projeção ortogonal de B sobre pl(EFG) é o ponto G. Como $BG = AH = 6$ cm, concluímos que a distância entre B e pl(EFG) é 6 cm.

e) A projeção ortogonal de $\overline{AF}$ sobre pl(EFG) é o segmento $\overline{HF}$, cuja medida já foi calculada no item **a**: $HF = 6\sqrt{3}$ cm.

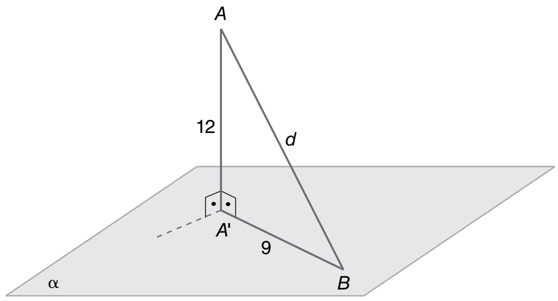
f) A projeção ortogonal de $\overline{AF}$ sobre pl(ABC) é o segmento $\overline{AC}$, cuja medida é a mesma do segmento $\overline{HF}$, ou seja, $AC = 6\sqrt{3}$ cm.

g) O segmento $\overline{HF}$ é perpendicular à retas $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CF}$; logo, a medida HF é a distância entre as retas $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CF}$. Pelo item **a**, temos $HF = 6\sqrt{3}$ cm.

h) Os planos paralelos pl(ABC) e pl(HGF) contêm, respectivamente, as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$; logo, a distância entre esses planos, que é 6 cm, é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$.

i) Os planos paralelos pl(ABC) e pl(HGF) contêm, respectivamente, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EG}$; logo, a distância entre esses planos, que é 6 cm, é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EG}$.

7. a) Indicando por d a distância, em decímetro, entre os pontos A e B, esquematizamos:

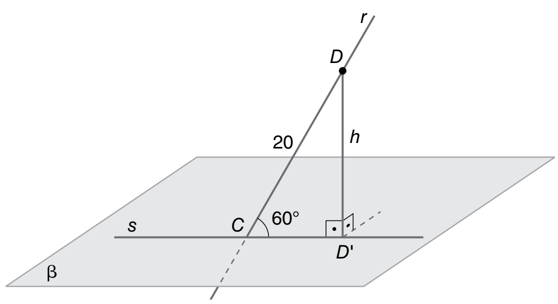


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $AA'B$, concluímos:

$d^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow d = 15$

Ou seja, a distância AB é 15 dm.

b) Sendo s a projeção ortogonal de r sobre β, a projeção ortogonal D', do ponto D sobre β, pertence a s. A medida DD' é a distância h, em centímetro, entre o ponto D e o plano β.



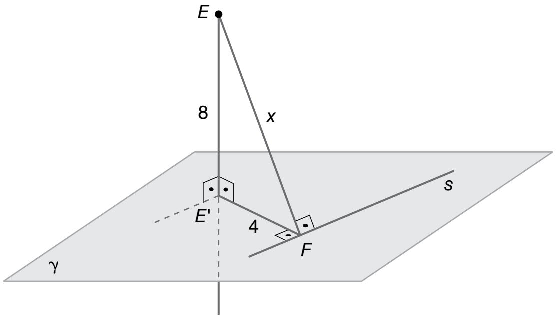
No triângulo CDD', temos:

$$\text{sen}\ 60° = \frac{h}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{20}$$

$\therefore\ h = 10\sqrt{3}$

Ou seja, a distância entre o ponto D e o plano β é $10\sqrt{3}$ cm.

c) Sendo F a projeção ortogonal de E' sobre s, temos, pelo teorema das três perpendiculares, que a reta $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular a s. Assim, o comprimento EF é a distância entre E e s. Indicando por x essa distância, em metro, temos:

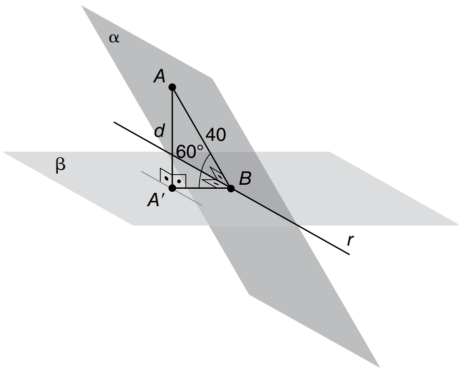


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo FEE', concluímos:

$$x^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{5}$$

Ou seja, a distância entre E e s é $4\sqrt{5}$ m.

8. Sendo A' a projeção ortogonal de A sobre β, temos que a distância d entre A e β é a medida do segmento $\overline{AA'}$:

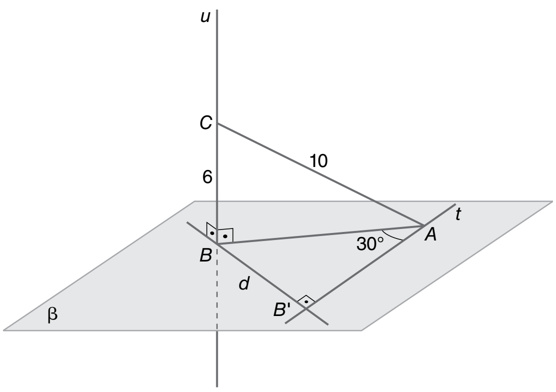


$$\text{sen } 60° = \frac{d}{40} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{40}$$

$\therefore\ d = 20\sqrt{3}$

Assim, concluímos que a distância entre A e β é $20\sqrt{3}$ cm.

9. A distância entre as retas t e u é a distância entre o ponto B e sua projeção ortogonal B' sobre t. Assim, indicando por d a distância entre t e u, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(AB)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow AB = 8$$

Do triângulo ABB', concluímos:

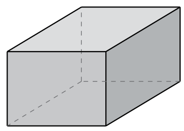
$$\text{sen } 30° = \frac{d}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{8}$$

$\therefore\ d = 4$

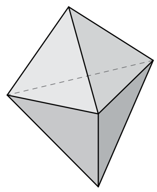
Ou seja, a distância entre as retas t e u é 4 cm.

10. Respostas possíveis:

a)

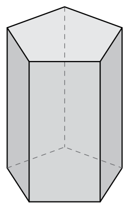


$V = 8$
$A = 12$
$F = 6$

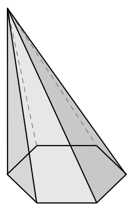


$V = 5$
$A = 9$
$F = 6$

b)



$V = 10$
$A = 15$
$F = 7$



$V = 7$
$A = 12$
$F = 7$

11. **a)** O número A de arestas é dado por:

$A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30$, ou seja, o poliedro é composto por 30 arestas.

b) O número A de arestas é dado por:

$A = \dfrac{10 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = 26$, ou seja, o poliedro é composto por 26 arestas.

c) Temos:

$$\frac{15 \cdot 4 + n \cdot 5}{2} = 35 \Rightarrow n = 2$$

12. **a)** O número A de arestas é dado por:

$A = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20$, ou seja, o poliedro é composto por 20 arestas.

b) O número A de arestas é dado por:

$A = \dfrac{12 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = 30$, ou seja, o poliedro é composto por 30 arestas.

c) Temos:

$$\frac{(n + 8) \cdot 3 + n \cdot 5}{2} = 20 \Rightarrow n = 2$$

Como o número de ângulos triédricos é dado por $n + 8$, ele é constituído por 10 ângulos triédricos.

13. $\begin{cases} A = 21 \\ F = 15 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 21 + 15 = 2$
$\therefore V = 8$
Logo, o poliedro possui 8 vértices.

14. $\begin{cases} V = 16 \\ A = 24 \\ F = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 16 - 24 + F = 2$
$\therefore F = 10$
Logo, o poliedro possui 10 faces.

15. $\begin{cases} V = 16 \\ F = 21 \\ A = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 16 - A + 21 = 2$
$\therefore A = 35$
Logo, o poliedro possui 35 arestas.

16. Para todo poliedro convexo vale a relação de Euler, ou seja, $V - A + F = 2$.
Como $20 - 18 + 12 \neq 2$, concluímos que não existe poliedro convexo com 20 vértices, 18 arestas e 12 faces.

17. $\begin{cases} F = 10 \\ V = 10 \\ A = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - A + 10 = 2$
$\therefore A = 18$
Logo, o decaedro possui 18 arestas.

18. $\begin{cases} F = 12 \\ A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 12 = 2$
$\therefore V = 20$
Logo, o poliedro possui 20 vértices.

19. a) O número A de arestas é dado por:
$A = \dfrac{8 \cdot 3 + 6 \cdot 8}{2} = 36$. Assim, pela relação de Euler, concluímos que o número V de vértices do tetradecaedro é dado por:
$$V - 36 + 14 = 2 \Rightarrow V = 24$$
b) O número de segmentos de reta com extremos em dois vértices distintos desse poliedro é dado por: $C_{24,\,2} = 276$. Subtraindo desse resultado o número de arestas e o número de diagonais das faces, obtém-se o número n de diagonais do poliedro, isto é:
$$n = 276 - 36 - 6 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2} = 120$$

20. $\begin{cases} V = 10 \\ A = \dfrac{10 \cdot 3}{2} = 15 \\ F = ? \end{cases}$

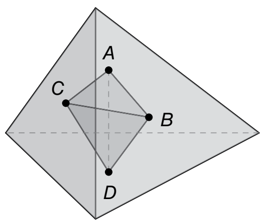
Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 15 + F = 2$
$\therefore F = 7$
Logo, o poliedro possui 7 faces.

21. $\begin{cases} V = 7 \\ A = \dfrac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} = 15 \\ F = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 7 - 15 + F = 2$
$\therefore F = 10$
Logo, o poliedro possui 10 faces.

22. a) Indicando por x e y os números de ângulos triédricos e tetraédricos do poliedro, respectivamente, temos:
$$\frac{x \cdot 3 + y \cdot 4}{2} = 30 \Rightarrow 3x + 4y = 60$$
$$y = \frac{60 - 3x}{4}$$
Como y deve ser o maior possível, devemos determinar o menor número inteiro positivo x para que $60 - 3x$ seja divisível por 4. Isso ocorre para $x = 4$, com o que concluímos que $y = 12$. Logo, a estrutura é composta por 4 ângulos triédricos e 12 ângulos tetraédricos.
b) Pela relação de Euler, temos que o número F de faces do poliedro é dado por:
$$16 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 16$$

23. a)



O poliedro determinado pelos centros das faces de um tetraedro regular é outro tetraedro regular.
b) O conjugado regular do tetraedro regular é um tetraedro regular, conforme mostra a figura do item **a**.
c) No dodecaedro regular, temos:
$\begin{cases} F = 12 \\ A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 12 = 2$
$\therefore V = 20$
Logo, o conjugado regular do dodecaedro regular é um poliedro com 20 faces e 12 vértices, ou seja, é um icosaedro regular.

d) No icosaedro regular, temos:

$$\begin{cases} F = 20 \\ A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30 \\ V = ? \end{cases}$$

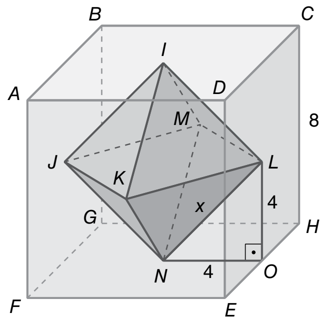
Pela relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 20 = 2$

$\therefore\ V = 12$

Logo, o conjugado regular do icosaedro regular é um poliedro com 12 faces e 20 vértices, ou seja, é um dodecaedro regular.

24. a) Ligando, por segmentos de reta, os pontos L e N ao ponto médio O da aresta $\overline{EH}$, temos que o triângulo LON é retângulo em O, com os catetos medindo 4 cm cada. Indicando por x a medida, em centímetro, da aresta do octaedro, esquematizamos:

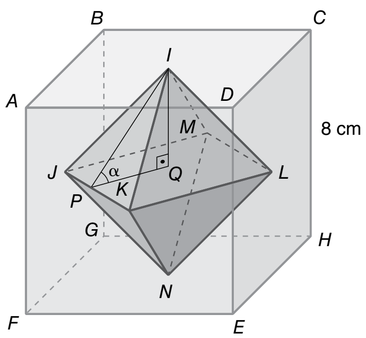


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo LON, concluímos:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

Ou seja, a aresta do octaedro mede $4\sqrt{2}$ cm.

b) Sendo P o ponto médio de $\overline{JK}$, e Q o centro do quadrado $LMJK$, temos que os segmentos $\overline{IP}$ e $\overline{QP}$ são perpendiculares a $\overline{JK}$, pois os triângulos IJK e QJK são isósceles de base $\overline{JK}$. Assim, um ângulo agudo formado pelos planos pl(IJK) e pl(JKM) é $I\hat{P}Q$, cuja medida indicamos por α.

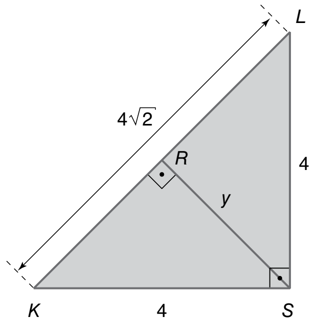


Observando que $IQ = 4$ cm (metade da aresta do cubo) e $QP = 2\sqrt{2}$ cm (metade do lado do quadrado $LMJK$), concluímos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

c) Sendo R e S os pontos médios dos segmentos $\overline{KL}$ e $\overline{DE}$, respectivamente, temos que $\overline{RS}$ é perpendicular a $\overline{KL}$ e a $\overline{DE}$, pois os triângulos RDE e SKL são isósceles de bases $\overline{DE}$ e $\overline{KL}$, respectivamente. Logo, a medida RS é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{KL}$. O segmento $\overline{RS}$ é a altura relativa à hipotenusa do triângulo SKL.

Indicando por y a medida, em centímetro, dessa altura, esquematizamos:



Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, concluímos:

$4\sqrt{2} \cdot y = 4 \cdot 4 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$

Ou seja, a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{KL}$ é $2\sqrt{2}$ cm.

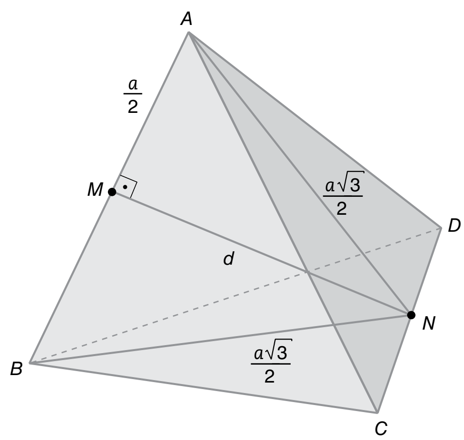
25. O número A de arestas desse poliedro é dado por: $A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30$. Assim, pela relação de Euler, obtemos o número F de faces:

$12 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 20$

Cada face é um triângulo equilátero com 6 dm de lado; logo, a área S da superfície do poliedro é dada por:

$S = 20 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2 = 180\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

26. Sejam M e N os pontos médios das arestas não adjacentes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do tetraedro, respectivamente. Os segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BN}$ são alturas dos triângulos equiláteros ACD e BCD, cujos lados têm medida a; logo, $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. O segmento $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, pois o triângulo ANB é isósceles de base $\overline{AB}$. Indicando por d a distância entre M e N, esquematizamos:



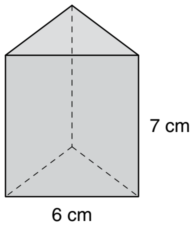
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMN, concluímos:

$$d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Alternativa **d**.

27. Sim, pois o segmento $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$, visto que o triângulo ANB é isósceles de base $\overline{AB}$, e o triângulo CMD é isósceles de base $\overline{CD}$.

