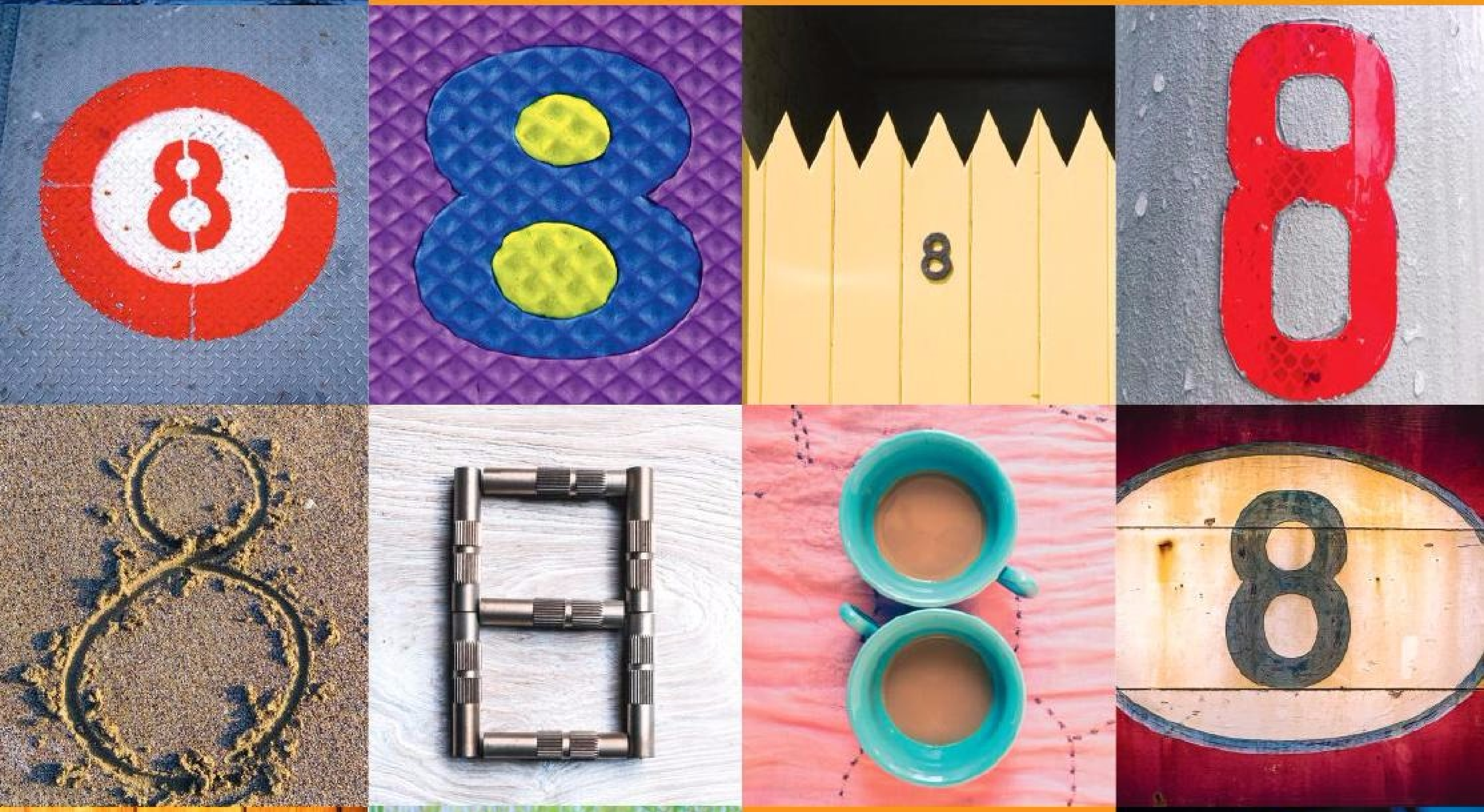
ANTONIO JOSÉ LOPES BIGODE

MATEMÁTICA
DO COTIDIANO

8º ano – Ensino Fundamental – Anos Finais – Matemática




Manual do Professor

editora scipione

rSnapshotPhotos/Shutterstock/Glow Images

MATEMÁTICA
DO COTIDIANO

8º ano

Antonio José Lopes *Bigode*
Mestre em Didática da Matemática pela Universidade Autônoma de Barcelona. Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professor do Ensino Fundamental e Médio. Autor dos livros: *Nós da Educação: Matemática* e *Matemática e Metodologia para o Ensino da Aritmética*.

Manual do Professor

8º ano – Ensino Fundamental –
Anos Finais – Matemática

editora scipione

São Paulo, 2015
1ª edição

editora scipione

Diretoria de conteúdo e inovação pedagógica
Mário Ghio Júnior
Diretoria editorial
Lidiane Vivaldini Olo
Gerência editorial
Luiz Tonolli
Editoria de Ciências Exatas
Ronaldo Rocha
Edição
Daniela Teves Nardi e Letícia Mancini Martins
Arte
Ricardo de Gan Braga (superv.),
Andréa Dellamagna (coord. de criação),
André Gomes Vitale e Claudemir Camargo Barbosa (editores de arte)
e Grapho Editoração Ltda. (diagram.)
Revisão
Hélia de Jesus Gonsaga (ger.), Rosângela Muricy (coord.),
Ana Curci, Ana Paula Chabaribery Malfa,
Vanessa de Paula Santos e Brenda Morais (estag.)
Iconografia
Sílvio Kligin (superv.),
Roberta Freire Lacerda Santos (pesquisa),
Cesar Wolf e Fernanda Crevin (tratamento de imagem)
Ilustrações
Contexto digital, EstudioMil e Ilustra Cartoon
Cartografia
Eric Fuzii, Marcelo Seiji Hirata, Márcio Santos de Souza,
Robson Rosendo da Rocha

Fotos da capa: Comstock Images/Stockbyte/Getty Images; Boris SV/Flickr Open/Getty Images; Kate Hiscock/Moment Open/Getty Images; John Seaton Callahan/Moment Open/Getty Images; Nenov/Moment Open/Getty Images; StephanieFraikin/Shutterstock/Glow Images; Claudio Divizia/Shutterstock/Glow Images; Amy Johansson/Shutterstock/Glow Images; KtD/Shutterstock/Glow Images; Tamara Kulikova/Shutterstock/Glow Images; rSnapshotPhotos/Shutterstock/Glow Images; igor.stevanovic/Shutterstock/Glow Images; V. J. Matthew/Shutterstock/Glow Images; justsolove/Shutterstock/Glow Images; Rafael Croonen/Shutterstock/Glow Images; MeSamong/Shutterstock/Glow Images

Protótipos: Magali Prado

Legendas das fotos de abertura das unidades:

Unidade 1 – Concepção artística de gráficos e equações matemáticas.

Unidade 2 – Trena sobre planta baixa de construção.

Unidade 3 – Uma das faces da escultura "Four Sided Pyramid" da *National Gallery of Art Sculpture Garden*, na cidade de Washington, Estados Unidos da América.

Unidade 4 – Visão geral do Estádio *Camp Nou* durante a partida de futebol da Liga espanhola em Barcelona, Espanha (2013).

Título original da obra:
Projeto Velear: Matemática – 8º ano

Direitos desta edição cedidos à Editora Scipione S.A.
Avenida das Nações Unidas, 7221, 3º andar, Setor D
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.scipione.com.br / atendimento@scipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bigode, Antonio José Lopes
Matemática do cotidiano : matemática / Antonio José Lopes Bigode. -- 1. ed. – São Paulo : Scipione, 2015.

Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02825 CDD-372.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

2015

ISBN 9788526296466 (AL)
ISBN 9788526296473 (PR)
Cód. da obra CL 713199
CAE 543663 (AL) / 543664 (PR)

1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

APRESENTAÇÃO

Ao aluno

É muito gratificante para um autor saber que suas ideias deram origem a uma obra capaz de ajudar os estudantes a aprender, a utilizar e a gostar de Matemática. E foi pensando nisso que esta obra foi escrita.

Esta é uma obra que apresenta e explora a Matemática e suas relações com o mundo a partir de problemas reais e desafiadores. Tratada dessa maneira, a Matemática não é fácil nem difícil, mas sim interessante, intrigante, viva, desafiadora, além de útil, prazerosa e recreativa.

Para escrever esta obra, foi preciso pesquisar o que havia de mais atual em termos de conteúdo, metodologia, comunicação e aplicações da Matemática no dia a dia. Foi preciso entender como as pessoas usam a Matemática em suas profissões e suas relações com outras áreas do conhecimento, como nas Ciências da Natureza, nas Artes e na História da humanidade.

O objetivo principal deste autor é que a obra o ajude a se habituar pensar matematicamente não só nas aulas de Matemática, mas também nas demais atividades do seu cotidiano, seja lendo um livro, desenhando, praticando um esporte, assistindo a um filme, vendo o noticiário pela TV, fazendo compras, navegando pela internet, seja se divertindo em algum esporte ou nos *games* de computador. Você vai ver que, além de tudo, raciocinar é muito gostoso!

É muito difícil não gostar da Matemática quando ela é tratada deste modo, explorando e problematizando as coisas mais importantes de nossa vida.

Agora é com você, abra o livro e comece a descobrir a Matemática do dia a dia e suas conexões.

O autor

Ilustrações: Sashatigar/Shutterstock/Glow Images

Catalin Petolea/Shutterstock/Glow Images

CONHEÇA SEU LIVRO

ÍCONES

Laboratório de geometria

Cálculo mental

Calculadora

Educação financeira

ABERTURA DE UNIDADE

Um pequeno texto e uma imagem fornecem algumas informações sobre o que será estudado na unidade.

UNIDADE 4

Aplicações algébricas e geométricas

Nesta Unidade, vamos explorar uma importante aplicação da Álgebra, os sistemas de equações, que resolveremos com base nos conhecimentos de equações já adquiridos. Saber resolver sistemas de equações é muito importante para resolver problemas práticos do dia a dia e também problemas que aparecem em outras áreas do conhecimento.

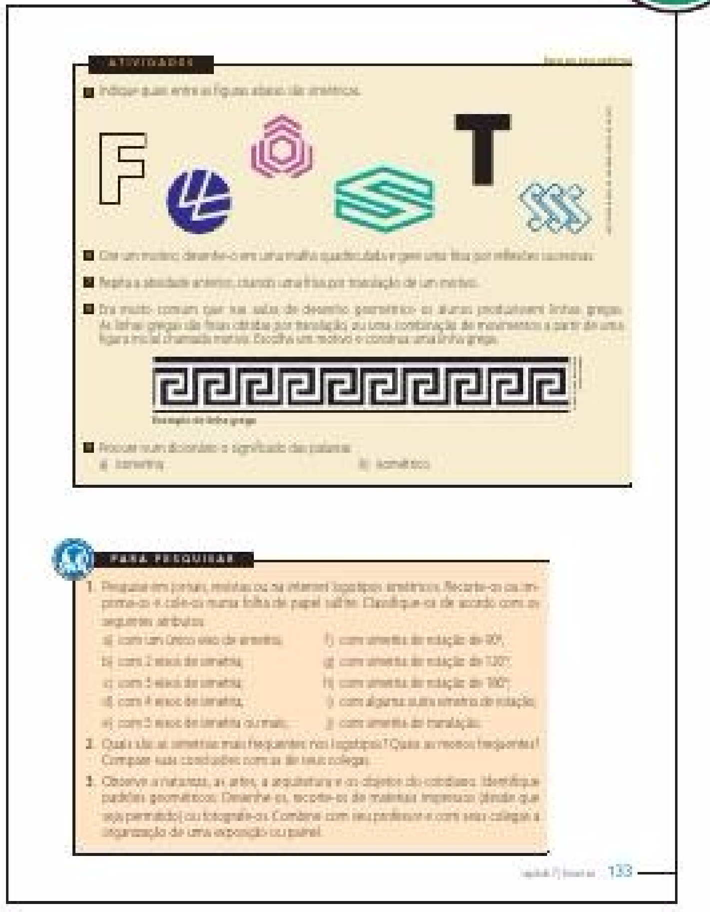
Abordaremos ainda temas importantes da Geometria, por suas aplicações práticas e por sua presença na natureza, nas artes e nos elementos do cotidiano. Trata-se de velhos conhecidos: a circunferência, o círculo e seus elementos, agora com enfoque nas suas propriedades e aplicações. Por fim, faremos uma viagem ao mundo das formas tridimensionais, hoje conhecidas como formas 3D.

170

171

PARA PESQUISAR

Atividades de pesquisa com o objetivo de complementar o conteúdo em estudo.

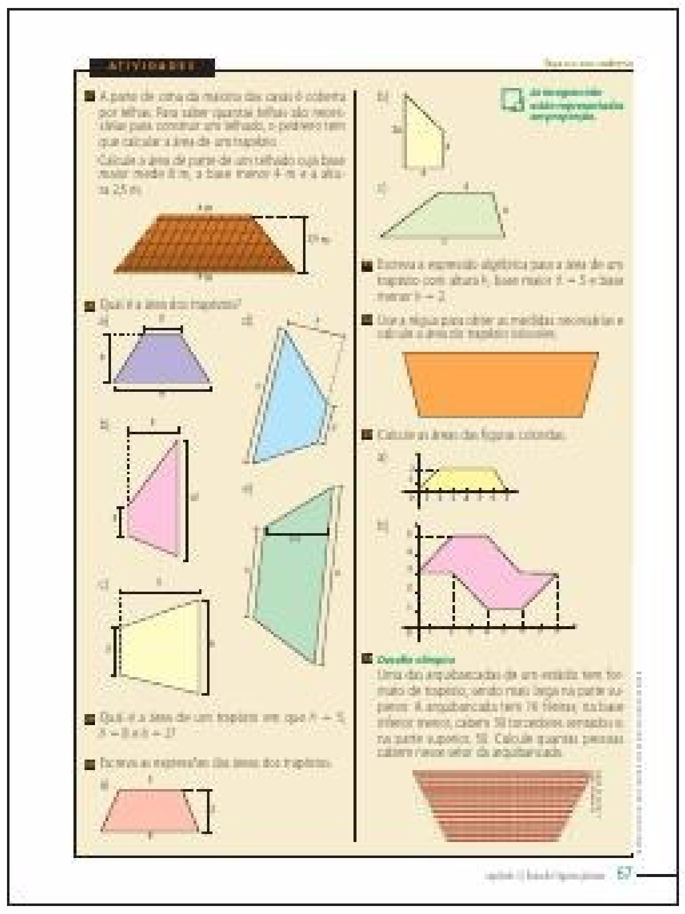


REVISE O QUE ESTUDOU

Atividades e problemas que retomam os conteúdos abordados no capítulo.

ATIVIDADES

Diferentes tipos de atividade em que o aluno poderá aplicar os conhecimentos abordados.
As atividades destacadas como “desafio olímpico” são mais complexas, desafiadoras, exigem raciocínio elaborado, investigação, levantamento de hipóteses e um pouco de criatividade.

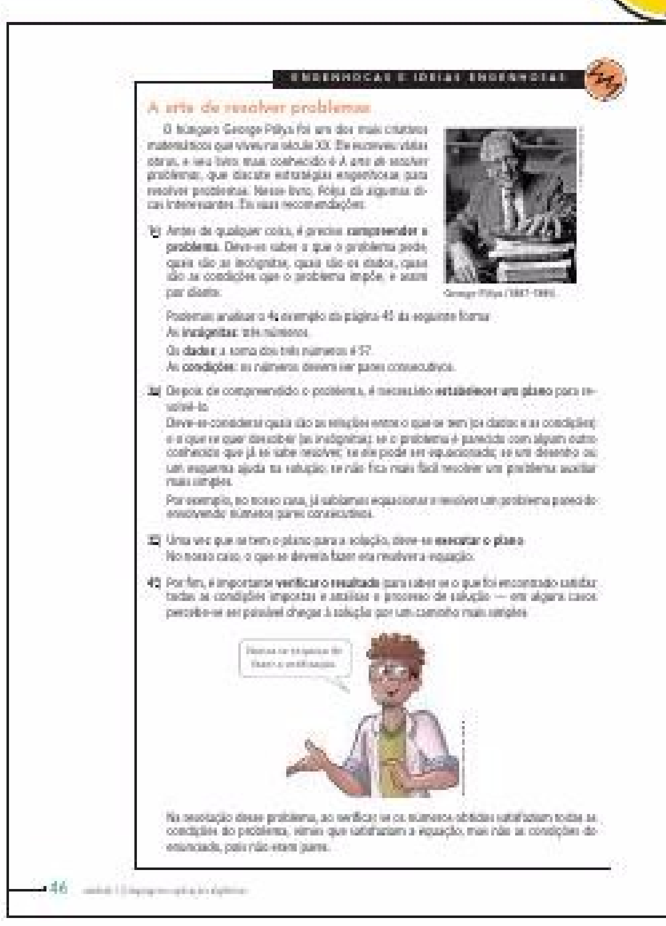


MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Seção que apresenta fatos ou situações de natureza histórica relacionadas direta ou indiretamente ao conteúdo do capítulo.

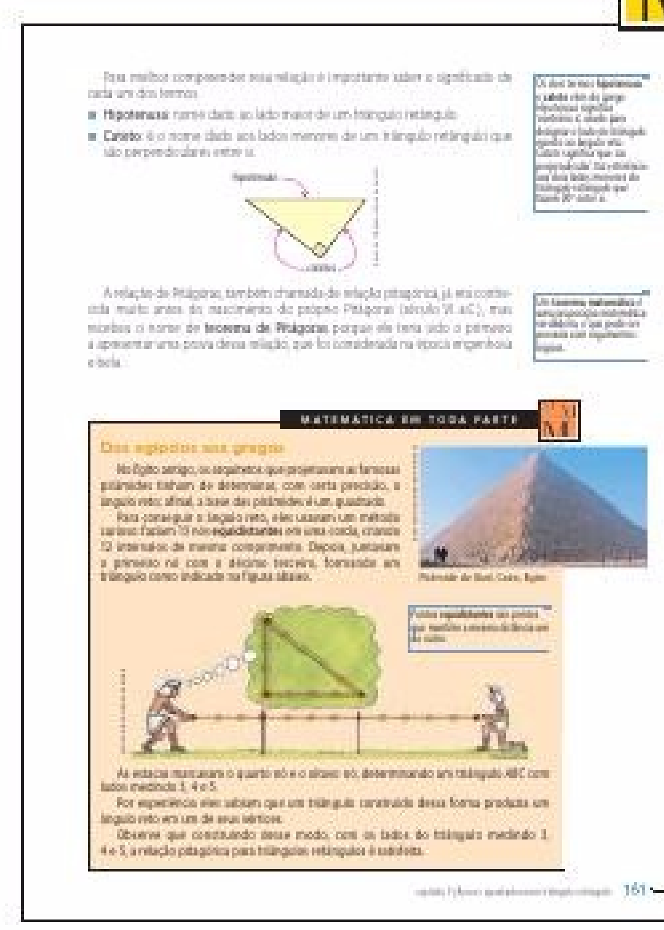
ENGENHOCAS E IDEIAS ENGENHOSAS

Esta seção apresenta soluções e ideias criativas para problemas matemáticos corriqueiros, mostrando que pode ser divertido resolver um problema matemático.



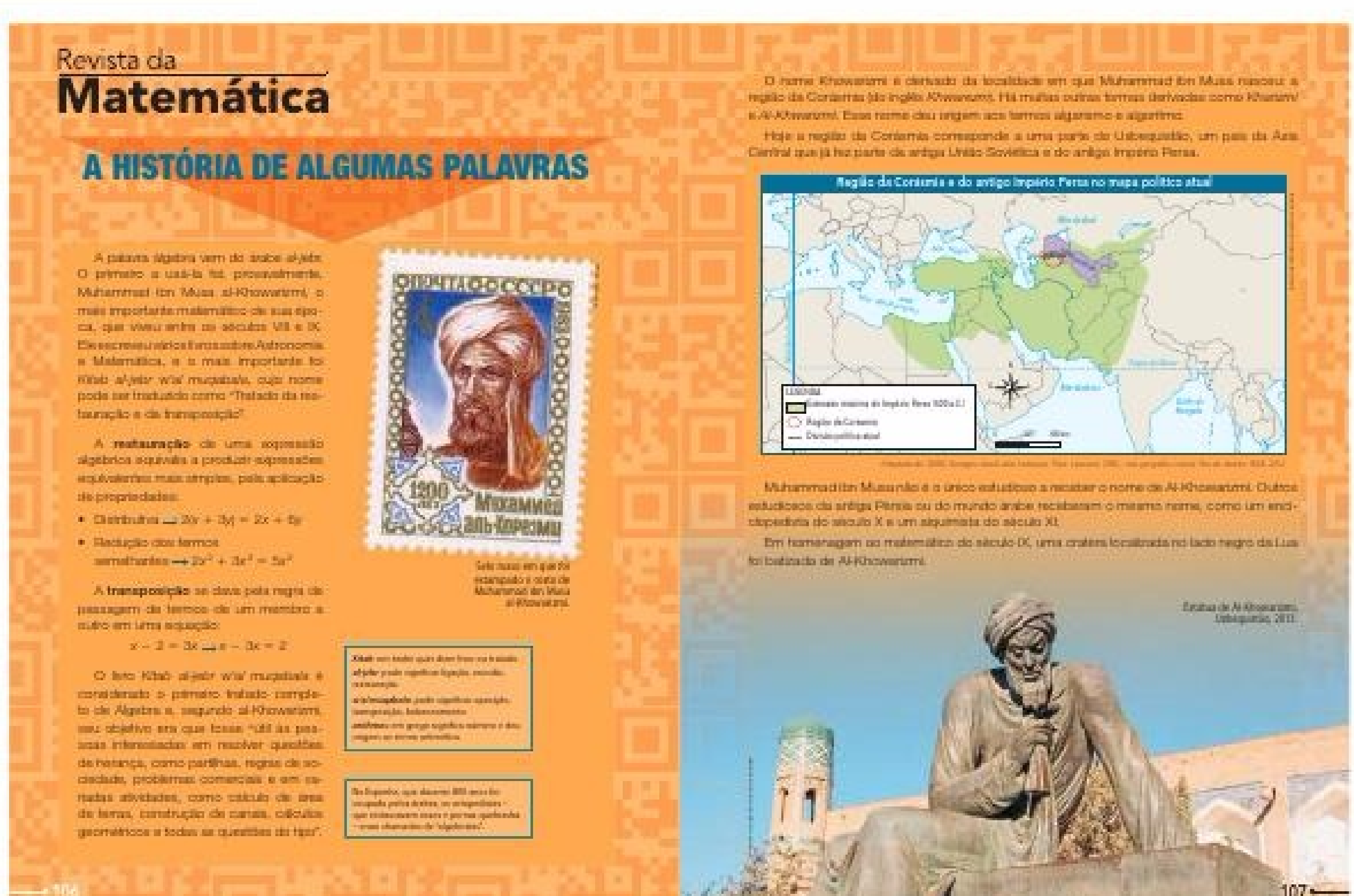
MATEMÁTICA EM TODA PARTE

Textos com temas variados que mostram como a Matemática está presente nas mais diversas atividades do cotidiano, que muitas vezes passam despercebidas.



REVISTA DA MATEMÁTICA

Seção que encerra cada capítulo com textos lúdicos e informativos sobre o conteúdo estudado.


Revista da Matemática
A HISTÓRIA DE ALGUMAS PALAVRAS

CONTEÚDO DIGITAL

Este ícone indica que há conteúdo digital disponível no Manual do Professor multimídia.

SUMÁRIO

UNIDADE 1

Linguagem e aplicações algébricas

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

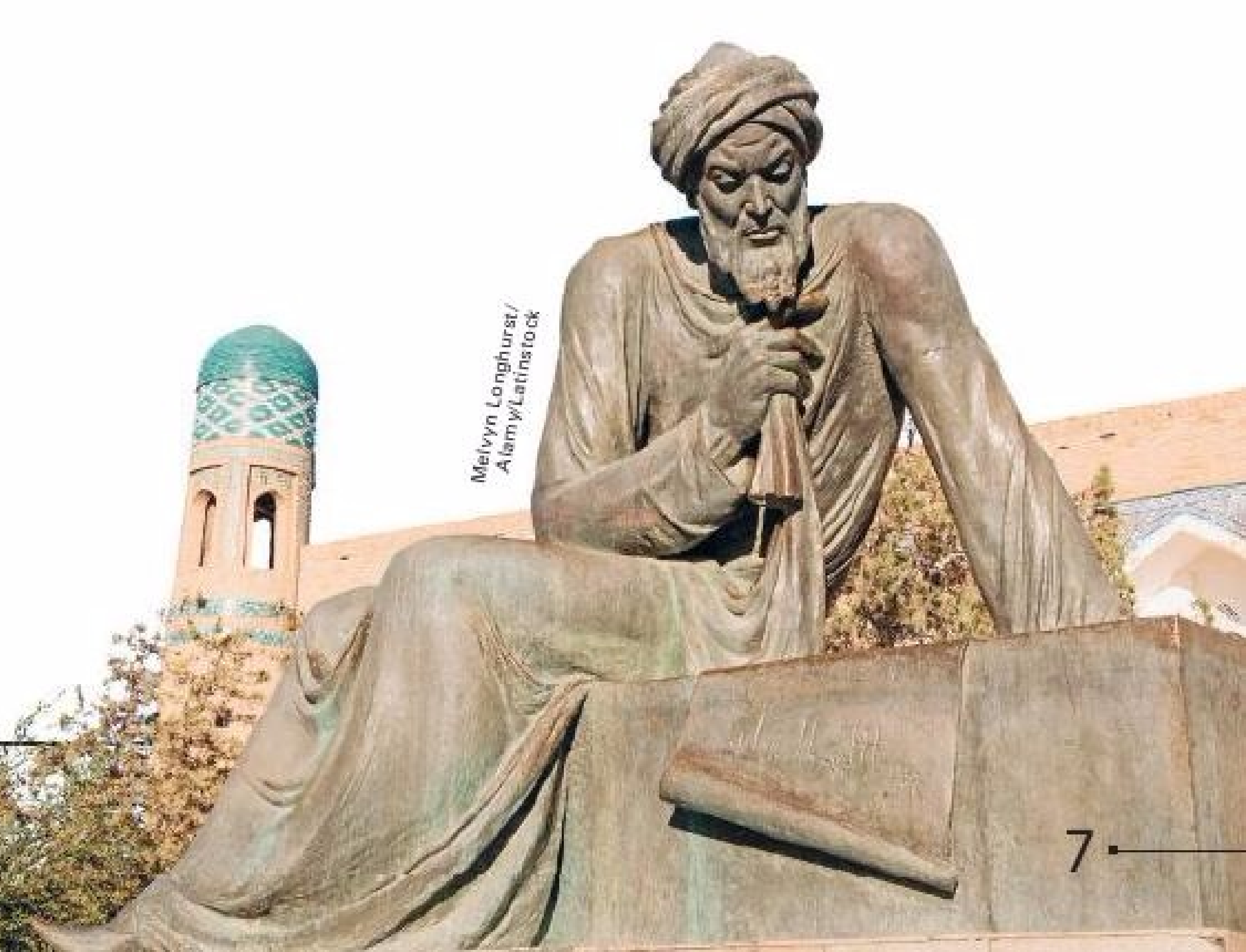
UNIDADE

2 Cálculo algébrico

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 6



Melvyn Longhurst/Alamy/Latinstock

SUMÁRIO

UNIDADE 3

Relações e propriedades geométricas

KsanasK/Shutterstock/Glow Images

UNIDADE

4 Aplicações algébricas e geométricas

CAPÍTULO 10

CAPÍTULO 11

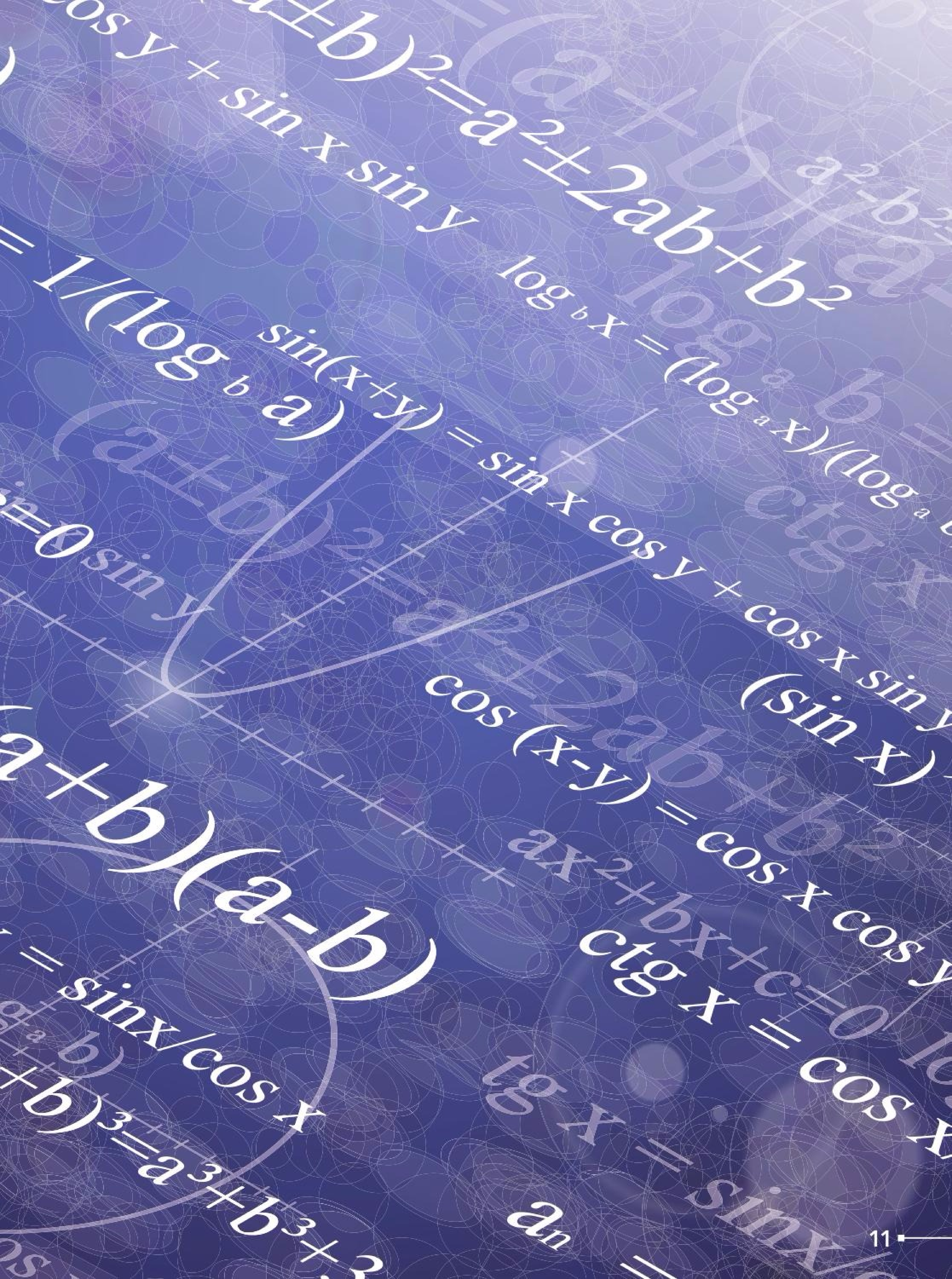
CAPÍTULO 12

UNIDADE 1

Linguagem e aplicações algébricas

A linguagem matemática é uma importante conquista da ciência, pois, por meio dos símbolos numéricos, das letras para representar grandezas e incógnitas, é possível representar relações que explicam fenômenos da natureza, relações entre quantidade, custo e preços, medidas de comprimento e superfície e muitas outras coisas importantes que você vai estudar em toda a sua vida escolar. Nesta Unidade, vamos apresentar as primeiras ideias, contar a história e usar símbolos matemáticos para expressar relações e resolver problemas.

Lonely/Shutterstock/Glow Images


$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y$
$\mathrm{ctg}\, x = \cos x$
$\log_b x = (\log_a x)/(\log_a$
$(a+b)(a-b)$
$= \sin x/\cos x$
$(\sin x)$

CAPÍTULO 1

DESAFIOS E APLICAÇÕES COM EQUAÇÕES

Você está iniciando o 8º ano com uma série de atividades desafiadoras e curiosas. A maioria dessas atividades poderá ser resolvida por meio de equações simples, que você já estudou no ano anterior e vai aprofundar nos capítulos seguintes.

Quebra-cabeças e desafios lógicos

Matemáticos e curiosos apreciam quebra-cabeças numéricos, como os quadrados e triângulos mágicos, *sudokus* e outros desafios.

Quadrados mágicos

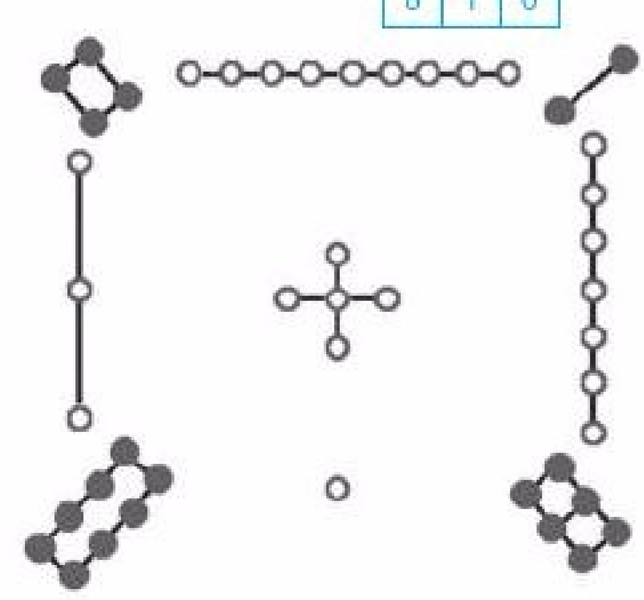
Entre os vários quebra-cabeças populares, os **quadrados mágicos** estão entre os mais antigos e populares.

Na imagem ao lado, se você contar o número de pontos que forma cada configuração em qualquer linha ou coluna: o resultado é sempre 15.

Os quadrados mágicos têm uma longa história na Matemática: foram usados como amuletos, aparecem em contos chineses, provocaram a curiosidade dos europeus na Idade Média e inspiraram artistas.

P

4	9	2
3	5	7
8	1	6



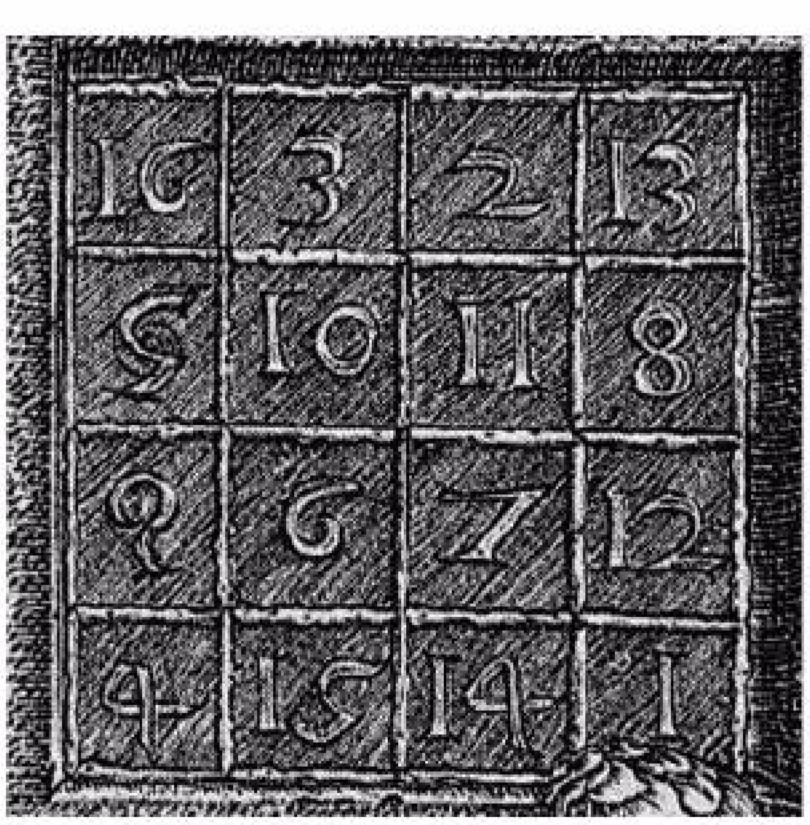
Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Reprodução de uma gravura chinesa com cerca de 2 milênios.

Um quadrado mágico é um quadro $n \times n$, em que a soma dos números de uma linha qualquer ou de uma coluna qualquer, além das diagonais, resultem um valor constante, também chamado de constante mágica.

Um quadrado mágico famoso, que aparece na gravura *Melancolia I*, feita em 1514 pelo artista renascentista alemão Albrecht Dürer (1471-1528).

Observe que a soma em qualquer fila (as 4 linhas ou as 4 colunas), e também das diagonais, é constante e igual a 34.



Albrecht Dürer/Anhaltische Gemäldegalerie, Dessau, Alemanha

Melancolia I, 1514 (detalhe).
Albrecht Dürer. Gravura de cobre.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sudoku

O *sudoku* é um quebra-cabeça relativamente recente, que entretém leitores de jornais diários, como as palavras cruzadas.

Eu tenho este quebra-cabeça no celular!

EstudioMil/Arquivo da editora

O objetivo do *sudoku* é preencher um quadrado 9 × 9 formado por 9 quadrados menores de 3 × 3, com os números de 1 a 9, de tal forma que não apareçam algarismos repetidos em cada linha, nem em cada coluna, nem em cada uma das regiões 3 × 3. Veja abaixo a representação de um *sudoku*:

Banco de imagens/Arquivo da editora

7	9					3		
					6	9		
8				3			7	6
					5			2
		5	4	1	8	7		
4			7					
6	1			9				8
		2	3					
		9					5	4

quadrado menor

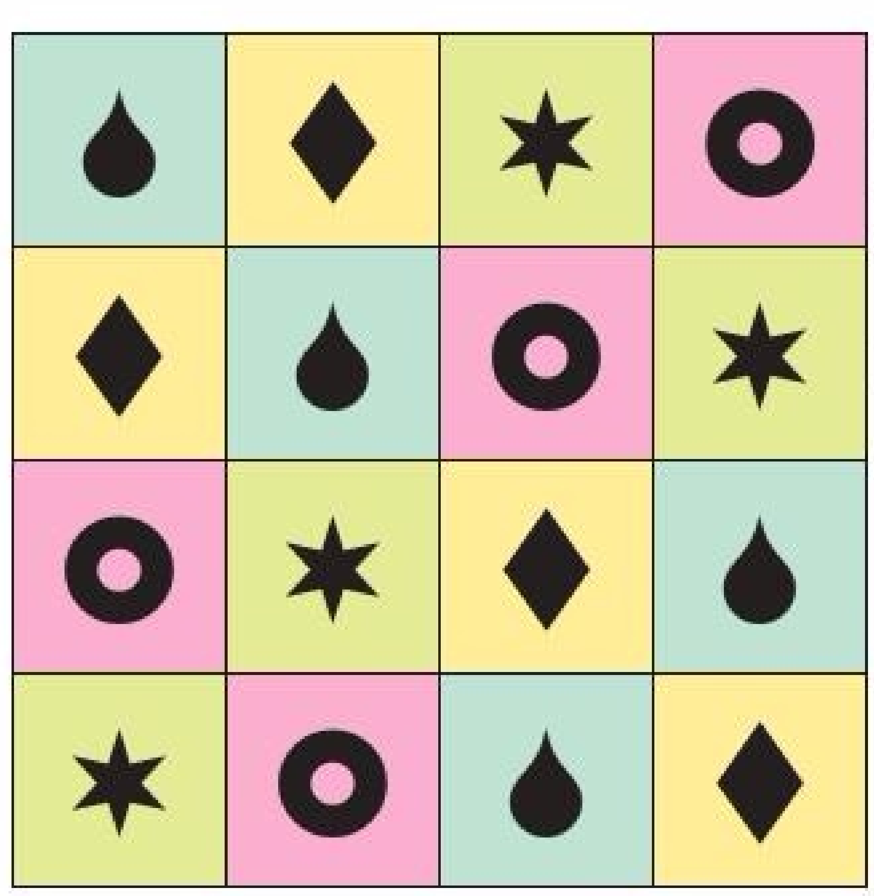
Observe que alguns algarismos são dados já no início.

Resolução do *sudoku* proposto ao lado

7	9	6	8	5	4	3	2	1
2	4	3	1	7	6	9	8	5
8	5	1	2	3	9	4	7	6
1	3	7	9	6	5	8	4	2
9	2	5	4	1	8	7	6	3
4	6	8	7	2	3	5	1	9
6	1	4	5	9	7	2	3	8
5	8	2	3	4	1	6	9	7
3	7	9	6	8	2	1	5	4

Banco de imagens/Arquivo da editora

Acredita-se que o *sudoku* tenha sido inspirado em um passatempo da Idade Média chamado *quadrados latinos*, em que se deve preencher as casas de um quadrado com símbolos diferentes, de tal modo que em cada linha e em cada coluna nenhum dos símbolos se repita.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atualmente existem *sudokus* de outros tamanhos e formatos.

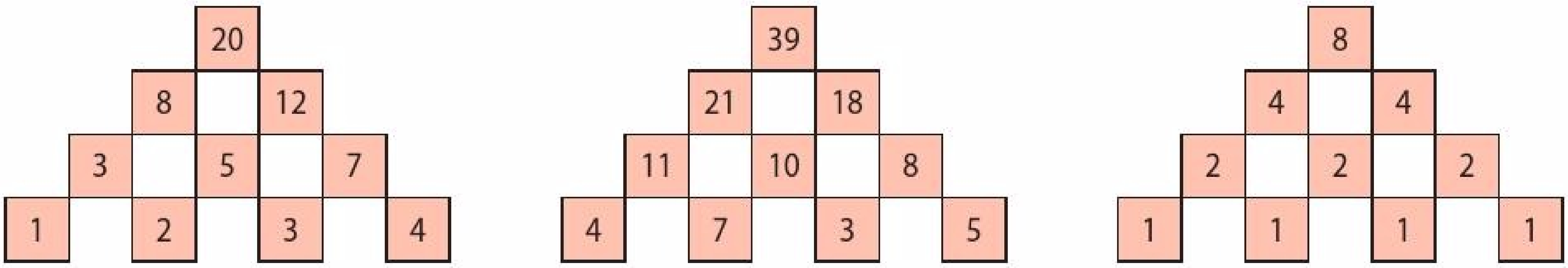
Escreva uma pirâmide mágica no quadro de giz e organize uma discussão até que os alunos percebam a regularidade. Em geral eles descobrem bem rápido.

Pirâmides mágicas

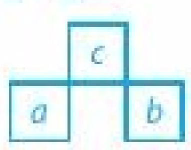
Um tipo de desafio curioso que, ao ser explorado, ajuda a desenvolver o raciocínio e a destreza matemática é a pirâmide mágica.

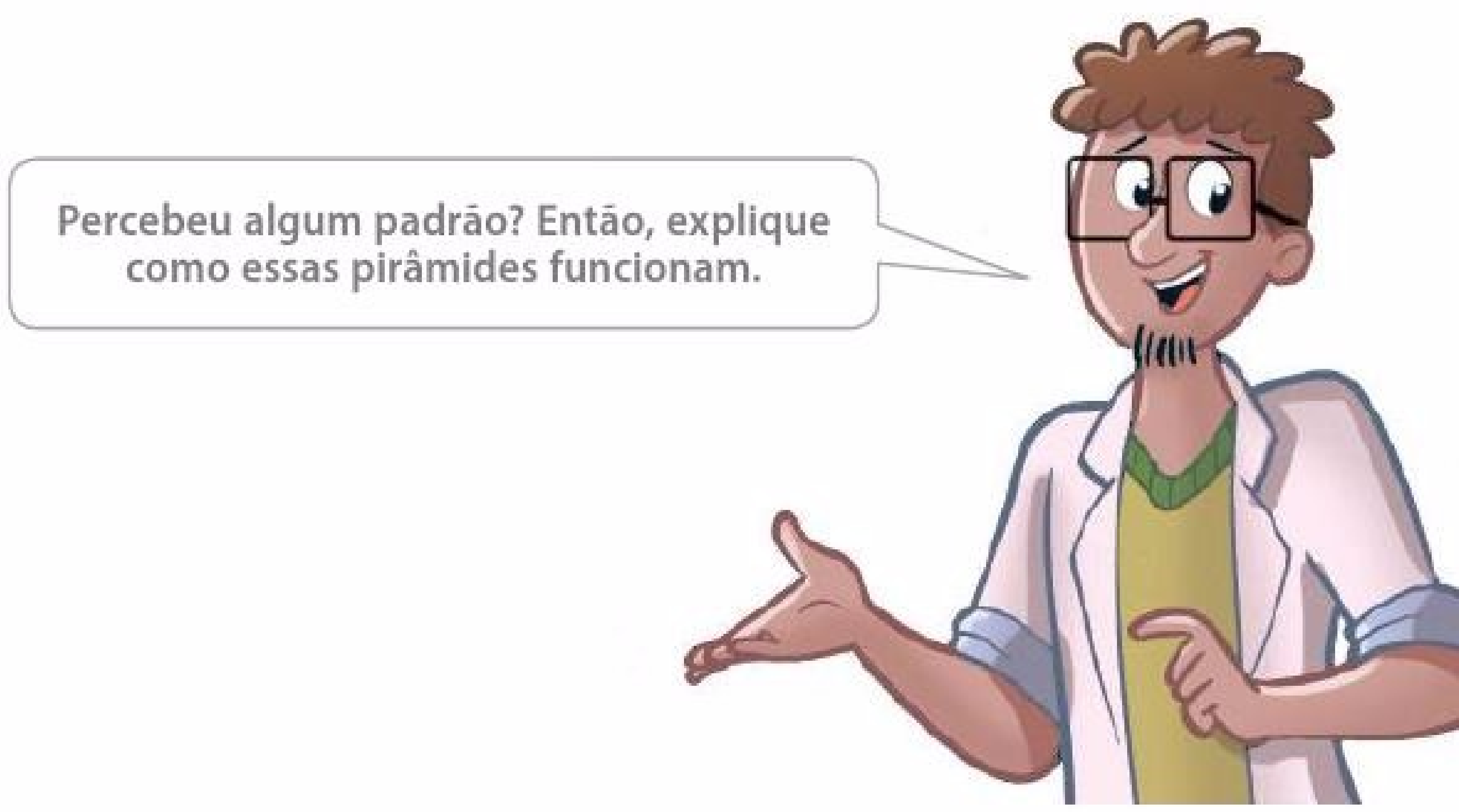
Observe atentamente as três pirâmides a seguir.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora



Os alunos devem perceber que a casa de cima é o resultado da soma das casas imediatamente abaixo.
O que está sendo explorado são operações de natureza aditiva, consolidando a percepção da relação entre a adição e a subtração como operações inversas, isto é, se $a + b = c$, então $c - b = a$ ou $c - a = b$.

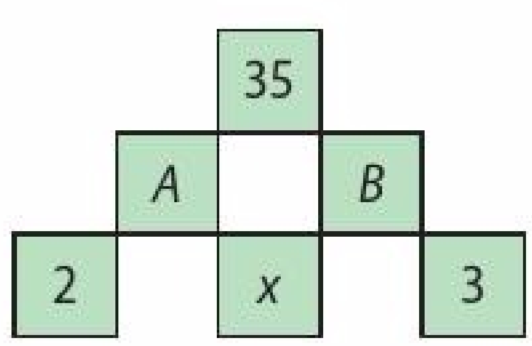




EstudioMil/Arquivo da editora

Pirâmides mágicas e equações

Vamos analisar a pirâmide a seguir escrevendo todas as relações possíveis.



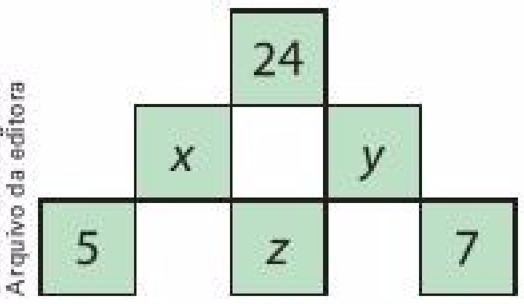
$A + B = 35$, sendo: $A = 2 + x$ e $B = x + 3$

Substituindo A e B na equação $A + B = 35$, podemos encontrar o valor de x:

$$A + B = 35$$
$$(2 + x) + (x + 3) = 35$$
$$2x + 5 = 35$$
$$2x + 5 - 5 = 35 - 5$$
$$2x = 30$$
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{30}{2}$$
$$x = 15$$

Assim, concluímos que $x = 15$, então $A = 17$ e $B = 18$.

Agora determine os valores de x, y e z na pirâmide abaixo.



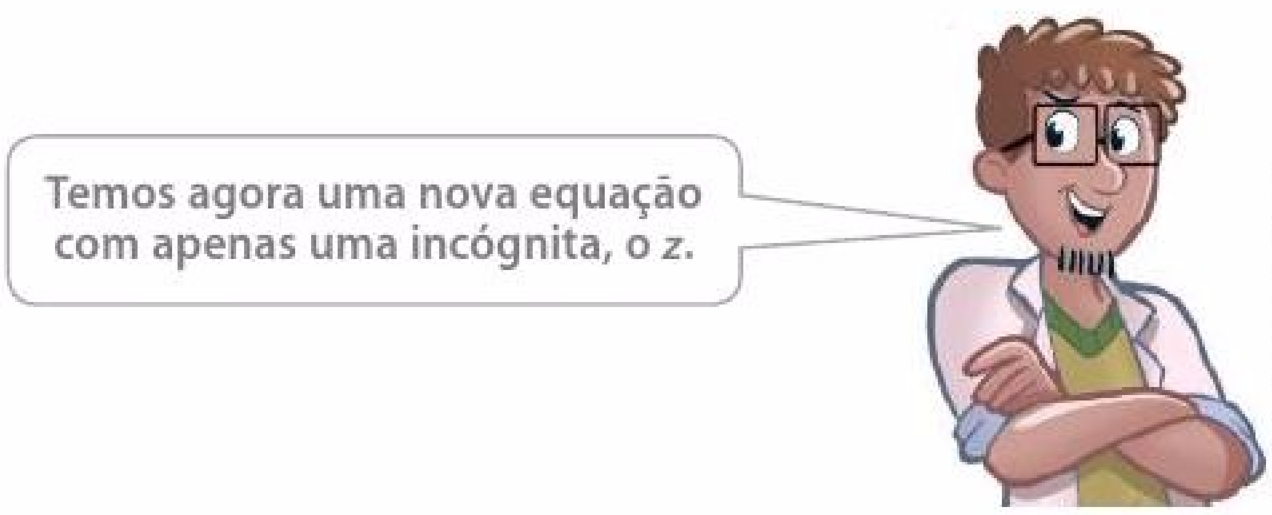
Banco de imagens/Arquivo da editora

Analisando a pirâmide, podemos escrever pelo menos três equações:

$$x + y = 24 \quad \text{(I)}$$
$$x = 5 + z \quad \text{(II)}$$
$$y = z + 7 \quad \text{(III)}$$

Podemos substituir o x e o y da equação (I) pelos segundos membros das equações (II) e (III). Veja como fica:

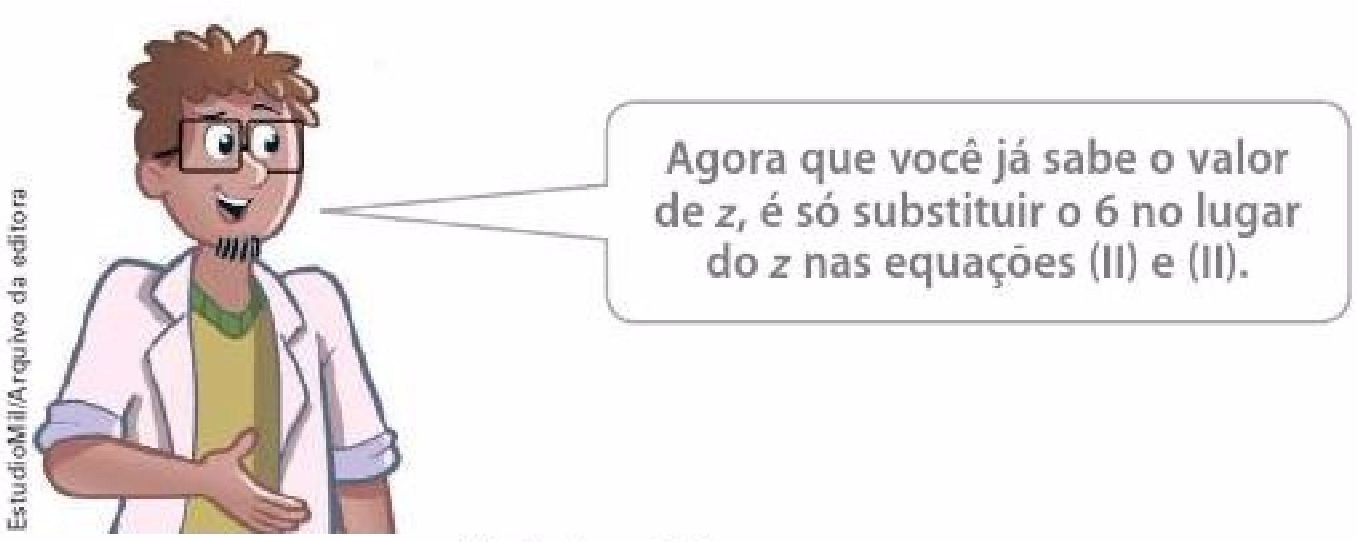
$$(5 + z) + (z + 7) = 24$$



EstudioMil/Arquivo da editora

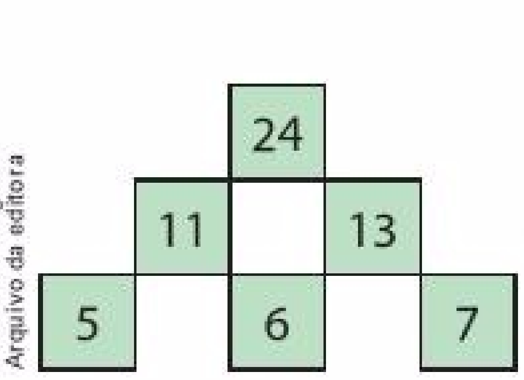
Eliminando os parênteses e somando os elementos temos:

$$2z + 12 = 24 \Rightarrow 2z = 24 - 12 = 12 \Rightarrow 2z = 12 \Rightarrow z = 6.$$



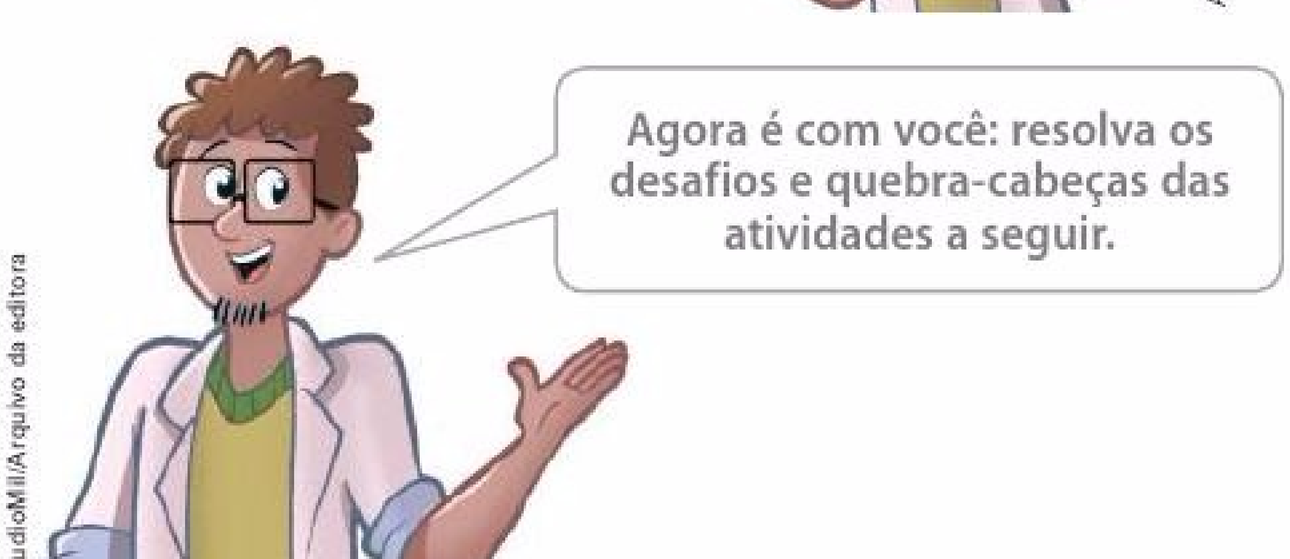
EstudioMil/Arquivo da editora

$$x = 5 + 6 = 11$$
$$y = 6 + 7 = 13$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora



EstudioMil/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 ***Desafios olímpicos*** **P** Veja resolução no Manual do Professor.

I. O quadrado abaixo é mágico. Descubra o valor de x, sabendo que a constante mágica é 45 e construa o quadrado mágico em seu caderno.

Some as expressões de cada linha ou coluna e iguale a 45.

$x + 1$ 18	$x - 6$ 11	$x - 1$ 16
$x - 4$ 13	$x - 2$ 15	x 17
$x - 3$ 14	$x + 2$ 19	$x - 5$ 12

II. No quadrado mágico a seguir, a constante mágica é 30. Descubra o valor de x e construa o quadrado mágico numérico em seu caderno.

$x - 8$ 0	$x + 3$ 11	$x - 1$ 7	$x + 4$ 12
$x + 5$ 13	$x - 2$ 6	$x + 2$ 10	$x - 7$ 1
$x + 6$ 14	$x - 3$ 5	$x + 1$ 9	$x - 6$ 2
$x - 5$ 3	x 8	$x - 4$ 4	$x + 7$ 15

III. Construa em seu caderno um quadrado 4×4 e distribua os números: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 16, 25, 27, 33, 49, 55, 65, 77, 81 e 91 obedecendo à regra: cada fila (linha ou coluna) e subquadrado não podem ter dois números que sejam múltiplos do mesmo número (por exemplo: 55 e 25 são múltiplos de 5, então eles não podem estar na mesma linha, coluna ou subquadrado).

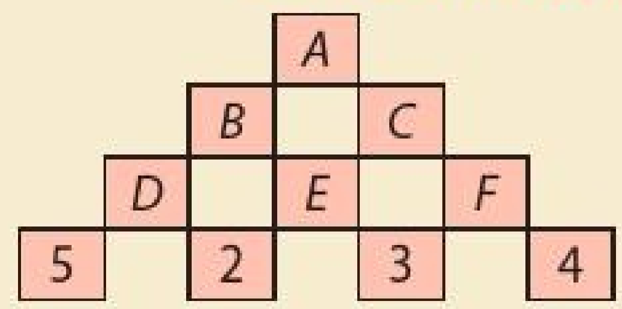
2 No campeonato da escola, 16 amigos torcedores, sendo 4 do Corinthians, 4 do Santos, 4 do Flamengo e 4 do Vasco, se reuniram para assistir aos jogos. Eles sentaram em uma arquibancada 4×4. Para ficarem bem distribuídos e não se distraírem conversando sobre os seus times, eles tomaram o cuidado de sentar de acordo com as seguintes regras: **P** Veja resolução no Manual do Professor.

1ª) Em cada fila horizontal ou vertical, sempre havia um torcedor de cada time.

2ª) Nenhum dos subquadrados tinha dois torcedores do mesmo time.

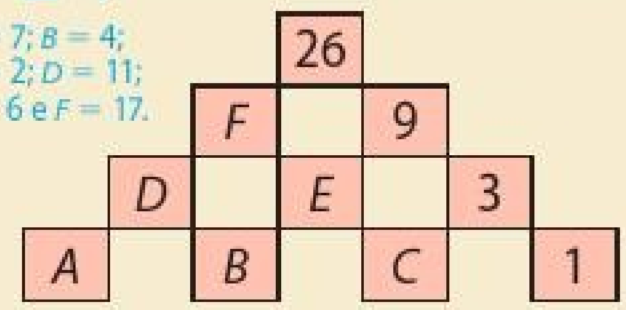
Construa um quadrado 4×4 no seu caderno e use as letras C, S, F e V para indicar os torcedores de cada time. Distribua-os no quadrado da arquibancada de acordo com as regras propostas.

3 De acordo com a regra que você observou, determine o valor numérico das letras desta pirâmide. $D = 5 + 2 = 7$; $E = 2 + 3 = 5$; $F = 3 + 4 = 7$; $B = D + E = 7 + 5 = 12$; $C = E + F = 5 + 7 = 12$; $A = B + C = 12 + 12 = 24$

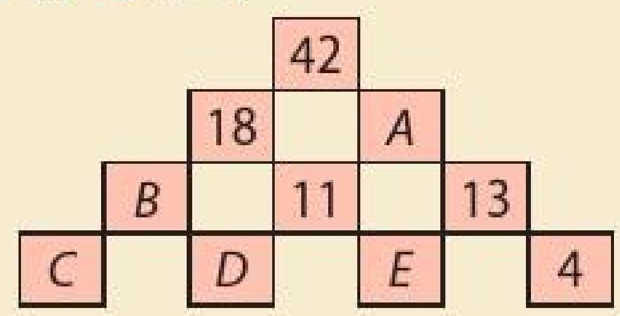


4 Determine o valor das letras na pirâmide abaixo.
P Veja comentário no Manual do Professor.

$A = 7$; $B = 4$; $C = 2$; $D = 11$; $E = 6$ e $F = 17$.

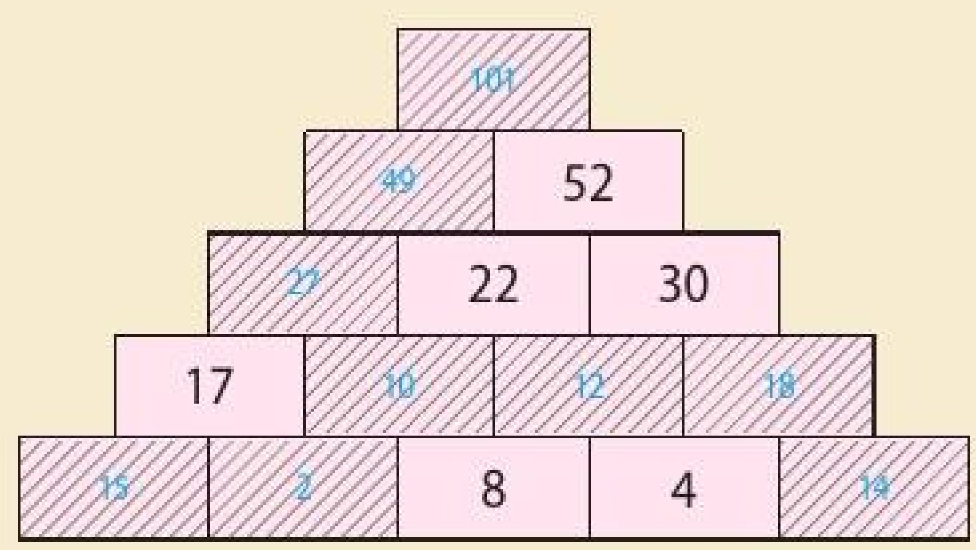


5 Determine os valores de A, B, C, D e E.
$A = 24$; $B = 7$; $C = 5$; $D = 2$ e $E = 9$.



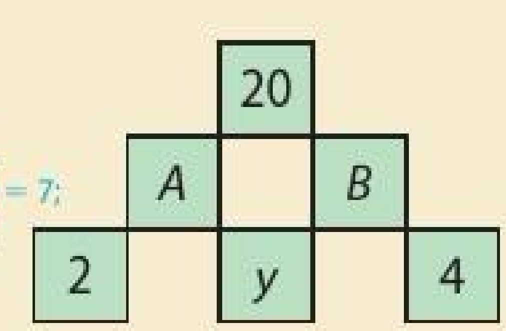
6 Em seu caderno, copie e complete mais esta pirâmide neste novo formato em que as casas se apoiam como tijolos, uma em cima da outra.

A regra é semelhante à das pirâmides que você resolveu até agora.

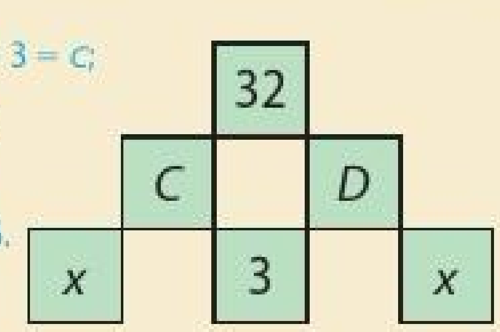


7 Determine os valores de x, y, A, B, C e D.

a) $A + B = 20$; $2 + y = A$; $y + 4 = B$; $2y + 6 = 20 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$; $A = 9$ e $B = 11$.



b) $C + D = 32$; $x + 3 = C$; $3 + x = D$; $2x + 6 = 32 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 13$; $C = 16$ e $D = 16$.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Um modo engenhoso de encontrar o "xis" da questão

Fabrízio é um aluno muito curioso e gosta de enfrentar desafios matemáticos, mesmo quando ainda não estudou tudo sobre o assunto que o problema trata.

Quando seu professor anunciou que na semana seguinte estudariam equações, ele resolveu se preparar e estudar o assunto antes da aula, resolvendo alguns problemas que encontrou no livro de seu avô.

> O dobro de um número menos 6 é dividido por 4, somando 7 ao resultado, obtém-se 12. Qual é esse número?

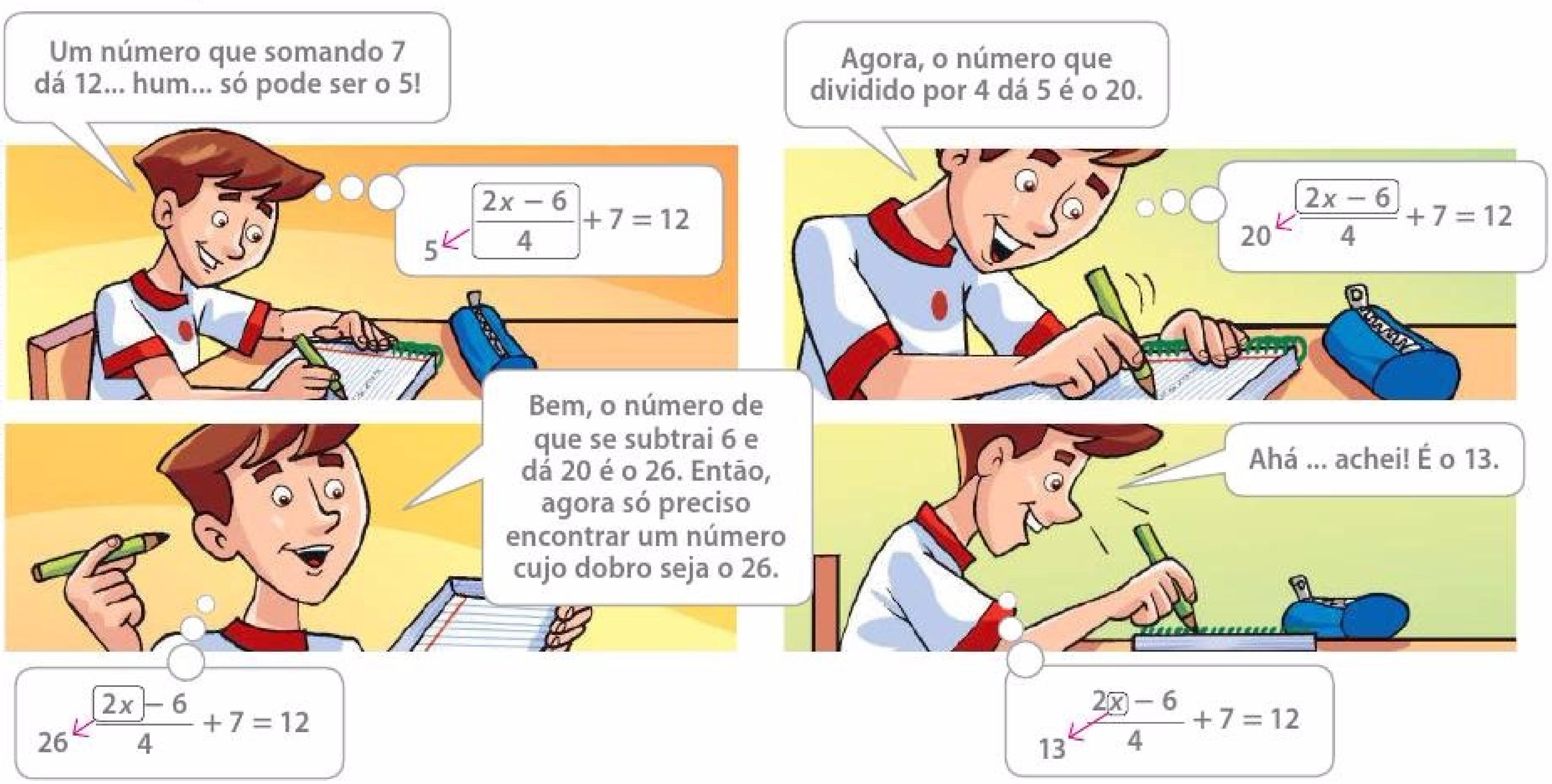
Fabrízio logo pensou em usar o x para representar o valor desconhecido e escreveu o enunciado do problema em linguagem matemática, obtendo uma equação, como a ao lado.

dobro de um número; menos 6

$$\frac{2x - 6}{4} + 7 = 12$$

dividido por 4; somando 7; obtém-se 12

Embora Fabrízio ainda não tivesse aprendido como resolver equações, ele conseguiu resolver o desafio usando um procedimento muito engenhoso: começou de trás para a frente. Acompanhe seu raciocínio.