28.



a) $A_f = (7 \cdot 6)\ \text{cm}^2 = 42\ \text{cm}^2$

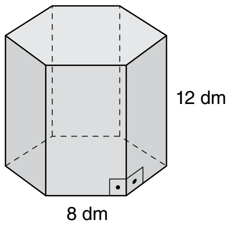
b) $B = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

c) $A_\ell = (3 \cdot 7 \cdot 6)\ \text{cm}^2 = 126\ \text{cm}^2$

d) $A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = \left(126 + 2 \cdot 9\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

$\therefore A_T = 18\left(7 + \sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

29.



a) $A_f = (8 \cdot 12)\ \text{dm}^2 = 96\ \text{dm}^2$

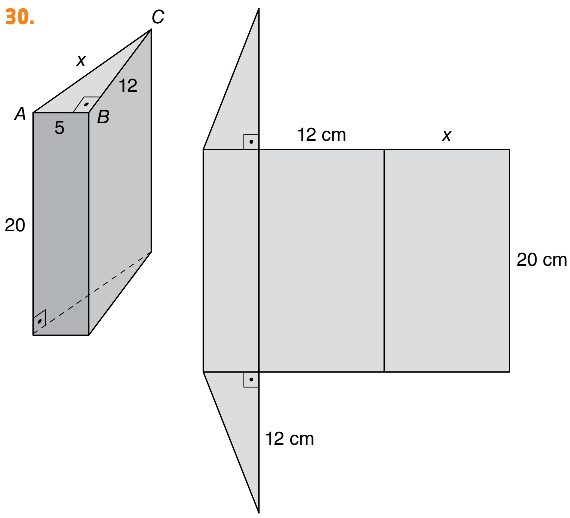
b) $B = 6 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2 = 96\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

c) $A_\ell = (6 \cdot 12 \cdot 8)\ \text{dm}^2 = 576\ \text{dm}^2$

d) $A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = \left(576 + 2 \cdot 96\sqrt{3}\right)\ \text{dm}^2$

$\therefore A_T = 192\left(3 + \sqrt{3}\right)\ \text{dm}^2$

30.



a) x é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 25 + 144$

$\therefore x = 13\ \text{cm}$

b) Cada base é um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm; logo, a área B de cada base é dada por:

$B = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12\ \text{cm}^2 = 30\ \text{cm}^2$

c) A superfície lateral é composta de 3 retângulos de dimensões 5 cm por 20 cm, 12 cm por 20 cm e 13 cm por 20 cm. Logo, a área lateral A_ℓ é dada por:

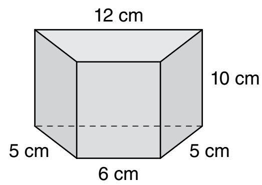
$A_\ell = (5 \cdot 20 + 12 \cdot 20 + 13 \cdot 20)\ \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 600\ \text{cm}^2$

d) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das bases:

$A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = (600 + 2 \cdot 30)\ \text{cm}^2 = 660\ \text{cm}^2$

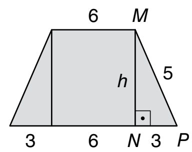
31.



a) $A_\ell = (12 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10)\ \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 280\ \text{cm}^2$

b) Seja h a altura do trapézio que é base do prisma:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MNP, temos:

$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

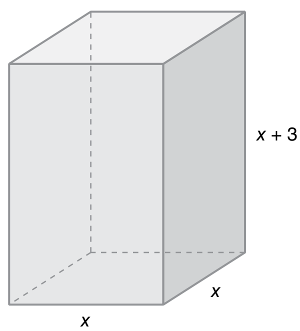
Assim, a área B de uma base é dada por:

$B = \dfrac{(6 + 12) \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$

Logo, a área total A_T do prisma é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = (280 + 2 \cdot 36)\ \text{cm}^2 = 352\ \text{cm}^2$

32. a) Indicando por x a medida, em centímetro, de cada aresta da base, esquematizamos:



Assim, temos:

$x(x + 3) = 18 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\therefore x = -6$ (não convém) ou $x = 3$

Logo, a medida de cada aresta da base é 3 cm.

b) A área de cada face lateral é 18 cm^2 e a área de cada base é 9 cm^2; logo, a área total A_T do prisma é dada por:

$$A_T = (4 \cdot 18 + 2 \cdot 9)\ \text{cm}^2 = 90\ \text{cm}^2$$

33. A área B de cada base desse prisma é dada por:

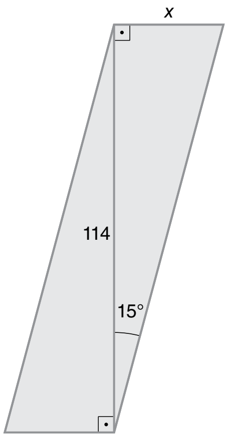
$B = 6 \cdot \dfrac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 255\ \text{cm}^2$

A área A_f de cada face lateral do prisma é dada por:

$A_f = (10 \cdot 30)\ \text{cm}^2 = 300\ \text{cm}^2$

Logo, a área total A_T do prisma é calculada por:
$A_T = 6A_f + 2B = (6 \cdot 300 + 2 \cdot 255)\ \text{cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_T = 2.310\ \text{cm}^2$
Como são necessários mais 20% de papelão para as abas, temos que a quantidade de papelão utilizada em cada embalagem é 1,2 · 2.310 cm^2, ou seja, 2.772 cm^2.
Concluímos, então, que para as 500 embalagens a quantidade necessária de papelão é 500 · 2.772 cm^2, ou seja, 1.386.000 cm^2, que equivale a 138,6 m^2.
Alternativa **a**.

34. Indicando por x a medida, em metro, do lado do quadrado da base da torre, esquematizamos:



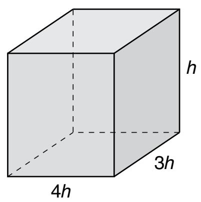
$\text{tg } 15° = \dfrac{x}{114} \Rightarrow 0{,}26 = \dfrac{x}{114}$
$\therefore x = 29{,}64$
Logo, a área A da base da torre é dada por:
$A = (29{,}64)^2\ \text{m}^2 = 878{,}5296\ \text{m}^2$

Alternativa **e**.
(*Nota:* Para encontrar a alternativa correta, bastaria ter calculado 29^2, com o que já constataríamos que a área da base é maior que 700 m^2.)

35. Indicando por C_1, C_2 e C_3 os comprimentos, em centímetro, das fitas das caixas 1, 2 e 3, respectivamente, temos:
$C_1 = (4 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3)\ \text{cm} = 62\ \text{cm}$
$C_2 = (2 \cdot 12 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3)\ \text{cm} = 46\ \text{cm}$
$C_3 = (2 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3)\ \text{cm} = 44\ \text{cm}$
Logo, ordenando crescentemente as caixas pela quantidade de fita gasta em cada uma delas obtém-se: caixa 3, caixa 2 e caixa 1.
Alternativa **e**.

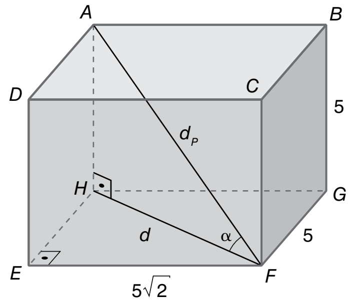
36. $D = \sqrt{6^2 + 4^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow D = \sqrt{36 + 16 + 12} = \sqrt{64}$
$\therefore D = 8$
Logo, a diagonal mede 8 dm.

37. Sendo h a altura do paralelepípedo e D a medida da diagonal, temos:



$D = 2\sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{(4h)^2 + (3h)^2 + h^2} = 2\sqrt{26}$
$\therefore \sqrt{16h^2 + 9h^2 + h^2} = 2\sqrt{26} \Rightarrow h\sqrt{26} = 2\sqrt{26}$
$\therefore h = 2\ \text{cm}$
Logo, as dimensões desse paralelepípedo são 2 cm, 6 cm, 8 cm.

38.



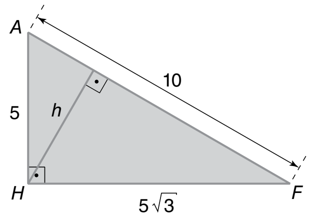
a) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo EFH, temos:
$d^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow d = 5\sqrt{3}$
Logo, uma diagonal da face $EFGH$ mede $5\sqrt{3}$ cm.

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AFH, temos:
$d_P^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow d_P = 10$
Logo, uma diagonal do paralelepípedo mede 10 cm.

c) A área total S_T do paralelepípedo é dada por:
$S_T = 2\left(5\sqrt{2} \cdot 5 + 5\sqrt{2} \cdot 5 + 5 \cdot 5\right)\ \text{cm}^2 =$
$= 50\left(2\sqrt{2} + 1\right)\ \text{cm}^2$

d) A reta $\overleftrightarrow{HF}$ é a projeção ortogonal da reta $\overleftrightarrow{AF}$ sobre o plano pl(EGH); logo, um ângulo agudo formado por $\overleftrightarrow{AF}$ e o plano pl(EGH) é $A\hat{F}H$, cuja medida indicamos por α na figura acima. Assim, temos:
$\text{tg } \alpha = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

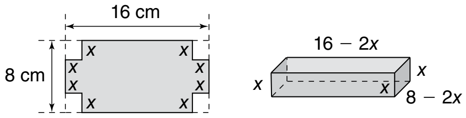
e) A distância entre o ponto H e a reta $\overleftrightarrow{AF}$ é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo AFH. Indicando por h a medida dessa altura, em centímetro, esquematizamos:



Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, concluímos:
$10 \cdot h = 5 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow h = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
Logo, a distância entre o ponto H e a reta $\overleftrightarrow{AF}$ é $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

39. Sendo a a medida, em centímetro, da aresta desse cubo, temos:
$12a = 60 \Rightarrow a = 5$
Assim, concluímos:
a) $D = a\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm
b) $A_T = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 25 = 150\ \text{cm}^2$
c) $A_\ell = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 25 = 100\ \text{cm}^2$

40. Sendo a a medida, em decímetro, da aresta do cubo, temos:
$6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4$
Assim, concluímos:
a) $D = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ dm
b) $A_\ell = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 4^2\ \text{dm}^2 = 64\ \text{dm}^2$

41. 

Sendo A_f a área da folha e A_i a área interna da caixa, temos:

$A_f = (16 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 128\ \text{cm}^2$

$A_i = (128 - 4x^2)\ \text{cm}^2$

Para que $A_i = \dfrac{A_f}{4}$, devemos ter:

$128 - 4x^2 = \dfrac{128}{4} \Rightarrow x^2 = 24$

$\therefore\ x = 2\sqrt{6}$

Logo, a medida do lado do quadrado é $2\sqrt{6}$ cm.

42. Indicando por a a medida da aresta do cubo, temos que a diagonal $\overline{EG}$ da face $EFGH$ mede $a\sqrt{2}$. Assim:

- A área total S_C do cubo é dada por: $S_C = 6a^2$;
- A área total S_P do prisma $ABDEFG$ é dada por: $S_p = 3a^2 + a^2\sqrt{2}$ ou, ainda, $S_P = a^2\left(3 + \sqrt{2}\right)$

Assim, a razão da área total do cubo para a área total do prisma é calculada por:

$$\frac{S_C}{S_P} = \frac{6a^2}{a^2\left(3 + \sqrt{2}\right)} \Rightarrow \frac{S_C}{S_P} = \frac{6}{3 + \sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \frac{S_C}{S_P} = \frac{6\left(3 - \sqrt{2}\right)}{7}$$

43. **a)** O volume interno V da caixa é dado por:

$$V = (2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8)\ \text{m}^3 = 2{,}4\ \text{m}^3$$

b) O volume interno da caixa, em decímetro cúbico, é 2.400 dm^3. Como cada decímetro cúbico equivale a 1 L, concluímos que a capacidade da caixa é 2.400 L.

c) Cada decalitro equivale a 10 L; logo, a capacidade da caixa, em decalitro, é 240 daL.

44. Indicando por x a medida, em centímetro, de cada aresta do cubo, temos:

$$x^3 = (3 \cdot 18 \cdot 4)\ \text{cm}^3 \Rightarrow x = 6\ \text{cm}$$

Alternativa **b**.

45. Sendo c, ℓ e h o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, temos:

$\dfrac{c}{5} = \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{h}{1} = k \Rightarrow c = 5k;\ \ell = 2k;\ h = k$

Sendo V o volume, temos:

$V = 80 \Rightarrow 5k \cdot 2k \cdot k = 80$

$\therefore\ k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Logo, $c = 10$ dm, $\ell = 4$ dm e $h = 2$ dm e, portanto, a área total A_T é dada por:

$A_T = 2(10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 2)\ \text{dm}^2 = 136\ \text{dm}^2$

46. **a)** O volume V de um cubo com 5 m de aresta é calculado por: $V = 5^3\ \text{cm}^3 = 125\ \text{cm}^3$

b) Indicando por x a medida, em decímetro, da aresta do cubo, temos que:

$$6x^2 = 54 \Rightarrow x = 3$$

Logo, o volume V do cubo é dado por:

$V = 3^3\ \text{dm}^3 = 27\ \text{dm}^3$

c) Indicando por x a medida, em centímetro, da aresta do cubo, temos que:

$x\sqrt{3} = 6 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

Logo, o volume V do cubo é dado por:

$V = \left(2\sqrt{3}\right)^3\ \text{cm}^3 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

d) Indicando por x a medida, em metro, da aresta do cubo, temos que:

$$x^3 = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

Logo, a área total A do cubo é dada por:

$A = 6 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2\ \text{m}^2 = 18\ \text{m}^2$

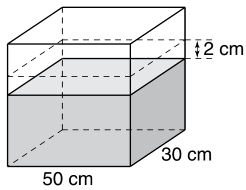
47. O volume interno ao tanque, acima da superfície da água, é $(5 \cdot 40 \cdot 30)\ \text{cm}^3$, ou seja, 6.000 cm^3, que é maior que o volume do objeto. Logo, ao mergulhar o objeto, a água não vai transbordar.

Indicando por x a medida, em centímetro, do deslocamento vertical do nível da superfície da água, temos:

$$40 \cdot 30 \cdot x = 2.400 \Rightarrow x = 2$$

Logo, ao mergulhar o objeto, o nível da superfície da água subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

Alternativa **c**.

48. 

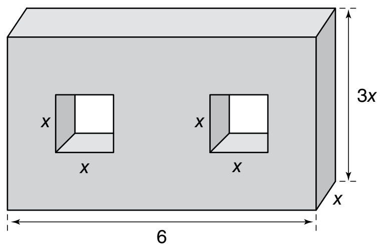
O volume de água retirada é igual ao volume V de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 50 cm por 30 cm por 2 cm:

$V = (50 \cdot 30 \cdot 2)\ \text{cm}^3 = 3.000\ \text{cm}^3 = 3\ \text{dm}^3$

Logo, V = 3L.

Alternativa **a**.

49. Sendo V_{ret} e V_{rest} os volumes retirado e restante, respectivamente, temos:



$V_{ret} = 2x^3$

$V_{rest} = 6 \cdot x \cdot 3x - 2x^3 = 18x^2 - 2x^3$

$V_{ret} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{rest} \Rightarrow 2x^3 = \dfrac{1}{3}(18x^2 - 2x^3)$

$\therefore\ 2x^3 = 6x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 \Rightarrow 2x^3 + \dfrac{2}{3}x^3 = 6x^2$

$\therefore\ \dfrac{8x^3}{3} = 6x^2$

Como $x \neq 0$, pois x é medida da aresta dos cubos, podemos dividir por x^2 ambos os membros dessa igualdade, obtendo $\dfrac{8x}{3} = 6 \Rightarrow x = 2{,}25$.

Logo, a aresta dos cubos mede 2,25.

50. Os volumes são iguais, pelo princípio de Cavalieri.

51. **a)** Sendo h a altura, em centímetro, do prisma, temos:

$\text{sen}\ 45° = \dfrac{h}{20} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h}{20}$

$\therefore\ h = 10\sqrt{2}$ cm

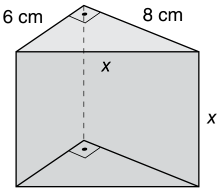
b) A área B da base é dada por:

$B = \dfrac{7 \cdot 10}{2}\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2$

Assim, o volume V é dado por:

$V = \left(35 \cdot 10\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^3 = 350\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

52. Seja x a medida, em centímetro, da aresta lateral:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 100$

$\therefore\ x = 10$ cm

A área B da base é dada por:

$B = \left(\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right)\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$

Portanto, o volume V do prisma é dado por:

$V = (24 \cdot 10)\ \text{cm}^3 = 240\ \text{cm}^3$

53. A área B da base do prisma é dada por:

$B = \dfrac{(18 + 32) \cdot 20}{2}\ \text{cm}^2 = 500\ \text{cm}^2$

Como o volume do prisma é o produto da área da base pela altura x, temos:

$500x = 3.000 \Rightarrow x = 6$

Logo, a altura x do prisma é 6 cm.

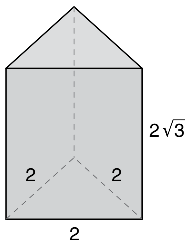
54. A área B da base do prisma é dada por:

$B = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$V = \left(9\sqrt{3} \cdot 9\right)\ \text{cm}^3 = 81\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

55. O prisma triangular é regular com altura $2\sqrt{3}$ e aresta da base 2:



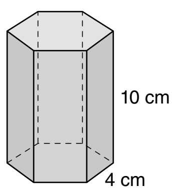
A área B da base é dada por:

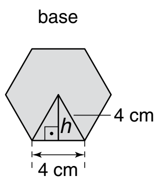
$B = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Logo, o volume V do prisma é dado por:

$V = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$

56. A figura é a planificação de um prisma hexagonal regular de aresta da base 4 cm e altura 10 cm.





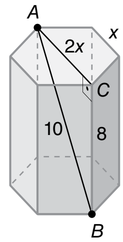
A área B da base é dada por:

$B = \left(6 \cdot \dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)\ \text{cm}^2 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$V = \left(24\sqrt{3} \cdot 10\right)\ \text{cm}^3 = 240\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

57. Indicando por $\overline{BC}$ a aresta lateral de extremo B, temos que a diagonal $\overline{AC}$ da base do prisma passa pelo centro da base; logo, a medida AC é o dobro da medida da aresta da base. Assim, indicando por x a medida, em decímetro, da aresta da base, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(2x)^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow x = 3$$

Logo, a área B da base desse prisma é dada por:

$B = \dfrac{3 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2$

Concluímos, então, que o volume V do prisma é dado por:

$V = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 8\ \text{dm}^3 = 108\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

58. Indicando por x a medida, em centímetro, de cada aresta desse prisma, temos que a área B da base é dada por $B = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Logo, o volume V desse prisma é calculado por: $V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \dfrac{x^3\sqrt{3}}{4}$

Assim, podemos determinar a medida x:

$\dfrac{x^3\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$

Concluímos, então, que a área total A_T do prisma é dada por:

$A_T = \left(2 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4^2\right)\ \text{dm}^2 = 8\left(\sqrt{3} + 6\right)\ \text{dm}^2$

59. Indicando por a a medida, em metro, de uma aresta da base desse prisma, temos que a área A_F de uma face lateral e a área B de uma base são dadas por:

$A_F = a \cdot 3\sqrt{3}$ e $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Assim:

$a \cdot 3\sqrt{3} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 2$

Concluímos, então, que o volume V desse prisma é calculado por:

$V = \dfrac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3}\ \text{m}^3 = 54\ \text{m}^3$

60. Do triângulo retângulo ADE, temos:

$$\begin{cases} \text{sen } 30^\circ = \dfrac{DE}{40} \\ \cos 30^\circ = \dfrac{AE}{40} \end{cases} \Rightarrow DE = 20 \text{ e } AE = 20\sqrt{3}$$

O volume V de terra a ser retirado é dado por:

$V = \dfrac{20 \cdot 20\sqrt{3}}{2} \cdot 20\ \text{m}^3 \Rightarrow V = 4.000\sqrt{3}\ \text{m}^3$

$\therefore\ V \approx 6.800\ \text{m}^3$

Alternativa **b**.

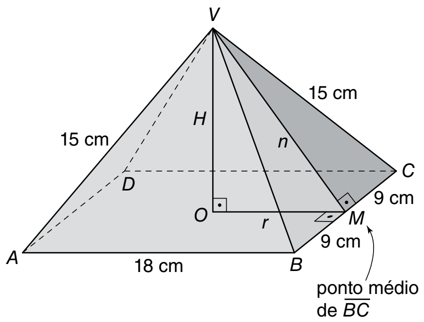
61. O volume despejado é o volume V de um prisma reto de altura 40 cm cuja base é um triângulo retângulo de catetos 8 cm e 40 cm:

$V = \left(\frac{8 \cdot 40}{2} \cdot 40\right) \text{cm}^3 = 6.400 \text{ cm}^3 = 6{,}4 \text{ dm}^3$

$\therefore$ V = 6,4 L

Logo, foram derramados 6,4 L de água.