Ilustrações: Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Agora é com você: descubra também o "xis" da questão resolvendo as atividades.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

8 O quádruplo de um número é 100. Qual é esse número? 25 ($4x = 100 \Rightarrow x = 100 : 4 = 25$)

9 O triplo do antecessor de um número é 48. Qual é esse número? 17 ($3(x - 1) = 48 \Rightarrow x - 1 = 48 : 3 = 16$; $x - 1 = 16 \Rightarrow x = 17$)

10 A metade do sucessor de um número é 5. Qual é esse número? 9 ($(x + 1) : 2 = 5 \Rightarrow x + 1 = 10 \Rightarrow x = 9$)

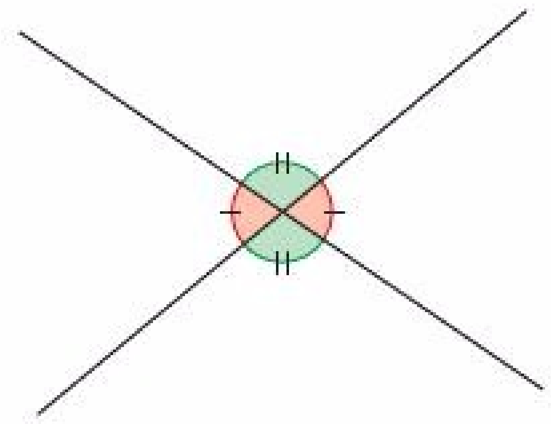
11 João pensou em um número, triplicou-o e adicionou 8 ao resultado, em seguida dividiu tudo por 5 e subtraiu 10 obtendo como resultado o número 0 (zero). Qual é o número pensado por João?
$(3x + 8) : 5 - 10 = 0$; o número que subtraindo 10 resulta em 0 é o 10; o número que dividido por 5 resulta em 10 é o 50; o número que somado a 8 resulta em 50 é o 42; o número cujo triplo é 42; é o 14. O número que João pensou foi 14.

Equações e ângulos

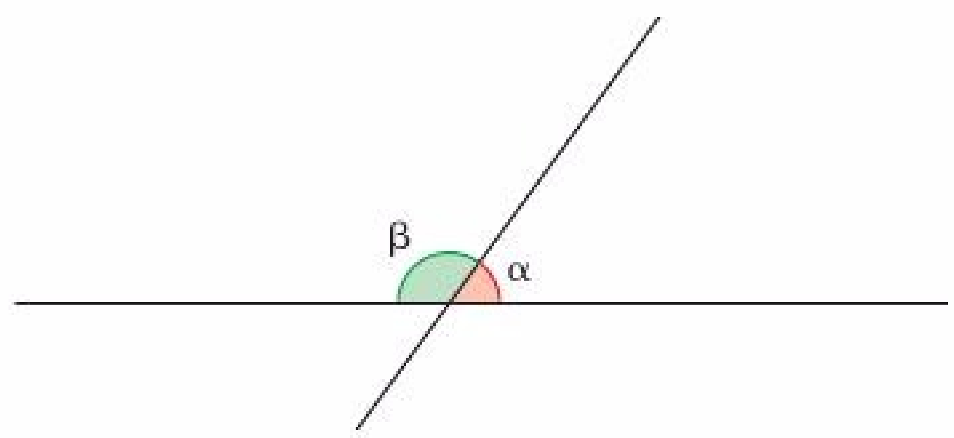
Alguns enunciados de problemas geométricos podem ser resolvidos por meio de equações simples.

Para que seja possível resolver algumas atividades, é importante lembrar de alguns fatos já estudados sobre ângulos:

- Os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

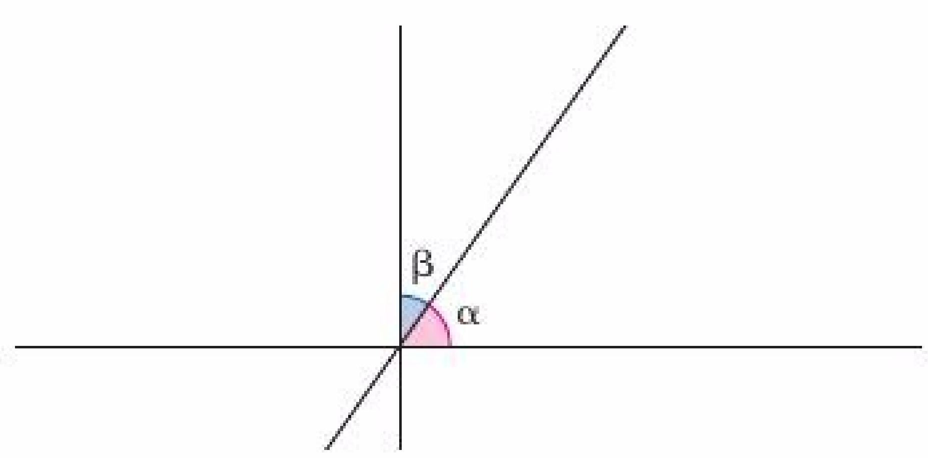


- A soma da medida de dois ângulos suplementares é 180°.



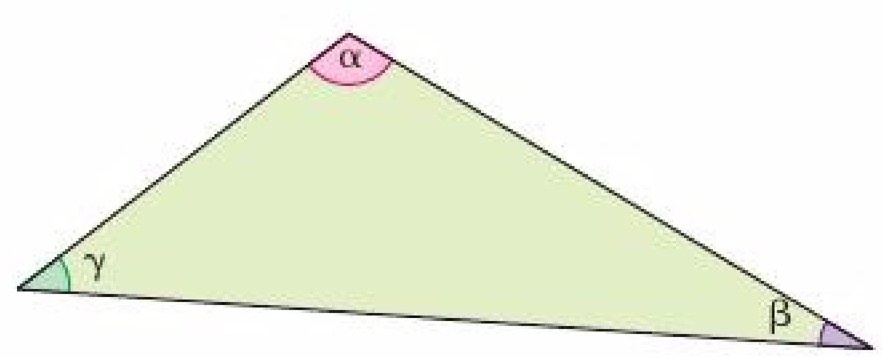
$\alpha + \beta = 180°$

- Dois ângulos complementares formam um ângulo reto.



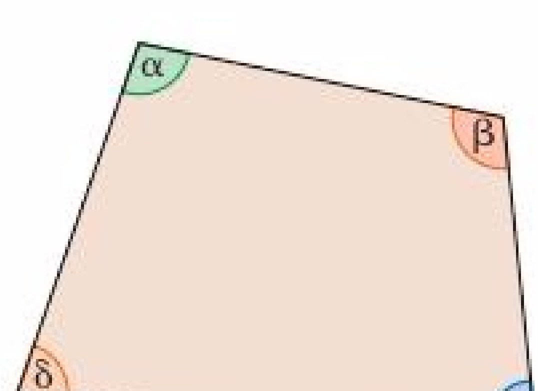
$\alpha + \beta = 90°$

- A soma da medida dos ângulos de um triângulo qualquer é 180º.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

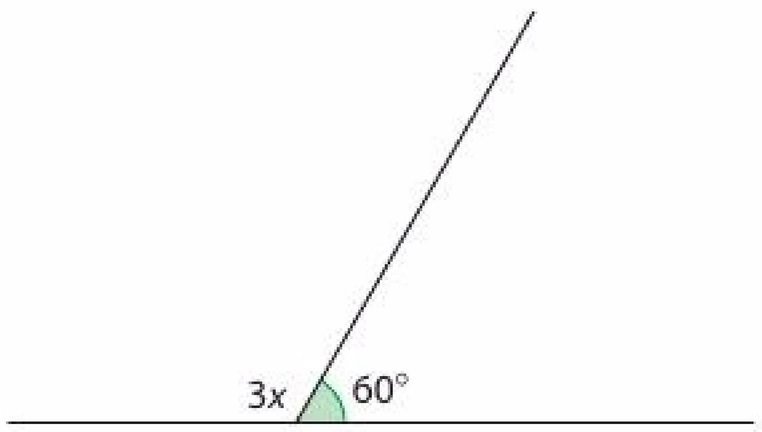
- A soma da medida dos ângulos de um quadrilátero é 360°.



$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$

Veja como resolver problemas sobre ângulos usando equações.

Modelo 1



Esses ângulos são suplementares, isto quer dizer que:

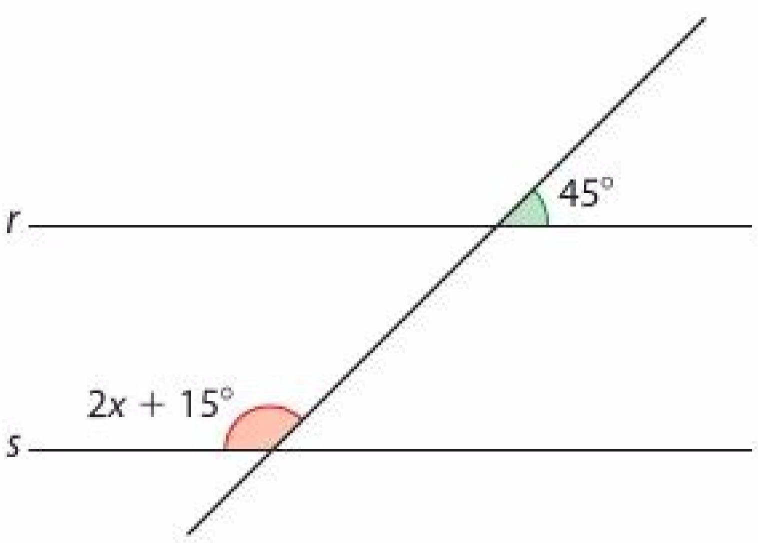
$3x + 60° = 180°$

Resolvendo a equação temos:

$$3x = 180° - 60°$$
$$3x = 120°$$
$$x = \frac{120°}{3} = 40°$$
$$x = 40°$$

Verifique que o ângulo obtuso mede $3 \cdot 40 = 120°$.

Modelo 2



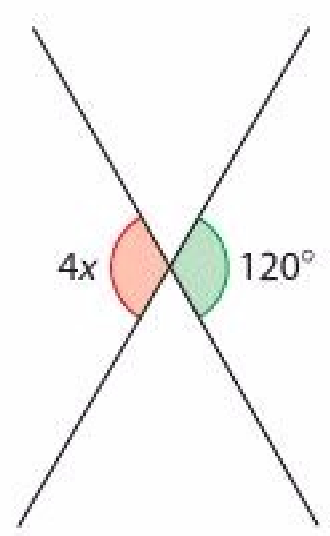
As duas retas r e s são paralelas. Isso quer dizer que o suplemento do ângulo obtuso $2x + 15°$ é $45°$. Portanto:

$$2x + 15° + 45° = 180°$$
$$2x + 60° = 180°$$
$$2x = 120°$$
$$x = 60°$$

Confira que o ângulo obtuso mede:

$2 \cdot 60 + 15° = 120° + 15° = 135°$

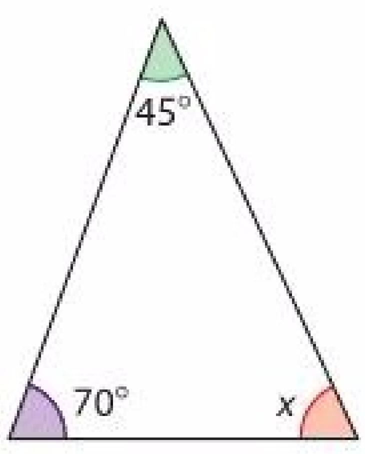
Modelo 3



Os ângulos indicados são opostos pelo vértice, portanto:

$$4x = 120°$$
$$x = \frac{120°}{4}$$
$$x = 30°$$

Modelo 4



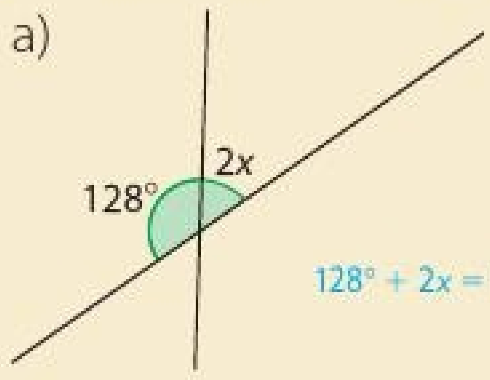
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, logo:

$$70° + 45° + x = 180°$$
$$x = 180° - 70° - 45°$$
$$x = 65°$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

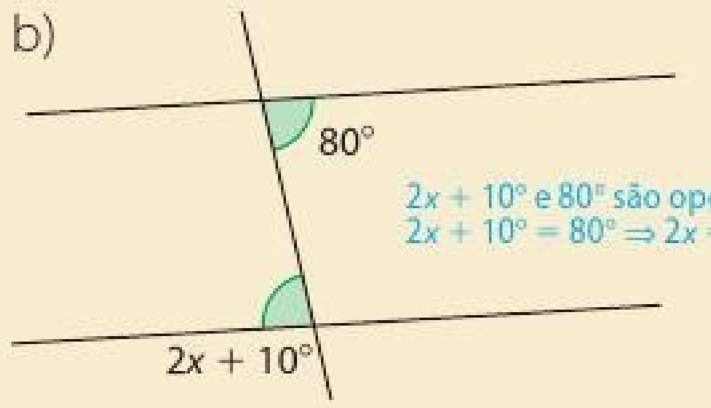
12 Determine o valor de x e y:

a)



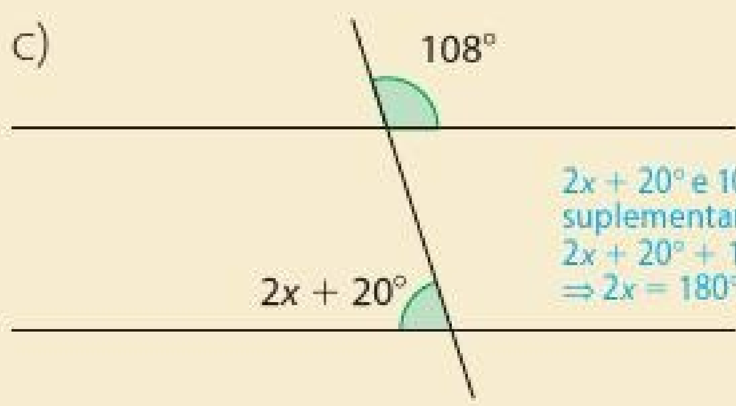
$128° + 2x = 180° \Rightarrow 2x = 52° \Rightarrow x = 26°$

b)



$2x + 10°$ e $80°$ são opostos pelo vértice, então:
$2x + 10° = 80° \Rightarrow 2x = 70° \Rightarrow x = 35°$.

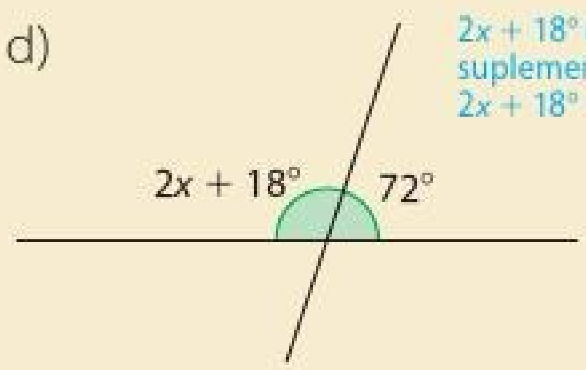
c)



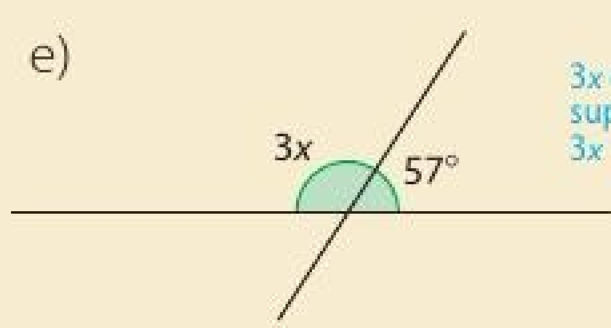
$2x + 20°$ e $108°$ são ângulos suplementares, logo:
$2x + 20° + 108° = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 180° - 128° = 52° \Rightarrow x = 26°$.

d)

$2x + 18°$ e $72°$ são ângulos suplementares, então:
$2x + 18° + 72° = 180° \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°$.

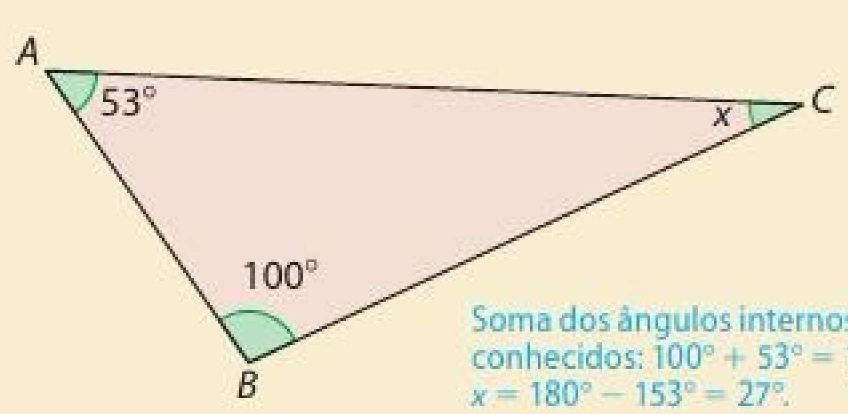


e)



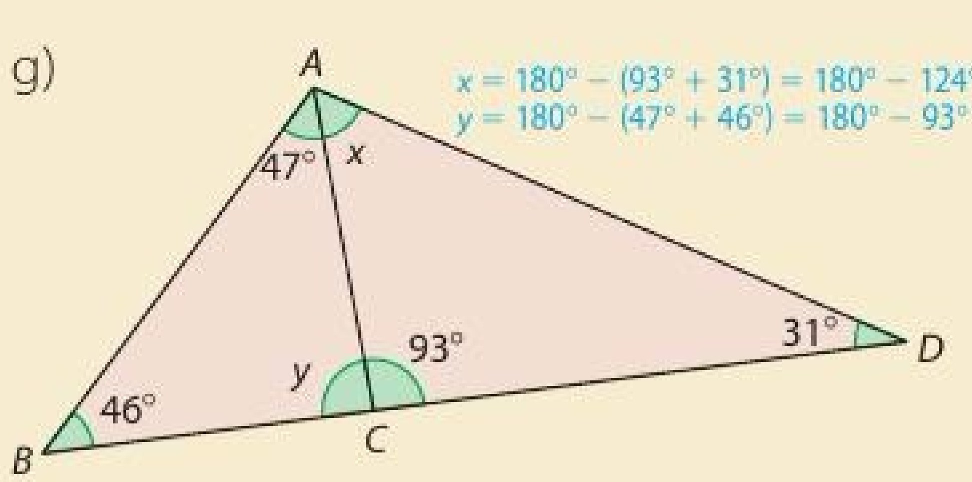
$3x$ e $57°$ são ângulos suplementares, logo:
$3x + 57° = 180° \Rightarrow 3x = 123° \Rightarrow x = 41°$.

f)



Soma dos ângulos internos conhecidos: $100° + 53° = 153°$
$x = 180° - 153° = 27°$.

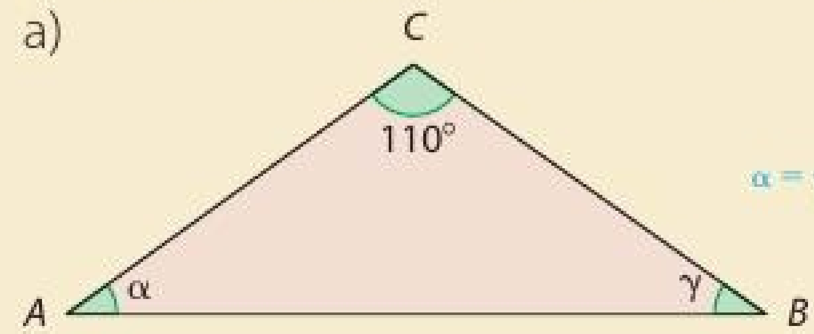
g)



$x = 180° - (93° + 31°) = 180° - 124° = 56°$
$y = 180° - (47° + 46°) = 180° - 93° = 87°$.

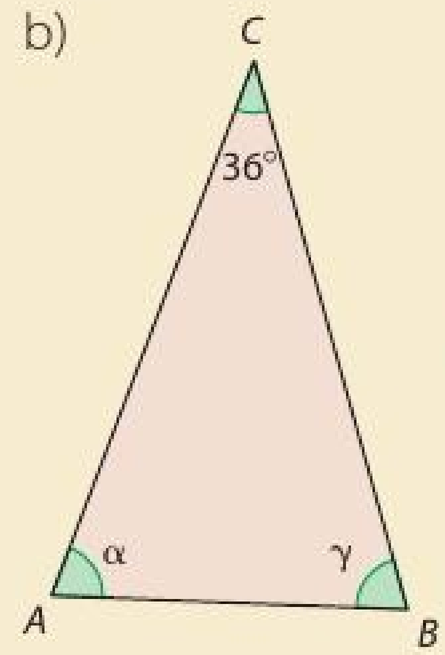
13 Os triângulos abaixo são isósceles, então $AC = BC$. Isso implica que os ângulos da base, com vértices em A e B, são iguais. Sabendo disso, determine os ângulos da base dos triângulos.

a)



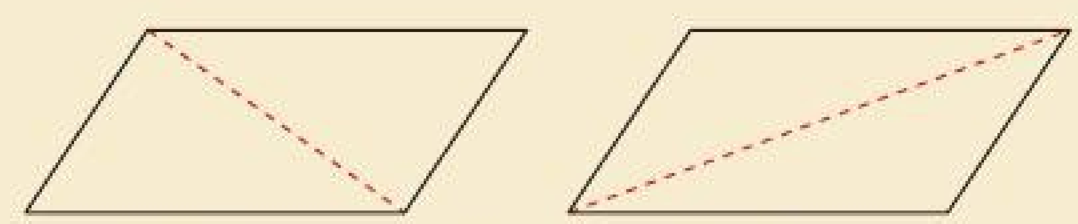
$\alpha = \gamma = 35°$

b)



$\alpha = \gamma = 72°$

14 É possível decompor um paralelogramo em dois triângulos iguais.



assim... ou assim.

Sabendo que:

- os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais;
- a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°;

responda:

Se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e o paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos, a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é 360°.

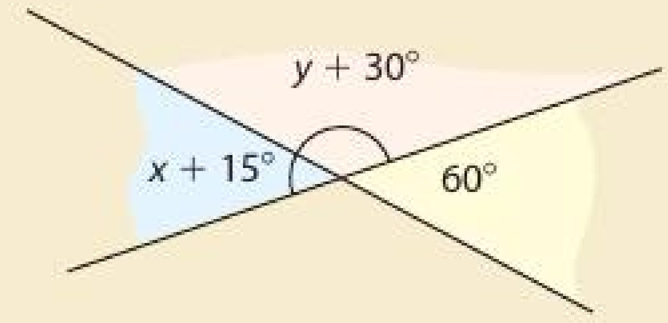
a) Quanto é a soma dos ângulos internos do paralelogramo?

b) Se o ângulo agudo do paralelogramo mede 50°, quanto mede o ângulo obtuso?

Se o ângulo agudo do paralelogramo mede 50° e os ângulos opostos têm a mesma medida, então o ângulo obtuso mede 130°.

15 ***Desafio olímpico***

Descubra os valores angulares de x e y.



Dica: lembre-se das relações entre ângulos:

- opostos pelo vértice;
- suplementares.

$y + 30°$ e $60°$ são ângulos suplementares, então:
$y + 30° + 60° = 180° \Rightarrow y = 90°$
$x + 15°$ e $60°$ são opostos pelo vértice, então: $x + 15° = 60° \Rightarrow x = 45°$

Equações e a regra de três

No estudo de proporcionalidade são frequentes problemas em que se tem uma igualdade de duas razões, formando assim uma proporção, em que três informações são conhecidas e uma é desconhecida.

Para resolver problemas desse tipo usamos a regra de três, que consiste em achar o termo desconhecido de uma proporção sendo conhecidos os outros três.

Acompanhe os seguintes exemplos:

P No livro do 7º ano, fizemos uma introdução à Álgebra com as primeiras noções e procedimentos para resolver equações e proporcionalidade. Este item relaciona um método para resolver problemas de proporcionalidade, a regra de três, com as equações. Consideramos essa abordagem adequada para o início do 8º ano, pois, além de funcionar como uma revisão de conceitos e procedimentos, introduz e consolida ideias e técnicas novas de resolução de problemas, explicitando as conexões matemáticas que não são percebidas naturalmente nesta faixa etária.

- De acordo com a Constituição brasileira, as proporções da bandeira brasileira devem respeitar a razão 14 : 20. Isto quer dizer que, se queremos construir uma bandeira cujo lado maior do retângulo mede 3 m, para saber a medida do comprimento do lado menor, temos de montar e resolver a seguinte proporção:

$$\frac{14}{20} = \frac{x}{3} \qquad \text{(I)}$$

- Se um tanque de combustível tem capacidade para 48 L e seu consumo é de 2 L a cada 23 km rodados, quantos quilômetros podem ser percorridos com o tanque cheio?

  Para responder a essa questão, é preciso resolver a proporção:

$$\frac{2}{23} = \frac{48}{x} \qquad \text{(II)}$$

Veja que nos dois exemplos as proporções (I) e (II) são equações, em que o x é o termo desconhecido.

Em uma proporção, como indicado a seguir, é costume nomear os termos.

$$a : \underbrace{b = c}_{\text{meios}} : d$$

extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

meios

extremos

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc}$$

Esta é a propriedade fundamental das proporções (PFP): "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".


EstudioMil/Arquivo da editora

Essa propriedade pode ser demonstrada usando os princípios da Álgebra. Veja:

Considere a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, em que b e d são números racionais diferentes de zero.

P Ver capítulo 7 do livro do 7º ano.

Podemos multiplicar os dois lados da igualdade por bd. ⟶ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

No primeiro membro, b cancela com b, e no segundo membro, d cancela com d. ⟶ $\frac{a\cancel{b}d}{\cancel{b}} = \frac{cb\cancel{d}}{\cancel{d}}$

$$ad = cb$$

Para resolver o problema da bandeira e do consumo do automóvel, podemos aplicar a PFP. Veja:

(I) $\frac{14}{20} = \frac{x}{3} \Rightarrow 14 \cdot 3 = 20x \Rightarrow x = 42 : 20 = 2{,}1$

Se o lado maior do retângulo da bandeira medir 3 m, o lado menor deve medir 2,1 m.

(II) $\frac{2}{23} = \frac{48}{x} \Rightarrow 2x = 23 \cdot 48 \Rightarrow 2x = 1\,104 \Rightarrow x = 1\,104 : 2 = 552$

Com 48 L de combustível o automóvel pode percorrer 552 km.

Em problemas como esses, em que as grandezas aumentam ou diminuem na mesma proporção, dizemos que as grandezas são **diretamente proporcionais**.

Mas há outras situações em que o aumento de uma grandeza vai implicar a diminuição da outra. Nesses casos, as grandezas são **inversamente proporcionais**.

Veja os exemplos de grandezas inversamente proporcionais:

- Uma fábrica usa 6 máquinas para produzir certa quantidade de peças e conclui a produção em 8 dias. Para produzir o mesmo número de peças na metade do tempo, ou seja, em 4 dias, a indústria vai precisar usar o dobro de máquinas.

  Nesse caso, para produzir o mesmo número de peças, o aumento do número de máquinas implica a diminuição do tempo.


arosoft/Shutterstock/Glow Images

Carro em rodovia

- O percurso de automóvel de uma cidade a outra na velocidade média de 80 km por hora demora 3 horas. Diminuindo a velocidade para 60 km em média, o tempo de percurso será maior.

  Nesse caso, a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais. Aumentando a velocidade, diminui-se o tempo; diminuindo a velocidade, aumenta-se o tempo.

	velocidade		tempo	
$\cdot \frac{3}{4}$	80 km	→	3 horas	$: \frac{3}{4}$
	60 km	→	x horas	

A razão de diminuição de 80 km para 60 km é de $\frac{4}{3}$; portanto, o aumento do tempo deve variar nessa mesma taxa, mas na proporção inversa:

$$\frac{80}{60} = \frac{x}{3} \Rightarrow 240 = 60x \Rightarrow x = 240 : 60 = 4$$

A 60 km por hora, a viagem deve durar 4 horas.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

P Veja resolução das atividades 16, 18 e 19 no Manual do Professor.

16 Calcule o valor de x nas proporções:

a) $\frac{15}{24} = \frac{x}{80}$ $x = 50$

b) $\frac{14}{24} = \frac{35}{x}$ $x = 60$

c) $\frac{x}{32} = \frac{15}{96}$ $x = 5$

d) $\frac{9}{x} = \frac{18}{50}$ $x = 25$

17 Dois amigos, Tico e Teco, formaram uma sociedade para montar um negócio de castanhas e amendoins. O primeiro entrou com a quantia de R$ 600,00 e o segundo com a quantia de R$ 900,00. Ao final de um período tiveram um lucro de R$ 36 000,00, que foi dividido proporcionalmente ao capital investido por cada sócio. Determine como será a divisão do lucro.

17. Nesse caso temos uma proporcionalidade direta em que um sócio entrou com $\frac{2}{5}$ do total do capital investido e o segundo com $\frac{3}{5}$. O problema pode ser resolvido com a regra de 3. O primeiro sócio ficou com R$ 14 400,00 e o segundo com R$ 21 600,00.

18 Em uma escola 2 em cada 5 alunos usam o transporte escolar para ir de casa até a escola. Considerando que nessa escola há 240 alunos, quantos usam o transporte escolar? 96 alunos

19 Uma fábrica produz um lote de 600 peças em 3 horas, com 4 máquinas funcionando.

a) Quantas peças essa fábrica produzirá com as mesmas máquinas funcionando 8 horas? 1 600 peças

b) Quantas peças podem ser produzidas nessa fábrica nas mesmas 3 horas se forem colocadas para funcionar 6 máquinas? 900 peças

c) Quantas máquinas são necessárias para fabricar o mesmo número de peças em 1 hora e 30 minutos? 8 máquinas

20 Um automóvel faz a viagem entre Belo Horizonte e Brasília a uma velocidade média de 80 km/h em 9 horas. Calcule a distância aproximada do percurso.
Nesse caso trata-se de uma proporcionalidade direta: 80 km está para 1 hora, assim como x km está para 9 horas. Calculando obtém-se a distância aproximada de 720 km.

faça no seu caderno

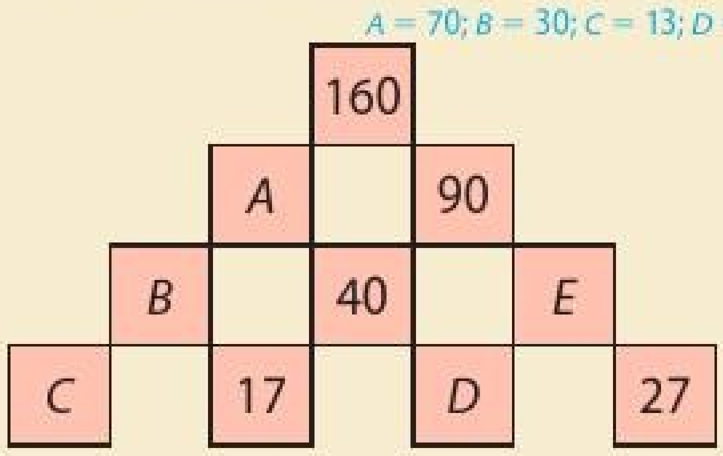
1 O quadrado abaixo é mágico. Descubra o valor de x, sabendo que a constante mágica é 21.

$x - 5$ (4)	x (9)	$x - 1$ (8)
$x + 2$ (11)	$x - 2$ (7)	$x - 6$ (3)
$x - 3$ (6)	$x - 4$ (5)	$x + 1$ (10)

P Veja resolução no Manual do Professor.

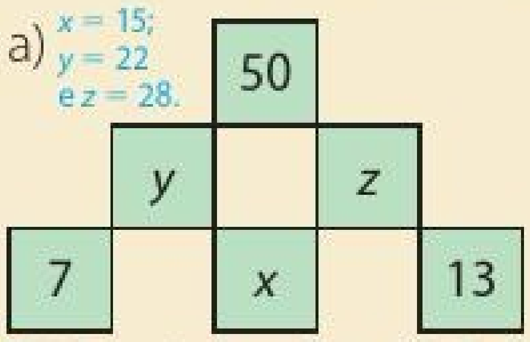
2 Determine os valores de A, B, C, D e E.

$A = 70$; $B = 30$; $C = 13$; $D = 23$ e $E = 50$.

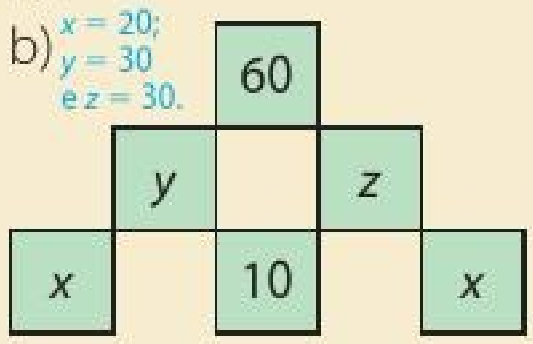


3 Determine os valores de x, y, e z.

a) $x = 15$; $y = 22$ e $z = 28$.



b) $x = 20$; $y = 30$ e $z = 30$.



P Veja resolução no Manual do Professor.

4 O quíntuplo do sucessor de um número é 60. Qual é esse número?

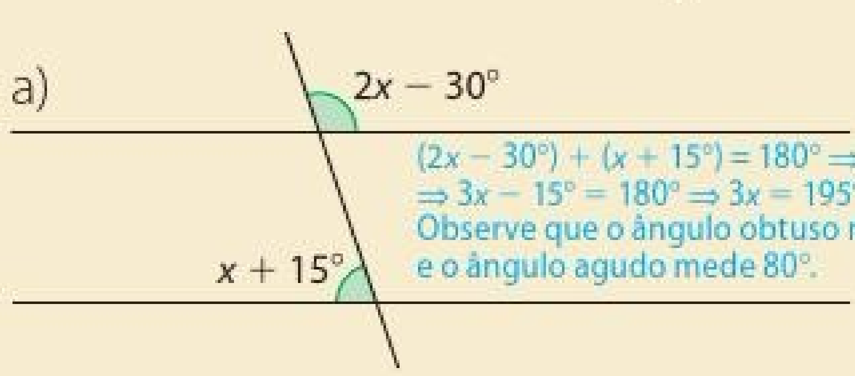
11 ($5(x + 1) = 60 \Rightarrow x + 1 = 60 : 5 = 12 \Rightarrow x + 1 = 12 \Rightarrow x = 11$)

5 O sucessor do quíntuplo de um número é 61. Qual é esse número? P Veja comentário no Manual do Professor.

12 ($5x + 1 = 61 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 60 : 5 \Rightarrow x = 12$).

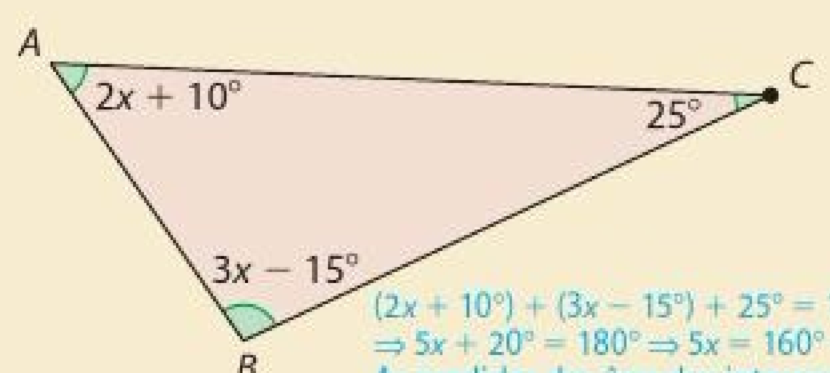
6 Determine o valor de x nas figuras.

a)



$(2x - 30°) + (x + 15°) = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x - 15° = 180° \Rightarrow 3x = 195° \Rightarrow x = 65°$
Observe que o ângulo obtuso mede 100° e o ângulo agudo mede 80°.

b)



$(2x + 10°) + (3x - 15°) + 25° = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x + 20° = 180° \Rightarrow 5x = 160° \Rightarrow x = 32°$
As medidas dos ângulos internos deste triângulo são 25°, 74° e 81°.

7 Calcule o valor de x nas proporções:

P Veja resolução no Manual do Professor.

a) $\dfrac{x}{23} = \dfrac{5}{69}$ $x = \frac{5}{3}$

b) $\dfrac{17}{x} = \dfrac{85}{120}$ $x = 24$

c) $\dfrac{13}{18} = \dfrac{65}{x}$ $x = 90$

d) $\dfrac{5}{12} = \dfrac{x}{18}$ $x = 7{,}5$

8 Com 8 máquinas em funcionamento, uma fábrica consegue produzir um lote de 720 peças em 6 horas. P Veja resolução no Manual do Professor.

a) Quantas peças essa fábrica produz com as mesmas máquinas funcionando 4 horas? 480 peças

b) Quantas peças podem ser produzidas nas mesmas 6 horas se forem colocadas para funcionar 12 máquinas? 1 080 peças

c) Quantas máquinas são necessárias para fabricar o mesmo número de peças em 2 horas? 24 máquinas

9 Dois amigos formaram uma sociedade para montar um negócio. O primeiro entrou com a quantia de R$ 1 200,00 e o segundo com a quantia de R$ 1 800,00. Ao final de um período tiveram um lucro de R$ 6 000,00, que foi dividido proporcionalmente ao capital investido pelos sócios. Determine quanto receberá cada sócio.

1º sócio: R$ 2 400,00 e 2º sócio: R$ 3 600,00. Veja comentário no Manual do Professor.

10 Um automóvel faz a viagem entre São Paulo e Rio de Janeiro a uma velocidade média de 80 km/h em 5 horas. Calcule a distância aproximada do percurso. 400 km.

P Veja comentário no Manual do Professor.

11 Em uma prova de ciclismo o campeão percorreu a distância de 120 km em 4 h. Qual foi a velocidade média do campeão nessa prova? 30 km/h

12 Uma lesma sobe por um poste avançando 2 metros em 5 horas. Qual é a velocidade média da lesma em centímetros por hora (cm/h)? 40 cm/h

13 ***Desafio olímpico***

A figura mostra duas engrenagens. A engrenagem **A** tem 30 dentes e a engrenagem **B**, 15 dentes.

Contexto Digital/Arquivo da editora

a) Enquanto a engrenagem **A** dá 8 voltas no sentido horário, quantas voltas dá a engrenagem **B** e em que sentido? 16 voltas no sentido anti-horário.

b) Enquanto a engrenagem **B** dá 6 voltas no sentido anti-horário, quantas voltas dá a engrenagem **A** e em que sentido? 3 voltas no sentido horário.

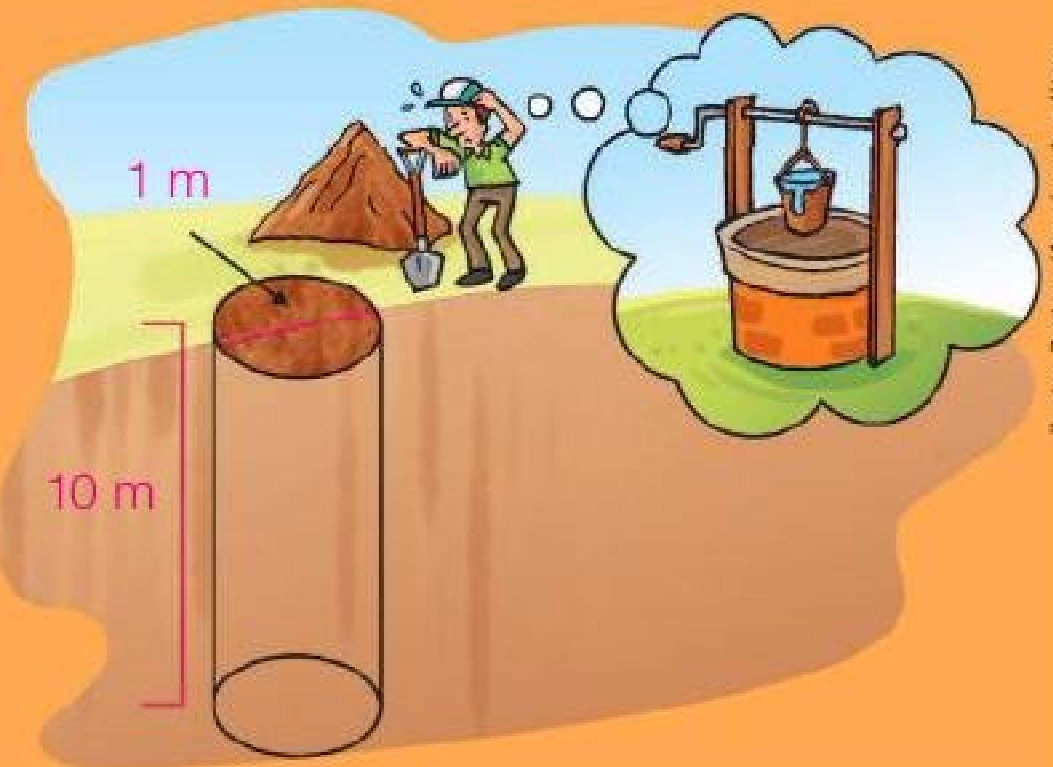
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Revista da Matemática

AS APARÊNCIAS ENGANAM

Um trabalhador leva 10 horas para cavar um poço de 1 metro de diâmetro por 10 metros de profundidade.

cobalt88/Shutterstock/Glow Images



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Quantos trabalhadores são necessários para cavar o mesmo poço em 10 minutos?

Aplicando nossos conhecimentos de regra de três, montamos a proporção:

Homens	Tempo
1	10 horas
x	10 minutos

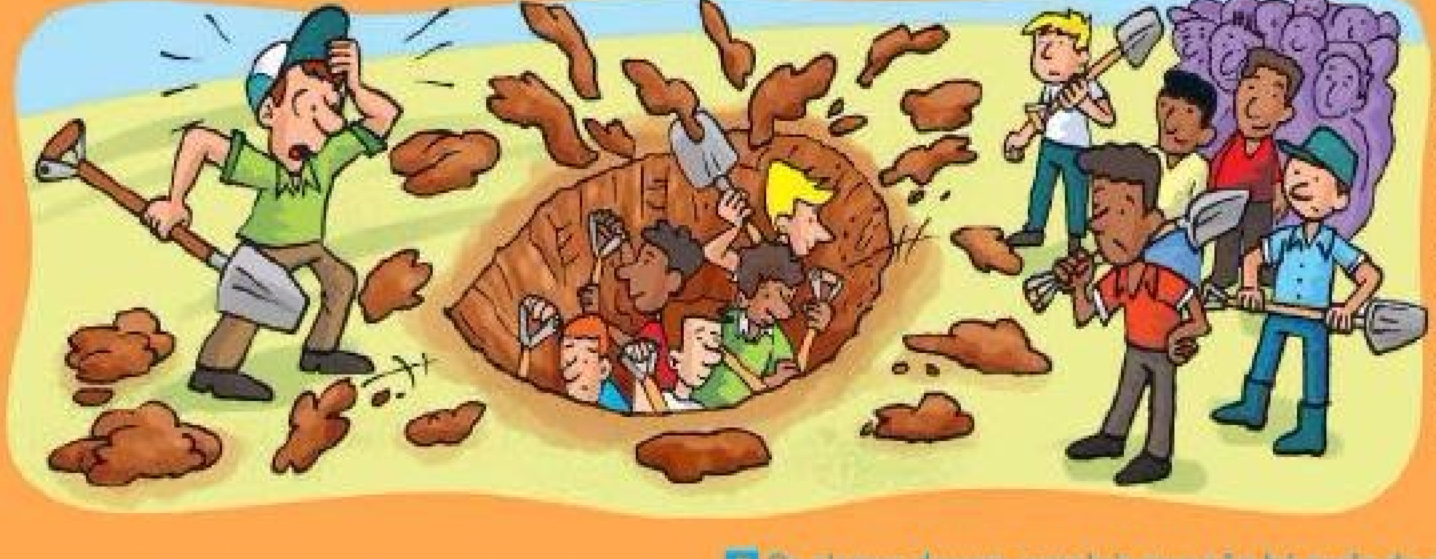
transformando horas em minutos →
10 h = 600 min

Homens	Tempo
1	600 minutos
x	10 minutos

Para fazer o trabalho em um tempo 60 vezes menor, vamos precisar de uma quantidade de homens 60 vezes maior. Nesse caso, a quantidade de homens e o tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Homens	Tempo
1	600 minutos
x	10 minutos

$\cdot 60$; $: 60$



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

1. A regra de três foi corretamente calculada?
2. A resposta está correta?
3. Quantas pessoas você acha que podem caber num poço com essas medidas?
4. Existe algo de errado com a resposta do problema? Você acha que a solução é razoável?

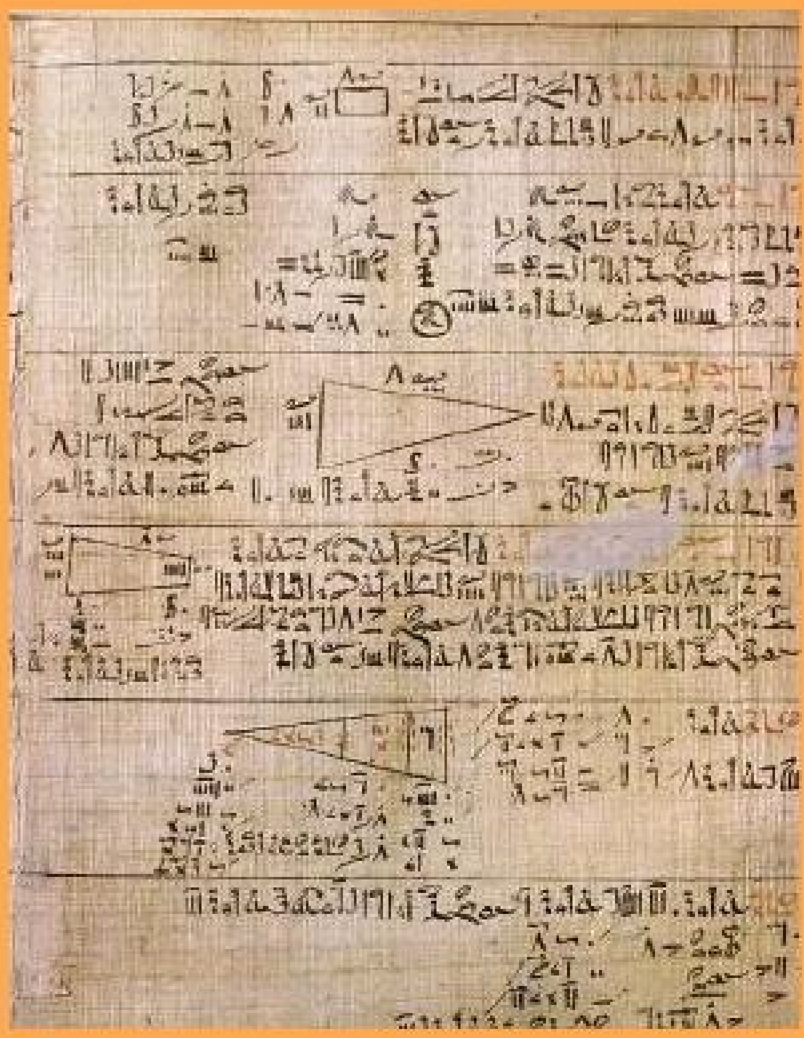
P Os alunos devem concluir que não há nada de errado com a resolução por regra de três, mas devem refletir criticamente que a solução de um problema matemático nem sempre é a solução real, ou seja, não é apropriada para uma situação real. O que está em discussão aqui são os limites da Matemática como ciência com modelos da realidade.

UMA REGRA EGÍPCIA PARA RESOLVER PROBLEMAS E EQUAÇÕES

Há mais de 3 mil anos, os egípcios já eram um povo bastante desenvolvido. Sua agricultura, seu comércio, a estrutura de suas cidades e construções, como as famosas pirâmides, exigiam um conhecimento complexo de Geometria e Aritmética.

Os egípcios desenvolveram um método para resolver problemas considerado bastante engenhoso pelos matemáticos contemporâneos.

Veja um exemplo no enunciado de um problema registrado em um papiro de 1600 a.C. que está guardado no Museu Britânico:



Museu Britânico, Londres/Album/Latinstock

Fragmento do papiro de Rhind, que está guardado no Museu Britânico.

> Um montão e sua sétima parte todos juntos dão 24. Digam-me: qual é a quantidade?

Para resolver o problema, os egípcios aplicavam um método que foi chamado de **Regra da falsa posição**, que consistia em "chutar" um resultado, verificar o que se obtém e ajustar proporcionalmente até chegar à solução correta.

A equação correspondente a esse enunciado é a seguinte: $x + \dfrac{x}{7} = 24$

Vamos explorar o método egípcio "chutando" um valor numérico para x e verificar se satisfaz a igualdade. Por exemplo, testando o que ocorre se $x = 7$.

$$7 + \frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$$

P Trata-se de um dos primeiros problemas com quantidades desconhecidas de que se tem notícia. No enunciado do problema original, a soma é 19, e não 24; porém, a solução é um número fracionário, o que poderia ser um obstáculo à compreensão dos alunos. Daí, optamos pela adaptação, que permite que os alunos façam a verificação.

Note que o resultado é 3 vezes menor que o 24 do enunciado.

Na segunda tentativa, podemos testar um número 3 vezes maior que o 7.

$$3 \cdot 7 = 21$$

Substituindo 21 na expressão, temos: $21 + \dfrac{21}{7} = 21 + 3 = 24$

Concluímos, então, que o número procurado é 21.

Agora, pratique esse método resolvendo as atividades seguintes.

P Recomendamos que estas atividades sejam feitas oral e coletivamente sob a orientação do professor. Administre as primeiras tentativas e a solução, levando em conta a proporção do primeiro resultado.

1. Um número somado à sua metade é igual a 120. Que número é esse?

2. Somando um número a sua terça parte, obtém-se 144. Qual é esse número?

1. Suponha que o número é 40, $40 + 20 = 60$; 60 é metade de 120, logo o dobro de 40 deve resolver o problema:
$80 + 40 = 120$.
A equação correspondente a este enunciado é $x + \dfrac{x}{2} = 120$. Recoloque o problema após os alunos estudarem o próximo capítulo.

O número é 108, sua terça parte é 36; $108 + 36 = 144$.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA: A LINGUAGEM ALGÉBRICA

Códigos no dia a dia

Na maioria dos lugares por onde circulamos, encontramos símbolos, códigos e outras formas de comunicação.

SP-Photo/Shutterstock/Glow Images

Semáforo

Vanessa Van/Shutterstock/Glow Images

Placa de trânsito que indica onde é proibido estacionar.

Douglas Cometti/Folhapress

Placa de sinalização de extintor de incêndio

Alexandre Tokitaka/Pulsar Imagens

Indicação de assento preferencial em transporte público

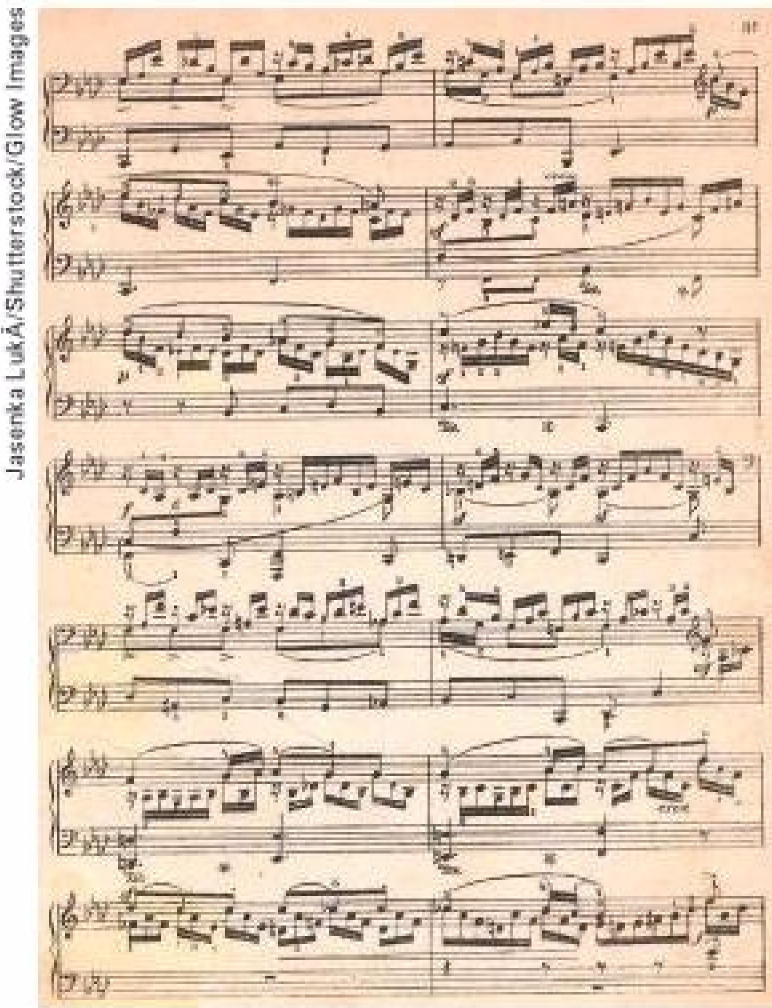
P Parte das dificuldades que os alunos têm com a Matemática e com a Álgebra, em especial, deve-se ao fato de não entenderem sua linguagem e essa dificuldade pode ser agravada se for deixada para um segundo plano. Portanto, é necessário fazer uma abordagem didática da linguagem matemática e da linguagem algébrica, como um sistema de símbolos com regras específicas e convenções, algumas arbitrárias. Esse método de trabalho contribui para que os alunos desmistifiquem e compreendam o sistema de códigos envolvidos na atividade algébrica.

EstudioMil/Arquivo da editora

Veja alguns exemplos de códigos:

- Um maestro, para conduzir bem sua orquestra e conseguir que todos os músicos toquem no tempo correto, lê a mesma partitura que seus músicos leem.
- Enxadristas de qualquer parte do mundo e que falam línguas diferentes podem estudar e refazer partidas que tenham sido jogadas por outros jogadores porque dispõem de um sistema de códigos que lhes permite acompanhar o passo a passo de cada jogada.

Jasenka Lukša/Shutterstock/Glow Images



Partitura

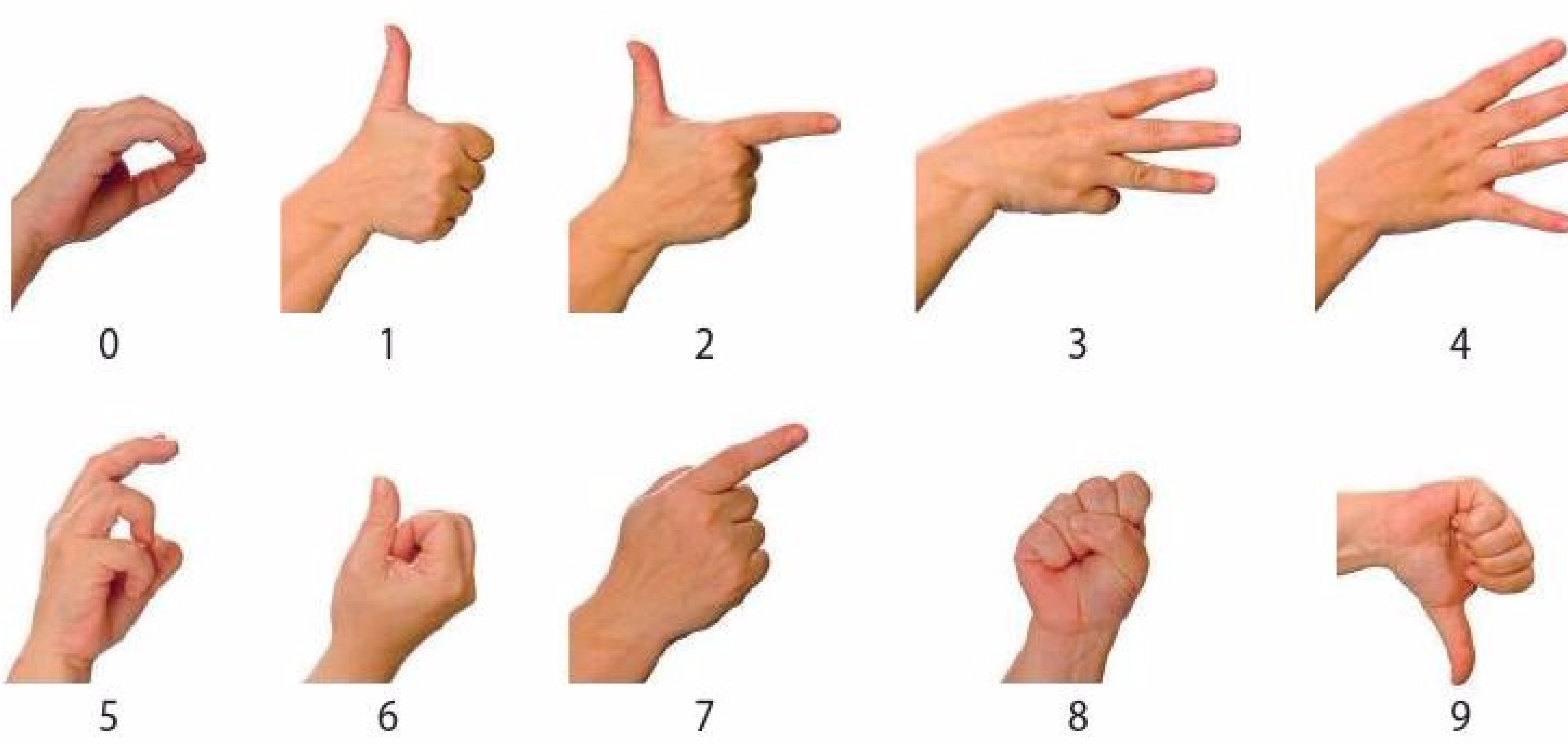
Vasin Lee/Shutterstock/Glow Images

Enxadrista

- Carteiros localizam os endereços dos destinatários das cartas por meio do CEP, que indica a região onde ficam as ruas.

Fernando Favoretto/Acervo do fotógrafo

- A linguagem dos sinais permite que a comunicação se realize mesmo no caso de um dos interlocutores ter alguma necessidade especial.



Fotos: Sergio Dotta Jr./Arquivo da editora

Algarismos representados em Libras (Língua Brasileira de Sinais).

Na Matemática não é diferente. A necessidade de uma linguagem matemática tão universal quanto possível faz com que alunos brasileiros usem os mesmos símbolos matemáticos que alunos chineses, franceses ou de qualquer outra nacionalidade.

Códigos na resolução de problemas

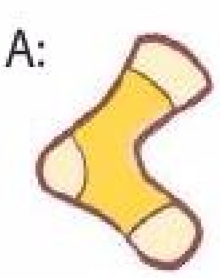
Para melhor compreender a importância e a conveniência de se adotar uma linguagem simbólica, vamos explorar algumas situações-problema cuja representação por meio de códigos ou esquemas ajuda na resolução.

1ª situação:

Numa gaveta há 8 meias amarelas e 10 meias vermelhas. Supondo que esteja escuro e você não possa acender a luz: qual é o menor número de meias que você deve retirar da gaveta para garantir a retirada de duas meias da mesma cor?

EstudioMil/Arquivo da editora

Para discutir a solução, vamos, inicialmente, estabelecer os seguintes códigos para nos referirmos às cores:

A:  V: 

EstudioMil/Arquivo da editora

Pegando apenas duas meias da gaveta, temos as seguintes possibilidades:

AA VV VA AV

Logo, se pegamos apenas duas meias da gaveta, não há garantias de se ter um par da mesma cor.

Por outro lado, pegando três meias, as possibilidades são:

AAA AAV AVA VAA VVA VAV AVV VVV

Veja que, desse modo, podemos ter certeza de que duas meias terão a mesma cor.

Assim, podemos concluir que o problema fica resolvido se tirarmos 3 meias da gaveta.

Suponha agora que, além dessas meias, foram colocadas 6 meias pretas (P) na gaveta. Nesse caso, quantas meias é preciso pegar para garantir um par da mesma cor?

Vamos raciocinar imaginando uma situação extrema, em que as três primeiras meias retiradas são de cores diferentes:

4ª meia

AVP → A → garante um par de meias amarelas

AVP → V → garante um par de meias vermelhas

AVP → P → garante um par de meias pretas

Então, só com a retirada da quarta meia é que garantimos um par de meias da mesma cor.

2ª situação:

Um senhor precisava levar um cachorro, uma galinha e um maço de couves de uma margem para a outra de um rio. Ele tinha uma embarcação que comportava ele próprio e um dos seus pertences. O senhor logo percebeu que não podia deixar sozinhos, em uma das margens do rio, o cachorro e a galinha, nem a galinha e o maço de couves. Como poderia ele atravessar o rio com seus pertences em segurança?


Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

A solução dessa situação pode ser explicada pela descrição de cada etapa. Acompanhe:

1ª) O senhor cruza o rio com a galinha, deixando na margem o cachorro com o maço de couves.

2ª) O senhor deixa a galinha na outra margem e regressa sozinho.

3ª) O senhor cruza o rio com o cachorro.

4ª) O senhor regressa com a galinha.

5ª) O senhor cruza o rio só com o maço de couves.

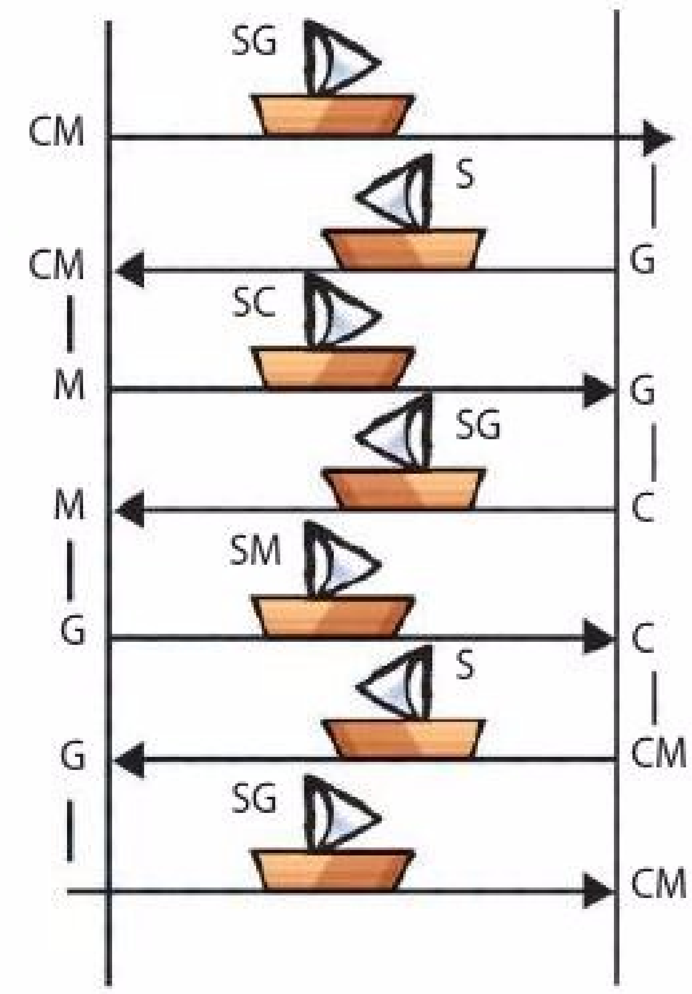
6ª) O senhor regressa só.

7ª) O senhor cruza o rio com a galinha.

EstudioMil/Arquivo da editora

S: senhor
C: cachorro
G: galinha
M: maço de couves

O esquema abaixo representa a solução do problema utilizando desenhos e códigos.



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

Veja que, para entender um sistema de símbolos, temos de ser informados sobre seus significados.

A menina não participou da "combinação" que estabeleceu os símbolos para o senhor (**S**), o cachorro (**C**), a galinha (**G**) e o maço de couves (**M**), por isso ela não consegue entender o que significa SCGM.

EstudioMil/Arquivo da editora

Convencionar significa estabelecer uma norma, fazer um acordo.

Quanto mais universal é o código, maior é o número de pesssoas que podem compreendê-lo. E essa é a base da linguagem matemática, pois se trata de uma ciência que utiliza símbolos, códigos e regras que foram convencionados e estabelecidos há muito tempo. Para entendê-los, temos de ser informados de seus significados e adquirir experiência no seu uso.

3ª situação:

Como é possível retirar de um rio exatamente 6 litros de água dispondo de dois recipientes para medir o volume de água: um com capacidade para 4 litros e outro com capacidade para 9 litros?

Estudio Mil/Arquivo da editora

Acompanhe a descrição da resolução dessa situação:

1º) Enchemos o vasilhame maior.

2º) Derramamos o conteúdo do vasilhame maior no menor, até completá-lo.

3º) Devolvemos ao rio a água do vasilhame menor, esvaziando-o.

4º) Voltamos a derramar o conteúdo do vasilhame maior no menor, até completá-lo. Assim, restou 1 litro de água no vasilhame maior.

5º) Voltamos a esvaziar o vasilhame menor.

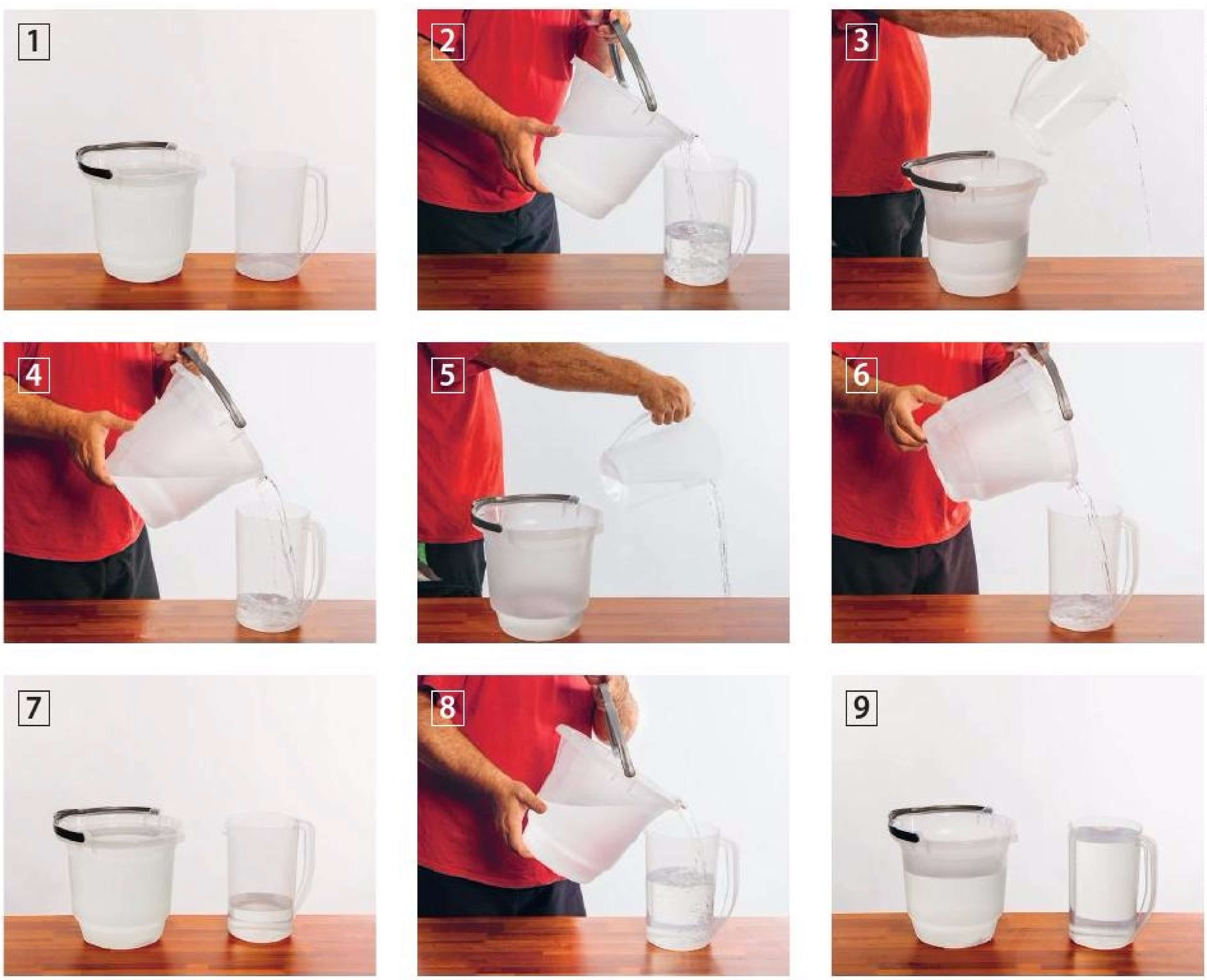
6º) O vasilhame menor recebe o litro de água do vasilhame maior.

7º) Tornamos a encher o vasilhame maior.