62. a) Nomeamos os vértices da pirâmide, segundo o esquema a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMC, obtemos:

$15^2 = n^2 + 9^2 \Rightarrow n^2 = 144$

$\therefore n = 12$ cm

b) O apótema da base mede metade da aresta da base:

$r = 9$ cm

c) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$12^2 = H^2 + 9^2 \Rightarrow H^2 = 63$

$\therefore H = 3\sqrt{7}$ cm

d) A área A_f de cada face lateral é dada por:

$A_f = \frac{18 \cdot 12}{2} \text{ cm}^2 = 108 \text{ cm}^2$

Logo, a área lateral da pirâmide é dada por:

$A_\ell = 4A_f = (4 \cdot 108) \text{ cm}^2 = 432 \text{ cm}^2$

e) $B = 18^2 \text{ cm}^2 = 324 \text{ cm}^2$

f) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow$

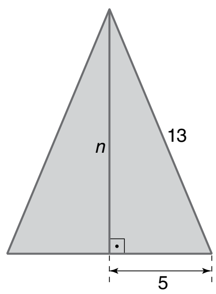
$\Rightarrow A_T = (432 + 324) \text{ cm}^2 = 756 \text{ cm}^2$

63. a) A medida a do lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita. Assim, temos:

$$a^2 + \left(\sqrt{69}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow a = 10$$

Concluímos, assim, que cada aresta da base dessa pirâmide mede 10 dm.

b) O apótema da pirâmide é mediana do triângulo isósceles de uma face lateral:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$n^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow n = 12$$

Concluímos, assim, que o apótema da pirâmide mede 12 dm.

c) A medida r do apótema da base é a altura de um triângulo equilátero com 10 dm de lado; logo:

$r = \frac{10\sqrt{3}}{2} \text{ dm} = 5\sqrt{3} \text{ dm}$

d) A área A_f de uma face lateral é calculada por:

$A_f = \frac{10 \cdot 12}{2} \text{ dm}^2 = 60 \text{ dm}^2$. Logo, a área lateral A_ℓ da pirâmide é calculada por:

$A_\ell = 6 \cdot 60 \text{ dm}^2 = 360 \text{ dm}^2$

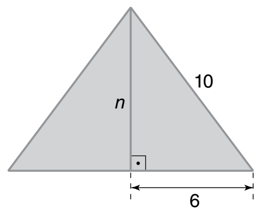
e) A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2 = 150\sqrt{3} \text{ dm}^2$

f) A área total A_T da pirâmide é dada por:

$A_T = \left(150\sqrt{3} + 360\right) \text{dm}^2 = 30\left(5\sqrt{3} + 12\right) \text{dm}^2$

64. a) O apótema da pirâmide é mediana do triângulo isósceles de uma face lateral:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$n^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow n = 8$$

Concluímos, assim, que o apótema da pirâmide mede 8 cm.

b) A medida r do apótema da base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero com 12 cm de lado; logo:

$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

c) $H^2 + r^2 = n^2 \Rightarrow H^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow H = 2\sqrt{13}$

Concluímos, assim, que a altura da pirâmide é $2\sqrt{13}$ cm.

d) A área A_f de uma face lateral é calculada por:

$A_f = \frac{12 \cdot 8}{2} \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$. Logo, a área lateral A_ℓ da pirâmide é calculada por:

$A_\ell = 3 \cdot 48 \text{ cm}^2 = 144 \text{ cm}^2$

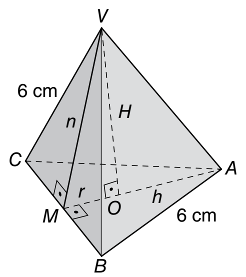
e) A área B da base da pirâmide é dada por:

$$B = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

f) A área total A_T da pirâmide é dada por:

$$A_T = \left(36\sqrt{3} + 144\right) \text{cm}^2 = 36\left(\sqrt{3} + 4\right) \text{cm}^2$$

65. Nomeamos os vértices do tetraedro segundo o esquema:



a) Num tetraedro regular, todas as faces são triângulos equiláteros; logo, o apótema desse tetraedro é a altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm:

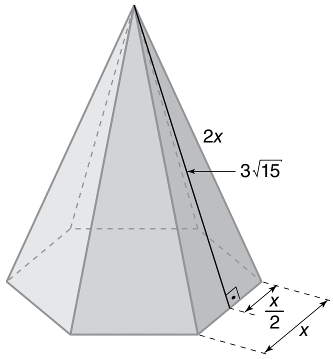
$n = \frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

b) A medida r do apótema da base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm:
$r = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}$ cm $= \sqrt{3}$ cm

c) Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtendo:
$27 = H^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow H^2 = 24$
$\therefore H = 2\sqrt{6}$ cm

d) $A_T = 4 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 36\sqrt{3}$ cm^2

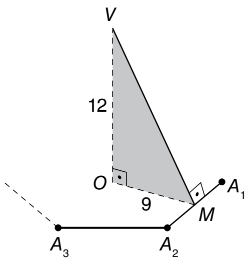
66. Indicando por x a medida, em decímetro, de cada aresta da base da pirâmide, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida x:
$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3\sqrt{15})^2 = (2x)^2 \Rightarrow x = 6$

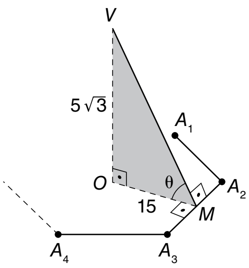
Logo, a área total A_T dessa pirâmide é dada por:
$A_T = \left(\frac{3 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{15}}{2}\right)$ dm^2 $\Rightarrow$
$\Rightarrow A_T = 54\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)$ dm^2

67. Sendo V o vértice da pirâmide, O o centro da base e M o ponto médio de uma aresta da base, temos:



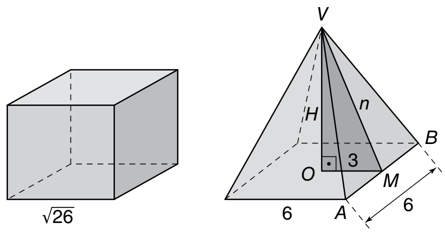
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:
$(VM)^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow (VM)^2 = 225$
$\therefore VM = 15$ cm
Logo, o apótema da pirâmide mede 15 cm.

68. Sendo V o vértice da pirâmide, O o centro da base, M o ponto médio de uma aresta da base e θ a medida do ângulo $V\widehat{M}O$, temos:



As retas $\overleftrightarrow{VM}$ e $\overleftrightarrow{OM}$ são perpendiculares à reta comum aos planos da base e de uma face lateral; logo, $V\widehat{M}O$ é o ângulo agudo formado pela base e por essa face lateral. Assim, temos:
$\text{tg}\ \theta = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.
Logo, cada face lateral dessa pirâmide forma um ângulo de 30° com a base.

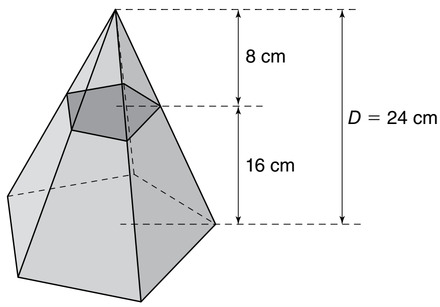
69. Sejam H e n a altura e o apótema da pirâmide, respectivamente, e A_{TC} e A_{TP} as áreas totais do cubo e da pirâmide, respectivamente:



(O é o centro da base e M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$)

Assim, temos:
$A_{TP} = A_{TC} \Rightarrow 4 \cdot \frac{6 \cdot n}{2} + 6^2 = 6 \cdot \left(\sqrt{26}\right)^2$
$\therefore n = 10$ m
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, concluímos:
$H^2 + 3^2 = 10^2 \Rightarrow H^2 = 91$
$\therefore H = \sqrt{91}$ m
Logo, a altura da pirâmide mede $\sqrt{91}$ m.

70.



Sendo b a área de secção, temos:
$\frac{b}{288} = \left(\frac{8}{24}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{288} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$\therefore b = 32$ cm^2
Logo, a área da secção é 32 cm^2.

71. a) Sendo h a distância do vértice P ao plano α, temos:
$\left(\frac{h}{30}\right)^2 = \frac{90}{250} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{h}{30} = \frac{3}{5}$
$\therefore h = 18$ cm

b) O volume V da pirâmide de vértice P e base S é dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot 90 \cdot 18$ cm^3 $= 540$ cm^3

72. A área B da base da pirâmide é dada por:
$B = 6 \cdot 4$ cm^2 $= 24$ cm^2
Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 10$ cm^3 $= 80$ cm^3

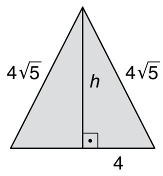
73. A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = \frac{10 \cdot 6}{2}$ cm^2 = 30 cm^2

Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 12$ cm^3 = 120 cm^3

74. Sendo h a altura do triângulo isósceles da base da pirâmide, temos:



$h^2 = (4\sqrt{5})^2 - 4^2 \Rightarrow h^2 = 64$
$\therefore\ h = 8$ dm

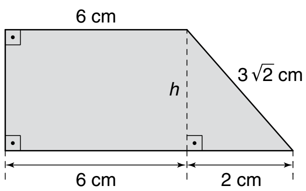
Assim, a área B desse triângulo é dada por:

$B = \frac{8 \cdot 8}{2}$ dm^2 = 32 dm^2

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 18$ dm^3 = 192 dm^3

75. Sendo h a altura do trapézio que é base da pirâmide, temos:



$h^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2^2 \Rightarrow h^2 = 14$
$\therefore\ h = \sqrt{14}$ cm
Assim, a área B desse trapézio é dada por:

$B = \frac{(6 + 8)\sqrt{14}}{2}$ cm^2 = $7\sqrt{14}$ cm^2

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 7\sqrt{14} \cdot 9$ cm^3 = $21\sqrt{14}$ cm^3

76. O volume V da pirâmide de água formada com o cubo inclinado é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 12$ cm^3 = 216 cm^3

Esse volume é o mesmo do paralelepípedo de água formado quando o cubo está com sua base *EFGH* na posição horizontal; logo:

$12 \cdot 9 \cdot x = 216 \Rightarrow x = 2$

Concluímos, então, que a medida pedida é 2 cm.

77. **a)** O sólido resultante tem:

- três faces quadradas de lado 2 cm;
- três faces com a forma de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm;
- uma face com a forma de um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{2}$ cm.

Logo, a área total A_T desse sólido é dada por:

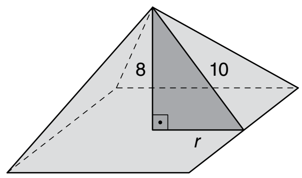
$A_T = \left(3 \cdot 2^2 + 3 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{(2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)$ cm^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 2(9 + \sqrt{3})$ cm^2

b) O volume V_C do cubo original e o volume V_P da pirâmide retirada são dados por:
$V_C = 2^3$ cm^3 = 8 cm^3 e
$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2$ cm^3 = $\frac{4}{3}$ cm^3
Logo, o volume V do sólido remanescente é dado por:
$V = \left(8 - \frac{4}{3}\right)$ cm^3 = $\frac{20}{3}$ cm^3

78. A área B da base da pirâmide é dada por:
$B = 3^2$ cm^2 = 9 cm^2
Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 8$ cm^3 = 24 cm^3

79. Sendo r a medida do apótema da base da pirâmide, temos:



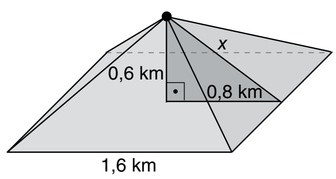
$r^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 36$
$\therefore\ r = 6$
Como o apótema de um quadrado mede a metade da medida de seu lado, temos que a base dessa pirâmide é um quadrado de lado 12 cm. Assim, a área B dessa base é dada por:
$B = 12^2$ cm^2 = 144 cm^2
Logo, o volume V da pirâmide é dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8$ cm^3 = 384 cm^3

80. **a)** O volume da parte emersa do *iceberg* é, aproximadamente, o volume V de uma pirâmide quadrangular regular de altura 0,6 km e aresta da base 1,6 km, isto é:

$V = \frac{1}{3} \cdot 1{,}6^2 \cdot 0{,}6$ km^3 $\Rightarrow V = 0{,}512$ km^3

Assim, sendo V_a o volume do *iceberg*, em quilômetro cúbico, temos:
$0{,}2\ V_a = 0{,}512 \Rightarrow V_a = 2{,}56$
Logo, o volume do *iceberg* é 2,56 km^3.

b) Indicando por x a medida, em quilômetro, do apótema da pirâmide descrita no item **a**, temos:



Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 - (0{,}6)^2 + (0{,}8)^2 \Rightarrow x = 1$

Assim, a área A_f de cada face lateral dessa pirâmide é dada por:

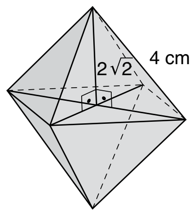
$A_f = \frac{1{,}6 \cdot 1}{2}$ km^2 = 0,8 km^2

Portanto, a área lateral A_ℓ da pirâmide é calculada por:

$A_\ell = 4 \cdot 0{,}8$ km^2 = 3,2 km^2

Logo, a área lateral da parte emersa do *iceberg* é aproximadamente 3,2 km^2.

81. O octaedro é formado por 2 pirâmides regulares de base quadrada e altura $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm



Assim, o volume V do octaedro é o dobro do volume dessa pirâmide, isto é:

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2}$ cm^3 $= \frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm^3

82. Sendo a a medida de uma aresta da base da pirâmide, a medida r do apótema dessa base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado a. Assim, temos:

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\therefore a = 12$ dm

A área B dessa base é então dada por:

$B = \frac{12^2\sqrt{3}}{4}$ dm^2 $= 36\sqrt{3}$ dm^2

Portanto, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 18$ dm^3 $= 216\sqrt{3}$ dm^3

83. Indicando por a a medida, em metro, de cada aresta da base dessa pirâmide, temos que:

$$6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

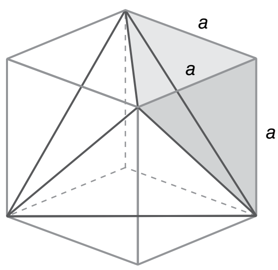
Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 6\right)$ cm^3 $= 48\sqrt{3}$ cm^3

Alternativa **d**.

84. Seja a a medida de cada aresta do cubo.

Qualquer vértice do cubo, que não pertença ao tetraedro, é vértice de uma pirâmide regular de aresta lateral a, cuja base é uma das faces do tetraedro. Há quatro pirâmides nessas condições, uma delas é mostrada na figura abaixo.



Assim, o volume V do tetraedro é a diferença entre o volume do cubo e a soma dos volumes dessas quatro pirâmides, isto é:

$V = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot a \Rightarrow V = \frac{a^3}{3}$

Ou seja, o volume do tetraedro é a terça parte do volume do cubo.

Alternativa **e**.

85. Sendo P a pirâmide original e P' a pirâmide de vértice L cuja base é a intersecção de α com P, temos que P e P' são semelhantes. Assim:

$\frac{8}{24} = \frac{CD}{9} \Rightarrow CD = 3$

Logo, o segmento $\overline{CD}$ mede 3 cm.

86. Sendo v o volume da pirâmide de vértice L e base S, temos:

$\frac{48}{v} = \left(\frac{10}{5}\right)^3 \Rightarrow \frac{48}{v} = 2^3$

$\therefore v = 6$ dm^3

87. Sendo d a distância entre L e α, temos:

$\frac{125}{25} = \left(\frac{20}{d}\right)^3 \Rightarrow 5 = \left(\frac{20}{d}\right)^3$

$\therefore \sqrt[3]{5} = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\sqrt[3]{5}}$

$\therefore d = 4\sqrt[3]{25}$ cm

Logo, a distância entre o vértice L e o plano α é $4\sqrt[3]{25}$ cm.

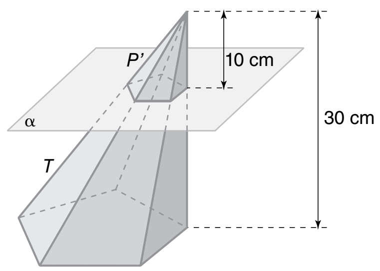
88. Sendo ℓ a medida do lado da secção quadrada determinada por α na pirâmide, temos:

$\frac{\ell}{24} = \frac{12}{36} \Rightarrow \ell = 8$

Assim, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 36 - \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 12\right)$ cm^3 $= 6.656$ cm^3

89.



A pirâmide P é semelhante à pirâmide P', sendo 3 a razão de semelhança. Assim, a razão entre o volume de P e o volume de P' é igual a 3^3.

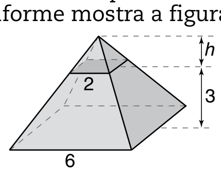
Indicando por V_P, $V_{P'}$ e V_T os volumes, em centímetro cúbico, de P, de P' e do tronco, respectivamente, concluímos:

$\frac{V_P}{V_{P'}} = 3^3 \Rightarrow \frac{20 + V_T}{20} = 27$

$\therefore V_T = 520$

Ou seja, o volume do tronco é 520 cm^3.

90. Prolongando as arestas laterais desse tronco de pirâmide, obtemos uma pirâmide de altura $3 + h$, em metro, conforme mostra a figura:



Assim, temos:

$\frac{h + 3}{h} = \frac{6}{2} \Rightarrow h = 1{,}5$

Logo, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 1{,}5\right)$ m^3 $= 52$ m^3

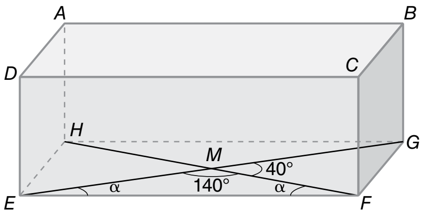
$\therefore V = 52.000$ dm^3 $\Rightarrow V = 52.000$ L

Alternativa **e**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. Se um ângulo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EG}$ mede 40°, então um ângulo formado pelas retas concorrentes $\overleftrightarrow{HF}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ mede 40°, pois $\overleftrightarrow{AC} \,//\, \overleftrightarrow{HF}$. Sendo M o ponto médio das diagonais $\overline{HF}$ e $\overline{EG}$ temos que um ângulo de medida 40° formado por elas é $F\widehat{M}G$, pois $AB > BC$; logo $m(E\widehat{M}F) = 140°$. Como as diagonais de um retângulo são congruentes, deduzimos que $MF = ME$; logo o triângulo MEF é isósceles de base $\overline{EF}$, com o que concluímos que os ângulos $M\widehat{E}F$ e $M\widehat{F}E$ têm a mesma medida α. Assim, esquematizamos:



O segmento $\overline{EF}$ é a projeção ortogonal de $\overline{HF}$ sobre o plano pl(EDC); logo, um ângulo que a reta $\overleftrightarrow{HF}$ forma com pl(EDC) mede α. Temos:

$\alpha + \alpha + 140° = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$

Então, concluímos que a medida pedida é 20°.