8º) Despejamos água do vasilhame maior até completar o vasilhame menor.

9º) Restarão 6 litros de água no vasilhame maior.

As fotos a seguir ilustram cada passo da resolução da situação que foi descrito.



Fotos: Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

Agora, para fazer uma representação codificada dessa resolução, vamos combinar o seguinte:

> **A**: vasilhame com capacidade para 9 litros — **A**(6) = vasilhame **A** com 6 litros de água
> **B**: vasilhame com capacidade para 4 litros — **B**(1) = vasilhame **B** com 1 litro de água
> **R**: rio

P A familiaridade com sistemas de códigos é muito útil no trabalho, por exemplo, para manusear planilhas eletrônicas que utilizam uma linguagem específica semelhante a um par ordenado para indicar as células, como B12 (2ª coluna, 12ª linha) e C5 (3ª coluna e 5ª linha), e outros códigos para as operações, com A5^3, para elevar ao cubo o número que está na célula A5.

A seta indica o movimento da água de um local para o outro.

1º) R $\rightarrow$ A(9)		5º) B(4) $\rightarrow$ A(1) e B(0)	
2º) A(9) $\rightarrow$ A(5) e B(4)		6º) A(1) $\rightarrow$ A(0) e B(1)	
3º) B(4) $\rightarrow$ A(5) e B(0)		7º) R $\rightarrow$ A(9) e B(1)	
4º) A(5) $\rightarrow$ A(1) e B(4)		8º) A(9) $\rightarrow$ A(6) e B(4)	

Esta é a resposta procurada.

Atualmente, com o desenvolvimento da tecnologia e o uso intenso da internet, a informação codificada tem sido cada vez mais utilizada.

4. Usando as setas → para indicar a ida e ← para a volta, indicando as iniciais **c**, **i**, **m** e **p** para os ocupantes do barco, a solução é a seguinte: c + m →; m ←; i + m →; i ←; p →; m ←; i + m →.
5. R → A(5); A(5) → A(3) e B(2); B(2) → B(0); A(3) → A(1) e B(2); B(2) → B(0); A(1) → A(0) e B(1); R → A(5); A(5) e B(1) → 6 litros.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 ***Desafios olímpicos***

I. Imagine que em uma caixa em uma sala escura, onde não se pode acender a luz, há 3 pares de luvas brancas e 2 pares de luvas pretas. Usando Bd e Be para representar as luvas brancas direita e esquerda, respectivamente, e Pd e Pe para as pretas, escreva uma possibilidade de retirada de 5 luvas sem que se forme um par da mesma cor. Bd, Bd, Bd, Pd, Pd; existem outras possibilidades.

II. Em um saco de pano são colocadas 4 bolas brancas, 4 amarelas, 4 vermelhas e 4 pretas. Qual é o menor número de bolas que devem ser retiradas do saco para se ter a certeza de obter duas bolas da mesma cor? 5 bolas

P Veja resolução no Manual do Professor.

2 Suponha que em uma gaveta, em ambiente escuro, haja 2 meias amarelas, 4 vermelhas, 6 verdes, 8 azuis e 10 pretas.

a) Quantas meias é preciso retirar da gaveta para ter a certeza de obter um par da mesma cor? 6 meias (5 + 1)

b) E para ter certeza de obter um par de amarelas? 30 meias (10 + 8 + 6 + 4 + 2)

c) E para obter um par de meias pretas? 22 meias (2 + 4 + 6 + 8 + 2)

d) E para obter dois pares de cores diferentes (cada par com meias da mesma cor)? 15 meias

3 Um pai e seus dois filhos desejam atravessar um rio. Porém, eles dispõem de apenas um barco com capacidade para 100 kg. Como eles podem realizar a travessia, sabendo que o pai pesa 100 kg e cada um de seus filhos pesa 50 kg? Represente em seu caderno a solução simbolicamente. P Veja resolução no Manual do Professor.

4 Para atravessar um rio, uma criança (**c**), sua irmã (**i**), sua mãe (**m**) e seu pai (**p**) dispõem de um barco que suporta, no máximo, 100 kg. Eles têm, respectivamente, 30 kg, 40 kg, 60 kg e 100 kg. A criança não pode atravessar sozinha. Como podem fazer a travessia?

5 Imagine que você queira retirar de um rio 6 litros de água. Mas você só tem dois vasilhames com capacidades de 2 litros e de 5 litros. Escreva numa linguagem simbólica como você faria. Use a mesma simbologia da 3ª situação.

6 Você quer cozinhar um ovo em 2 minutos. Entretanto, você só possui 2 relógios de areia (ampulheta), um de 5 minutos e outro de 3 minutos. Como você poderia colocar o ovo para cozinhar e tirá-lo dentro de 2 minutos exatos? Resolva e represente a solução simbolicamente. P Veja resolução no Manual do Professor.

7 ***Desafio olímpico***

Retome o problema dos vasilhames. Na solução, é apresentado como obter 1, 4, 5, 6 e 9 litros de água. Descreva, na mesma linguagem estabelecida na solução da 3ª situação, como obter: 2, 11 e 13 litros. P Veja resolução no Manual do Professor.

A linguagem da Matemática

Há vários séculos os matemáticos vêm criando símbolos, notações e outros códigos para se comunicarem melhor.

Povos antigos, como os egípcios, babilônios, romanos e até mesmo os maias, que viviam na América Central antes da chegada dos europeus, criaram símbolos para representar ideias de quantidade.

No Ensino Fundamental usamos vários tipos de símbolos matemáticos:

- numéricos $\longrightarrow$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...
- operacionais $\longrightarrow$ $+, -, \times, \div$, ...
- relacionais $\longrightarrow$ $=, >, <, \geqslant, \leqslant, \neq$, ...

Para representar valores desconhecidos, incógnitas e variáveis, os matemáticos usam letras do alfabeto, como *x*, *y* e *z*.

The Granger Collection/Other Images

Representação de um familiar do faraó Quéops em painel, no qual é possível observar a utilização de símbolos.

Um pouco da história da linguagem matemática

O símbolos numéricos assumiram formas diferentes em função da época e das culturas que os utilizavam. Em uma mesma cultura, povos que viveram em épocas diferentes variaram a representação de seus símbolos numéricos.

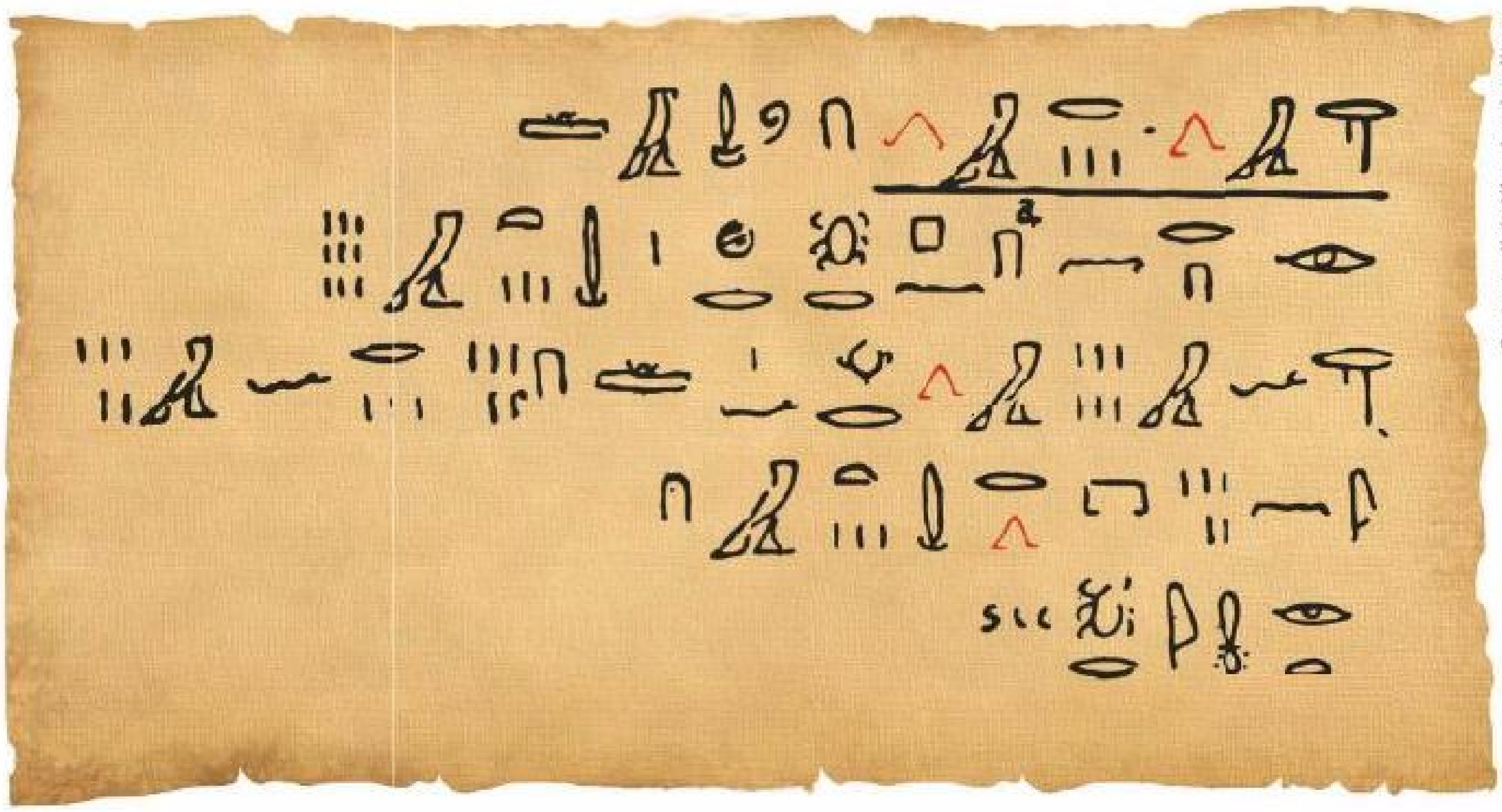
Contexto Digital/Arquivo da editora

Evolução dos símbolos indo-arábicos.

Depois de criar símbolos para os números, foi necessário criar símbolos para indicar as operações.

Os sinais que usamos para indicar as operações nem sempre tiveram essa forma. Para os egípcios, o desenho de duas perninhas dando um passo para frente indicava uma adição, e dando um passo para trás indicava uma subtração.

Temos abaixo a reprodução de um fragmento do papiro de Rhind, no qual aparecem os sinais de menos ( ) e de mais ( ).



Contexto digital/Arquivo da editora

Representação de hieróglifos egípcios.

História dos sinais matemáticos

Veja abaixo como foram modificados alguns símbolos matemáticos até ficarem na forma que os conhecemos hoje.

Adição: +

O sinal +, que usamos hoje para indicar adição, é derivado do **t** da palavra latina *et*, que significa **e** (como forma aditiva).

Antes disso, usava-se a letra **p**, inicial da palavra latina *plus*, que significa mais.

Subtração: −

Supõe-se que o sinal − seja uma derivação da palavra latina *minus*, que depois foi representada por $\overline{m}$. Com o tempo, o traço superior substituiu a palavra toda.

Multiplicação: ×

Em 1631, o matemático inglês Oughtred criou o sinal × para indicar uma multiplicação. No mesmo ano, outro inglês, Harriot, usou um ponto "·" entre os fatores de um número.

Na maioria dos computadores, para efetuar uma multiplicação, deve-se apertar a tecla asterisco *.

EstudioMil/Arquivo da editora

Divisão: ÷

Os historiadores atribuem aos árabes a introdução do traço para indicar a divisão. Por exemplo: $\frac{3}{4}$ ou 3/4.

O sinal : e, posteriormente, o sinal ÷ surgiram no século XVII.

EstudioMil/Arquivo da editora

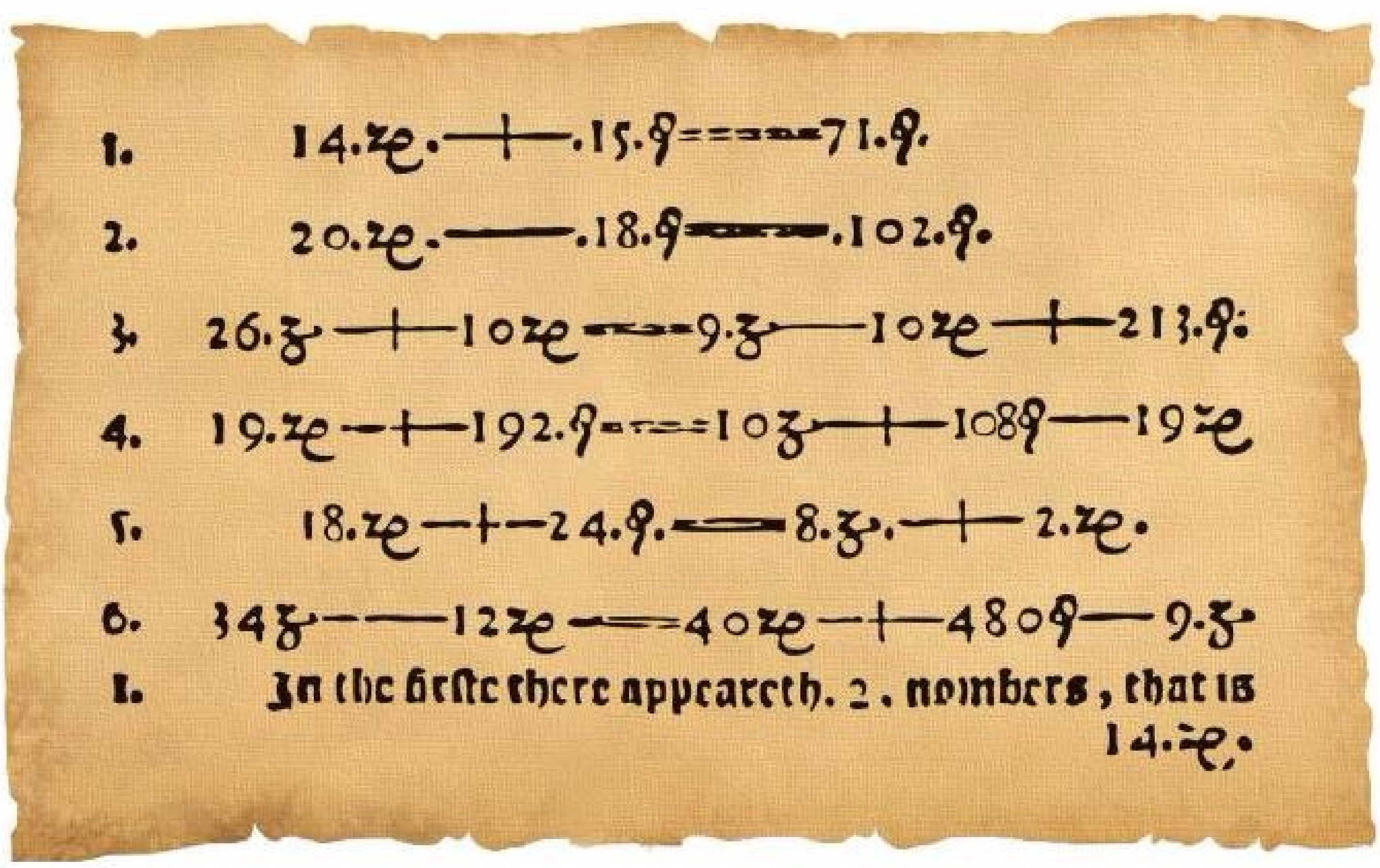
Raiz quadrada: $\sqrt{\ }$

O sinal $\sqrt{\ }$, que indica a raiz quadrada de um número, é derivado da primeira letra da palavra *radix*, escrita com letra gótica, como mostrado ao lado.

Representação da primeira letra da palavra *radix* em letra gótica.

Igualdade: =

O matemático galês Robert Recorde foi o primeiro a empregar o sinal de igualdade =, em 1557.



Contexto digital / Arquivo da editora

A igualdade está indicada por dois traços paralelos e longos nesta reprodução do livro *Whetstone of Witte*, de Robert Recorde.

Antes disso, a igualdade era representada por uma palavra latina escrita por extenso: *aequalis* ou *aequatur*.

Desigualdade: ⩽ e ⩾

Ainda no século XVI, Thomas Harriot criou os sinais de desigualdade maior que (>) e menor que (<).

Atualmente, usamos também o maior ou igual (⩾), o menor ou igual (⩽) e o diferente (≠).

As letras na linguagem matemática

Na linguagem matemática, as letras são usadas para representar incógnitas, variáveis, conjuntos, elementos geométricos, etc.

De acordo com os historiadores, foi Diofante de Alexandria o primeiro a usar letras para representar um valor desconhecido. Ele viveu no século III d.C. e escreveu um livro chamado *Aritmética*. P O nome de Diofante também permite a forma Diofanto.

Entretanto, passaram-se mais de 1 000 anos até que o uso de letras fosse popularizado, a partir dos trabalhos do francês François Viète, no início do século XVII.

Viète usava letras e palavras e escrevia sentenças matemáticas numa forma abreviada. Veja um exemplo:

> **A** *quadratus* significava o quadrado de um número.
> 10 *in* **A** era o mesmo que 10 vezes **A**.
> 5 *in* **A** *aequalis* 20 era equivalente à sentença 5**A** = 20.
> **A** *quadratus aequalis* 25 equivalia à sentença $A^2 = 25$.

O curioso é que, antes de Viète usar letras para designar números desconhecidos, os matemáticos usavam o termo "coisa" para designar um número desconhecido. Hoje, usamos o termo "incógnita", ou seja, não conhecido. O valor da coisa é 3.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

8 Liste em seu caderno 5 grupos de símbolos ou códigos de comunicação universais. Resposta pessoal.

9 Escreva cinco maneiras diferentes de expressar o número 5. Resposta pessoal.
O objetivo desse tipo de atividade é despertar os alunos para as várias formas de expressão de uma ideia em culturas diferentes ou numa mesma sociedade.

10 Dê o resultado das operações representadas por símbolos antigos:

a) 5 *et* 2 7
b) 10 *minus* 3 7
c) 12 *plus* 8 20
d) 7 $\overline{\text{m}}$ 1 6
e) 1 p 1 2
f) 12 $\overline{\text{m}}$ 4 8

11 Determine em cada caso qual é o valor de **A**.

a) 5 *in* **A** *aequalis* 25 5
b) 2 *in* **A** *minus* 1 *aequalis* 9 5
c) **A** *quadratus aequalis* 49 7

12 Pesquise no dicionário o significado das palavras: convenção, código, linguagem, legenda e símbolo.
P Veja sugestão de resposta no Manual do Professor.

A linguagem matemática representando relações

Dos usos mais frequentes das letras na Matemática, cabe destacar as **fórmulas**.

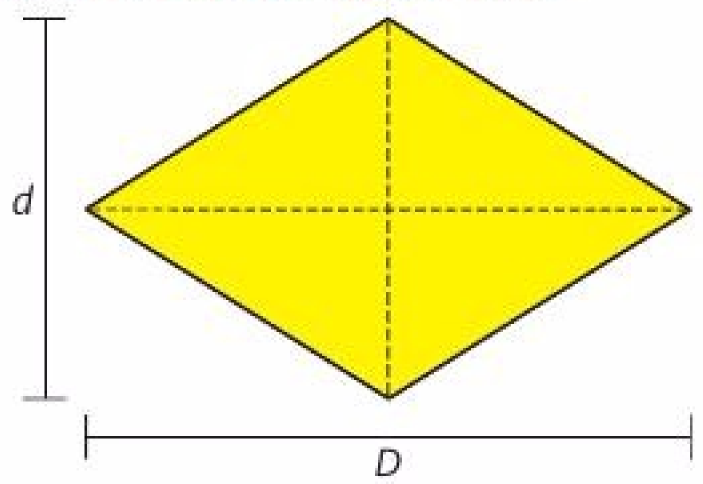
Em geral, uma fórmula sintetiza um raciocínio, um conjunto de regras ou relações.

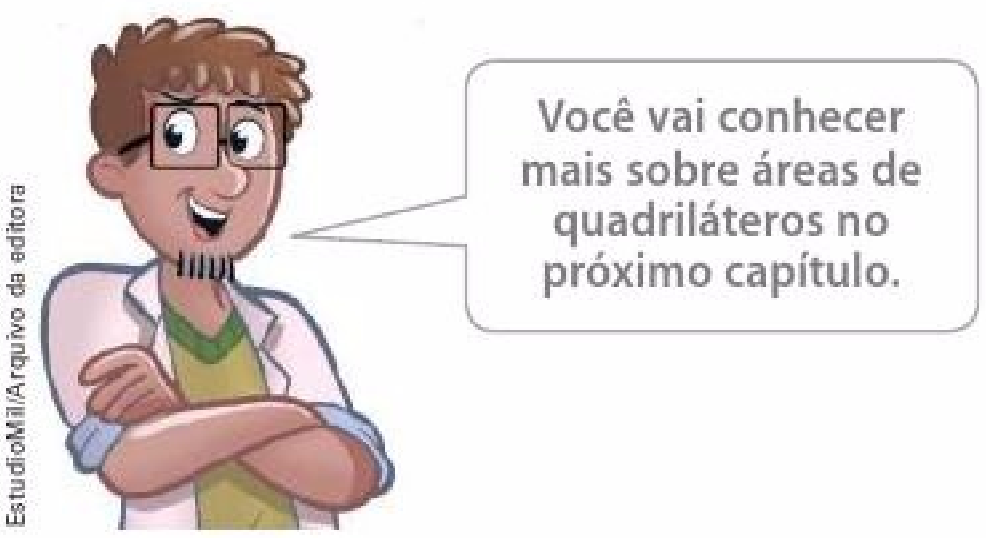
Usamos fórmulas em muitos campos da Matemática, por exemplo, para expressar relações entre variáveis, medidas, quantidades, custos, etc.

Vamos explorar alguns exemplos de fórmulas e suas aplicações na geometria e nas finanças pessoais.

- Um losango é um quadrilátero com todos os lados iguais e existe uma fórmula que determina a área de um losango quando sabemos a medida de suas diagonais.

P Neste exemplo, estamos abordando fórmulas e medidas.





EstudioMil/Arquivo da editora

Fórmula da área do losango:

$$\text{área do losango} = \frac{(\text{diagonal maior}) \cdot (\text{diagonal menor})}{2}$$

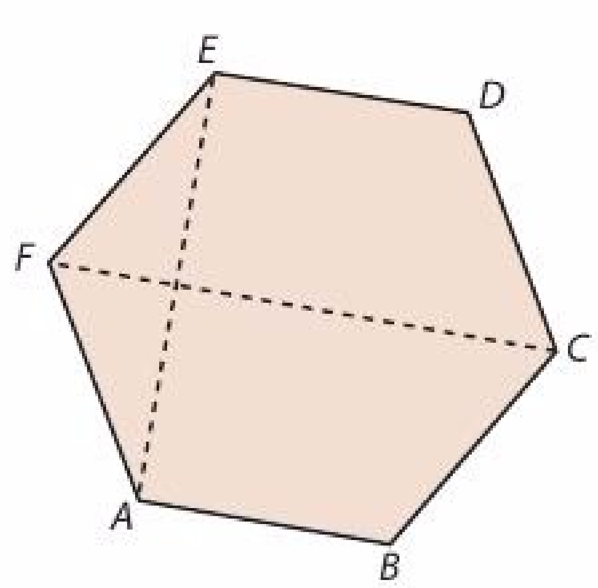
Em linguagem algébrica: $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

- Para calcular a área de determinado losango, calculamos **o valor numérico** da expressão, substituindo as variáveis D e d pelos números correspondentes. Por exemplo, se a diagonal maior de um losango mede 20 cm e a diagonal menor, 14 cm, a área é igual a:

$$A = \frac{20 \cdot 14}{2} = 140\ \text{cm}^2$$

- Outra fórmula importante é a que indica o número de diagonais de um polígono em função do número de lados. P Neste exemplo, estamos abordando fórmulas e Geometria.

A diagonal de um polígono é um segmento que une dois vértices não consecutivos. No hexágono ao lado, $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$ são diagonais, mas $\overline{AB}$ ou $\overline{DE}$ não são, pois unem vértices consecutivos e são lados do hexágono.



Se um polígono tem n lados, então o número d de diagonais é dado pela fórmula:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Para calcular o valor numérico da expressão que indica o número de diagonais de um hexágono, substituímos a variável n pelo valor numérico 6 na fórmula.

$$d = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Assim, concluímos que qualquer hexágono tem 9 diagonais.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

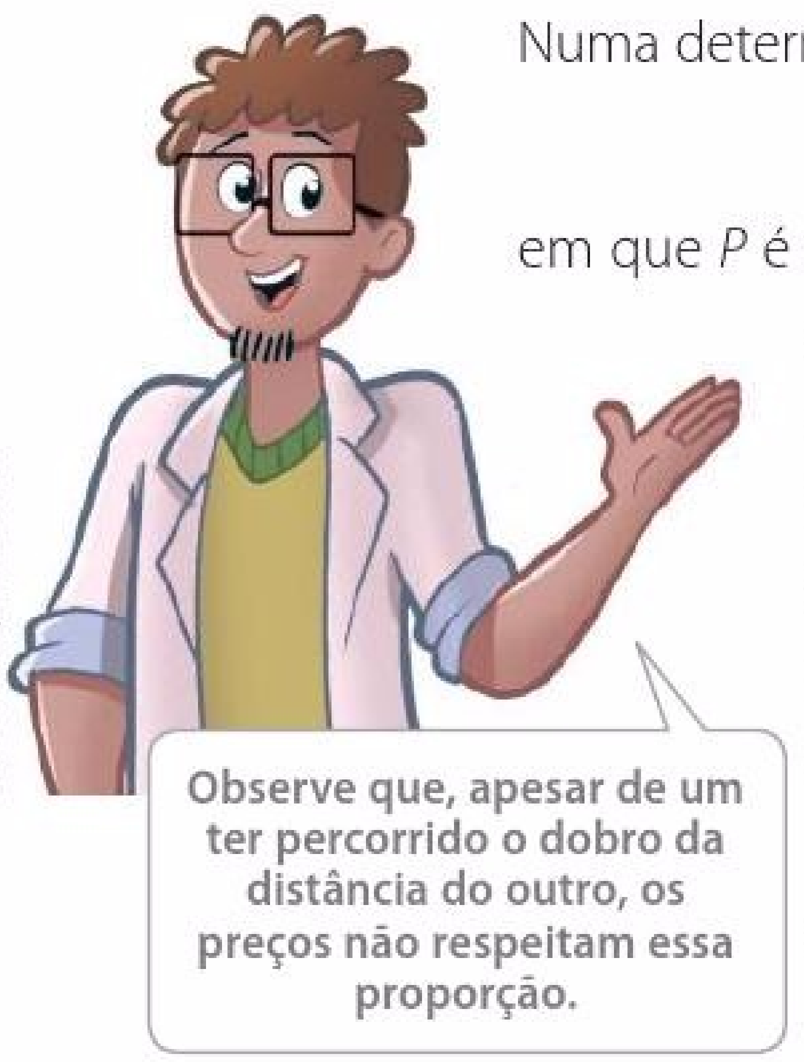
P Neste exemplo, estamos abordando fórmulas de custo.

O preço de uma corrida de táxi depende de algumas variáveis, mas principalmente da distância percorrida.

Numa determinada cidade, o preço de uma corrida, das 6h às 18h, é dado pela fórmula:

$$P = 2{,}5d + 3{,}50$$

em que P é o preço em reais e d é a distância percorrida em quilômetros.



EstudioMil/Arquivo da editora

Portanto, se um passageiro fez um trajeto de 4 km e outro fez um trajeto maior, de 8 km, para saber quanto eles vão pagar, basta calcular o valor numérico da expressão para d igual a 4 e para d igual a 8, respectivamente:

Passageiro 1: $P = 2{,}5 \cdot 4 + 3{,}5 = 10 + 3{,}5 = 13{,}50$

Passageiro 2: $P = 2{,}5 \cdot 8 + 3{,}5 = 20 + 3{,}5 = 23{,}50$

O passageiro 1 vai pagar R$ 13,50 e o passageiro 2, R$ 23,50.

Como você pode ter percebido, o cálculo do valor numérico de uma expressão e o uso de fórmulas têm importantes aplicações.

Vamos verificar outras aplicações realizando as atividades a seguir.

Valor numérico e os números cruzados

Fazer palavras cruzadas é um passatempo interessante.

A atividade a seguir é semelhante às palavras cruzadas. Trata-se de uma adaptação para explorar o valor numérico de expressões algébricas.

Para resolver números cruzados neste exemplo e descobrir quanto vale cada símbolo, vamos atribuir os seguintes valores para as variáveis: $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.

1 ♣	♥	
♦		2 ♥
	3 ♠	♣

Banco de imagens/Arquivo da editora

Horizontais

1) $a^4c - a^3$

3) $a^4b - 1$

Verticais

1) bc^2

2) $(a + 1)^3$

Veja, então, como calcular o valor numérico dessas expressões:

$a^4c - a^3 = 2^4 \cdot 5 - 2^3 = 72$

$a^4b - 1 = 2^4 \cdot 3 - 1 = 47$

$bc^2 = 3 \cdot 5^2 = 75$

$(a + 1)^3 = (2 + 1)^3 = 27$

Agora, devemos preencher o esquema com os valores obtidos:

P Para resolver estas atividades, os alunos devem calcular o valor numérico de expressões algébricas relacionadas às linhas e colunas dos quadros dos números cruzados, uma atividade lúdica que contribui para que pratiquem e desenvolvam suas habilidades operacionais.

1 7	2	
5		2 2
	3 4	7

Banco de imagens/Arquivo da editora

♣ = 7

♥ = 2

♦ = 5

♠ = 4

ATIVIDADES

faça no seu caderno

13 Com base no exemplo anterior, copie cada esquema no seu caderno e resolva os seguintes números cruzados.

a) Valores que devem ser atribuídos às variáveis: $a = 2$, $b = 4$ e $c = -1$.

1 ♣ 3	♥ 1	
♦ 6		2 ♥ 1
	3 ♠ 2	♣ 0

Não escreva no livro.

Horizontais

1) $a^3b - 1$ 31

3) $a^2 + b^2$ 20

Verticais

1) $(a - 4c)^2$ 36

2) $b^2 + 6c$ 10

b) Valores atribuídos às variáveis: $a = 3$; $b = 5$; $c = 7$ e $d = 2$.

1 * 4	2 * 2		3 * 5	4 * 1
5 * 6	* 1	6 * 8		* 3
* 8		7 * 2	8 * 1	* 9
9 * 5	10 * 7		11 * 4	* 6

Horizontais

1) $a^2 + b^2 + c + 1$ 42

3) $(a + b)^2 - c - 3d$ 51

5) $c^3 + b^3 + 15(c + a)$ 618

7) $a^5 - d^3a$ 219

9) $c^2 + d^3$ 57

11) $c^2 - a$ 46

Verticais

1) $(a + b + c + d)^3 - a^5 + ab$ 4 685

2) ac 21

4) $d^{10} + c^3 + 29$ 1 396

6) $ab^2 + 7$ 82

8) cd 14

14 Um professor de Matemática calcula a nota média de seus alunos considerando as seguintes variáveis: nota P da prova mensal, nota p das provas semanais, nota L das lições de casa e nota T do trabalho de pesquisa. A fórmula utilizada para a definição da média final é:

$$M_{\text{final}} = \frac{3P + 2p + 2L + 3T}{10}$$

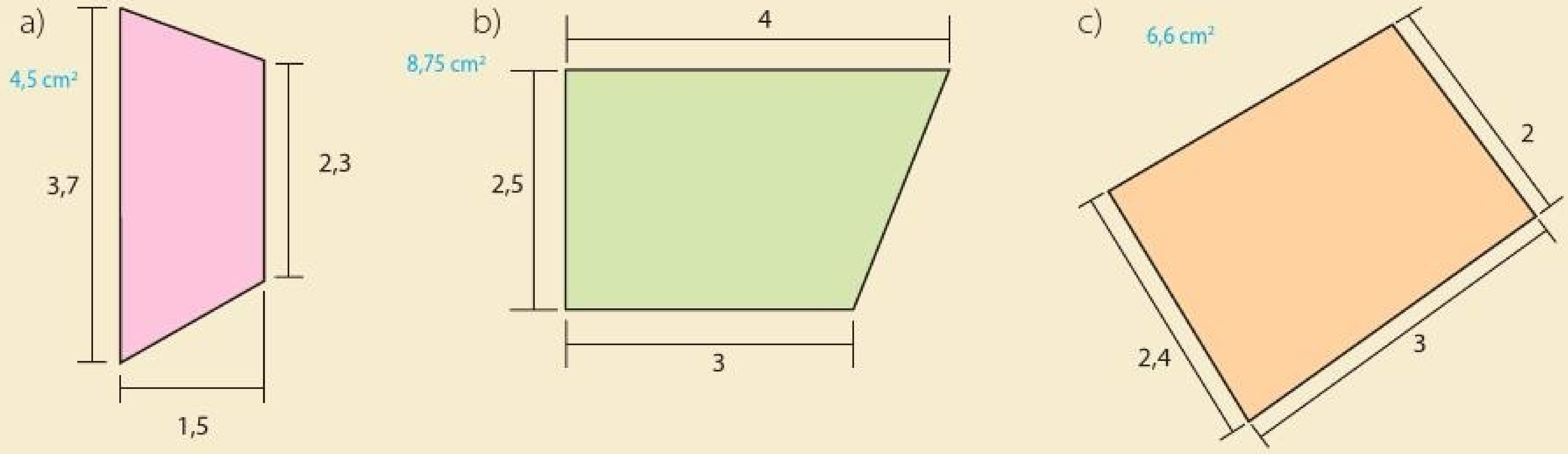
Use a fórmula para calcular a média final dos seguintes alunos:

Aluno	P	p	L	T	
João	6	8	8	9	7,7
José	7	7	8	7	7,2
Maria	8	6	9	8	7,8

15 O trapézio é um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos. Esta é uma atividade cujo foco é apenas o cálculo do valor numérico numa fórmula; o estudo sobre áreas de triângulos e quadriláteros será aprofundado no capítulo 3.

A fórmula da área do trapézio é $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$, em que B é a medida da base maior, b é a medida da base menor e h é a altura do trapézio.

Determine a área dos trapézios indicados a seguir. As medidas estão em centímetros.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

16 Imagine uma pirâmide de base quadrada como aquelas pirâmides do Egito. Para calcular seu volume usamos a seguinte fórmula: $V_{\text{pir. quadr.}} = x^2 \cdot \dfrac{h}{3}$ em que x é a medida do lado do quadrado da base e h é a altura da pirâmide.

Calcule o volume de uma pirâmide de base quadrada em que $x = 15$ cm e $h = 18$ cm. 1 350 cm³

Aurora Photos/Alamy/Other Images

Pirâmide de Quéfren, Egito.

17 Muitas pessoas procuram cuidar do corpo fazendo uma alimentação equilibrada. A obesidade pode implicar alguns problemas de saúde e, por isso, deve ser controlada. Ela é medida pelo IMC, que significa Índice de Massa Corporal. Um IMC é considerado saudável quando está entre 20 e 25. A fórmula que calcula o IMC de uma pessoa é dada por:

$$\text{IMC} = \frac{P}{A^2},$$

em que P é o "peso" em quilogramas e A, a altura em metros.

Considerando que Roberto "pesa" 70 kg e tem 1,70 m de altura, o seu IMC é dado por:

$$\text{IMC} = \frac{70}{1,7^2} = \frac{70}{2,89} = 24,22$$

EstudioMil/Arquivo da editora

Agora é com você. Faça o que se pede.

a) Calcule seu IMC. Resposta pessoal.

b) Sabendo que um IMC acima de 30 é considerado obesidade, responda: a partir de quantos quilogramas uma pessoa que mede 1,80 m pode ser considerada obesa? 97,2 kg

18 Há um tipo de fórmula denominada fórmula de conversão que permite expressar uma medida em função de outra expressa em outra unidade. Por exemplo, no Brasil é comum expressar as temperaturas em graus Celsius, enquanto em países de língua inglesa costuma-se usar o grau Fahrenheit.

A fórmula que converte uma medida de temperatura de graus Fahrenheit para graus Celsius é dada por: $C = \dfrac{5 \cdot (F - 32)}{9}$.

Se em um jornal de Nova York lemos que a temperatura média é de 23 °F, temos que fazer a conversão para graus Celsius para ter ideia do que representa essa temperatura. Calculando o valor numérico para $F = 23$, temos:

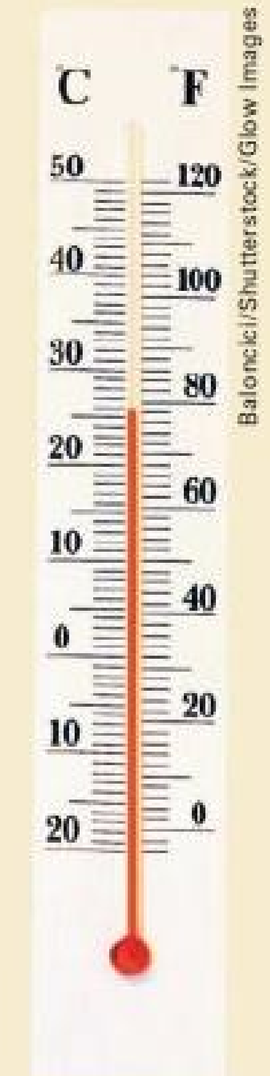
$$C = \frac{5 \cdot (23 - 32)}{9} = \frac{5 \cdot (-9)}{9} = -5$$

Ou seja, a temperatura é de 5 °C abaixo de zero.

Converta as temperaturas abaixo de graus Fahrenheit para graus Celsius.

a) $F = 32$ $C = \frac{5 \cdot (32 - 32)}{9} = \frac{5 \cdot 0}{9} = 0$; 0 °C

b) $F = 68$ $C = \frac{5 \cdot (68 - 32)}{9} = \frac{5 \cdot 36}{9} = 20$; 20 °C



Baloncici/Shutterstock/Glow Images

Termômetro de mercúrio

19 Existe uma fórmula que associa o tamanho do pé ao número do sapato. Veja:

$$N = \frac{5p + 28}{4}$$

N = número do sapato
p = comprimento do pé em centímetros


stefanolunardi/Shutterstock/Glow Images

Suponha uma pessoa cujo comprimento do pé seja 20 cm, então o número do seu sapato é dado pela fórmula:

$$N = \frac{5 \cdot 20 + 28}{4} = \frac{128}{4} = 32$$

Embora essa fórmula seja amplamente conhecida, deve-se levar em conta fatos que a tornam imprecisa em alguns casos: a numeração dos sapatos varia de país para país; a forma do pé das pessoas (mais largo, mais fino, etc.) altera a numeração.

Usando a fórmula acima, responda:

a) Qual é o número do sapato de alguém cujo pé mede 24 cm? O número do sapato é 37. $N = \frac{5 \cdot 24 + 28}{4} = \frac{148}{4} = 37$.

b) Qual é o tamanho do pé de uma pessoa cujo sapato é número 42? 28 cm
Veja a resolução no Manual do Professor.

20 ***Desafio olímpico***

No 9º ano estuda-se esta fórmula:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Calcule o valor de x atribuindo os seguintes valores para a, b e c:

a	*b*	*c*	
2	10	8	−1
1	6	9	−3

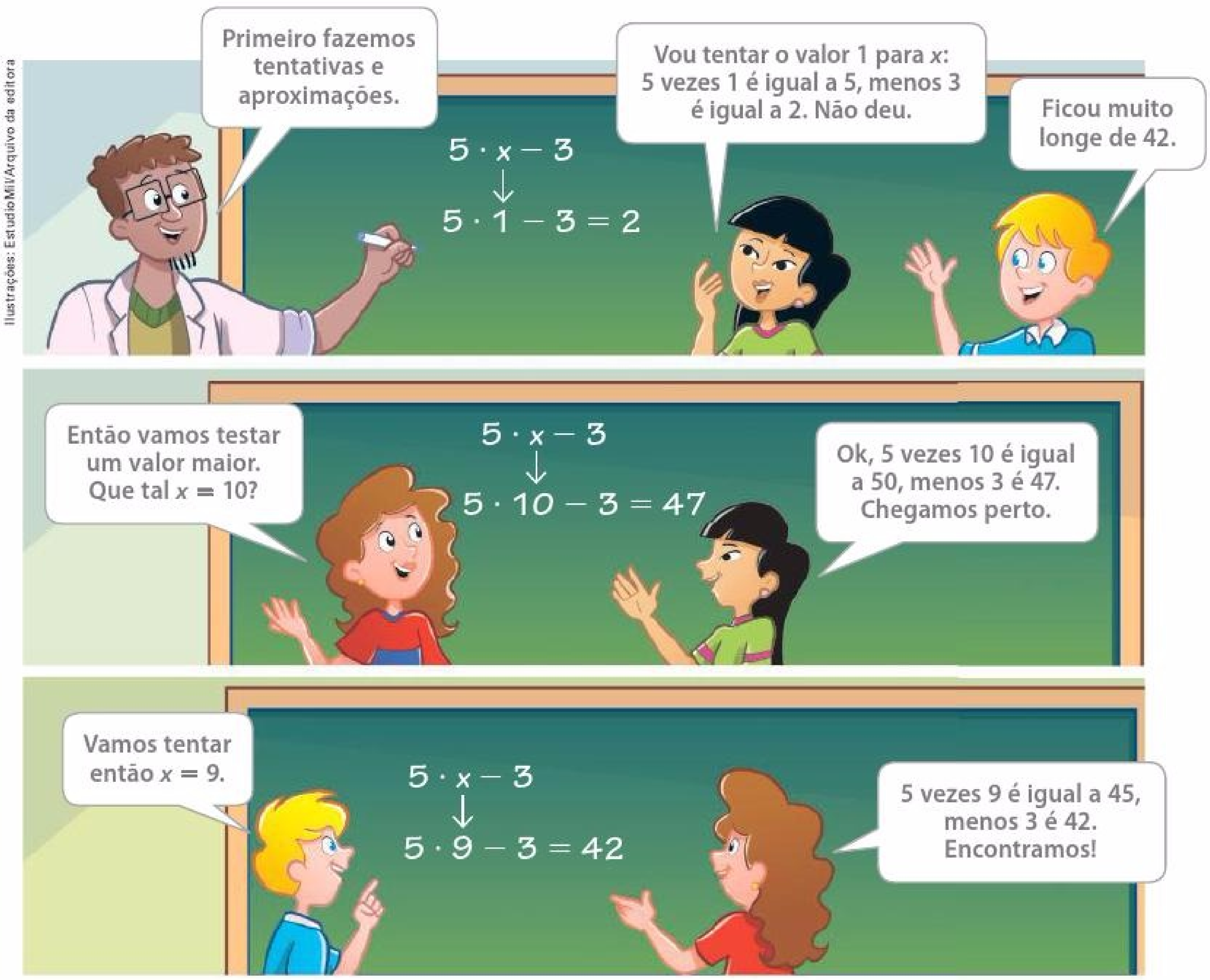
Nesta atividade, o foco é apenas o cálculo do valor numérico da expressão, não se trata de antecipar o estudo das raízes de uma equação do 2º grau, que os alunos vão estudar no 9º ano.

A equação e a raiz da equação

Considere uma equação do tipo $ax + b = c$, com $a \neq 0$. Esse tipo de equação, em que os coeficientes numéricos a e b são números racionais, são chamadas de **equação do 1º grau com uma incógnita**.

Vamos encontrar um valor para x que transforme a equação $5x - 3 = 42$ em uma sentença verdadeira?

Ilustrações: EstudioMil/Arquivo da editora



Observe abaixo o raciocínio utilizado pelos alunos:

- Substituindo x por 9 na equação $5x - 3 = 42$, temos uma sentença verdadeira.
- O valor numérico da expressão $5x - 3$ quando $x = 9$ é 42.
- Portanto, por 9 ser a solução da equação, dizemos que 9 é a raiz da equação.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

21 Determine os números que satisfazem as equações.

a) $2x - 7 = 35$ $x = 21$

b) $3x + 8 = 29$ $x = 7$

c) $-5x + 13 = 28$ $x = -3$

d) $37x - 11 = 100$ $x = 3$

22 Qual das equações tem como solução $x = -5$? c e d

a) $x - 5 = 0$ $(-5) - 5 = -10 \neq 0$ (-5 não é raiz).

b) $2x + 12 = 3$ $2(-5) + 12 = -10 + 12 = 2 \neq 3$ (-5 não é raiz).

c) $2x + 13 = 3$ $2(-5) + 13 = -10 + 13 = 3$ (-5 é raiz).

d) $3x - 1 = -16$ $3(-5) - 1 = -15 - 1 = -16$ (-5 é raiz).

Equações e problemas

A linguagem algébrica e as equações são ferramentas eficazes na solução de problemas. Acompanhe a análise e a solução de alguns problemas de adivinhação de números.

A soma de dois números consecutivos é 11. Quais são esses números?

A soma de dois números consecutivos é 77. Quais são esses números?

A estratégia é legítima e recebe vários nomes dependendo do contexto em que são usadas: "tentativa e erro", "ensaio e erro", "método das aproximações sucessivas" ou "regra da falsa posição".

Nos sessenta séculos de história da evolução da Matemática, vários povos dedicaram-se à agricultura e comercializaram sua produção para sobreviver, construíram e desenvolveram embarcações, habitações e monumentos grandiosos e atravessaram oceanos. Ao observarem o céu, conseguiram prever eclipses e calcular, com relativa precisão, a medida do raio da Terra e a distância de nosso planeta à Lua. Em todas essas situações, tiveram que fazer cálculos complexos e, com o passar do tempo, desenvolveram modos mais práticos de resolver equações e problemas, usando métodos mais desenvolvidos que a estratégia das tentativas.

Existe uma maneira mais prática de resolver o problema.

O primeiro passo é **equacionar o problema**, ou seja, expressar a relação entre os dados por meio de uma equação.

É simples representar dois números consecutivos: se chamamos um de x, o outro pode ser $x + 1$.

A soma dos dois números é 77, portanto: $x + (x + 1) = 77$

Resolução da equação:

$$x + (x + 1) = 77$$
$$x + x + 1 = 77$$
$$2x + 1 = 77$$
$$2x = 77 - 1$$
$$2x = 76$$
$$x = 76 : 2$$

Então, o menor é $x = 38$.

Os números consecutivos que adicionados têm soma 77 são 38 e 39.

Verificando: $38 + 39 = 77$

Esse método permite resolver qualquer problema do mesmo tipo. Experimente.

Vamos agora analisar mais quatro exemplos:

1º) A soma de dois números consecutivos é 345. Quais são esses números?

Sejam n e $n + 1$ os dois números consecutivos.

A equação correspondente é:

$$n + (n + 1) = 345$$
$$2n + 1 = 345$$
$$2n = 345 - 1$$
$$2n = 344$$
$$n = 344 : 2$$
$$n = 172$$

Os números são 172 e 173.

2º) Quais são os três números consecutivos cuja soma é 165?

Sejam os três números consecutivos: x, $x + 1$ e $x + 2$.

A equação correspondente é:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 165$$

Eliminando os parênteses para obter equações equivalentes mais simples, temos:

$$x + x + 1 + x + 2 = 165$$
$$3x + 3 = 165$$
$$3x = 165 - 3$$
$$3x = 162$$
$$x = 162 : 3$$
$$x = 54$$

EstudioMil/ Arquivo da editora

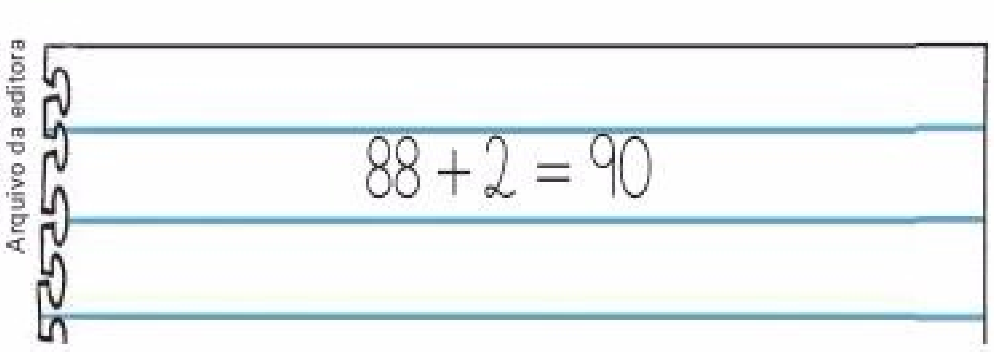
Os números são 54, 55 e 56.

3º) Descobrir dois números **pares consecutivos** cuja soma é 178.

Aqui há uma novidade, o fato de que, como os números devem ser pares consecutivos, a diferença entre eles deve ser 2. Assim, temos: n e $n + 2$.

Portanto,

$$n + (n + 2) = 178$$
$$2n + 2 = 178$$
$$2n = 178 - 2$$
$$2n = 176$$
$$n = 176 : 2$$
$$n = 88$$



Ilustra Cartoon/ Arquivo da editora

88 é o número menor, logo, o número maior deve ser 90. Os alunos podem conferir os cálculos.

Como a diferença entre dois números pares consecutivos é sempre 2, poderíamos indicá-los assim: m e $m - 2$ (eles continuam sendo pares consecutivos).

A equação correspondente será:

$$m + (m - 2) = 178$$
$$2m - 2 = 178$$
$$2m = 178 + 2 = 180$$
$$m = 180 : 2$$
$$m = 90$$

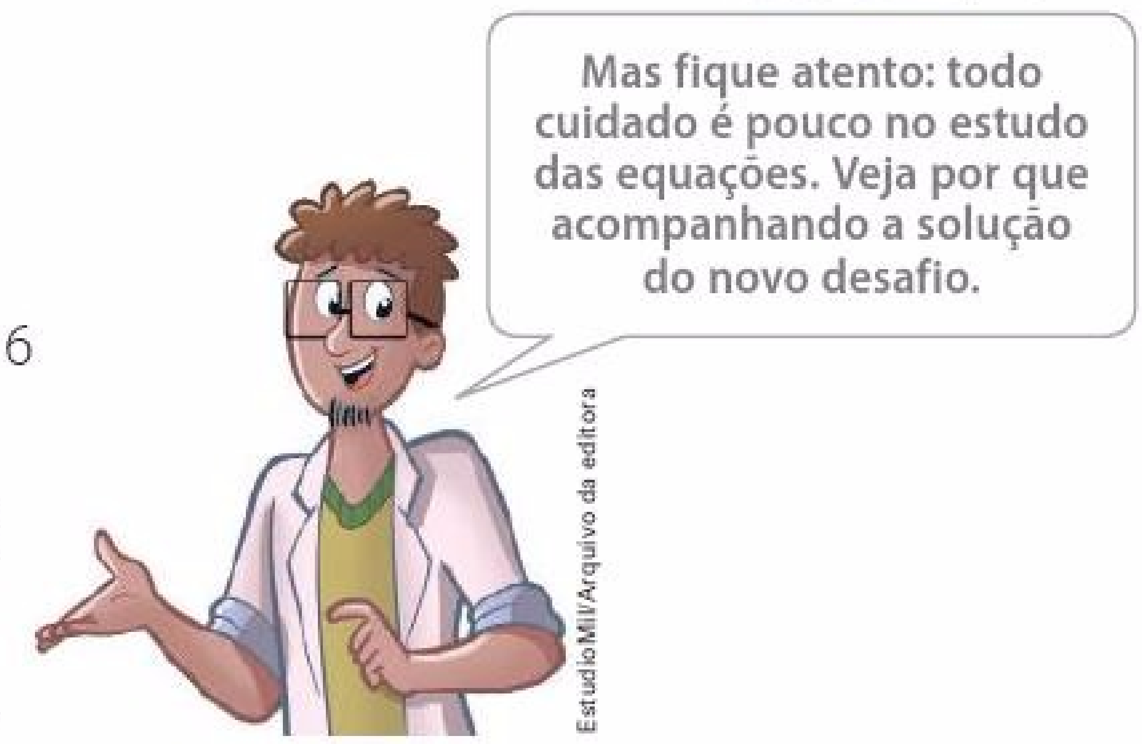
90 é o número maior, logo, o número menor é 88.

4º) Descubra os três números pares consecutivos cuja soma é 57?

Sejam os números: x, $(x + 2)$ e $(x + 4)$.

A equação correspondente é:

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 57$$
$$3x + 6 = 57$$
$$3x = 57 - 6$$
$$3x = 51$$
$$x = 51 : 3$$
$$x = 17$$



Sendo um número 17, os outros devem ser 19 e 21.

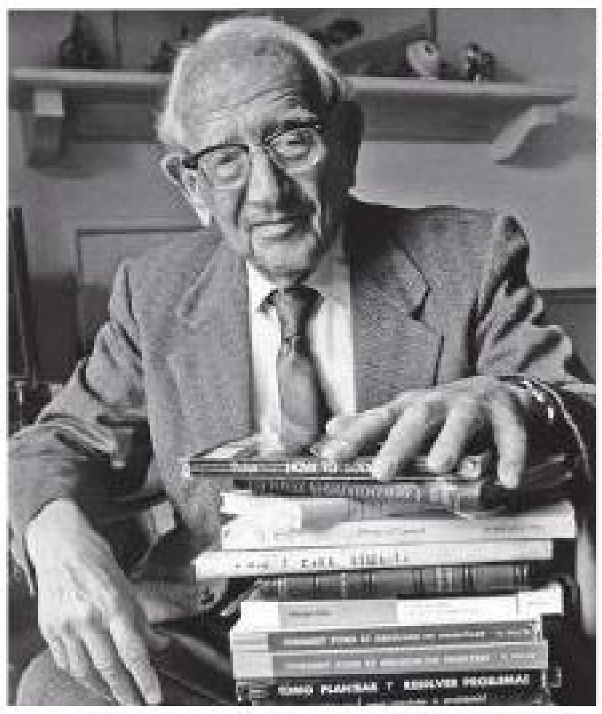
Esse é um exemplo que chama a atenção para um tipo de erro muito comum, pois tudo pode ir muito bem com o método e com a equação e, ainda assim, não se chegar à solução.

Por isso, é importante analisar os dados do problema antes de resolvê-lo, para poder decidir antecipadamente se ele tem ou não solução. E, se tiver solução, saber a natureza e a dimensão do resultado.

Nesse momento cabe lembrar das recomendações de um matemático húngaro que viveu no século passado chamado George Pólya.

A arte de resolver problemas

O húngaro George Pólya foi um dos mais criativos matemáticos que viveu no século XX. Ele escreveu várias obras, e seu livro mais conhecido é *A arte de resolver problemas*, que discute estratégias engenhosas para resolver problemas. Nesse livro, Pólya dá algumas dicas interessantes. Eis suas recomendações:



AP Photo/Other Images

George Pólya (1887-1985).

1ª) Antes de qualquer coisa, é preciso **compreender o problema**. Deve-se saber o que o problema pede, quais são as incógnitas, quais são os dados, quais são as condições que o problema impõe, e assim por diante.

Podemos analisar o 4º exemplo da página 45 da seguinte forma:
As **incógnitas**: três números.
Os **dados**: a soma dos três números é 57.
As **condições**: os números devem ser pares consecutivos.

2ª) Depois de compreendido o problema, é necessário **estabelecer um plano** para resolvê-lo.
Deve-se considerar quais são as relações entre o que se tem (os dados e as condições) e o que se quer descobrir (as incógnitas); se o problema é parecido com algum outro conhecido que já se sabe resolver; se ele pode ser equacionado; se um desenho ou um esquema ajuda na solução; se não fica mais fácil resolver um problema auxiliar mais simples.
Por exemplo, no nosso caso, já sabíamos equacionar e resolver um problema parecido envolvendo números pares consecutivos.

3ª) Uma vez que se tem o plano para a solução, deve-se **executar o plano**.
No nosso caso, o que se deveria fazer era resolver a equação.

4ª) Por fim, é importante **verificar o resultado** para saber se o que foi encontrado satisfaz todas as condições impostas e analisar o processo de solução — em alguns casos percebe-se ser possível chegar à solução por um caminho mais simples.

EstudioMil/Arquivo da editora

Na resolução desse problema, ao verificar se os números obtidos satisfaziam todas as condições do problema, vimos que satisfaziam a equação, mas não as condições do enunciado, pois não eram pares.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

P Apresente aos alunos situações em que eles possam refletir sobre seu conhecimento, os métodos e procedimentos que usam para organizar a solução de problemas. Leve-os a reconhecer técnicas e maneiras variadas de resolução de problemas.

23 Releia as etapas que Pólya sugere para enfrentar e resolver um problema com organização e eficácia.

1. Registre os pontos que você considera importantes do texto. Depois, discuta-os com seus colegas e o professor.

Crie possibilidades para que os alunos reconheçam problemas que têm a mesma estrutura (do mesmo tipo). Estimule-os a refletir sobre o próprio pensamento. Proponha atividades em que os alunos tenham que sistematizar e redigir ideias matemáticas.

2. Sugira ou destaque algum procedimento na resolução de um problema.

Resolva as questões 24 a 32 levando em conta as ideias de Pólya.

24 Desenhe um quadrado 3 × 3, conforme a figura, e escreva, em cada quadradinho, os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, de acordo com as instruções:

- 1, 8 e 6 estão na linha superior;
- 2, 9 e 4 estão na linha inferior;
- 1, 4, 2, 5, 7 e 6 não estão na coluna da esquerda;
- 8, 1, 5, 9, 3 e 4 não estão na coluna da direita.

?	?	?
?	?	?
?	?	?

Banco de imagens/Arquivo da editora

Neste problema, é importante verificar se sua solução satisfaz todas as condições do problema.

8	1	6
3	5	7
9	4	2

25 Em um campeonato de futebol, 1 128 torcedores precisavam ser transportados em ônibus, nos quais cabiam apenas 36 passageiros. Quantos ônibus serão necessários para transportar todos os torcedores?

P Veja resolução no Manual do Professor.

26 Um homem construiu uma casa quadrada com 4 paredes e uma janela em cada parede. Todas as janelas abriam para o Sul. Após terminar, viu um urso enorme em uma das janelas. Qual é a cor do urso?

P Veja resolução no Manual do Professor.

27 A soma de dois números ímpares consecutivos é 51. Quais são esses números?

Este problema não tem solução, pois a soma de dois números ímpares é sempre par.

28 Joana foi ao supermercado comprar refrigerantes. Comprou 7 garrafas de refrigerante de limão, 5 de laranja, 8 de guaraná e pagou no caixa 6. Quantas garrafas comprou? Foram compradas 20 garrafas.

P Veja resolução no Manual do Professor.

29 Em um barco há 26 cordeiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão? P Veja resolução no Manual do Professor.

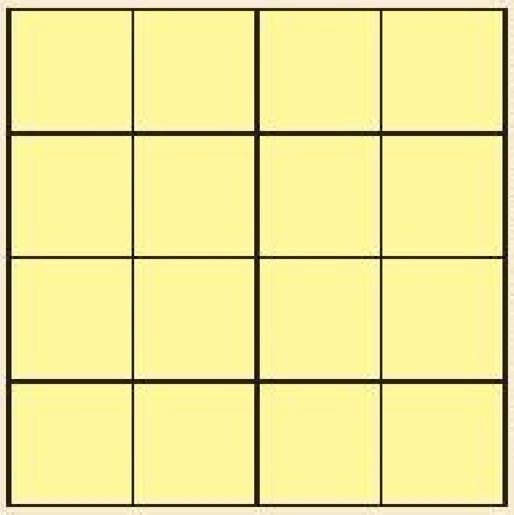
30 Um caçador caminhava pela floresta que tinha três árvores mágicas. Ao chegar à primeira delas, fez a seguinte promessa: se tivesse o dinheiro do seu bolso dobrado, daria 40 moedas de ouro para o ancião que guardava a árvore. Ele foi atendido em seu pedido, cumpriu o que prometera e continuou no caminho. Ao chegar à segunda árvore mágica, repetiu a promessa, sendo também atendido e após dar 40 moedas de ouro para o guardião da árvore, continuou o seu destino. Chegando à terceira árvore mágica, fez novamente à mesma promessa e foi novamente atendido, mas ao dar as 40 moedas de ouro, notou, para sua surpresa, que não lhe restara moeda alguma em seu bolso. Qual é a quantia que ele possuía ao chegar à primeira árvore mágica? 35 moedas

P Veja resolução no Manual do Professor.

31 A soma das idades de Alice e Beatriz é 22 anos e a diferença é de 6 anos. Quantos anos tem cada menina? As meninas têm 14 e 8 anos de idade.

32 Quantos quadrados se pode ver na figura? 30 quadrados

P Veja resolução no Manual do Professor.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Validade de uma solução (ou problemas sem solução)

Vamos continuar a exploração de problemas, mas agora verificaremos sempre a validade da solução.

1º) Ao triplo de um número natural adicionamos o seu antecessor e obtemos o dobro desse número. Qual é esse número?

Número natural: x

Dobro do número: $2x$

Triplo do número: $3x$

Antecessor do número: $(x - 1)$

A equação correspondente é: $3x + (x - 1) = 2x$

Resolvendo a equação:

$3x + x - 1 = 2x$ ⟶ Eliminando parênteses.

$4x - 1 = 2x$

$4x - 2x - 1 = 2x - 2x$ ⟶ Subtraindo $2x$ dos dois membros.

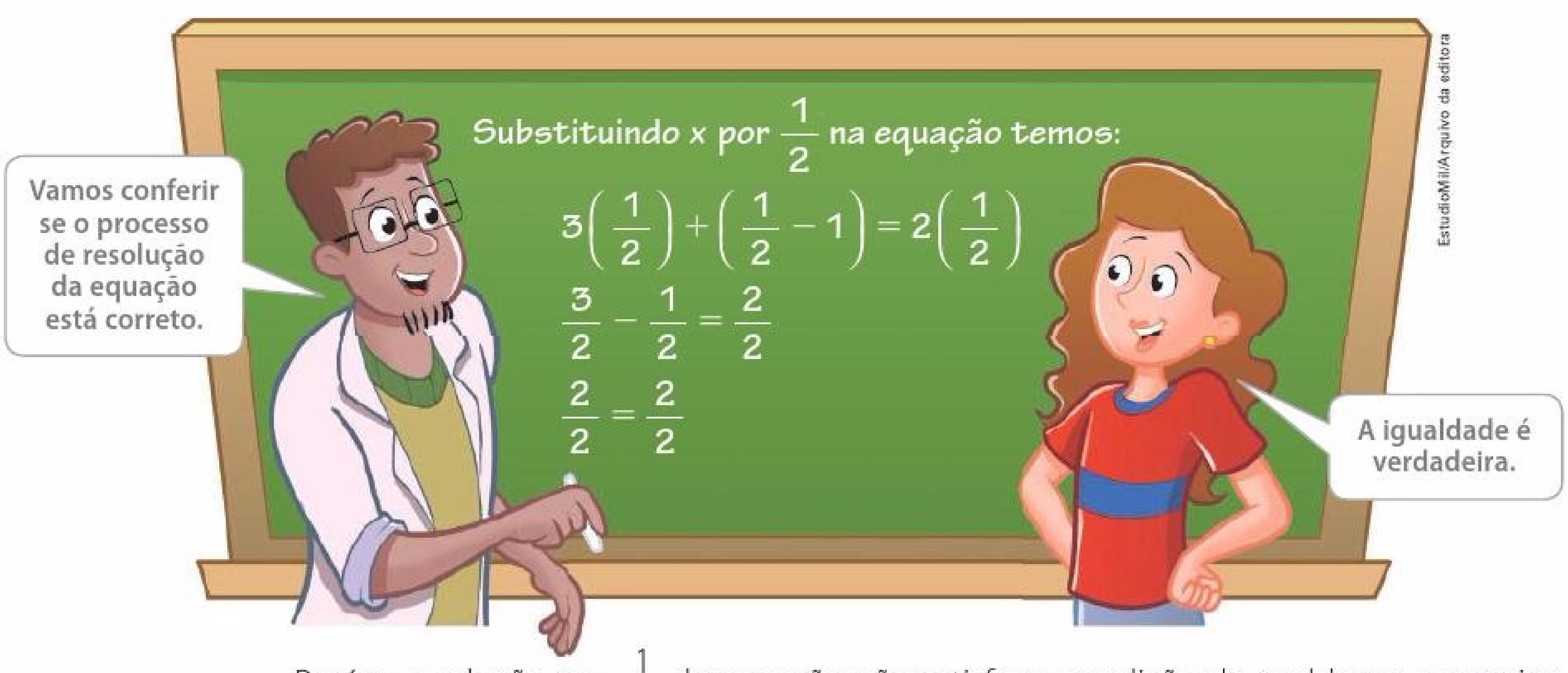
$2x - 1 = 0$

$2x - 1 + 1 = 0 + 1$ ⟶ Adicionando 1 aos dois membros.

$2x = 1$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}$ ⟶ Dividindo os dois membros por 2.

$x = \frac{1}{2}$

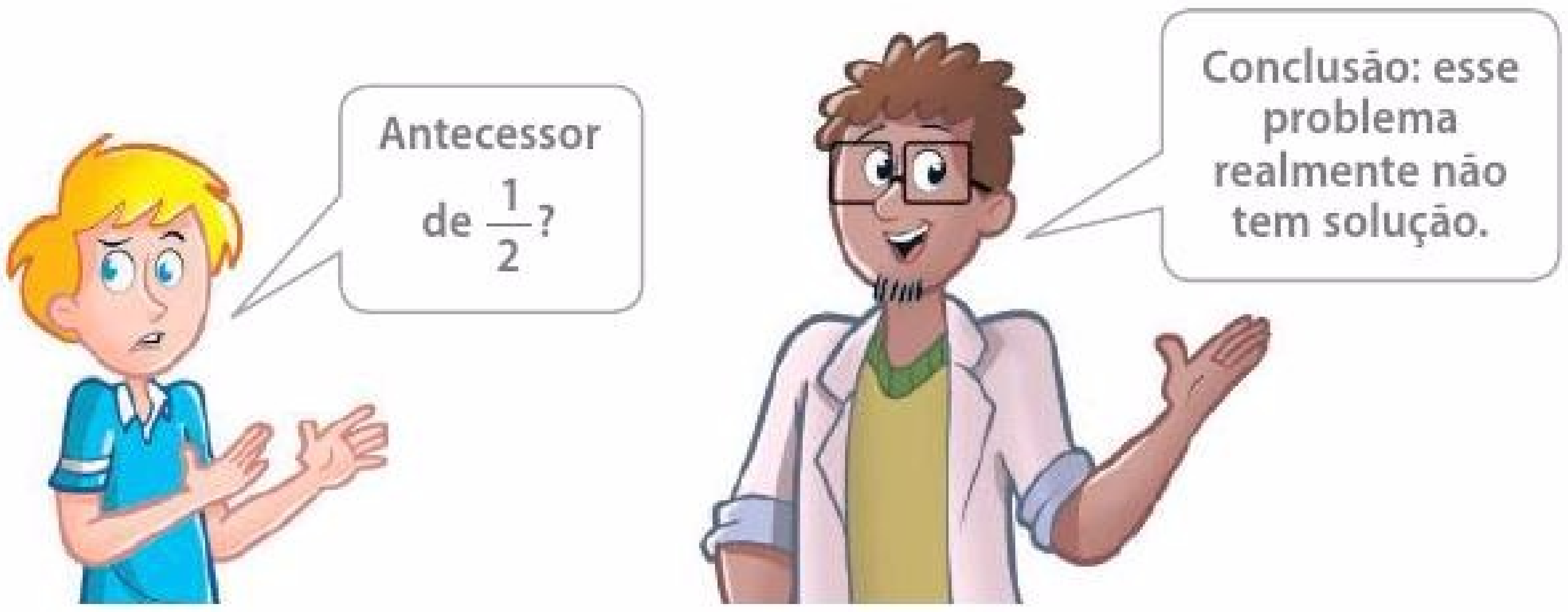


Porém, a solução $x = \frac{1}{2}$ da equação não satisfaz a condição do problema, que exige que o número seja natural. Portanto, o problema com esses dados e condições não tem solução.

Nesse caso o enunciado ficaria: o triplo de um número racional, somado com o antecessor desse número, é igual ao dobro desse número. Qual é esse número?

O problema continuaria sem solução, pois não podemos falar em antecessor de número racional.

EstudioMil/Arquivo da editora



> Atenção: Sempre que o enunciado se referir a sucessor ou antecessor, ficam eliminadas soluções que não sejam números inteiros.

2º) O quíntuplo de um número, somado com o sucessor desse número, é igual a 115. Qual é esse número?

Número: n

Quíntuplo do número: $5n$

Sucessor do número: $n + 1$

A equação correspondente é: $5n + (n + 1) = 115$

Resolvendo a equação, temos:

$$6n + 1 = 115$$
$$6n = 114$$
$$n = \frac{114}{6} = 19$$

Verifique o resultado calculando o quíntuplo de 19 e somando o resultado com o sucessor (20).

P As atividades abaixo foram formuladas por alunos. Depois de explorar problemas, estratégias e modelos de solução, proponha que criem seus próprios desafios. Quando isto ocorre, os alunos tendem a pensar sobre as características das estratégias, sobre obstáculos a serem colocados, analisando a situação do ponto de vista de outro resolvedor (em geral do colega). Estudos indicam que este tipo de situação, de natureza metacognitiva, é eficaz para desenvolver o raciocínio dos alunos. Os problemas formulados pelos alunos devem ser resolvidos pelos colegas. No caso de encontrarem algum problema de formulação, devem propor mudanças nos enunciados, para que fiquem mais claros e tenham solução.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

33 A soma de cinco números pares consecutivos é 130. Quais são esses números?
$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) = 130$. Os números são 22, 24, 26, 28 e 30.