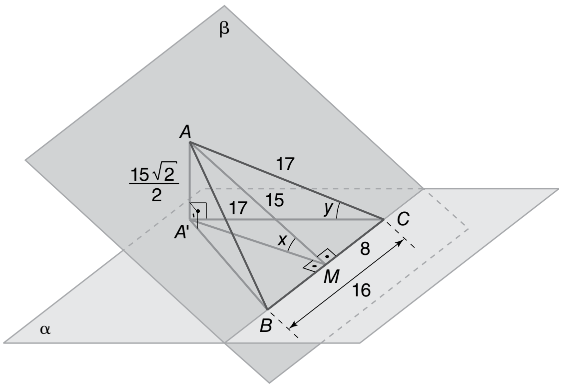
2. a) O segmento $\overline{A'C}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre α; logo, um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{AC}$ e pelo plano α é $A\widehat{C}A'$. Indicando por y a medida desse ângulo, temos:

$$\text{sen } y = \frac{\frac{15\sqrt{2}}{2}}{17} = \frac{15\sqrt{2}}{34}$$

b) Sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{AM}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, pois o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AM)^2 = 17^2 + 8^2 \Rightarrow AM = 15$

Pelo caso RHC, os triângulos $AA'B$ e $AA'C$ são congruentes; logo, $A'B = A'C$; portanto, o triângulo $A'BC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, com o que deduzimos que $\overline{A'M}$ é perpendicular a $\overline{BC}$. Como, também, $\overline{AM}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, temos que um ângulo agudo formado pelos planos α e β é $A\widehat{M}A'$.

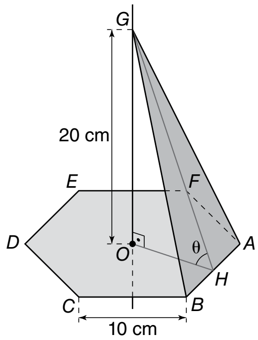


Assim:

$$\text{sen } x = \frac{\frac{15\sqrt{2}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45°$$

c) Como os ângulos agudos $A\widehat{C}A'$ e $A\widehat{M}A'$ de medidas y e x, respectivamente, são tais que sen y ≠ sen x, concluímos que um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{AC}$ e pelo plano α tem medida diferente de um ângulo agudo formado pelos planos α e β.

3. a) Seja θ a medida do ângulo formado pelos planos pl(GAB) e α:



No hexágono regular, $\overline{OH}$ é apótema do hexágono e, portanto: $OH = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

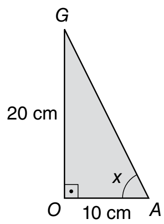
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo GOH, temos:

$(GH)^2 = 20^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow GH = 5\sqrt{19}$

Assim, concluímos:

$$\text{sen } \theta = \frac{GO}{GH} = \frac{20}{5\sqrt{19}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$$

b) Seja x a medida do ângulo formado pela reta $\overleftrightarrow{GA}$ e pelo plano α:



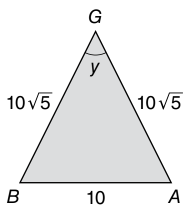
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OGA, temos:

$(GA)^2 = 20^2 + 10^2 \Rightarrow GA = 10\sqrt{5}$

Assim, concluímos:

$$\text{sen } x = \frac{GO}{AG} = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

c) Seja y a medida do ângulo $A\widehat{G}B$:



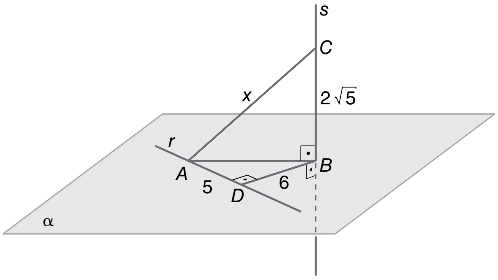
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AGB, temos:

$10^2 = \left(10\sqrt{5}\right)^2 + \left(10\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 10\sqrt{5} \cdot 10\sqrt{5} \cdot \cos y \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y = \frac{9}{10}$

Como cos y > 0 e y é um ângulo interno de um triângulo, concluímos que o ângulo $A\widehat{G}B$ é agudo.

4. Indicando por x a distância entre A e C, e por D a projeção ortogonal de B sobre r, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{cases} (AB)^2 = 6^2 + 5^2 & \text{(I)} \\ x^2 = (AB)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) chegamos a: $AB = \sqrt{61}$

Substituindo AB por $\sqrt{61}$ em (II), concluímos: $x = 9$

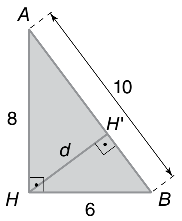
Alternativa **b**.

5. a) O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular à retas paralelas $\overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{BN}$; logo, a distância entre essas retas é a medida de $\overline{AB}$, ou seja, 5.

b) O segmento $\overline{AM}$ é perpendicular às retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$; logo, a distância entre essas retas é a medida de $\overline{AM}$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AM)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow AM = 10$$

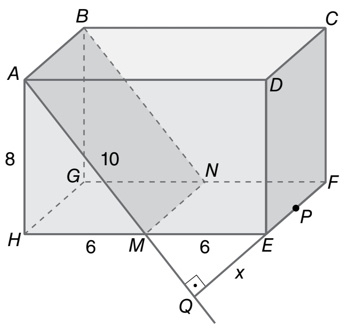
c) Os planos pl(AHM) e pl(ABN) são perpendiculares; logo, a projeção ortogonal H', de H sobre pl(ABN), pertence ao segmento $\overline{AM}$. Assim, a distância entre H e H' é a distância entre a reta $\overleftrightarrow{HG}$ e o plano pl(ABN). Indicando por d essa distância, esquematizamos:



Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, temos:

$$10 \cdot d = 6 \cdot 8 \Rightarrow d = 4{,}8$$

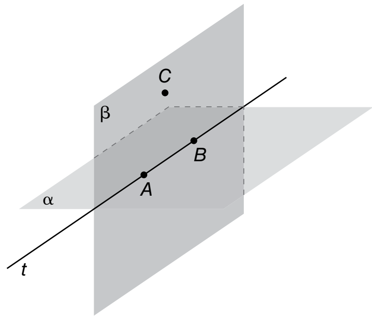
d) A distância entre o ponto P e o plano pl(ABN) é igual à distância entre o ponto E e a reta $\overleftrightarrow{AM}$. Indicando por x essa distância e por Q a projeção ortogonal de E sobre $\overleftrightarrow{AM}$, esquematizamos:



Pelo caso AA, constatamos a semelhança entre os triângulos HAM e QEM. Assim, concluímos:

$$\frac{x}{8} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = 4{,}8$$

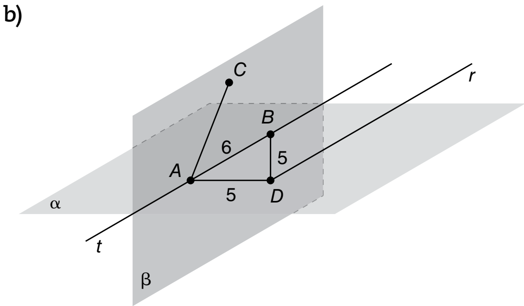
6. a)



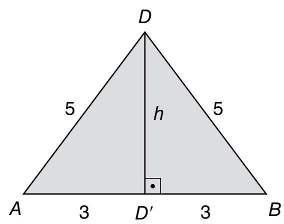
O triângulo ABC é equilátero; logo, a distância d entre C e α é a altura desse triângulo:

$$d = \frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

b)



As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e r são reversas. A distância entre elas é a distância h entre o ponto D e o plano β. Sendo D' a projeção ortogonal de D sobre β, temos que D' é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, pois o triângulo ADB é isósceles de base $\overline{AB}$:

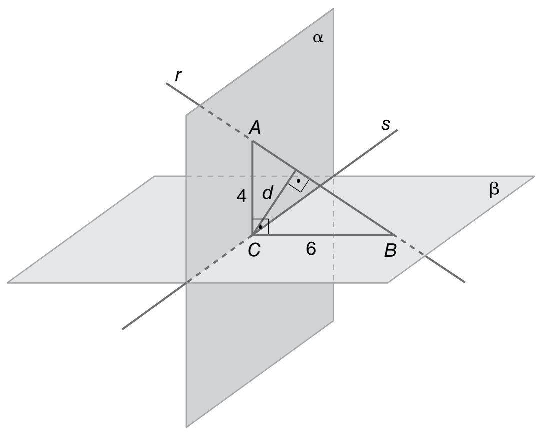


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BDD', concluímos:

$3^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

Logo, a distância entre $\overleftrightarrow{AC}$ e r é 4 cm.

7. Indicando por d a distância entre as retas r e s, e por C a projeção ortogonal dos pontos A e B sobre s, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo *ABC*, temos:

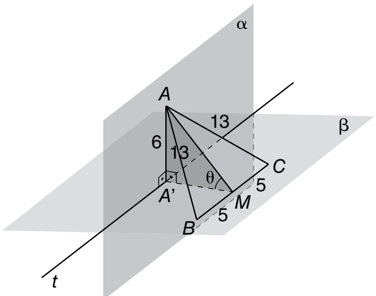
$$(AB)^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13}$$

Por outra relação métrica aplicada no triângulo retângulo *ABC*, concluímos:

$2\sqrt{13} \cdot d = 4 \cdot 6 \Rightarrow d = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

Ou seja, a distância entre as retas ortogonais *r* e *s* é $\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.

8. **a)** Sendo *A'* a projeção ortogonal de *A* sobre β, *M* o ponto médio de $\overline{AB}$, e θ a medida do ângulo $A\widehat{M}A'$, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMC*, temos:

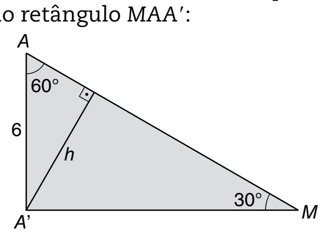
$(AM)^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AM = 12$

Assim, obtemos:

$\text{sen } \theta = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.

Logo, um ângulo agudo formado pelos planos pl(*ABC*) e β mede 30°.

b) A distância *d* entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AM}$ e *t* é a medida da altura, relativa à hipotenusa, do triângulo retângulo *MAA'*:

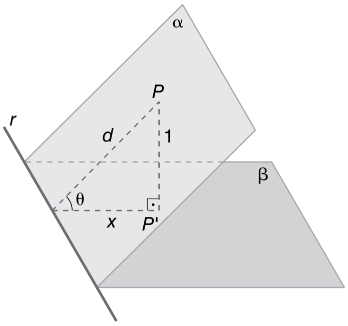


$\text{sen } 60° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{6}$

$\therefore h = 3\sqrt{3}$

Logo, a distância entre as retas reversas *t* e $\overleftrightarrow{AM}$ é $3\sqrt{3}$ cm.

9. Como a tg θ > 0, temos que θ é a medida de um ângulo agudo. Assim, sendo *r* a intersecção de α e β, *P'* a projeção ortogonal de *P* sobre β, *d* a distância entre *P'* e *r*, e x a distância entre *P'* e *r*, esquematizamos:



$\text{tg } \theta = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{x}$

$\therefore x = \sqrt{5}$

Assim, pelo teorema de Pitágoras, concluímos:

$1^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{6}$

Alternativa **c**.

10. $A = \dfrac{10 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 25$

Logo, o poliedro é constituído por 25 arestas.

11. $A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30$

Logo, o poliedro é constituído por 30 arestas.

12. $A = \dfrac{5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 5}{2} = 20$

Logo, o poliedro é constituído por 20 arestas.

13. $\begin{cases} F = 8 \\ A = 2V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = 8 \\ V = \dfrac{A}{2} \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow \dfrac{A}{2} - A + 8 = 2$

$\therefore A = 12$

Logo, o poliedro possui 12 arestas.

14. Indicando por A o número de arestas do poliedro, temos:

$A = \dfrac{12 \cdot 3}{2} = 18$

Assim, pela relação de Euler, concluímos que o número *V* de vértices é dado por:

$$V - 18 + 12 = 2 \Rightarrow V = 8$$

Alternativa **e**.

15. Indicando por *A* o número de arestas do poliedro, temos:

$A = \dfrac{20 \cdot 3 + 12 \cdot 5}{2} = 60$

Assim, pela relação de Euler, concluímos que o número *V* de vértices é dado por:

$$V - 60 + 32 = 2 \Rightarrow V = 30$$

16. Indicando por A o número de arestas e por *V* o número de vértices do poliedro, temos:

$\dfrac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + (V - 6) \cdot 3}{2} = A \Rightarrow V = \dfrac{2A - 8}{3}$

Assim, pela relação de Euler, concluímos:

$\dfrac{2A - 8}{3} - A + 15 = 2 \Rightarrow A = 31$

Alternativa **c**.

17. $\begin{cases} V = F & \text{(I)} \\ V - A + F = 2 & \text{(II)} \end{cases}$

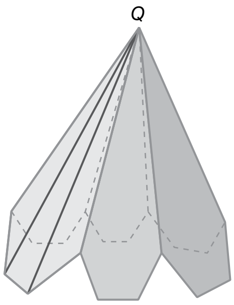
Substituindo (I) em (II), obtemos:

$V - A + V = 2 \Rightarrow A = 2(V - 1)$

Como $(V - 1)$ é um número natural, pois $V \in \mathbb{N}$ e $V \geqslant 4$, concluímos que $2(V - 1)$ é um número natural par. Logo, o poliedro possui um número par de arestas.

18. **a)** Em todo ângulo poliédrico o número de arestas é igual ao número de faces. Como o ângulo pentaédrico tem 5 arestas, concluímos que exatamente 5 faces do poliedro têm o ponto *P* em comum.

b) Consideremos apenas as faces que têm o vértice Q em comum. Nessas faces, além das 6 arestas que concorrem em Q, há dois segmentos de reta em cada face que satisfazem a condição exigida, como mostra a figura abaixo. Assim, o número de segmentos de reta que satisfazem a condição é $6 + 6 \cdot 2$, ou seja, 18.



c) Consideremos apenas as faces que têm o vértice T em comum. Nessas faces, além das n arestas que concorrem em T, há $(k - 3)$ arestas em cada face que satisfazem a condição exigida. Assim, o número de segmentos de retas que satisfazem a condição é $n + n(k - 3)$.

19. Indicando por A o número de arestas, temos pelo enunciado e pela relação de Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{p \cdot 3 + q \cdot 4}{2} = A \\ \dfrac{6(q+1) + 2 \cdot \dfrac{p}{2}}{2} = A \\ 8 - A + p + q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p + 4q = 2A \\ p + 6q = 2A - 6 \\ p + q = A - 6 \end{cases}$$

$\therefore\ p = 6, q = 3$ e $A = 15$

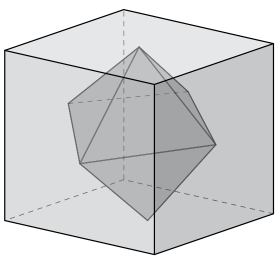
Logo, o poliedro possui 6 faces triangulares e 3 quadrangulares.

20. Sim, existem poliedros de Platão não regulares. Por exemplo, todo paralelepípedo reto-retângulo, regular ou não, é um poliedro de Platão, pois as três condições acima são obedecidas. Observe:

- cada uma das faces do paralelepípedo tem 4 arestas;
- cada um dos ângulos poliédricos tem 3 arestas;
- vale a relação de Euler, pois o paralelepípedo reto-retângulo é um poliedro convexo.

21. Dois poliedros de Platão são conjugados quando o número de vértices de qualquer um deles é igual ao número de faces do outro. Assim, o conjugado do cubo deve ter 6 vértices (pois o cubo tem 6 faces) e 8 faces (pois o cubo tem 8 vértices).

Uma maneira de determinar o conjugado do cubo é desenhar o poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo:



Assim, o conjugado do cubo é o octaedro.

Alternativa **a**.

22. Construção dos poliedros regulares em cartolina (trabalho manual).

23. **a)** Cada corte acrescenta uma nova face; logo, o número de faces do poliedro resultante é igual ao total de faces iniciais mais as quatro faces acrescidas, ou seja, $4 + 4 = 8$.

Cada corte elimina um vértice, mas acrescenta três; portanto, ao total de vértices originais, 4, são acrescidos $4 \cdot 2$ vértices. Assim, o poliedro resultante tem 12 vértices.