34 O dobro do sucessor de um número, somado com o antecessor deste número, é 16. Qual é esse número? $2(x + 1) + x - 1 = 16 \Rightarrow x = 5$

35 O triplo de um número, somado com o antecessor desse número, é igual a 303. Qual é o número?
$3x + (x - 1) = 303 \Rightarrow x = 76$

36 A soma de três números pares consecutivos somados a 7 é igual a 85. Quais são os números?
$x + (x + 2) + (x + 4) + 7 = 85$. Os números são 24, 26 e 28.

37 A soma das idades de quatro irmãos é 84 anos. Qual é a idade de cada um, sabendo que a cada dois anos nascia um irmão?
$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 84$. As idades são 18, 20, 22 e 24.

38 A soma de quatro números pares consecutivos é igual a 152. Quais são os números?
$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 152 \Rightarrow x = 35$, ímpar. O problema não tem solução.

39 O dobro de um número, multiplicado por 3, é igual a 36. Qual é esse número? $2x \cdot 3 = 36 \Rightarrow x = 6$

40 A soma de um número com seu sucessor é igual a 725. Qual é esse número? $x + (x + 1) = 725 \Rightarrow x = 362$

41 A soma de três números ímpares consecutivos é 105. Quais são esses números?
33, 35 e 37. P Veja resolução no Manual do Professor.

42 A soma de seis números pares consecutivos é 210. Quais são esses números?
$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + (x + 10) = 210$.
Os números são 30, 32, 34, 36, 38 e 40.

43 A soma de três números ímpares consecutivos é 141. Quais são esses números?
$x + (x + 2) + (x + 4) = 141$. Os números são 45, 47 e 49.

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

1 Nesta atividade, considere que x é um número inteiro. Utilize a linguagem algébrica para expressar:

a) o produto de três números consecutivos; $x(x + 1)(x + 2)$

b) o quádruplo do sucessor de um número. $4(x + 1)$

2 Considere x um múltiplo de 5. Escreva em linguagem algébrica os próximos dois múltiplos de 5 maiores que x. $x + 5$ e $x + 10$

3 Escreva em linguagem algébrica:

a) o sucessor de $x + 7$; $x + 8$

b) o sucessor de $n + 20$; $n + 21$

c) o antecessor de $a - 3$; $a - 4$

d) o antecessor de $t + 4$; $t + 3$

e) o antecessor de $n + 1$; n

f) o sucessor de $n + 1$. $n + 2$

4 Escreva por extenso o significado das expressões simbólicas.

a) 9 O número 9.

b) b Um número b.

c) $4n$ O quádrupulo do número n.

d) p^3 O cubo do número p.

5 Seja n um número natural. Qual das expressões a seguir representa o maior e o menor valor numérico para qualquer n? Maior: **b** e menor: **e**.

a) $n + 1$

b) $n + 4$

c) $n - 3$

d) n

e) $n - 7$

6 Escreva a expressão que se obtém quando se acrescenta 4 a $n + 5$. $4 + n + 5 = n + 9$

7 Escreva da forma mais simplificada:

Não escreva no livro.

a) $2a + 5b + a$ $2a + 5b + a = 2a + a + 5b = 3a + 5b$

b) $2n + x + 3m + 5n - m - x + n - 2x$ $2n + 5n + n + 3m - m + x - x - 2x = 8n + 2m - 2x$

8 Sabendo que $e + f = 8$, a expressão de $e + f + g$ é: c

a) $g - 8$

b) $e + f + 8$

c) $8 + g$

9 Se $r + s = t$ e $r + s + t = 30$, qual é o valor de t? $t = 15$

Observe se algum aluno resolveu por substituição.

10 Escreva a expressão resultante de 4 acrescido a $3n$. $4 + 3n$

11 Os lápis azuis custam 5 dinheiros cada um e os lápis vermelhos 6 dinheiros cada um. Comprei alguns lápis azuis e alguns lápis vermelhos que, juntos, custaram 90 dinheiros. Chamando de A o número de lápis azuis e V o número de lápis vermelhos, escreva uma expressão relacionando A e V. $5A + 6V = 90$

12 Se 1 dúzia de bananas custa x reais:

a) quanto custarão 3 dúzias? $3x$ reais

b) quanto custa cada banana? $\frac{x}{12}$ reais

aarrows/Shutterstock/Glow Images

13 O salário-base de Maria é 15 000 dinheiros por semana. Ela também recebe 1 200 dinheiros a cada hora extra que trabalha. Chamando de h o número de horas extras que Maria trabalha na semana e T o valor de seu salário total por semana, escreva uma equação que relacione o salário T com h. $T = 1\,200h + 15\,000$

14 Seja P o "peso" de um prato e C o "peso" de uma colher. Quanto pesam o prato e a colher juntos? $P + C$.
Estamos usando o termo "peso" no sentido coloquial.

Zhdanova Valentyna/Shutterstock/Glow Images

kritskaya/Shutterstock/Glow Images

As imagens não estão representadas em proporção.

15 No bolso levo x moedas de 5 centavos e y moedas de 25 centavos. Quantos centavos tenho ao todo? $5x + 25y$

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

16 Determine o valor numérico das expressões para os valores atribuídos às variáveis.

a) $x - 9$, para $x = 4$ -5

b) $b + 5$, para $b = -5$ 0

c) $4n$, para $n = 2\,000$ 8000

d) m^3, para $m = -10$ $-1\,000$

17 O dobro do sucessor de um número somado com o dobro de seu antecessor é igual a 60. Qual é o número? 15

18 O quádruplo do sucessor de um número somado ao dobro de seu antecessor é igual a 80. Qual é o número? 13

19 Descubra dois números cuja soma é 109 e cuja diferença é 31. 70 e 39

20 A soma de três múltiplos (consecutivos) de 5 é 60. Quais são esses múltiplos? $x + (x + 5) + (x + 10) = 60$ Os múltiplos são 15, 20 e 25.

21 A soma de três múltiplos consecutivos de 7 é igual a 84. Quais são esses múltiplos? $x + (x + 7) + (x + 14) = 84$. Os múltiplos são 21, 28 e 35.

22 Pensei em um número que, somando-se com seu sucessor e com seu triplo, obtém-se 101. Qual é esse número? $x + (x + 1) + 3x = 101$. O número é 20.

23 Pensei em um número. Multipliquei-o por 2 e a esse resultado somei 10. Dividi o que deu por 2 e em seguida subtraí 1. Obtive 29. Em que número pensei? 25

24 Invente problemas cujas equações correspondentes sejam:

a) $5x + (5x + 5) = 45$

b) $2a - 1 = 23$

c) $(x - 1) \cdot (x + 1) = 80$ Respostas pessoais.

Não escreva no livro.

25 Seja um certo número x. O quíntuplo do antecessor de x, mais o sêxtuplo de x, mais o dobro do sucessor de x, menos a metade de x é igual a 72. Qual é esse número? $5(x - 1) + 6x + 2(x + 1) - \frac{x}{2} = 72 \Rightarrow x = 6$

26 A soma de quatro múltiplos consecutivos de 3 é igual a 66. Quais são esses números? $x + (x + 3) + (x + 6) + (x + 9) = 66$. Os números são 12, 15, 18 e 21.

Revista da
Matemática

A MATEMÁTICA DOS CÓDIGOS DE BARRAS

Muitas pessoas ficam intrigadas com os códigos de barras que aparecem impressos nas embalagens ou etiquetas dos produtos. Eles tornam mais eficazes e seguros os sistemas de compra, venda, controle e armazenamento de mercadorias.

Na maioria dos supermercados, o controle das vendas é feito pela leitura do código de barras, impresso no produto, por um leitor óptico, que transmite as informações para um computador central.


Graça Victoria/Shutterstock/Glow Images
Códigos de barras

Esse computador decodifica a mensagem e identifica o produto e todas as suas características, como preço, data de validade, etc. Em seguida, retransmite os dados para a tela do terminal onde o produto está sendo comprado.

No Brasil, a cada produto é atribuído um código formado por treze números. Cada número é codificado por meio de barras verticais de espessuras diferentes e espaços.

Por exemplo, veja o que significa o código 789 6802 08573 3:

Prefixo do país	Código do fabricante	Código do produto	Dígito de controle
789	6 802	08573	**3**

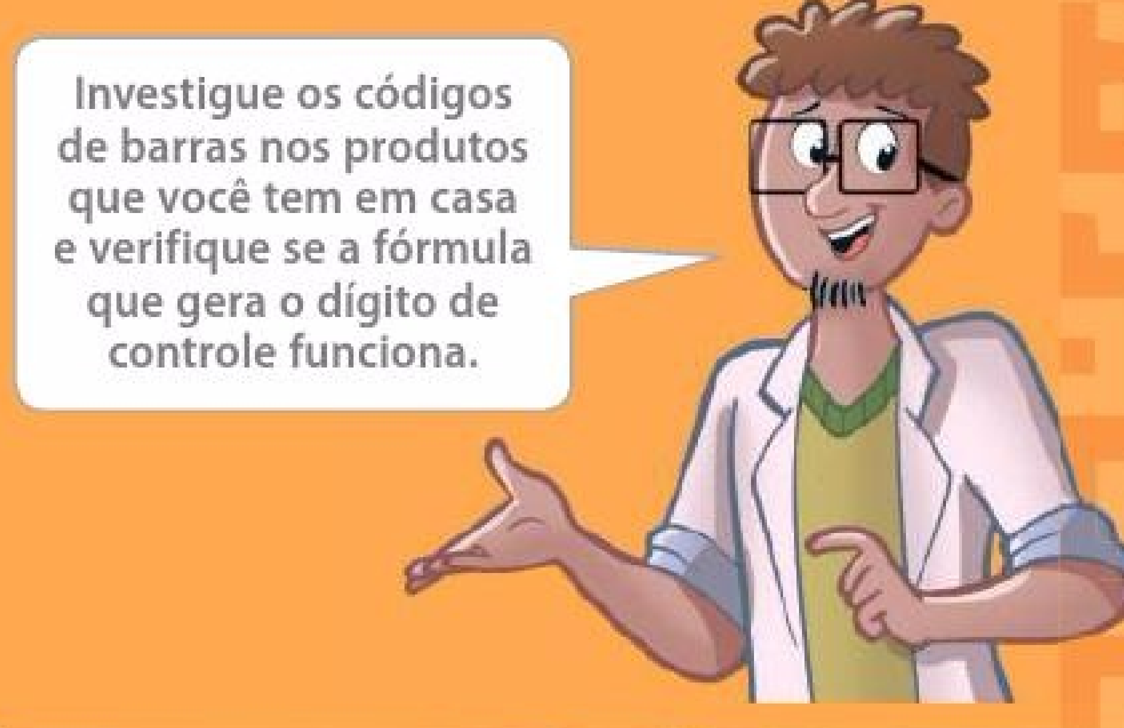
O último número, que é o dígito de controle, é calculado a partir dos doze números anteriores por meio de uma fórmula simples. Veja:

1º) Adicionam-se os números que estão em posições ímpares, da esquerda para a direita, no código. Nesse caso:

$$7 + 9 + 8 + 2 + 8 + 7 = 41$$

2º) Triplica-se a soma dos números que estão em posições pares, da esquerda para a direita, no código:

$$3 \cdot (8 + 6 + 0 + 0 + 5 + 3) = 3 \cdot 22 = 66$$



EstudioMil/Arquivo da editora

3º) Adicionam-se os dois resultados:

$$41 + 66 = 107$$

4º) O dígito de controle é o número que se deve acrescentar a 107 para se obter a próxima dezena:

$$107 + \mathbf{3} = 110$$


Andrey_Popov/Shutterstock/Glow Images
Leitura de código de barras

As imagens não estão representadas em proporção.

O QUE AS PALAVRAS ESTÃO COMUNICANDO?

Alguns termos que utilizamos no cotidiano são "carregados" de ideias matemáticas.

Por exemplo, as palavras dupla, dobro, par, casal, parelha, duo, dualidade, duelo, duplicar, etc. são relacionadas ao número **2**. Também há dezenas de palavras com prefixo "*bi*" que estão relacionadas a 2.

Por exemplo, na cidade de São Paulo, muitas pessoas associam a palavra bienal ao edifício onde se realizam exposições de arte. Porém, esta grande exposição é realizada a cada dois anos, e vem daí o nome bienal.

Bíceps é outra palavra de prefixo "*bi*". Se você for ao dicionário vai encontrar: "bíceps: músculo com **dois** ligamentos...".

Veja outros exemplos:

Biga é o nome de um carro romano de duas ou quatro rodas, mas puxado por dois cavalos.

Bicicleta (bi-cicleta) é um veículo com duas rodas (2 ciclos); binóculo é o nome de um instrumento formado por duas lentes.

De acordo com o professor Ubiratan D´Ambrósio, a palavra Matemática é formada por duas partes: a primeira, "*matema*", significa "explicar, conhecer, entender"; a segunda, "*tica*", está relacionada à arte ou à técnica de explicar, conhecer, entender.

Lorelyn Medina/Shutterstock/Glow Images

Biga

Evgeny Karandaev/Shutterstock/Glow Images

Binóculo

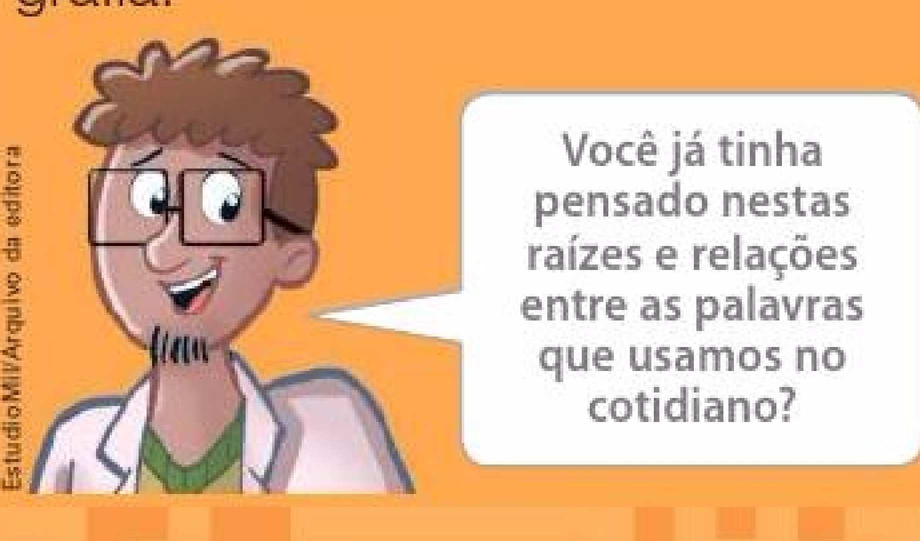
Julian Rovagnati/Shutterstock/Glow Images

Bicicleta

Uma palavra "carregada" de ideias matemáticas — e que poucas pessoas se dão conta disso — é equador, de linha do equador. Usa-se esse nome porque a linha do equador divide a Terra (quase uma esfera) em duas partes iguais.

Outro caso curioso é o nome da caneta esferográfica. As pessoas a usam, mas raramente se dão conta de que se trata de uma caneta com uma esfera na ponta. Os povos de língua espanhola chamam a caneta esferográfica de "bolígrafo": juntaram o prefixo "*boli*", relacionado a bola, esfera, e o sufixo "*grafo*", associado a escrita, grafia.

1. Você conhece alguma outra palavra relacionada ao número 2? Resposta pessoal.
2. Liste algumas palavras que têm os prefixos "*bi*", "*tri*", "*tetra*", "*penta*" e "*poli*". Reflita sobre seus significados. Resposta pessoal.



EstudioMil/Arquivo da editora

CAPÍTULO

3 ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo vamos explorar alguns aspectos da Geometria, principalmente os relacionados às medidas de comprimento e área utilizando a linguagem algébrica. Nos próximos capítulos, essa relação será útil para melhor compreender algumas regras importantes do cálculo algébrico.

Vamos iniciar revisando áreas de figuras planas, como o retângulo, e em seguida estudar as áreas de outras figuras geométricas, como os triângulos e alguns quadriláteros.

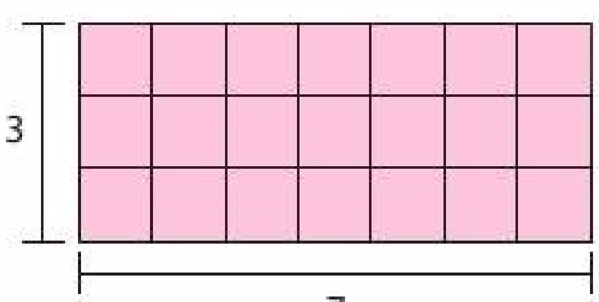
Área do retângulo

Para começar, é importante relembrar o que é um retângulo e discutir sobre suas características e propriedades.

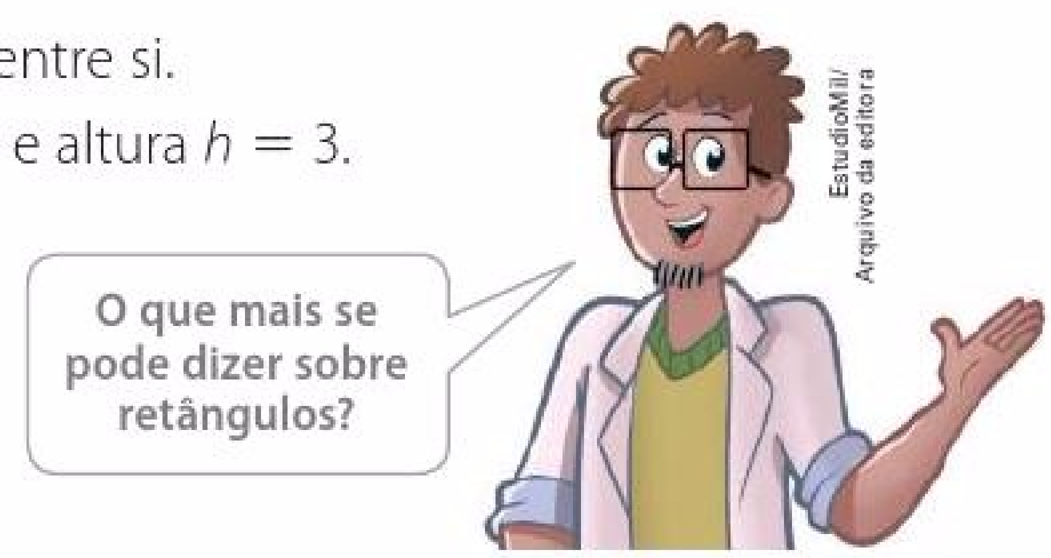
Retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos internos retos.

- Têm lados paralelos dois a dois.
- Os lados paralelos têm medidas iguais.
- Dois lados não paralelos são perpendiculares entre si.

O retângulo da figura a seguir tem base $b = 7$ e altura $h = 3$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

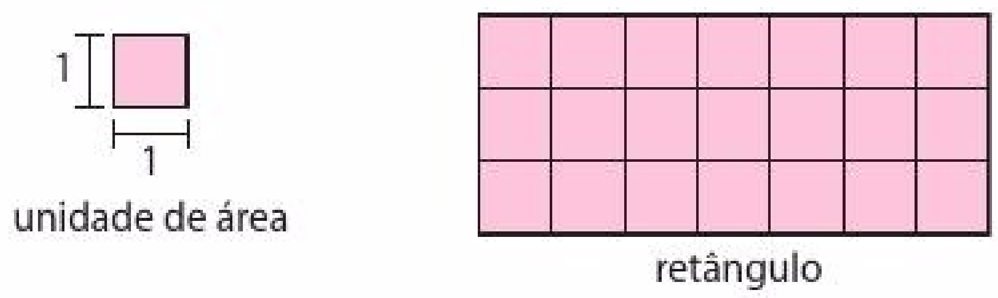


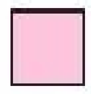
EstudioMil/Arquivo da editora

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

P Aproveite esta passagem para discutir com os alunos a importância de buscar o significado dos termos que usamos em Matemática, mesmo os mais simples. Isso contribui para que os alunos desenvolvam o hábito de buscar correlação entre as coisas, objetos, ideias e linguagem matemática e também para que tenham uma visão da Matemática como parte da cultura.

Tomando um quadrado 1×1 como unidade de área, é possível dizer que a área do retângulo corresponde à quantidade de quadrados 1×1 que cabem no retângulo.



Observe que cabem 21  (quadrados 1×1) no retângulo dado.

Nesse caso, podemos indicar o cálculo da área desse retângulo da seguinte maneira:

$$A = 3 \cdot 7 = 21$$

Atenção às **unidades de medida**.

Se o quadrado-unidade tivesse:

- 1 cm de lado, a área do retângulo seria igual a 21 cm^2;
- 1 m de lado, a área do retângulo seria de 21 m^2;
- 1 km de lado, a área do retângulo seria de 21 km^2.

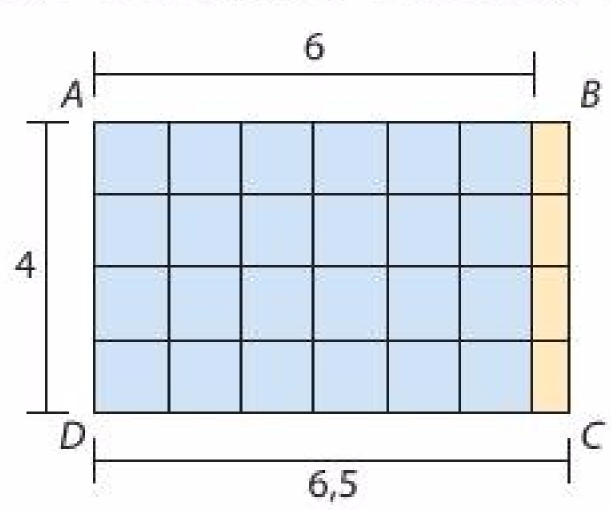
Lembrete: Neste capítulo, as unidades de medidas padronizadas só serão indicadas quando a situação-problema exigir.

Agora vamos explorar outro retângulo.

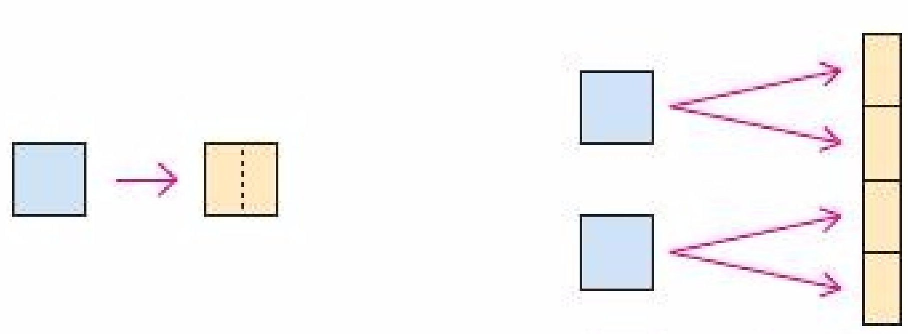
O retângulo a seguir tem dimensões: $b = 6{,}5$ e $h = 4$.

Para encontrar a área do retângulo *ABCD*, temos que determinar quantos quadrados 1×1 cabem nele.

Com 24 quadrados 1×1 conseguimos cobrir a maior parte do retângulo, pois a parte azul mede $4 \cdot 6 = 24$. Fica faltando determinar a área da faixa amarela da coluna à direita.



Observe que, se dividirmos um quadrado 1×1 ao meio, obteremos dois retângulos $1 \times 0{,}5$.



$$2 \cdot 1 = 4 \cdot 0{,}5$$

Assim, podemos concluir que foram necessários 26 (24 + 2) quadrados para cobrir todo o retângulo com $b = 6{,}5$ e $h = 4$.

Também poderíamos ter calculado a área desse retângulo da seguinte maneira:

$$A = 4 \cdot 6{,}5 = 4 \cdot \left(6 + \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot 6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 24 + 2 = 26$$

De modo geral, a área de um retângulo, em que são dados: base b e altura h, é dada pela **fórmula**:

$$A = b \cdot h$$

P É importante abrir a discussão de que o quadrado é um caso particular de retângulo. Mais adiante os alunos verão que um losango é um quadrilátero que tem todos os lados iguais, por isso o quadrado também é um losango. O quadrado é um quadrilátero especial que tem as propriedades tanto do retângulo quanto do losango.

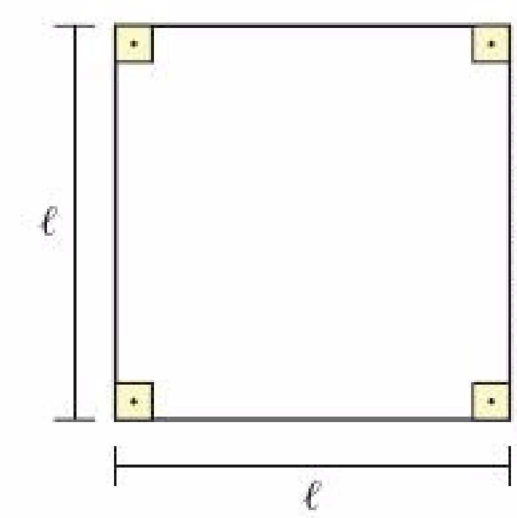
Área do quadrado

Quadrado é um quadrilátero especial que tem todos os lados com medidas iguais e todos os ângulos retos.

EstudioMil/Arquivo da editora

No caso do quadrado, a base b e a altura h são iguais: $b = h$, ou seja, se o lado de um quadrado mede ℓ, a fórmula que dá sua área é:

$$A = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

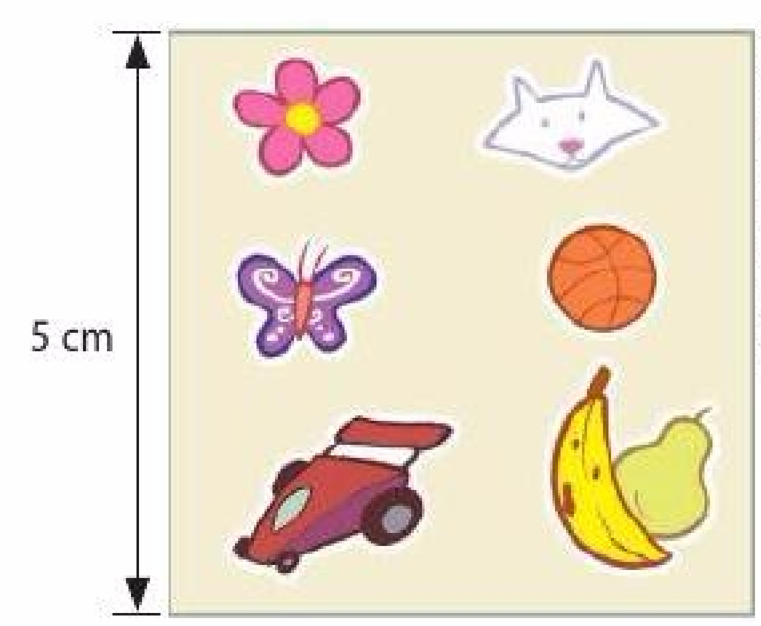


Banco de imagens/Arquivo da editora

Veja alguns exemplos:

- A área de uma cartela cujo lado mede 5 cm é dada por:

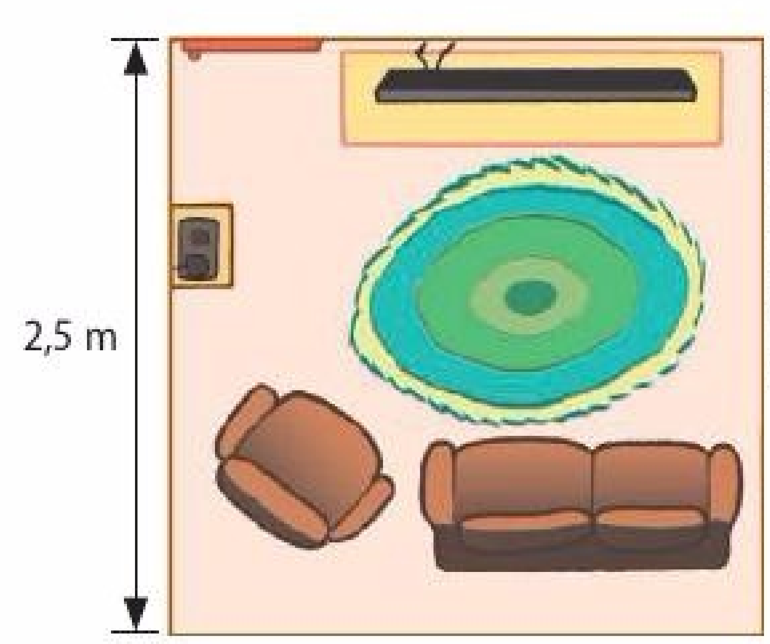
$$A = (5\ \text{cm})^2 = 25\ \text{cm}^2$$



EstudioMil/Arquivo da editora

- A área de uma sala cujo lado mede 2,5 m é dada por:

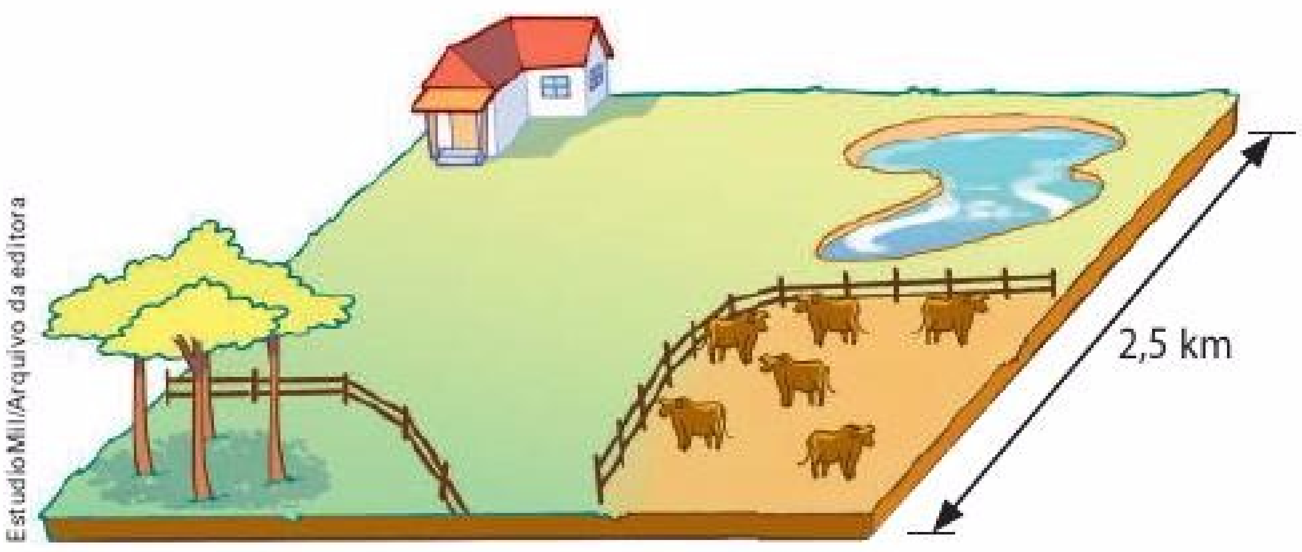
$$A = (2{,}5\ \text{m})^2 = 6{,}25\ \text{m}^2$$



EstudioMil/Arquivo da editora

■ A área de uma fazenda quadrada cujos lados medem 2,5 km é dada por:

$$A = (2{,}5\ \text{km})^2 = 6{,}25\ \text{km}^2$$



Estudio Mil/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 Calcule as áreas dos retângulos com as seguintes medidas: P Veja comentário no Manual do Professor.

a) 3 cm de comprimento e 5 cm de largura; 15 cm²

b) 7 por 11; 77

c) $b = 5$ cm e $h = 7$ cm; 35 cm²

d) 8×12; 96

e) 20 na vertical e 10 na horizontal. 200

2 Quantos metros quadrados de carpete são necessários para cobrir uma sala retangular que tem 5,5 m de comprimento por 6 m de largura? 33 m²

3 Calcule quantos metros quadrados de lona são necessários para forrar um tablado, sabendo que seu formato é um quadrado de 6,10 m de lado. 37,21 m²

4 Determine quantos metros quadrados de grama são necessários para cobrir um campo de futebol:

a) de 110 m de comprimento por 75 m de largura; 8 250 m²

b) de 100 m de comprimento por 64 m de largura. 6 400 m²

5 Use a régua para medir as dimensões de uma folha de papel sulfite.

a) Calcule o perímetro da folha. Aproximadamente 101,4 cm.

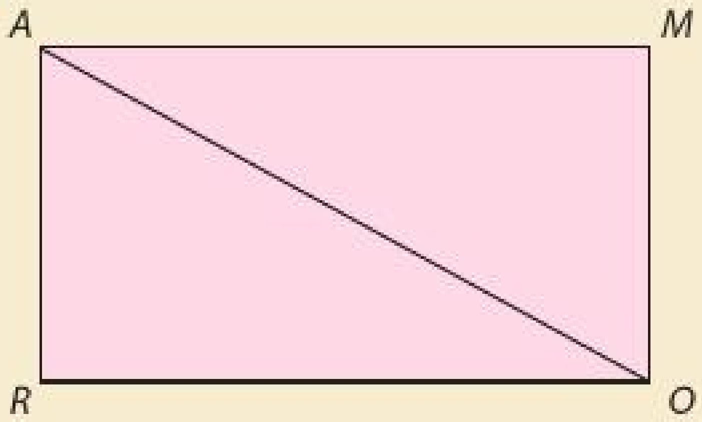
b) Calcule a área da folha. Aproximadamente 623,7 cm².

6 Meça as dimensões de sua sala de aula e calcule a área. Resposta pessoal.

7 Determine o valor da altura de um retângulo cuja base mede 4,8 cm e a área é 26,4 cm². 5,5 cm
P Veja comentário no Manual do Professor.

8 O triângulo *AMO* foi obtido pela decomposição do retângulo *AMOR*. Meça os lados do retângulo e determine a área do triângulo. 4,83 cm²

9. Vamos considerar uma sala de aula que mede 8 m × 10 m e tem uma altura (pé-direito) medindo 3 m.
O perímetro da sala será 36 m (2 · (8 + 10)), a área das paredes sem descontar a porta é 108 m² (36 · 3).
Se o salário mínimo vigente for de R$ 724,00 e o pintor cobrar 2% deste valor, o valor cobrado será R$ 14,48 por metro quadrado.
Como a superfície a ser pintada tem 108 m², o custo do trabalho de pintura seria de R$ 1 563,84. De acordo com os fabricantes, um galão de 3,6 litros de tinta é suficiente para pintar 40 m² de parede.
No caso, seriam necessários ao menos 3 galões.
Se o galão custar R$ 100,00 o custo total da pintura será de R$ 1 563,84 + 3 · R$ 100,00 = R$ 1 863,84.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro.