Cada corte acrescenta três arestas; portanto, ao total de arestas originais, 6, são acrescidas $4 \cdot 3$ arestas. Assim, o poliedro resultante tem 18 arestas.

b) A área total A da superfície do poliedro é a soma das áreas de quatro hexágonos regulares de lado a com as áreas de quatro triângulos equiláteros de lado a. Isso equivale à soma das áreas de 28 triângulos equiláteros de lado a, ou seja:

$S = 28 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3} \cdot a^2$

24. **a)** $A_\ell = (6 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 13 \cdot 20)\ \text{cm}^2 =$
$= 680\ \text{cm}^2$

b) A área B de cada base do prisma é dada por:

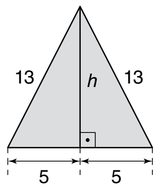
$B = \dfrac{(5 + 13) \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 54\ \text{cm}^2$

Assim, a área total A_T é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = (680 + 2 \cdot 54)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_T = 788\ \text{cm}^2$

25. **a)** $A_\ell = (13 \cdot 8 + 13 \cdot 8 + 10 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 288\ \text{cm}^2$

b) A figura a seguir é uma base desse prisma, em que h é a medida da altura relativa ao lado de 10 cm:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144$

$\therefore\ h = 12$ cm

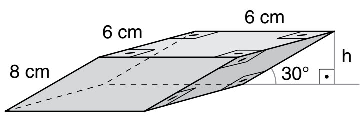
Assim, a área da base do prisma é dada por:

$B = \dfrac{10 \cdot 12}{2}\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$

Concluímos, então, que a área total A_T do prisma é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = (288 + 2 \cdot 60)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_T = 408\ \text{cm}^2$

26. **a)** Sendo h a altura do prisma, temos:



$\text{sen}\ 30° = \dfrac{h}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{8}$

$\therefore\ h = 4$ cm

b) $A_\ell = (2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 144\ \text{cm}^2$

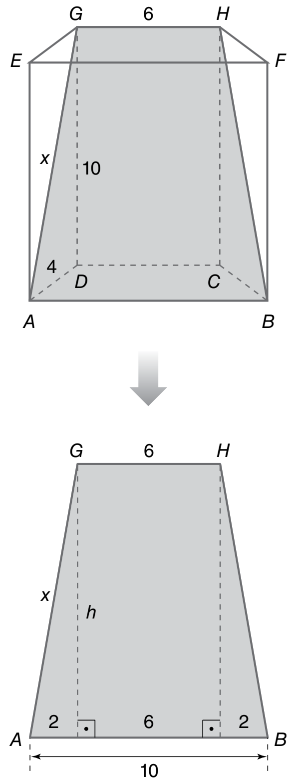
c) A área B de cada base do prisma é dada por:

$B = 6^2\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$

Assim, a área total A_T desse prisma é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = (144 + 2 \cdot 36)\ \text{cm}^2 = 216\ \text{cm}^2$

27. A secção determinada no prisma pelo plano AGH é o trapézio isósceles $ABHG$. Indicando por x a medida AG e por h a altura desse trapézio, temos:



$$\begin{cases} x^2 = 4^2 + 10^2 \\ 2^2 + h^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ e}$$

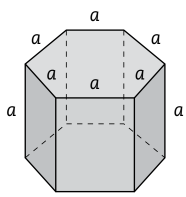
$$h = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Logo, a área S do trapézio $ABHG$ é dada por:

$$S = \frac{(10 + 6) \cdot 4\sqrt{7}}{2} \Rightarrow S = 32\sqrt{7}$$

Alternativa **d**.

28. Sendo a a medida de cada aresta do prisma, temos:



$A_\ell = 6a^2$

$$A_T = A_\ell + 2B = 6a^2 + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

Logo:

$$\frac{A_T}{A_\ell} = \frac{3a^2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{6a^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

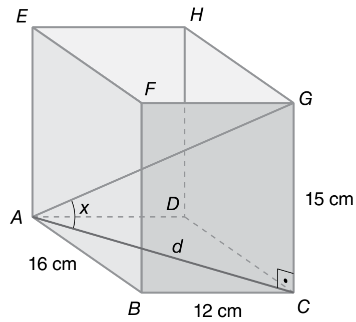
29. A distância máxima entre dois vértices do paralelepípedo reto-retângulo é a medida D de uma diagonal, ou seja:

$D = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169}$

$\therefore D = 13$

Logo, a distância máxima entre dois vértices desse paralelepípedo é 13 cm.

30. O segmento $\overline{AC}$ é a projeção ortogonal da diagonal $\overline{AG}$ sobre o plano da base $ABCD$. Logo, o ângulo agudo formado por essa diagonal e por esse plano é $G\widehat{A}C$. Indicando por d a medida AC e por x a medida do ângulo $G\widehat{A}C$, esquematizamos:



Dos triângulos retângulos ABC e ACG, temos:

$$\begin{cases} d^2 = 12^2 + 16^2 & \text{(I)} \\ \text{tg } x = \dfrac{15}{d} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), chegamos a $d = 20$.

Substituindo d por 20 em (II), chegamos a

$\text{tg } x = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos que $x \approx 36{,}87°$.

31. Sendo a a medida da aresta do cubo de diagonal $D = \sqrt{75}$ cm, temos:

$D = \sqrt{75} \Rightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{75}$

$\therefore a = \dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{25}$

$\therefore a = 5$ cm

Assim, concluímos:

a) $A_T = 6 \cdot 5^2 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

b) $A_\ell = 4 \cdot 5^2 \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$

32. Indicando por a a medida, em metro, da aresta do cubo, temos:

$$6a^2 = 216 \Rightarrow a = 6$$

Logo, a medida D da diagonal do cubo é dada por:

$D = 6\sqrt{3}$ m

Alternativa **b**.

33. Sendo c, l e h as dimensões do paralelepípedo, temos:

$$\frac{c}{2} = \frac{l}{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\frac{3}{2}} = k \Rightarrow c = 2k;\ l = \frac{k}{3};\ h = \frac{3k}{2}$$

Assim:

$$A_T = 300 \Rightarrow 2\left(\frac{2k^2}{3} + 3k^2 + \frac{k^2}{2}\right) = 300$$

$$\therefore \frac{4k^2 + 18k^2 + 3k^2}{6} = 150 \Rightarrow k^2 = 36$$

$\therefore k = 6$

Logo, as dimensões do paralelepípedo são 12 cm, 2 cm e 9 cm e, portanto, o volume V desse poliedro é dado por:

$V = 12 \cdot 2 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 216 \text{ cm}^3$

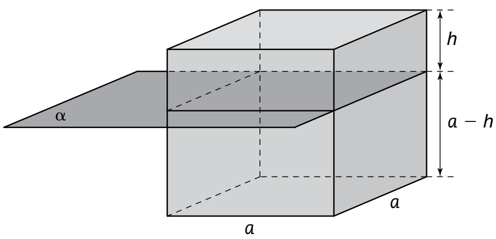
34. Sendo a a medida da aresta do cubo de volume $V = 1.000 \text{ cm}^3$, temos:
$V = 1.000 \Rightarrow a^3 = 1.000$
$\therefore a = 10 \text{ cm}$
Assim, concluímos:
a) $D = 10\sqrt{3} \text{ cm}$
b) $A_T = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$
c) $A_\ell = 4 \cdot 10^2 = 400 \text{ cm}^2$

35. Sendo a a medida da aresta do cubo, temos que:
$(a - 1)^3 = a^3 - 61 \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a^3 - 61$
$\therefore 3a^2 - 3a - 60 = 0 \Rightarrow a = -4$ (não convém) ou $a = 5$
Logo, a área total A_T desse cubo, em unidades de área, é dada por:
$$A_T = 6 \cdot 5^2 = 150$$
Alternativa **c**.

36. Sendo x a medida, em metro, da aresta do cubo, temos que $DC = x$ e $BC = x\sqrt{2}$. Assim, temos:
$x \cdot x\sqrt{2} = \sqrt{6} \Rightarrow x = \sqrt[4]{3}$
Logo, o volume V do cubo é calculado por:
$V = \left(\sqrt[4]{3}\right)^3 \text{ m}^3 \Rightarrow V = \sqrt[4]{27} \text{ m}^3$
Alternativa **d**.

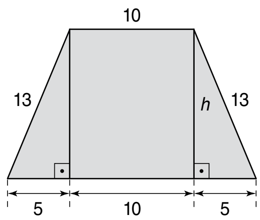
37. Sendo a, b e c as medidas, em centímetro, do comprimento, da largura e da altura do paralelepípedo, respectivamente, com $ab = 48$ e $bc = 30$, temos:
$$\begin{cases} ab = 48 & \text{(I)} \\ bc = 30 & \text{(II)} \\ abc = 240 & \text{(III)} \end{cases}$$
Substituindo (I) em (III), chegamos a: $48 \cdot c = 240$; logo, $c = 5$ cm.
Substituindo (II) em (III), chegamos a: $a \cdot 30 = 240$; logo, $a = 8$ cm.
Substituindo c por 5, em (II), chegamos a: $b \cdot 5 = 30$; logo, $b = 6$ cm.
Concluímos, então, que a área total A_T do paralelepípedo é dada por:
$A_T = 2(5 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 6) \text{ cm}^2 = 236 \text{ cm}^2$
Alternativa **c**.

38. Sendo a a medida de cada aresta do cubo e sendo h a distância entre α e uma face paralela do cubo, esquematizamos:



Supondo que o paralelepípedo maior seja o de altura $a - h$, temos:
$a \cdot a \cdot (a - h) = 2 \cdot a \cdot a \cdot h \Rightarrow a - h = 2h$
$\therefore h = \dfrac{a}{3}$
As áreas totais A_t e A_T dos paralelepípedos menor e maior, respectivamente, são dadas por:
$$A_t = 2\left(a \cdot a + a \cdot \frac{a}{3} + a \cdot \frac{a}{3}\right) = \frac{10a^2}{3}$$
e
$$A_T = 2\left(a \cdot a + a \cdot \frac{2a}{3} + a \cdot \frac{2a}{3}\right) = \frac{14a^2}{3}$$
Logo:
$$\frac{A_t}{A_T} = \frac{\frac{10a^2}{3}}{\frac{14a^2}{3}} = \frac{5}{7}$$

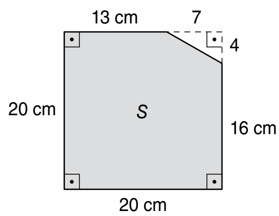
39. Sendo h a altura do trapézio de uma base do prisma, temos:



$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144$
$\therefore h = 12 \text{ cm}$

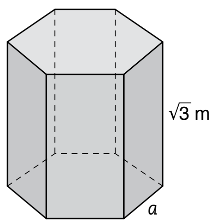
A área B desse trapézio é dada por:
$$B = \frac{(10 + 20) \cdot 12}{2} \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$$
Logo, o volume V do prisma é dado por:
$V = 180 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 2.700 \text{ cm}^3$

40. A área B do pentágono é a diferença entre a área de um quadrado de lado 20 cm e a de um triângulo retângulo de catetos 7 cm e 4 cm:



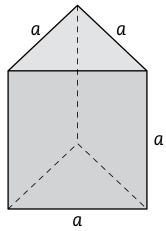
$$B = \left(20^2 - \frac{7 \cdot 4}{2}\right) \text{ cm}^2 = 386 \text{ cm}^2$$
Logo, o volume V do prisma é dado por:
$V = 386 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 3.860 \text{ cm}^3$

41. Sendo a a medida de uma aresta da base, temos:



A área lateral A_ℓ e a área B da base do prisma são dadas por:
$A_\ell = 6a\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Assim:
$A_\ell = B \Rightarrow 6a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
$\therefore a = 4 \text{ m}$
Logo, $B = \dfrac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 = 24\sqrt{3} \text{ m}^2$ e, portanto, o volume V do prisma é dado por:
$V = 24\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3 = 72 \text{ m}^3$

42. Sendo a a medida de cada aresta e V o volume do prisma, temos:



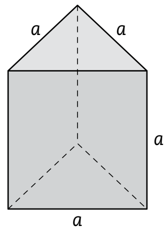
$V = 54\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = 54\sqrt{3}$

$\therefore a = 6$ cm

Logo, a área lateral A_ℓ desse prisma é dada por:

$A_\ell = 3 \cdot 6^2 \text{ cm}^2 = 108 \text{ cm}^2$

43. Sendo a a medida de cada aresta e A_T a área total do prisma, esquematizamos:



$A_T = 8(6 + \sqrt{3}) \Rightarrow 3a^2 + \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = 8(6 + \sqrt{3})$

$\therefore a^2 \cdot \sqrt{3} + 6a^2 = 16(6 + \sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2(6 + \sqrt{3}) = 16(6 + \sqrt{3})$

$\therefore a = 4$ m

Logo, o volume V do prisma é dado por:

$V = 4\sqrt{3} \cdot 4 \text{ m}^3 = 16\sqrt{3} \text{ m}^3$

44. Observando o paralelepípedo, constatamos que a altura do trapézio de cada base do prisma é 6 cm e que altura do prisma é 5 cm. Assim, o volume V desse prisma é dado por:

$V = \frac{(3 + 2) \cdot 6}{2} \cdot 5 \text{ cm}^3 = 75 \text{ cm}^3$

Alternativa **e**.

45. Temos:

$\text{sen } 30° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{6}$

$\therefore h = 3$

Logo, o volume V do prisma é calculado por:

$$V = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$$

46. Sendo B e h a área da base e a altura de um prisma, temos que o volume V desse prisma é dado por: $V = Bh$.

Diminuindo-se em 10% a área da base e aumentando-se em 20% a altura do prisma, obtém-se um novo volume V′ dado por: $V' = 0{,}9B \cdot 1{,}2h = 1{,}08Bh$.

Logo, o volume V′ é 8% maior que V.

Alternativa **d**.

47. Vamos indicar, respectivamente, por P_{Hex} e P_{Tri} os prismas hexagonal e triangular citados no enunciado. Existem seis planos distintos tal que cada um contém uma diagonal da base superior e uma diagonal da base inferior de P_{Hex}. Esses planos dividem P_{Hex} em 6 prismas congruentes a P_{Tri}. Logo, a razão entre o volume de P_{Tri} e o volume de P_{Hex} é $\frac{1}{6}$.

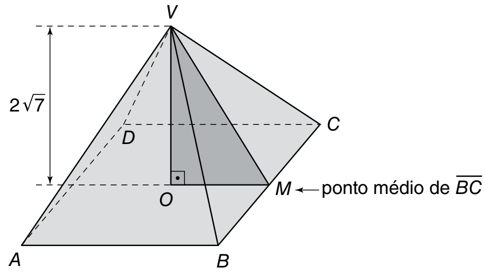
Alternativa **d**.

48. As faces triangulares são, necessariamente, faces laterais, pois se a base fosse triangular, a pirâmide teria apenas 4 faces triangulares.

O número de faces laterais é igual ao número de arestas laterais da pirâmide, que é igual ao número de lados e de vértices da base. Assim, concluímos que a pirâmide tem 12 vértices e 22 arestas.

Alternativa **e**.

49. Nomeamos os vértices e o centro O da base da pirâmide segundo o esquema:



Sendo a a medida de uma aresta da base, temos:

$a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

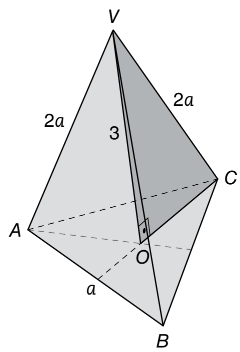
$(VM)^2 = (2\sqrt{7})^2 + 6^2 \Rightarrow (VM)^2 = 64$

$\therefore VM = 8$ cm

Concluímos, então, que a área total A_T dessa pirâmide é dada por:

$A_T = \left(4 \cdot \frac{12 \cdot 8}{2} + 12^2\right) \text{cm}^2 = 336 \text{ cm}^2$

50. No esquema, nomeamos os vértices da pirâmide e o centro O da base, indicando por a a medida de cada aresta da base:



Cada altura do triângulo ABC mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e, portanto:

$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

$(2a)^2 = 3^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{27}{11}$

$\therefore a = \sqrt{\frac{27}{11}}$ m

51. Indicando por a a medida da aresta do tetraedro, em centímetro, temos que a área total A_T do tetraedro é 4 vezes a área de um triângulo equilátero de lado a, isto é, $A_T = a^2\sqrt{3}$. Logo:

$a^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$

Assim, temos:

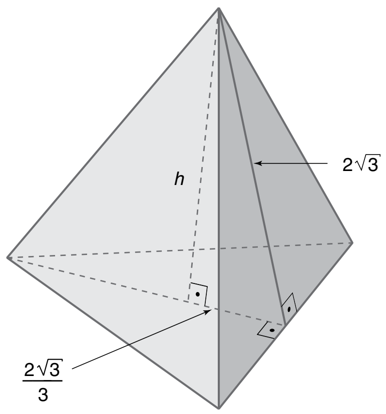
a) O apótema do tetraedro regular é a altura de um triângulo equilátero de lado 4 cm; logo, sua medida n é dada por:

$$n = \frac{4\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

b) A medida r do apótema da base do tetraedro é a terça parte da medida da altura de um triângulo equilátero de lado 4 cm, isto é:

$$r = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}\text{ cm} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

c) Indicando por h a medida, em centímetro, da altura do tetraedro, esquematizamos:

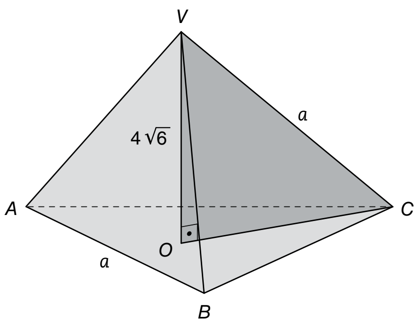


Pelo teorema de Pitágoras, concluímos:

$$h^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Ou seja, a altura do tetraedro mede $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

52. No esquema, nomeamos os vértices da pirâmide e o centro O da base, indicando por a a medida de cada aresta:



Cada altura da base é dada por $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; logo:

$$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

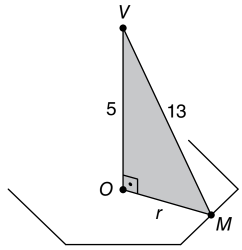
$$a^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 144$$

$\therefore\ a = 12$ cm

Assim, concluímos que a área total A_T do tetraedro é dada por:

$$A_T = 4 \cdot \frac{12^3 \cdot \sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = 144\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

53. Sendo r a medida do apótema da base da pirâmide, temos:

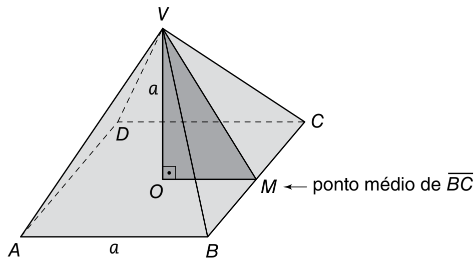


$13^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 144$

$\therefore\ r = 12$ cm

Logo, o apótema da base mede 12 cm.

54. Indicando a pirâmide por $VABCD$, em que O é o centro da base $ABCD$ e a é a medida de cada aresta da base, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

$$(VM)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow (VM)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\therefore\ VM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Assim, a área lateral A_ℓ é dada por:

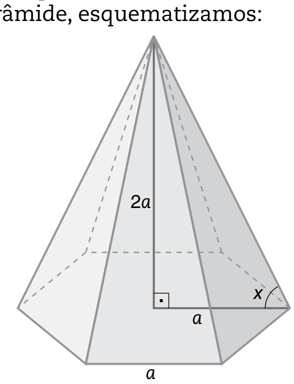
$$A_\ell = 4 \cdot \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = a^2\sqrt{5}$$

Concluímos calculando $\frac{A_\ell}{S}$, em que S é a área da base da pirâmide:

$$\frac{A_\ell}{S} = \frac{a^2\sqrt{5}}{a^2} = \sqrt{5}$$

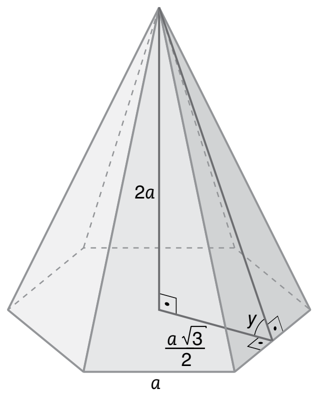
Logo, a razão $\frac{A_\ell}{S}$ é $\sqrt{5}$.

55. a) A medida a do lado do hexágono regular é igual à medida do raio da circunferência circunscrita. Assim, indicando por x a medida do ângulo agudo formado por uma aresta lateral e pela base dessa pirâmide, esquematizamos:



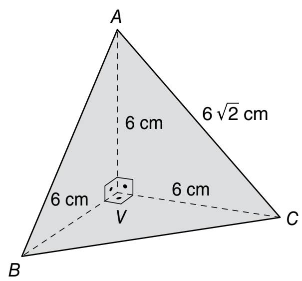
Logo, $\text{tg } x = \frac{2a}{a} = 2$.

b) Os apótemas da base e da pirâmide, que concorrem em um mesmo ponto, são perpendiculares à reta comum ao plano de uma face lateral e ao plano da base da pirâmide; logo, o ângulo agudo formado por esses apótemas é o ângulo formado por uma face lateral e a base. Indicando por y a medida desse ângulo e por a a medida do lado da base, esquematizamos:



Logo, $\text{tg } y = \dfrac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

56. Indicando por V o vértice do triedro trirretângulo e por A, B e C os vértices da base da pirâmide, temos:



A área lateral A_ℓ e a área S da base ABC são dadas por:

$A_\ell = 3 \cdot \dfrac{6 \cdot 6}{2}\text{ cm}^2 = 54\text{ cm}^2$

$S = \dfrac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = 18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Logo, a área total A_T é dada por:

$A_T = A_\ell + S = (54 + 18\sqrt{3})\text{ cm}^2 = 18(3 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$

57. Cada um dos triângulos EHG, GCB e BAE tem área S_R dada por:

$S_R = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2}\text{ cm}^2 = 36\text{ cm}^2$

Cada face do cubo tem área S_F dada por:

$S_F = (6\sqrt{2})^2\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos EHG, GCB e BAE, obtemos $BG = EG = EB = 12$ cm; logo, o triângulo equilátero BEG tem área S_E dada por:

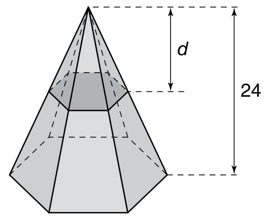
$S_E = \dfrac{12^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = 36\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Concluímos, então, que a área total S do poliedro remanescente é dada por:

$S = 3S_R + 3S_F + S_E = (3 \cdot 36 + 3 \cdot 72 + 36\sqrt{3})\text{ cm}^2$

$\therefore S = 36(9 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$

58. Sendo d a distância do vértice da pirâmide ao plano da secção transversal, temos:



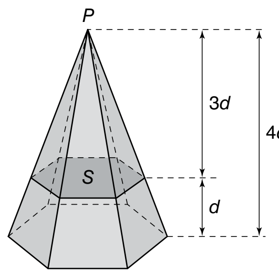
Sendo b a área da secção transversal, temos que a área da base é $4b$ e, portanto:

$\dfrac{4b}{b} = \left(\dfrac{24}{d}\right)^2 \Rightarrow 2 = \dfrac{24}{d}$

$\therefore d = 12$ cm

Logo, o vértice da pirâmide dista 12 cm do plano da secção transversal.

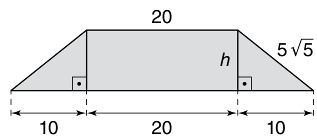
59. Sendo d a distância entre β e o plano da base da pirâmide, e A_S a área da secção S, temos:



$\dfrac{80}{A_S} = \left(\dfrac{4d}{3d}\right)^2 \Rightarrow A_S = 45$

Logo, a área da secção transversal é 45 cm^2.

60. Sendo h a altura do trapézio da base da pirâmide, temos:



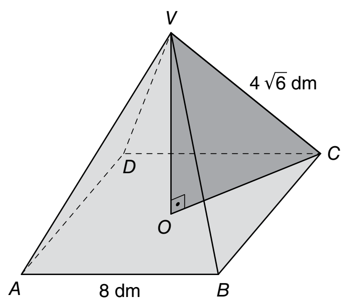
$h^2 = (5\sqrt{5})^2 - 10^2 \Rightarrow h^2 = 25$

$\therefore h = 5$ cm

Logo, o volume V do prisma é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(20 + 40) \cdot 5}{2} \cdot 30\text{ cm}^3 = 1.500\text{ cm}^3$

61. Indicando a pirâmide por $VABCD$ e por O o centro da base $ABCD$, temos:



$\overline{OC}$ é metade da diagonal do quadrado $ABCD$;

logo, $OC = \dfrac{8\sqrt{2}}{2}\text{ dm} = 4\sqrt{2}\text{ dm}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

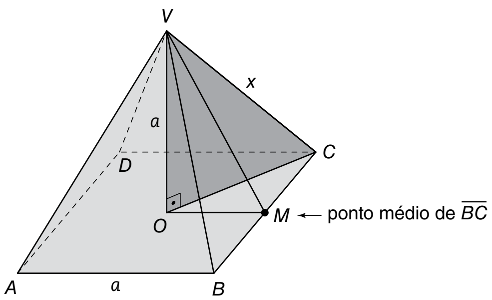
$(4\sqrt{6})^2 = (VO)^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow (VO)^2 = 64$

$\therefore\ VO = 8$ dm

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 8 \text{ dm}^3 = \frac{512}{3} \text{ dm}^3$

62. Indicando a pirâmide por $VABCD$, em que O é o centro da base $ABCD$, a é a medida da aresta da base e x é a medida da aresta lateral, temos:



a) Como o volume V é 72 cm³, temos:

$72 = \frac{1}{3}a^2 \cdot a \Rightarrow a^3 = 216$

$\therefore\ a = 6$ cm

$\overline{OC}$ é a metade da diagonal do quadrado $ABCD$ e, portanto, $OC = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, temos: $x^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 = 54$

$\therefore\ x = 3\sqrt{6}$ cm

Logo, cada aresta lateral da pirâmide mede $3\sqrt{6}$ cm.

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMO, temos:

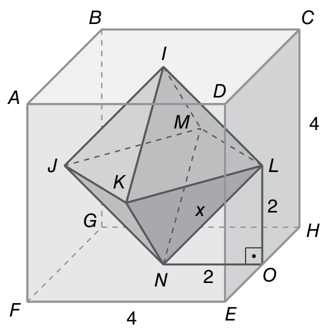
$(VM)^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow (VM)^2 = 45$

$\therefore\ VM = 3\sqrt{5}$ cm

Concluímos, então, que a área total da pirâmide é dada por:

$A_T = \left(4 \cdot \frac{6 \cdot 3\sqrt{5}}{2} + 6^2\right) \text{cm}^2 = 36(\sqrt{5} + 1) \text{ cm}^2$

63. Nomeando os vértices do cubo e os vértices do octaedro conforme a figura abaixo, ligamos, por segmentos de reta, os pontos L e N ao ponto médio O da aresta $\overline{EH}$. Assim, temos que o triângulo LON é retângulo em O, com os catetos medindo 2 cm cada. Indicando por x a medida, em centímetro, da aresta do octaedro, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo LON, concluímos:

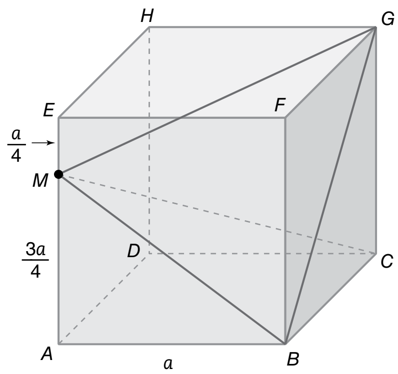
$$x^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Observando que o volume do octaedro é duas vezes o volume de uma pirâmide quadrangular regular de altura 2 cm e aresta da base $2\sqrt{2}$ cm, concluímos que o volume V do octaedro é dado por:

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$

Alternativa **b**.

64. Esquematizando, temos:



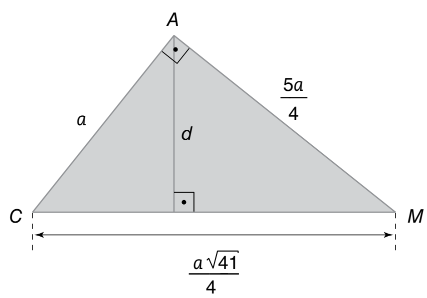
a) A altura do tetraedro, em relação à base BCG mede a; e a base BCG é metade de uma face do cubo, logo, a área do triângulo BCG é $\frac{a^2}{2}$. Assim, temos que o volume V do tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a \Rightarrow V = \frac{a^3}{6}$

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABM, obtemos $MB = \frac{5a}{4}$. O triângulo BCM é retângulo em B e seus catetos medem a e $\frac{5a}{4}$. Assim, a área S do triângulo BCM é dada por:

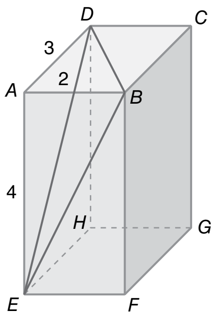
$S = \frac{a \cdot \frac{5a}{4}}{2} = \frac{5a^2}{8}$

c) A distância d pedida é a altura, relativa à hipotenusa, do triângulo BCM. Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida da hipotenusa, obtendo $CM = \frac{a\sqrt{41}}{4}$. Assim, concluímos, por uma das relações métricas no triângulo retângulo:



$\frac{a\sqrt{41}}{4} \cdot d = a \cdot \frac{5a}{4} \Rightarrow d = \frac{5a\sqrt{41}}{41}$

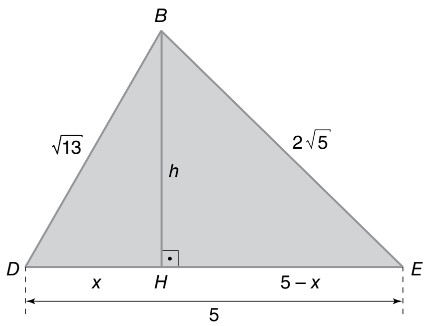
65.



a) O triângulo ABD é retângulo em B, e seus catetos medem 2 e 3; logo, a área S_{ABD} desse triângulo é dada por:
$S_{ABD} = \dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3$

b) A base ABD desse tetraedro tem área 3, calculada no item **a**, e a altura relativa a essa base mede 4; logo, o volume V desse tetraedro é dado por:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$

c) Pelo teorema de Pitágoras, calculamos: $BE = 2\sqrt{5}$, $BD = \sqrt{13}$ e $DE = 5$. Assim, calculamos a medida h da altura relativa à base $\overline{DE}$ do triângulo BDE, aplicando duas vezes o teorema de Pitágoras, como segue:



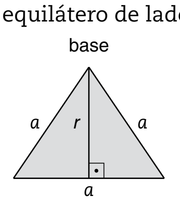
$\begin{cases} h^2 + x^2 = (\sqrt{13})^2 \\ h^2 + (5 - x)^2 = (2\sqrt{5})^2 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{9}{5}$ e $h = \dfrac{2\sqrt{61}}{5}$

Logo, a área S_{BDE} do triângulo BDE é calculada por:

$S_{BDE} = \dfrac{5 \cdot \dfrac{2\sqrt{61}}{5}}{2} = \sqrt{61}$

d) A distância AQ é a altura, relativa à base BDE do tetraedro $ABDE$. Indicando por d essa altura e observando nos itens **b** e **c** que o volume do tetraedro $ABDE$ é 4 e que a área da base BDE é $\sqrt{61}$, concluímos:
$\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot d = 4 \Rightarrow d = \dfrac{12\sqrt{61}}{61}$

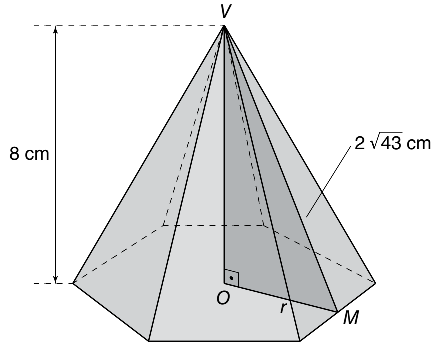
66. Sendo a a medida da aresta da base da pirâmide, temos que a medida r do apótema da base é a altura de um triângulo equilátero de lado a:



$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

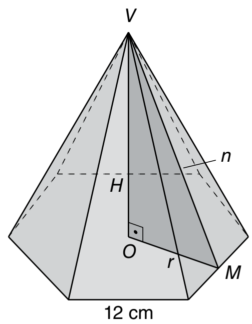
Assim, temos:
$r = 4\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$
$\therefore a = 8$ cm
Logo, o volume V da pirâmide é dado por:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \text{ cm}^3 = 192\sqrt{3} \text{ cm}^3$

67. Sendo V, O e M, respectivamente, o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, com $OM = r$, temos:



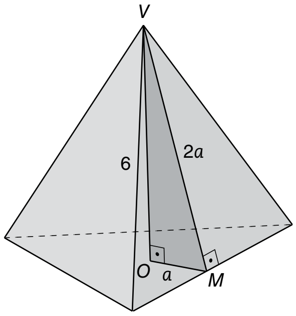
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:
$(2\sqrt{43})^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 108$
$\therefore r = 6\sqrt{3}$ cm
Sendo a a medida de cada aresta da base da pirâmide, temos que r é a altura de um triângulo equilátero de lado a; logo:
$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$\therefore a = 12$ cm
Concluímos, então, que o volume V da pirâmide é dado por:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 8 \text{ cm}^3 = 576\sqrt{3} \text{ cm}^3$

68. Sendo V, O e M, respectivamente, o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, com $VO = H$, $OM = r$ e $VM = n$, temos:



$A_\ell = 432 \Rightarrow 6 \cdot \dfrac{12n}{2} = 432$
$\therefore n = 12$ cm
$\overline{OM}$ é o apótema da base e, portanto:
$r = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 6\sqrt{3}$ cm
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:
$12^2 = H^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow H^2 = 36$
$\therefore H = 6$ cm
Logo, o volume V da pirâmide é dado por:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \text{ cm}^3 = 432\sqrt{3} \text{ cm}^3$

69. Sendo V, O e M, respectivamente, o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, com $OM = a$ e $VM = 2a$, temos:



$(2a)^2 = a^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 12$

$\therefore\ a = 2\sqrt{3}$ cm

Sendo ℓ a medida de cada aresta da base, temos que a medida do apótema da base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, ou seja:

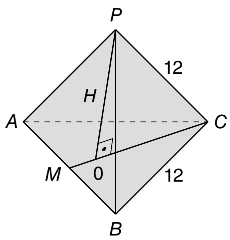
$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ \ell = 12$ cm

Concluímos, então, que o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6\ \text{cm}^3 = 72\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

70. Seja $PABC$ o tetraedro regular de aresta 12 cm, em que O é o centro da base ABC, M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e $OP = H$.



Temos:

$MC = \frac{12\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$ e

$OC = \frac{2MC}{3} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo POC, obtemos:

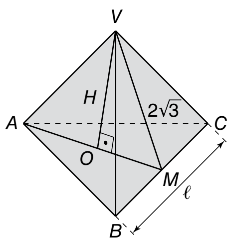
$144 = H^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow H^2 = 96$

$\therefore\ H = 4\sqrt{6}$ cm

Concluímos, então, que o volume V do tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{6}\ \text{cm}^3 = 144\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

71. Seja $VABC$ o tetraedro regular de apótema $2\sqrt{3}$ cm, em que O é o centro da base ABC, M é o ponto médio de $\overline{BC}$, $BC = \ell = VO = H$.



O apótema do tetraedro regular é a altura do triângulo equilátero da face; logo:

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 4$

A medida OM do apótema da base é a terça parte da medida da altura de um triângulo equilátero de lado 4 cm; logo:

$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

$H^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow H^2 = \frac{96}{9}$

$\therefore\ H = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

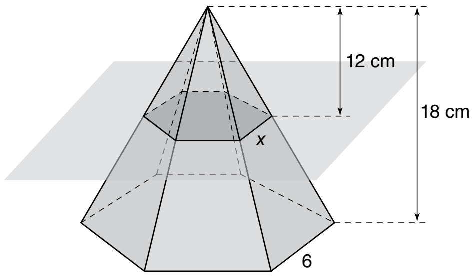
Logo, o volume V do tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

72. A medida da aresta da base é 0,6 m. Indicando por h a medida, em metro, da altura da pirâmide, temos:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot (0{,}6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot h = 4{,}2 \Rightarrow h = \frac{70\sqrt{3}}{9}$

73. Sendo x a medida do lado da secção transversal, temos:



$\frac{x}{6} = \frac{12}{18} \Rightarrow x = 4$

Alternativa **c**.

74. A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, se o número k é a razão de semelhança da base da menor para a base da maior pirâmide, então:

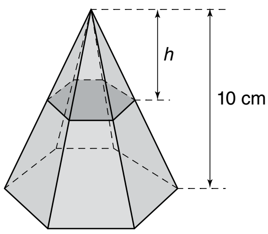
$k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança. Assim, sendo V o volume, em metro cúbico, da maior pirâmide, concluímos:

$\frac{16}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow V = 54$

Alternativa **e**.

75. Sendo v o volume de cada um desses dois sólidos e h a distância entre o vértice da pirâmide e o plano α, temos:



$\frac{2v}{v} = \left(\frac{10}{h}\right)^3 \Rightarrow 2 = \left(\frac{10}{h}\right)^3$

$\therefore \dfrac{10}{h} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow h = \dfrac{10}{\sqrt[3]{2}}$

$\therefore h = \dfrac{10\sqrt[3]{4}}{2}$ cm $= 5\sqrt[3]{4}$ cm

Logo, a distância entre o vértice da pirâmide e o plano α é $5\sqrt[3]{4}$ cm.

76. Indicando por V_{AEBD} e V_{AIJK} os volumes, em metro cúbico, das pirâmides *AEBD* e *AIJK*, respectivamente, temos:

$V_{AEBD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1 \cdot 1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{6}$ e $V_{AIJK} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{48}$

O volume V do tronco *IJKDBE* é a diferença entre V_{AEBD} e V_{AIJK}, ou seja:

$V = V_{AEBD} - V_{AIJK} \Rightarrow V = \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{48}\right) m^3 = \dfrac{7}{48}\ m^3$

77. Indicando por V_m e V_M os volumes das pirâmides menor e maior, respectivamente, e por k a razão de semelhança da menor para a maior pirâmide, temos:

$\dfrac{V_m}{V_M} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow k^3 = \dfrac{1}{8}$

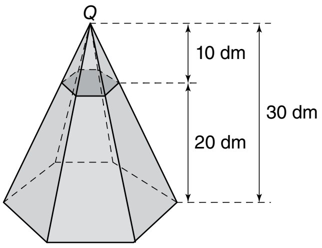
$\therefore k = \dfrac{1}{2}$

Assim, deduzimos que a altura da maior pirâmide é 4 dm e que a aresta da base da menor pirâmide é 3 dm. Finalmente, calculamos o volume V do tronco de pirâmide:

$V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 - \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 2\right) dm^3 \Rightarrow V = 42\ dm^3$

Alternativa **a**.

78. Indicando por P a pirâmide original, sejam Q o seu vértice e V o seu volume.



$V = 1.080\ cm^3$

Sendo v o volume da pirâmide menor de vértice Q cuja base é a secção que α determina em P, temos:

$\dfrac{1.080}{v} = \left(\dfrac{30}{10}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{1.080}{v} = 27$

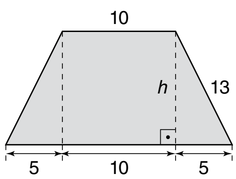
$\therefore v = 40\ dm^3$

Logo, o volume U do tronco de pirâmide é dado por:

$U = V - v \Rightarrow U = (1.080 - 40)\ dm^3$

$\therefore U = 1.040\ dm^3$

79. **a)** Sendo h a altura do trapézio de uma face lateral do tronco, temos:



$h^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow h^2 = 144$

$\therefore h = 12$ cm

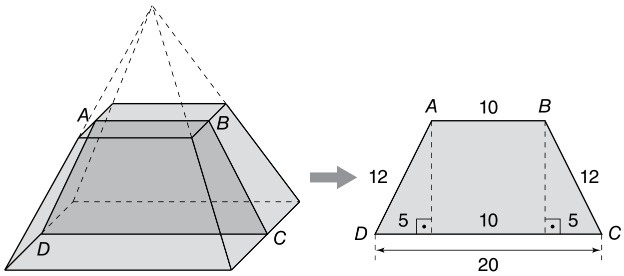
Logo, a área lateral A_ℓ do tronco é dada por:

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(20 + 10)\,12}{2}\ cm^2 = 720\ cm^2$

b) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja:

$A_T = (720 + 100 + 400)\ cm^2 = 1.220\ cm^2$

c) A altura H do tronco é a altura de um trapézio isósceles de lados 10 cm, 20 cm, 12 cm e 12 cm:

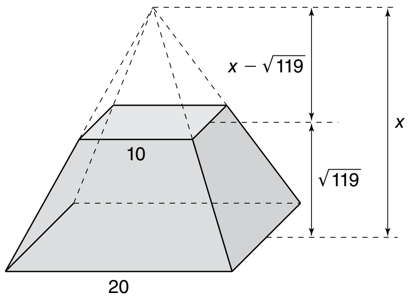


$H^2 + 5^2 = 12^2 \Rightarrow H^2 = 119$

$\therefore H = \sqrt{119}$

Logo, a altura do tronco é $\sqrt{119}$ cm.

d) Sendo x a medida da altura da pirâmide que contém esse tronco, temos:



$\dfrac{x}{x - \sqrt{119}} = \dfrac{20}{10} \Rightarrow x = 2\sqrt{119}$

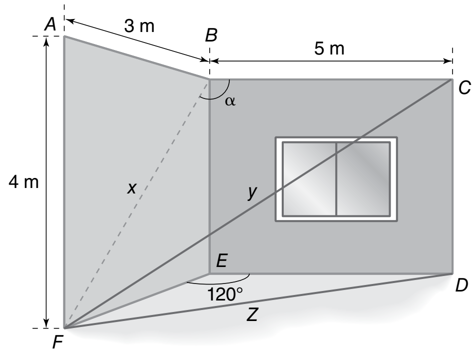
Logo, o volume V do tronco é dado por:

$V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 2\sqrt{119} - \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119}\right) cm^3 =$

$= \dfrac{700\sqrt{119}}{3}\ cm^3$

Exercícios contextualizados

80. Indicando por x, y e z as medidas, em metro, dos segmentos $\overline{FB}$, $\overline{FC}$ e $\overline{FD}$, respectivamente, e por α a medida do ângulo $F\hat{B}C$, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo *ABF*, obtemos x:

$x^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow x = 5$

Pela lei dos cossenos aplicada no triângulo *FED*, obtemos z:
$z^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° \Rightarrow z = 7$
Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo *FCD*, obtemos y:
$y^2 = 7^2 + 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{65}$
Pela lei dos cossenos aplicada no triângulo *FBC*, obtemos cos α:
$\left(\sqrt{65}\right)^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}3$
Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos: $\alpha \approx 107{,}46°$

81. Um poliedro convexo é a região do espaço limitada por uma superfície *G*, que é a reunião de *n* polígonos convexos, com $n \geqslant 4$, tais que:
(I) não há dois desses polígonos contidos em um mesmo plano;
(II) cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles;
(III) o plano que contém qualquer um desses polígonos nos deixa os demais contidos em um mesmo semiespaço.
Analisando cada uma das figuras, temos:
- a coluna não obedece às condições (I) e (III); logo, não tem a forma de um poliedro convexo;
- a escada não obedece às condições (I) e (III); logo, não tem a forma de um poliedro convexo;
- o ladrilho tem a forma de um poliedro convexo, pois são satisfeitas as três condições.

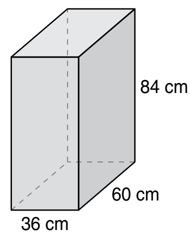
82. O número *A* de arestas desse poliedro é dado por:
$A = \dfrac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90$. Como todas essas arestas são congruentes, temos que o total *t* de linha necessário para costurar a bola é dado por:
$t = 90 \cdot 15 \text{ cm} = 1.350 \text{ cm} = 13{,}5 \text{ m}$

83. Sendo *n* o número de arestas de cada face, temos:
$$\begin{cases} A = 20 \\ A = \dfrac{nF}{2} \end{cases} \Rightarrow nF = 40$$
Como *n* e *F* são números naturais, com $n \geqslant 3$ e $F \geqslant 4$, temos que o maior valor de *F* possível é obtido quando se atribui a *n* o menor valor possível. Assim, obtemos $n = 4$ e $F = 10$.
Aplicando a relação de Euler, concluímos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 20 + 10 = 2$
$\therefore V = 12$
Logo, a pedra deve ter o formato de um poliedro convexo com 20 arestas, 10 faces e 12 vértices.

84. O teto e a parte das paredes a serem pintados têm área A dada por:
$A = (5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1{,}3 \cdot 2 - 2{,}5 \cdot 1{,}8)\,\text{m}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 86{,}3 \text{ m}^2$
Como serão necessárias duas demãos de tinta, temos que a área a ser pintada é 2*A*, ou seja, 172,6 m².
Logo, segundo a estimativa do pintor, o percentual da tinta da lata a ser usado na pintura é dado por
$\dfrac{172{,}6}{250} = 0{,}6904$, que equivale a 69,04%.
Alternativa **b**.

85. **a)** A área *B* da base do prisma é dada por:
$B = \dfrac{3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \Rightarrow B \approx 30{,}6$
Assim, a pressão P_B sobre o plano da base é calculada por:
$P_B \approx \dfrac{61{,}2 \text{ N}}{30{,}6 \text{ m}^2} \Rightarrow P_B \approx 2 \text{ N/m}^2$
b) A área A_f de uma face lateral do prisma é dada por:
$A_f = 2\sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}^2 = 12\sqrt{3} \text{ m}^2 \Rightarrow A_f \approx 20{,}4 \text{ m}^2$
Assim, a pressão P_f sobre o plano de uma face lateral é calculada por:
$P_f \approx \dfrac{61{,}2 \text{ N}}{20{,}4 \text{ m}^2} \Rightarrow P_f \approx 3 \text{ N/m}^2$

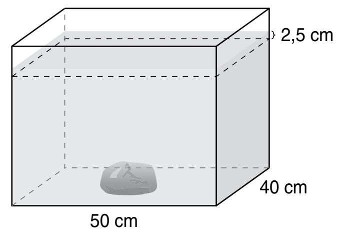
86.



a) Os maiores cubos que podem ser obtidos têm como medida da aresta, em centímetro, o mdc(36, 60, 84) = 12. Logo, os maiores cubos possíveis têm arestas de 12 cm.
b) A razão entre o volume *V* do bloco e o volume *v* de um dos maiores cubos possíveis é o número *n* de cubos em que pode ser dividido o bloco:
$n = \dfrac{36 \cdot 60 \cdot 84}{12^3} = 105$
Logo, a menor quantidade de cubos resultante do corte descrito é 105.

87. Temos que S é diretamente proporcional à largura *b*, ao quadrado da altura *d* e ao inverso do quadrado da distância x; logo, S é diretamente proporcional ao produto dessas medidas, isto é:
$$\frac{S}{b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = k \Rightarrow S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$$
Alternativa **a**.

88. A quantidade de água deslocada é igual ao volume da pedra.



Assim, o volume *V* da pedra é o volume de um paralelepípedo de dimensões 50 cm, 40 cm e 2,5 cm, ou seja:
$V = 50 \cdot 40 \cdot 2{,}5 \text{ cm}^3 = 5.000 \text{ cm}^3$

89. O volume do paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos dois cubos; logo:
$8 \cdot 8 \cdot x = 10^3 + 6^3 \Rightarrow x = 19$
Alternativa **d**.

90. Sendo a, b e c as dimensões de um dos paralelepípedos, temos que as respectivas dimensões do outro são ka, kb e kc, $k \in \mathbb{R}_+^*$. Supondo que este último seja o maior deles, temos:

$$\frac{ka \cdot kb \cdot kc}{a \cdot b \cdot c} = 2 \Rightarrow k^3 = 2$$

$$k = \sqrt[3]{2}$$

Assim, a razão entre a área total A_T do maior paralelepípedo e a área total A_t do menor, nessa ordem, é dada por:

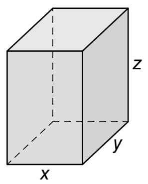
$$\frac{A_T}{A_t} = \frac{2(ka \cdot kb + ka \cdot kc + kb \cdot kc)}{2(ab + ac + bc)} =$$

$$= \frac{2k^2(ab + ac + bc)}{2(ab + ac + bc)} = k^2 \Rightarrow \frac{A_T}{A_t} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$$

Alternativa **b**.

Professor, esse problema também pode ser resolvido por meio das razões entre volumes e entre áreas de figuras semelhantes.

91. Sendo x, y e z as dimensões, em centímetro, do edifício, e V o seu volume, temos:



$$V = 22.500 \text{ m}^3 \Rightarrow xyz = 22.500.000.000 \text{ cm}^3$$

Sendo a, b e c as dimensões, em centímetro, da maquete, correspondentes a x, y e z, respectivamente, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{50} \Rightarrow a = \frac{x}{50}$$

$$\frac{b}{y} = \frac{1}{50} \Rightarrow b = \frac{y}{50}$$

$$\frac{c}{z} = \frac{1}{50} \Rightarrow c = \frac{z}{50}$$

Assim, o volume v da maquete é dado por:

$$v = a \cdot b \cdot c \text{ cm}^3 = \frac{x}{50} \cdot \frac{y}{50} \cdot \frac{z}{50} \text{ cm}^3 =$$

$$= \frac{22.500.000.000}{125.000} \text{ cm}^3 \Rightarrow v = abc = 180.000 \text{ cm}^3$$

Professor, esse problema também pode ser resolvido por meio da razão entre volumes de figuras semelhantes.

92. Sendo a e V_m, respectivamente, a medida da aresta e o volume do cubo menor, e sendo ℓ e V_M, respectivamente, a medida da aresta e o volume do cubo maior, temos:

$$\begin{cases} V_m = a^3 \\ V_M = \ell^3 \end{cases}$$

Assim:

$$V_M = 3 \cdot V_m \Rightarrow \ell^3 = 3a^3$$

$$\therefore \left(\frac{\ell}{a}\right)^3 = 3 \Rightarrow \frac{\ell}{a} = \sqrt[3]{3}$$

Alternativa **d**.

Professor, esse problema também pode ser resolvido por meio da razão entre volumes de figuras semelhantes.

93. A medida de cada aresta do cubo de argila, após o cozimento, é $(1 - 0{,}2)a$, ou seja, $0{,}8a$. Assim, sendo V e V′ os volumes desse cubo, antes e depois do cozimento, respectivamente, temos:

$$V = a^3 \text{ e } V' = (0{,}8a)^3 = 0{,}512a^3$$

Logo, $V' = 0{,}512V$.

Concluímos, então, que a taxa percentual de variação do volume é calculada por:

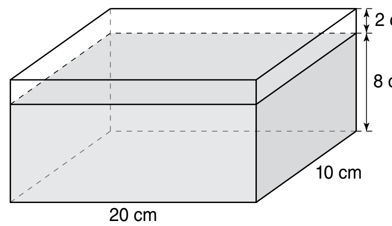
$$\frac{V - V'}{V} = \frac{V - 0{,}512V}{V} = 0{,}488 = 48{,}8\%$$

Ou seja, o volume diminui 48,8% em relação ao volume original.

Alternativa **c**.

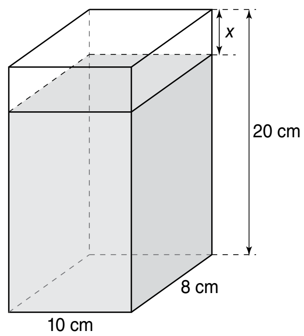
Professor, esse problema também pode ser resolvido por meio da razão entre volumes de figuras semelhantes.

94. Sendo V o volume de água no recipiente, temos:



$$V = 20 \cdot 10 \cdot 6 = 1.200 \text{ cm}^3$$

Ao apoiar uma face de dimensões 10 cm por 8 cm sobre o tampo da mesa, seja x a distância entre a superfície da água e a face superior temos:

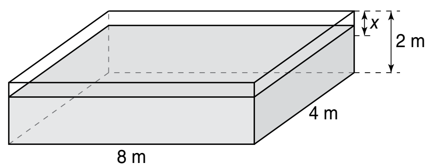


Assim:

$$10 \cdot 8 \cdot (20 - x) = 1.200 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

Logo, a distância pedida é 5 cm.

95. Sendo x a distância, em metro, da superfície da água à borda da piscina, temos:



$$8 \cdot 4 \cdot (2 - x) = 59{,}2 \Rightarrow 2 - x = 1{,}85$$

$$\therefore x = 0{,}15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

Logo, a água está a 15 cm da borda da piscina.

Alternativa **b**.

96. O volume V de água, acima do nível da jusante, contido na eclusa é dado por:

$$V = 200 \cdot 17 \cdot 20 \text{ m}^3 = 68.000 \text{ m}^3$$

Assim, o tempo t para o esvaziamento desse volume a uma vazão de 4.200 m³ por minuto é:

$$t = \frac{68.000}{4.200} \text{ min} \approx 16{,}19 \text{ min}$$

Alternativa **d**.

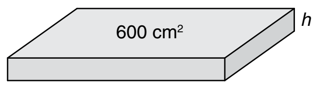
97. a) Em cada segundo, o volume V de água que se desloca nesse trecho do rio equivale ao volume do paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 10 m, 3 m e 40 m, ou seja:

$V = (10 \cdot 3 \cdot 40)\ m^3 = 1.200\ m^3$

Concluímos, então, que a vazão do rio nesse trecho é de $1.200\ m^3/s$.

b) Como $1\ L = 1\ dm^3$ e $1.200\ m^3 = 1.200.000\ dm^3$, temos que a vazão do rio nesse trecho é de 1.200.000 L/s.

98. a) O volume de água retirado da caixa por segundo é 10 L ou $10.000\ cm^3$. O desnível h ocorrido com a superfície da água, após essa retirada, é a altura de um paralelepípedo de volume $V = 10.000\ cm^3$, e a área da base é $60.000\ cm^2$:



$V = 10.000 \Rightarrow 60.000\ h = 10.000$

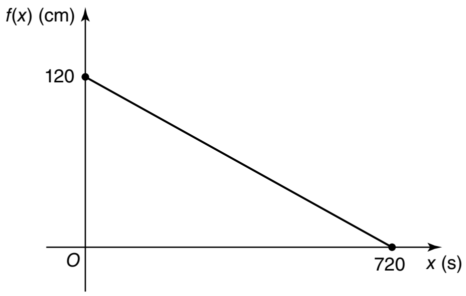
$\therefore h = \frac{1}{6}$ cm

Assim, em x segundos o desnível da superfície da água será $\frac{x}{6}$ cm.

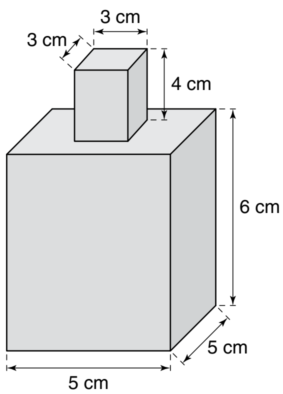
Concluímos, então, que a altura $f(x)$, em centímetro, do nível da superfície da água em função do tempo x, em segundo, é:

$f(x) = 120 - \frac{x}{6}$, com $0 \leqslant x \leqslant 720$

b)



99. a)



Em relação ao corpo da garrafa, temos:

$\text{Vazão} = \frac{3\ mL}{s} = \frac{0{,}003\ L}{s} = \frac{0{,}003\ dm^3}{s} = \frac{3\ cm^3}{s}$

Como a velocidade de subida do nível é a razão entre a vazão e a área, temos:

$\frac{3\ cm^3}{s \cdot 25\ cm^2} = \frac{3\ cm}{25\ s}$

Assim, temos:

$f(x) = \frac{3x}{25}$, com $0 \leqslant x \leqslant 50$

Em relação ao gargalo, temos que a velocidade de subida do nível é:

$\frac{\text{vazão}}{\text{área}} = \frac{3\ cm^3}{s \cdot 9\ cm^2} = \frac{1\ cm}{3\ s}$

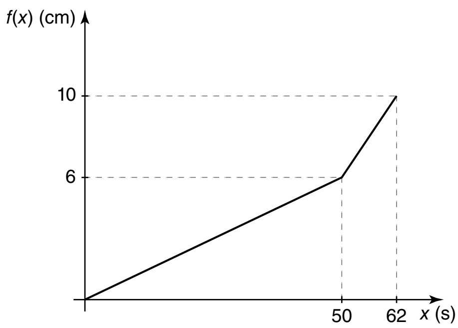
Logo:

$f(x) = 6 + \frac{1}{3}(x - 50)\ 50 < x \leqslant 62$

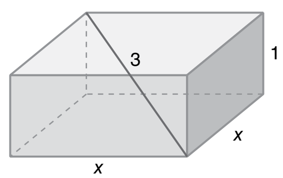
Concluímos então que f é função definida por duas sentenças:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{25}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ \frac{x - 32}{3}, \text{ se } 50 < x \leqslant 62 \end{cases}$$

b)



100. A maior distância entre dois pontos de um paralelepípedo reto-retângulo é a medida de uma de suas diagonais. Assim, sendo x a medida, em metro, da aresta da base do paralelepípedo, esquematizamos:



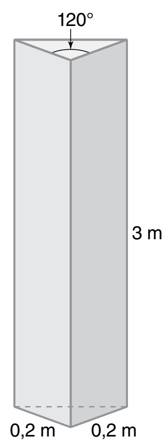
Assim, temos:

$\sqrt{x^2 + x^2 + 1} = 3 \Rightarrow x = 2$

Logo, a capacidade máxima V dessa caçamba é dada por:

$V = (2 \cdot 2 \cdot 1)\ m^3 = 4\ m^3$

101. O volume da calha é o mesmo do prisma triangular reto representado abaixo.



A área B da base desse prisma é calculada por

$B = \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot \text{sen } 120°\right) \text{m}^2 \Rightarrow B = 0{,}01\sqrt{3} \text{ m}^2$

Logo, o volume V do prisma é dado por
$V = \left(0{,}01\sqrt{3} \cdot 3\right) \text{m}^3 = 0{,}03\sqrt{3} \text{ m}^3$.
Alternativa **a**.

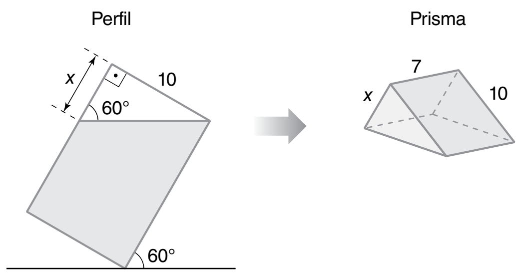
102. A capacidade V do prisma é dada por:
$V = (5 \cdot 5 \cdot 28) \text{ cm}^3 = 700 \text{ cm}^3$, ou seja, $V = 700$ mL
Como a densidade da água é de 1 g/mL, concluímos que a massa de água necessária para a fabricação desse microchip é 700 g.
Alternativa **e**.

103. Indicando por h a medida, em centímetro, da altura do aquário temos que a capacidade V do aquário é dada por:

$V = \frac{3 \cdot 20^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot h \text{ cm}^3 = 600\sqrt{3} \cdot h \text{ cm}^3$

Logo
$600\sqrt{3} \cdot h = 3.600 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$
Alternativa **b**.

104. O volume do leite derramado é o mesmo do prisma representado pelo espaço vazio dentro da caixa inclinada. Indicando por x a medida, em centímetro, da menor aresta da base desse prisma, esquematizamos:



Assim, temos:

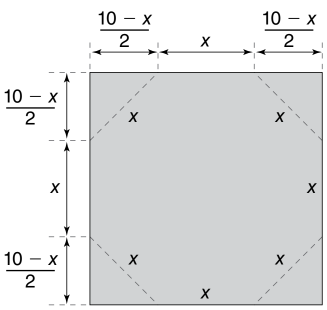
$\text{tg } 60° = \frac{10}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{10}{x}$

$\therefore x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Concluímos, então, que o volume V do leite derramado é dado por:

$V = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 10}{2} \cdot 7 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{350\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

105. A face menor do paralelepípedo é um quadrado de lado 10 cm. Sendo x a medida do lado do maior octógono regular contido nessa face, temos:



Como cada um dos triângulos retângulos destacados é isósceles, temos:

$\text{sen } \frac{\frac{10 - x}{2}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10 - x}{2x}$

$\therefore x = 10\sqrt{2} - 10$

Logo, a medida de cada cateto dos triângulos isósceles é:

$\frac{10 - x}{2} = \frac{10 + 10 - 10\sqrt{2}}{2} = 10 - 5\sqrt{2}$

Desse modo, a área A do octógono é dada por:

$A = \left[10^2 - 4 \cdot \frac{\left(10 - 5\sqrt{2}\right) \cdot \left(10 - 5\sqrt{2}\right)}{2}\right] \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \left[100 - 2 \cdot \left(100 - 100\sqrt{2} + 50\right)\right] \text{cm}^2$

$\therefore A = \left(100 - 300 + 200\sqrt{2}\right) \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \left(-200 + 200\sqrt{2}\right) \text{cm}^2$

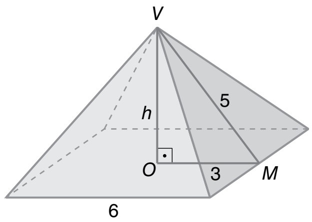
$\therefore A = 200\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{cm}^2$

Concluímos, então, que o maior volume V que pode ter cada pé da mesa é dado por:

$V = \left[200\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 100\right] \text{cm}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 20.000\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{cm}^3$

106. A pirâmide é quadrangular regular com 6 cm de aresta da base e 5 cm de apótema. Indicando por h a medida, em decímetro, da altura dessa pirâmide, esquematizamos:

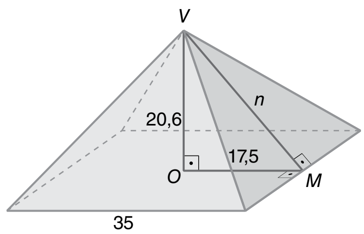


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, concluímos:

$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

Ou seja, a altura da pirâmide é 4 dm.

107. Indicando por n a medida, em metro, do apótema dessa pirâmide, esquematizamos:



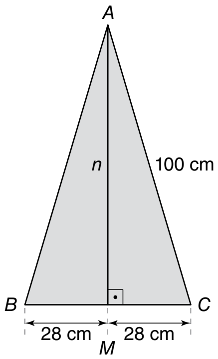
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$n^2 = (17{,}5)^2 + (20{,}6)^2 \Rightarrow n = \sqrt{730{,}61}$

Com o auxílio de uma calculadora eletrônica, aproximamos: $n \approx 27{,}03$
Concluímos, então, que a área lateral A_ℓ da pirâmide é dada por:

$A_\ell \approx 4 \cdot \frac{35 \cdot 27{,}03}{2} \text{ m}^2 \Rightarrow A_\ell \approx 1.892 \text{ m}^2$

108. Sendo n a medida do apótema dessa pirâmide, temos, como face lateral, o triângulo isósceles:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMC, obtemos:

$n^2 + 28^2 = 100^2 \Rightarrow n^2 = 9.216$

$\therefore\ n = 96$

Logo, o apótema dessa pirâmide mede 96 cm.

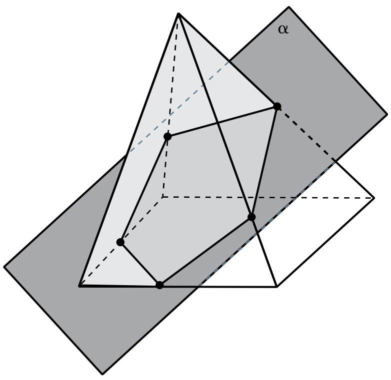
Assim, a área A_f dessa face é:

$A_f = \left(\dfrac{56 \cdot 96}{2}\right) \text{cm}^2 = 2.688 \text{ cm}^2$

Logo, a área A do pano é dada por:

$A = 8A_f = (8 \cdot 2.688) \text{ cm}^2 = 21.504 \text{ cm}^2$

109. Se um plano α que não passa por nenhum vértice da pirâmide a intercepta em todas as faces, então a intersecção do plano com a pirâmide é um pentágono, conforme ilustra a figura.



Alternativa **c**.

110. A pirâmide representada pela torre é semelhante à pirâmide representada pela parte da torre acima da plataforma. Assim, sendo x a distância, em metro, entre a plataforma e o vértice da pirâmide, temos:

$\dfrac{18}{10} = \dfrac{60 + x}{x} \Rightarrow x = 75$

Concluímos, então, que a altura da torre mede (60 + 75) m, ou seja, 135 m.

Alternativa **d**.

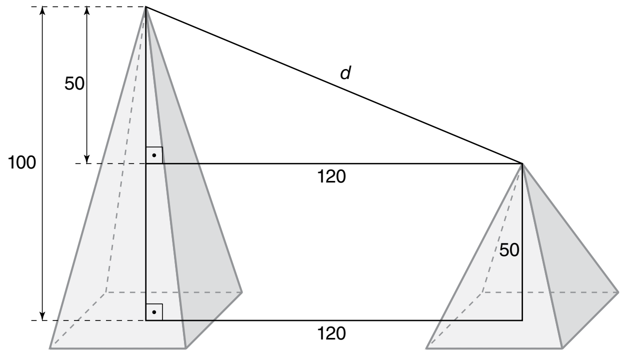
111. Indicando por x a medida da aresta da menor base e por y a medida da aresta da maior base, temos que:

$y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2}$

Como as pirâmides têm o mesmo volume, deduzimos que a que tiver maior área da base terá a menor altura h. Assim, igualando os volumes, obtemos a medida h, em metro:

$\dfrac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 100 = \dfrac{1}{3} \cdot \left(x\sqrt{2}\right)^2 \cdot h \Rightarrow h = 50$

Indicando por d a distância, em metro, entre os vértices das pirâmides, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, concluímos:

$$d^2 = 50^2 + 120^2 \Rightarrow d = 130$$

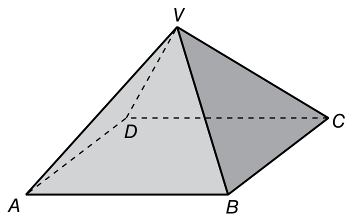
Alternativa **c**.

112. Pelas medidas apresentadas, concluímos que a pirâmide fica totalmente submersa. Assim, o volume de água derramada é igual ao volume V da pirâmide, que é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{0,5 \cdot 0,5}{2} \cdot 0,5 \text{ m}^3 = \dfrac{1}{48} \text{ m}^3$

Alternativa **d**.

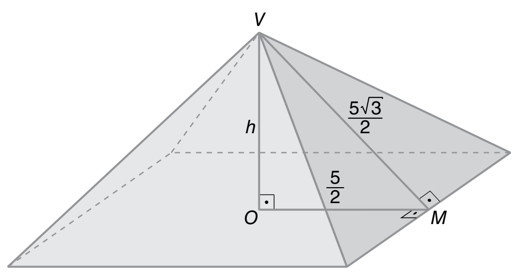
113. a)



b) Os triângulos são equiláteros e cada um tem um lado em comum com o quadrado; logo, a medida dos lados dos triângulos é a mesma do lado do quadrado, ou seja, 5 cm.

c) A área B da base é dada por: $B = 5^2 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$

d) A medida r do apótema da base da pirâmide é metade da medida do lado da base, isto é, $r = \dfrac{5}{2}$ cm; e a medida n do apótema da pirâmide é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 5 cm, isto é, $n = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. Assim, indicando por h a medida, em centímetro, da altura da pirâmide, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$h^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Ou seja, a altura da pirâmide é $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

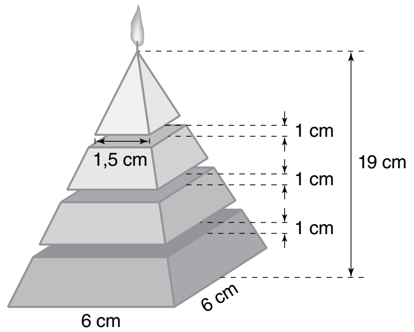
e) O volume V da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{25 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{125\sqrt{2}}{6}\ \text{cm}^3$$

f) O número $\sqrt{2}$ é menor que 1,5; logo, o volume da pirâmide é menor que $\frac{125 \cdot 1{,}5}{6} = 31{,}25\ \text{cm}^3$.

Assim, não atende às especificações solicitadas pela professora.

114. Esquematizando a situação, temos:



Assim, observamos que o volume de parafina da vela original equivale ao de uma pirâmide quadrangular regular com altura 16 cm e 6 cm de aresta da base, e o volume de parafina do bloco superior é o de uma pirâmide com 4 cm de altura e 1,5 cm de aresta da base. Assim, retirando-se o bloco superior, o volume V de parafina remanescente é dado por:

$$V = \left[\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot (1{,}5)^2 \cdot 4\right] \text{cm}^3 = 189\ \text{cm}^3$$

Concluímos, então, que para fabricar uma vela do novo modelo serão necessários 189 cm^3 de parafina.

Alternativa **b**.

Pré-requisitos para o capítulo 13

1. a) A área A_r do retângulo é dada por:

$A_r = (8 \cdot 5)\ \text{cm}^2 = 40\ \text{cm}^2$

b) O comprimento C da circunferência é dado por:

$C = 2 \cdot \pi \cdot 5\ \text{m} = 10\pi\ \text{m}$

c) A área A_c do círculo é dada por:

$A_c = \pi \cdot 3^2\ \text{dm}^2 = 9\pi\ \text{dm}^2$

d) A área A_S do setor pode ser calculada pela regra de três:

Medida do ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 6^2$
40	———	A_S

De onde concluímos que: $A_S = 4\pi\ \text{cm}^2$

e) O comprimento C_S do arco do setor pode ser calculado pela regra de três:

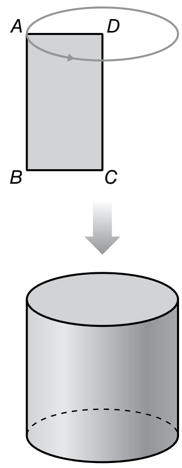
Medida do ângulo central (grau)		Comprimento do arco (cm)
360	———	$2 \cdot \pi \cdot 6$
40	———	C_S

De onde concluímos que: $C_S = \frac{4\pi}{3}$ cm

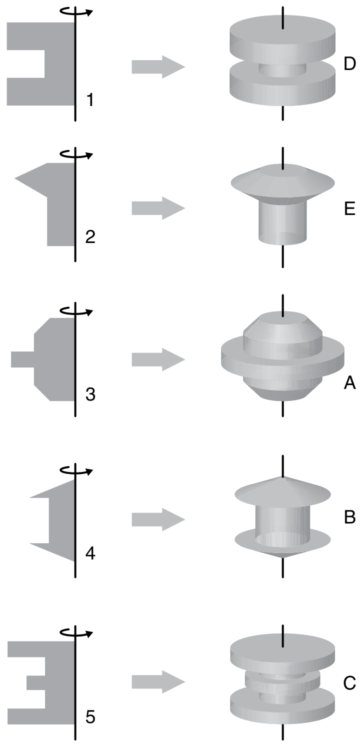
2. É qualquer figura tridimensional, maciça e limitada; ou, de modo equivalente, é qualquer porção tridimensional do espaço limitada por uma superfície fechada.

Por exemplo, um paralelepípedo, um prisma hexagonal, uma pirâmide etc.

3. Ao girar o retângulo em torno da reta $\overleftrightarrow{CD}$ obtém-se uma figura, que lembra um tronco de árvore, chamada cilindro circular. Essa figura será estudada no capítulo 13.



4. Efetuando as rotações dos sólidos, obtemos:

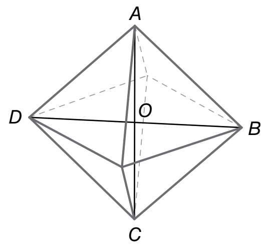


Alternativa **d**.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. a) Como o octaedro determinado pelos centros dos átomos de flúor é regular, temos que quatro vértices coplanares, A, B, C e D, desse octaedro são vértices de um quadrado. Assim, o centro O do átomo de enxofre coincide com o centro desse quadrado.



Como O é o encontro das diagonais do quadrado $ABCD$, e essas são perpendiculares entre si, concluímos que $m(A\widehat{O}B) = 90°$.

b) Na figura anterior, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOB, obtemos:

$(AB)^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow AB = r\sqrt{2}$

Análise da resolução

COMENTÁRIO: A resolução está errada porque o segmento $\overline{AD}$ não é perpendicular à reta s; portanto, não é a distância entre as retas r e s.

Resolução correta:

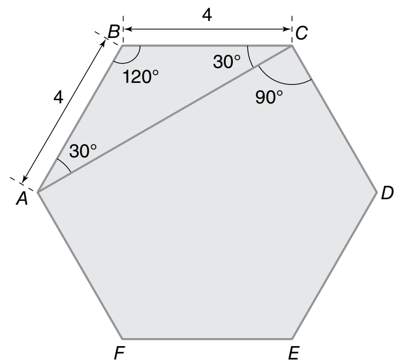
Indicando por x a medida, em decímetro, de uma aresta da base do prisma, temos:

$$6 \cdot x \cdot 10 = 240 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a medida do lado de cada base é 4 dm.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$ da base $ABCDEF$, temos:

- o triângulo ABC é isósceles, pois $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são lados do hexágono regular;
- $A\widehat{B}C$ mede 120°, pois é ângulo interno do hexágono regular;
- $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{C}A$ são congruentes e medem 30° cada um;
- $A\widehat{C}D$ mede 90°, pois $m(B\widehat{C}A) = 30°$ e $m(B\widehat{C}D) = 120°$.



Temos também que o segmento $\overline{AC}$ é perpendicular à aresta $\overline{AG}$, pois cada aresta lateral de um prisma reto é perpendicular às bases do prisma.

Portanto, $\overline{AC}$ é perpendicular às duas retas reversas r e s; logo, a medida CD é a distância entre essas retas.

Aplicando a lei dos cossenos, concluímos:

$(AC)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore AC = 4\sqrt{3}$

Logo, a distância entre as retas r e s é $4\sqrt{3}$ dm.