9 **Vamos pesquisar!**

Alguns pintores de parede cobram o serviço por metro quadrado da superfície pintada. O preço por metro quadrado varia de 2% a 5% do salário mínimo vigente.

I. Pesquise qual é o valor do salário mínimo vigente.

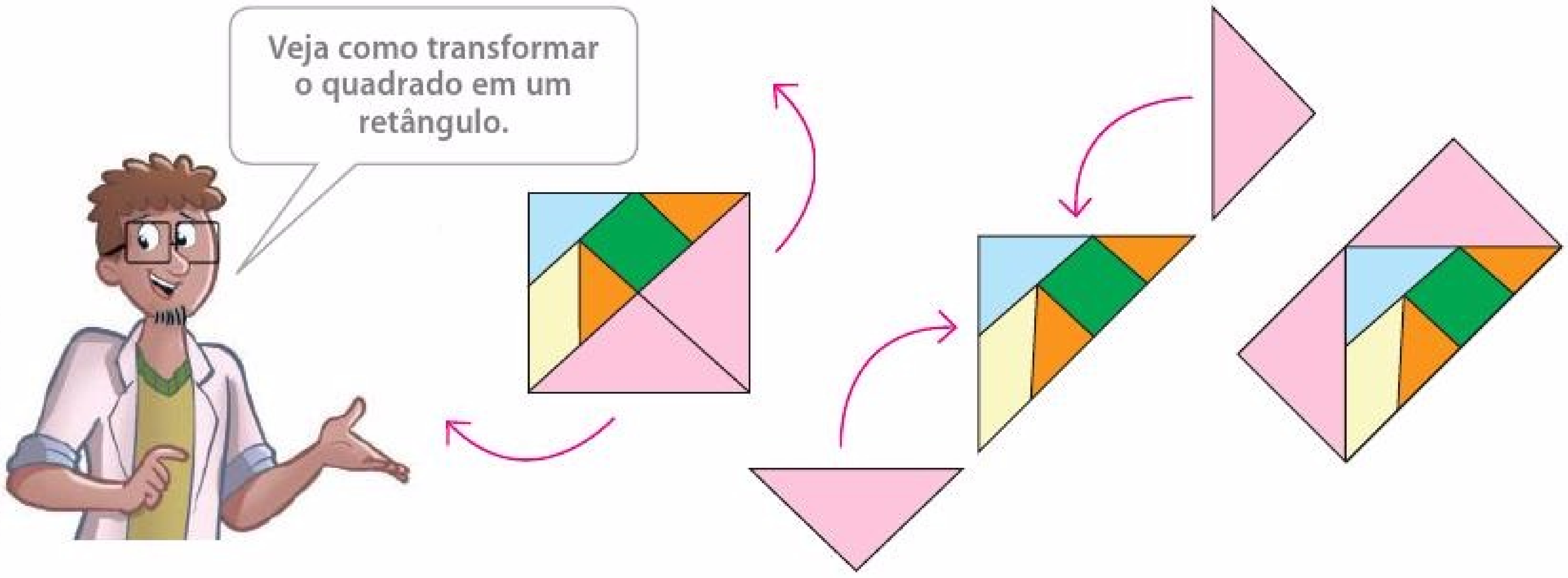
II. Calcule a área total das paredes laterais e do teto de sua sala de aula.

III. Calcule o custo com o trabalho do pintor para pintar a sua sala de aula.

IV. Pesquise o preço do galão de tinta, quanto rende cada galão e quantos galões seriam necessários para pintar sua sala de aula. Respostas pessoais.

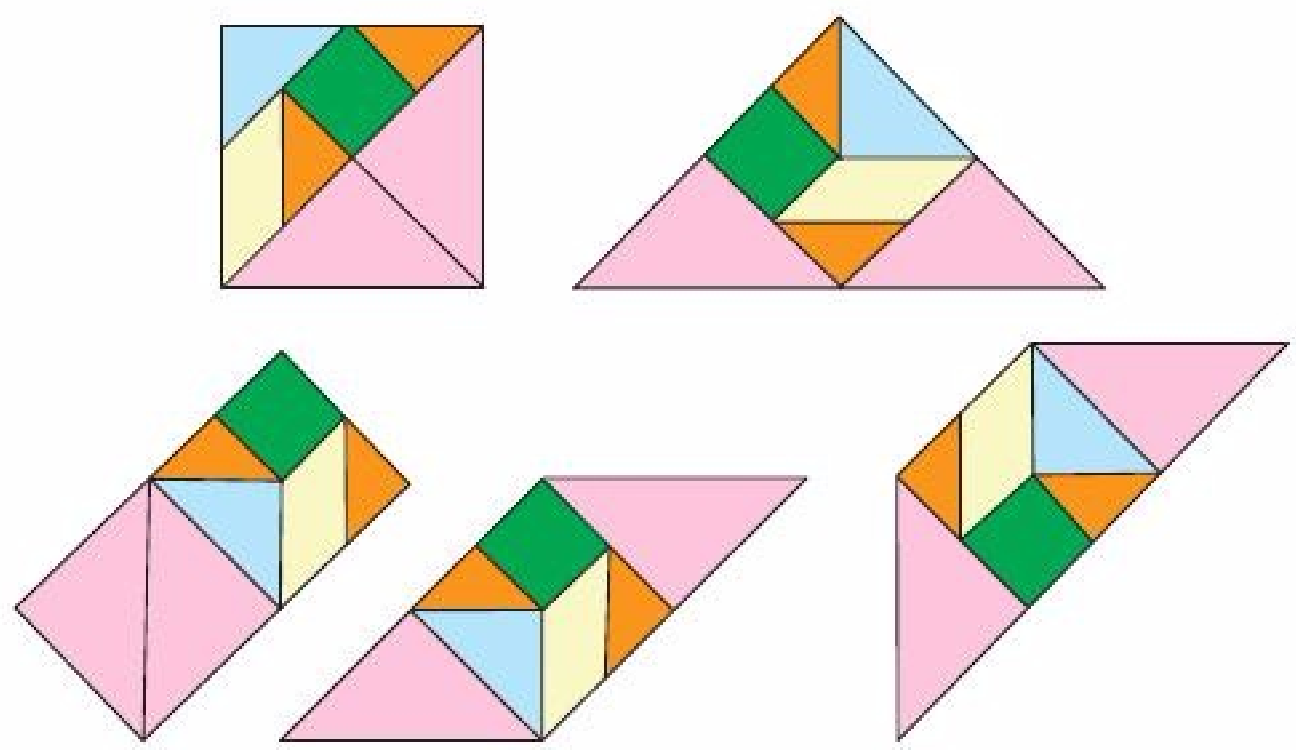
Equivalência de áreas

Observe que todas as figuras a seguir foram compostas com as mesmas peças.



Estúdio Mil/Arquivo da editora

Dizemos, então, que essas são **figuras equivalentes**, isto é, têm a mesma área.

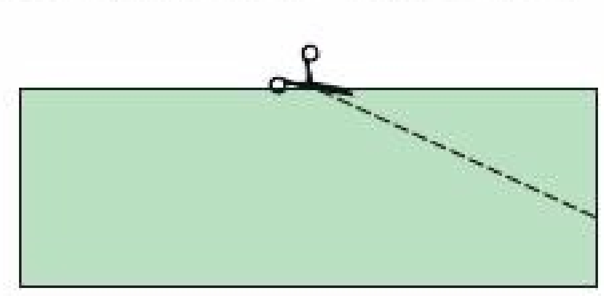


P Proponha para os alunos que recortem dois retângulos iguais, colem o primeiro no caderno e decomponham livremente o segundo; com as duas partes da decomposição do segundo, proponha que componham uma nova forma; cole a nova forma no lado do retângulo original. Oriente-os a nomear as duas figuras, coloquem legendas do tipo "estas figuras são equivalentes e têm a mesma área". Com a ajuda do professor de Arte, podem fazer composições artísticas compondo e decompondo figuras geométricas. Se a atividade for em grupo, dê mais liberdade, propondo que recortem outras figuras como triângulos ou outros polígonos desde que as duas sejam iguais e formem outras composições. Proponha que escrevam um pequeno texto descrevendo seu projeto e o processo de construção.

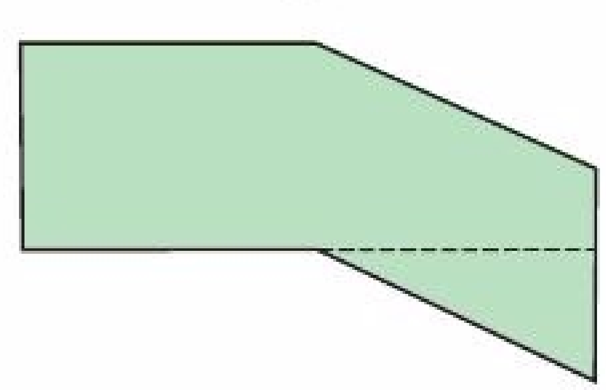
Acompanhe esta outra experiência:

1º) Desenhe e recorte um retângulo qualquer em papel sulfite ou cartolina.

2º) Decomponha-o em duas partes, fazendo um corte.



3º) Com as duas partes, forme uma nova figura de seis lados: um hexágono.

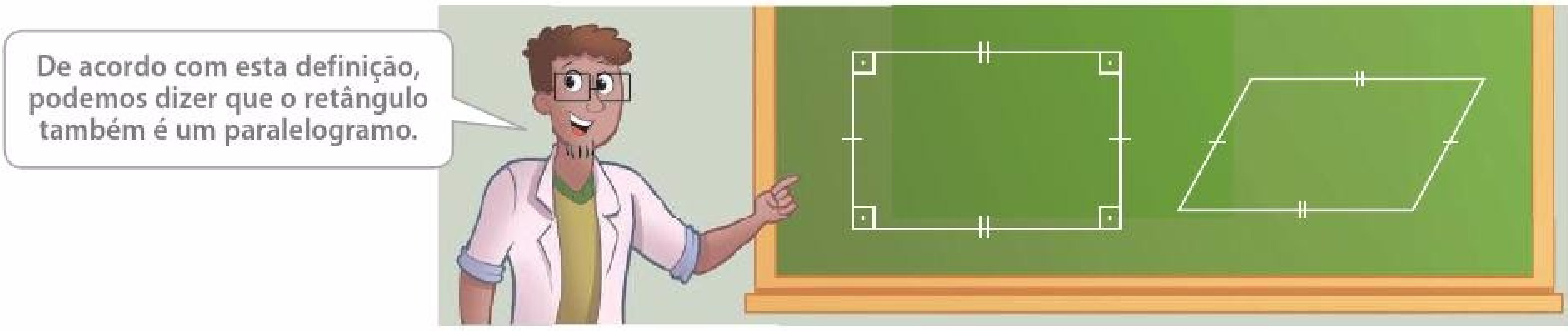


Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

O retângulo original e o hexágono têm a mesma área. Vamos usar esse princípio para explorar a área de outras figuras planas, como o paralelogramo.

Área do paralelogramo

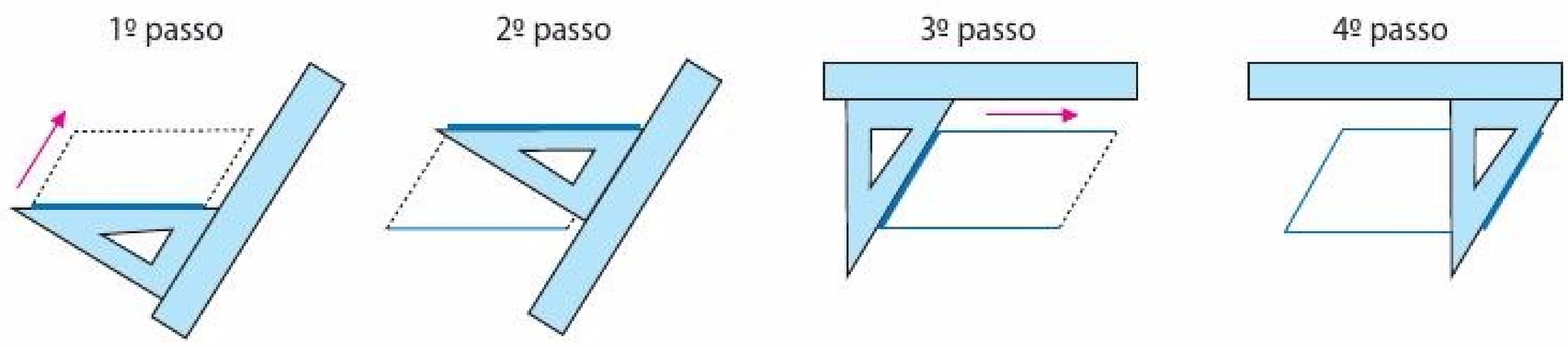
Paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.



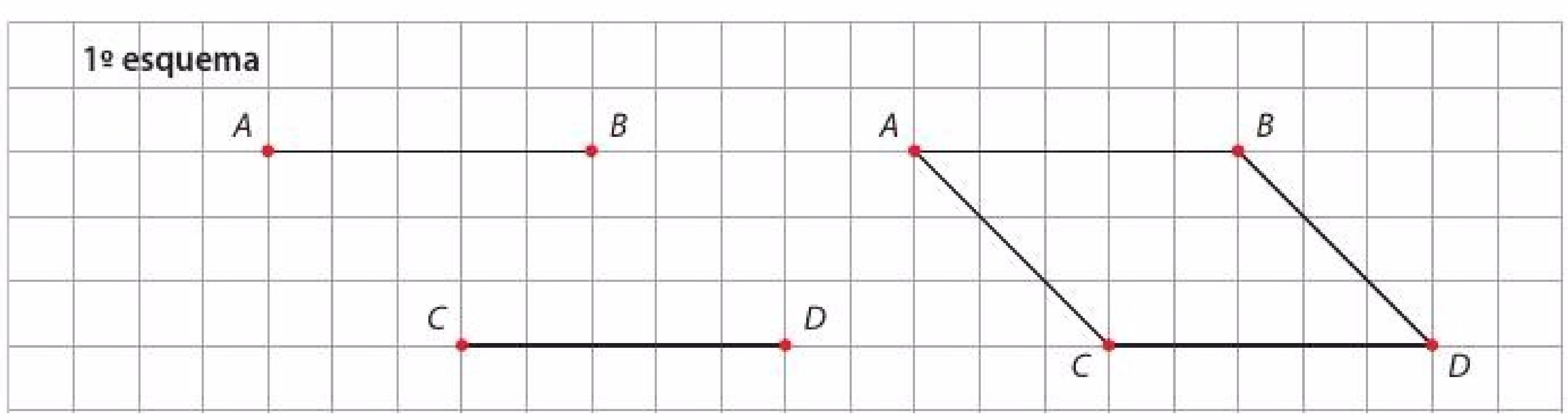
EstudioMil/Arquivo da editora

Há várias maneiras de se construir um paralelogramo. Apresentaremos aqui duas delas.

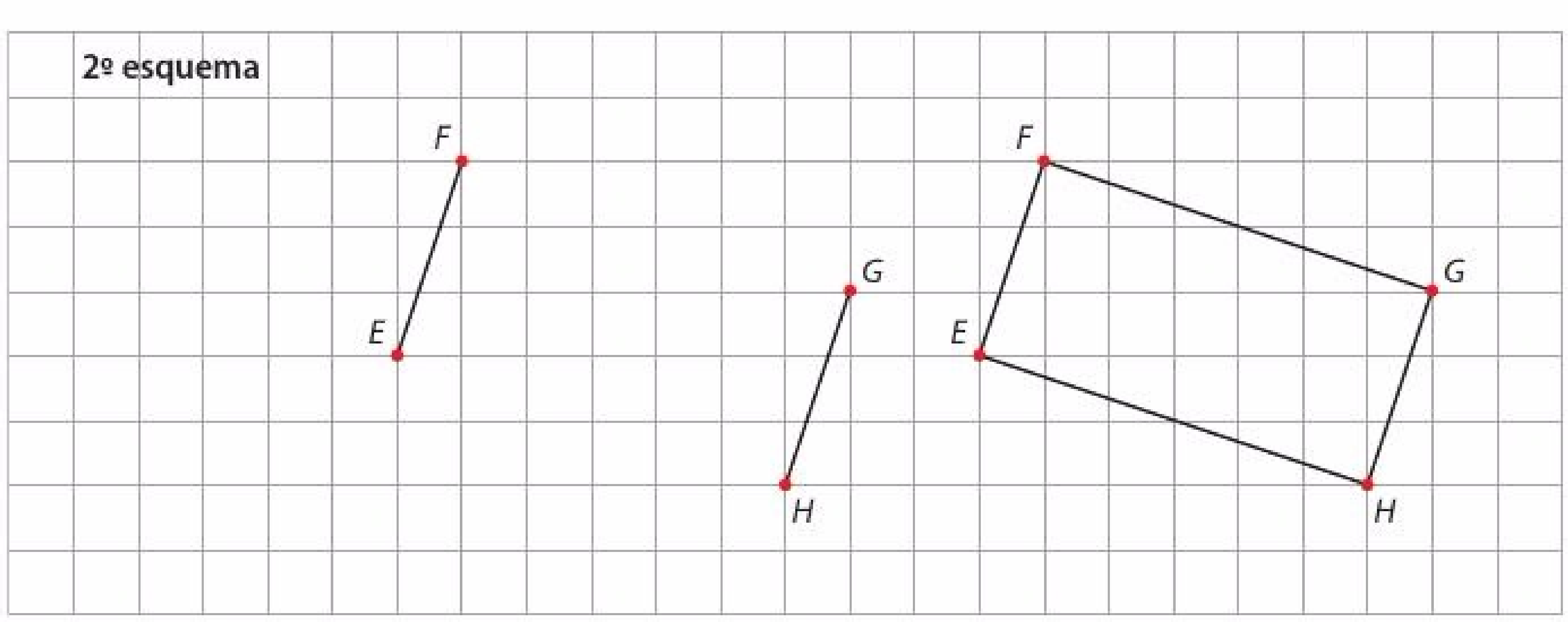
1ª) Usando régua e esquadro:



2ª) Usando a malha quadriculada:



Como as linhas da malha quadriculada são paralelas, é simples produzir paralelogramos. No 1º esquema, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são iguais e paralelos, porque são segmentos sobre linhas da malha quadriculada; os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ também são paralelos, mas isso só será demonstrado no livro do 9º ano.



No 2º esquema, o paralelismo fica garantido mantendo-se a mesma receita que define a direção dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$: "determinar um ponto H, andar 1 quadradinho à direita e subir 3 quadradinhos"; traçar os segmentos $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ que também são paralelos. A partir do ponto E, repetir o mesmo procedimento do ponto H.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

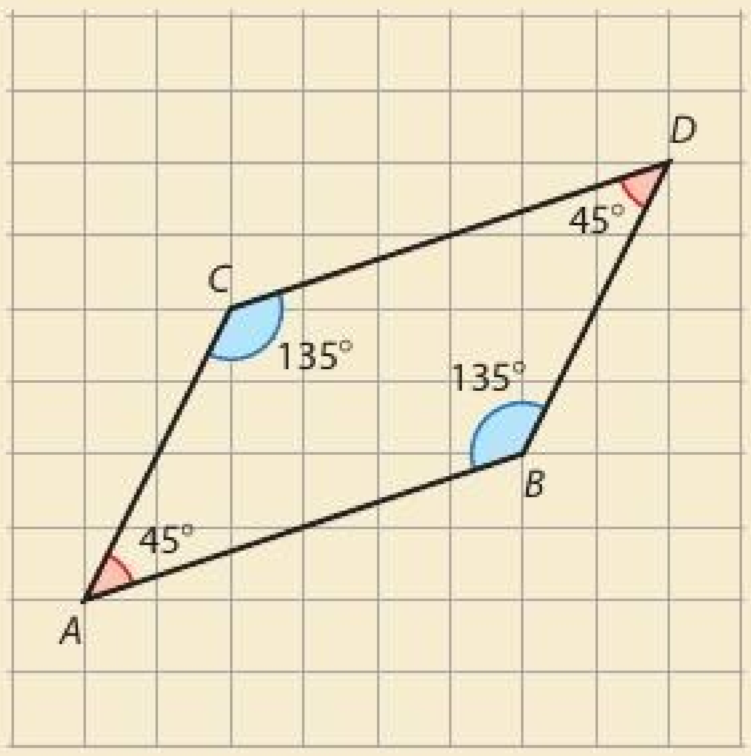
P Ao fazer as atividades abaixo, espera-se que os alunos descubram propriedades importantes sobre os paralelogramos e as relações entre lados e entre ângulos de modo intuitivo. As demonstrações serão objeto de estudo no 9º ano.

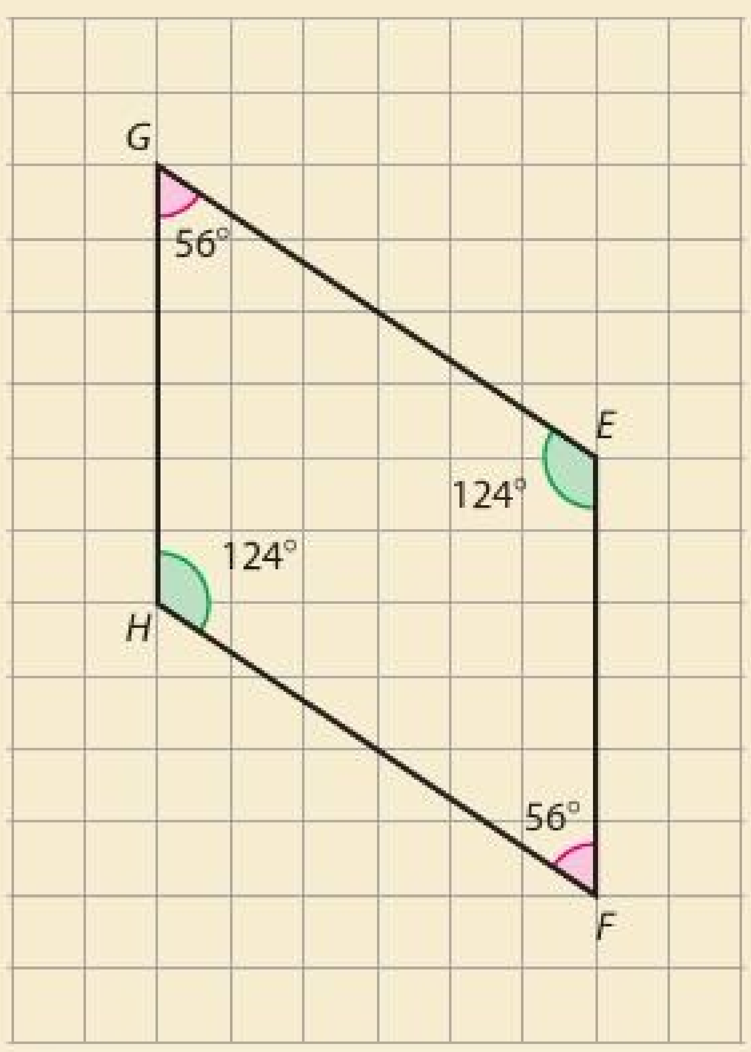
ATIVIDADES

faça no seu caderno

10 Desenhe, sobre uma malha quadriculada, cinco paralelogramos de diferentes tamanhos e em diversas posições. Respostas pessoais.

11 Observe as figuras a seguir.





> No paralelogramo *ABCD*, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são opostos, e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, bem como $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são consecutivos. No paralelogramo *EFGH*, os ângulos $\hat{H}$ e $\hat{E}$, $\hat{F}$ e $\hat{G}$ são opostos, e os ângulos $\hat{H}$ e $\hat{G}$, bem como $\hat{H}$ e $\hat{F}$, são consecutivos.

O que você pode concluir ao comparar os ângulos internos opostos? **P** Esta atividade tem como objetivo levar os alunos a descobrir experimentalmente que os ângulos opostos e internos de um paralelogramo são iguais. Esse fato só será demonstrado no livro do 9º ano.

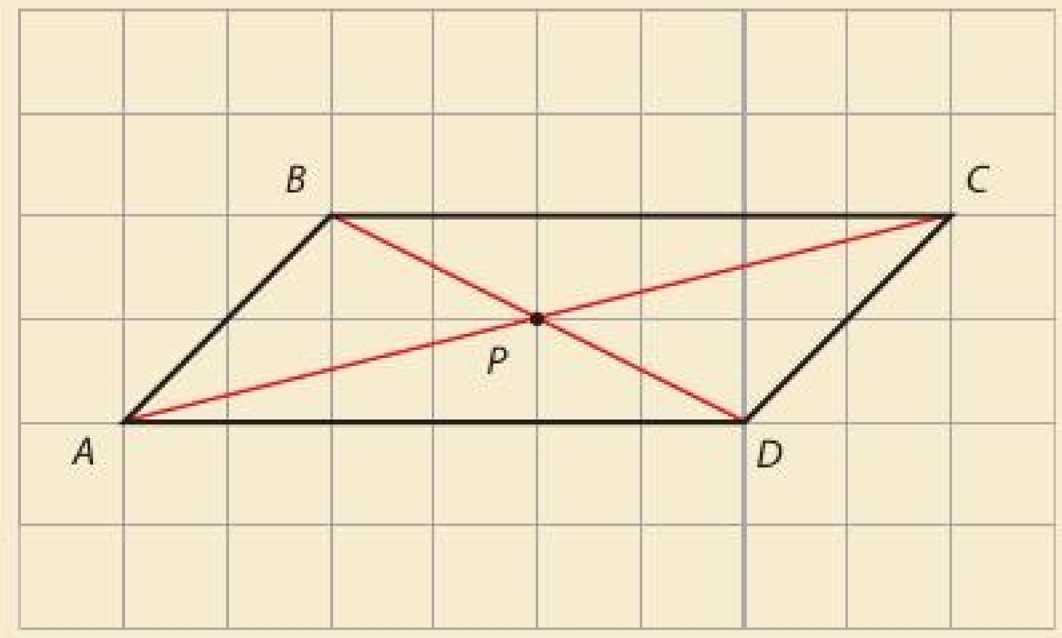
12 Desenhe três paralelogramos com o auxílio de uma régua e um esquadro e meça, com a ajuda de um transferidor, os ângulos internos.

a) Em cada paralelogramo, calcule a soma das medidas de dois ângulos consecutivos quaisquer. 180°

b) Compare seus resultados com os de seus colegas. O que você concluiu? A soma é igual a 180°.

13 Desenhe um paralelogramo qualquer *ABCD*.

a) Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ como indicado a seguir, e determine suas medidas. Resposta pessoal.



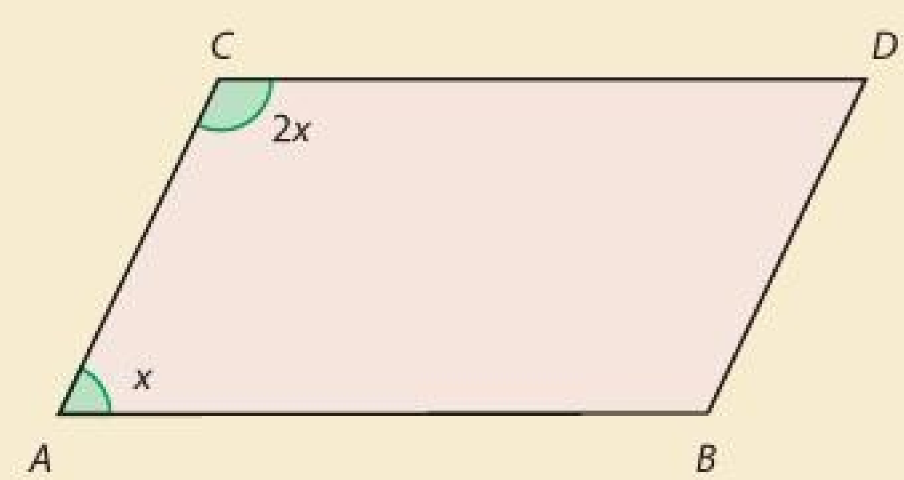
b) Chame de *P* o ponto de intersecção das duas diagonais e determine as medidas: $\overline{AP}$, $\overline{PC}$, $\overline{BP}$ e $\overline{PD}$. Resposta pessoal.

c) Desenhe um novo paralelogramo, diferente do anterior, e repita a atividade até o item **b**. Resposta pessoal.

d) Compare seu resultado com o de seus colegas. O que você concluiu? As diagonais se cruzam no ponto médio.

14 Desenhe um quadrilátero que tenha os lados paralelos dois a dois e todos os ângulos internos iguais. O que você concluiu? Esse quadrilátero é um retângulo.

15 *ABCD* é um paralelogramo. Determine:

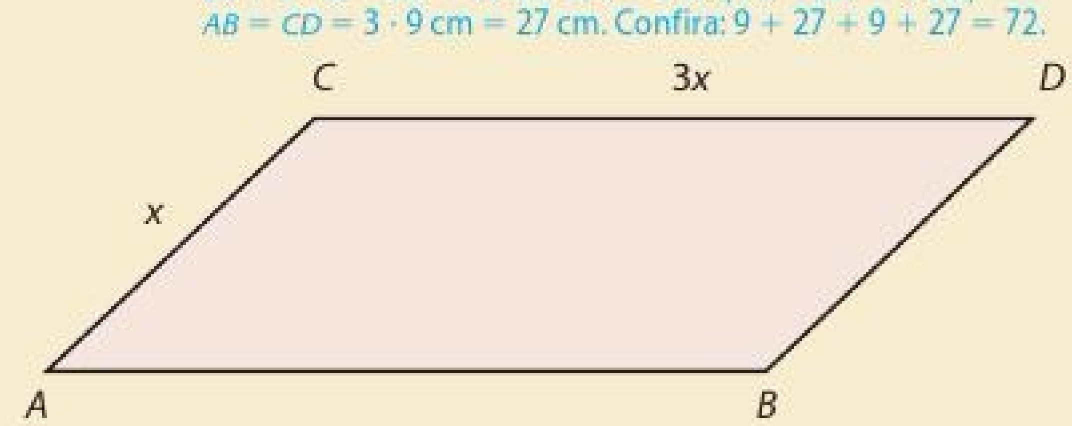


a) $x + 2x$; Os ângulos consecutivos num paralelogramo são suplementares, logo: $x + 2x = 180°$.

b) $C\hat{A}B$; Se $x + 2x = 180°$, então $x = 180° : 3 = 60°$.

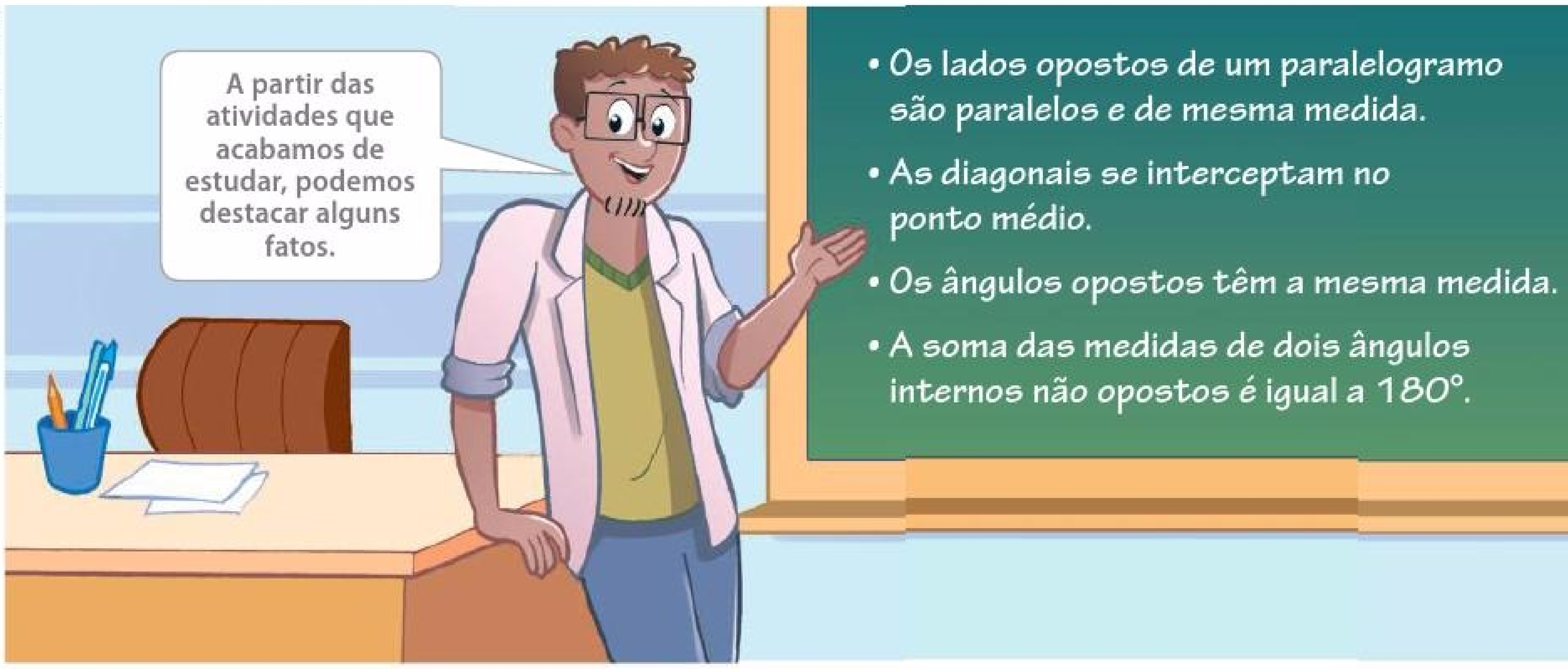
c) $A\hat{C}D$. Se $C\hat{A}B = 60°$, então $A\hat{C}D = 2 \cdot 60° = 120°$.

16 *ABCD* é uma paralelogramo. Determine a medida de seus lados sabendo que seu perímetro é igual a 72 cm. Os lados opostos de um paralelogramo são iguais, portanto seu perímetro é: $2x + 2 \cdot 3x = 8x = 72$ cm $\Rightarrow x = 9$ cm; $AC = BD = 9$ cm; $AB = CD = 3 \cdot 9$ cm $= 27$ cm. Confira: $9 + 27 + 9 + 27 = 72$.



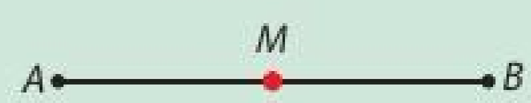
A fórmula da área do paralelogramo

EstudioMil/Arquivo da editora



Além desses fatos, é importante saber o que é o ponto médio de um segmento.

O ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ é um ponto M equidistante dos extremos.



$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

P Recomendamos que o professor prepare esta aula, providenciando papel sulfite, tesoura sem ponta, régua e cola de bastão.

Agora, acompanhe, seguindo os passos, como se chega à fórmula do cálculo da área de um paralelogramo.

Atenção: Para fazer esta atividade, você vai precisar de régua, tesoura e lápis.

1º) Desenhe um paralelogramo qualquer.

2º) Com apenas um corte, decomponha-o em duas partes de modo que seja possível, com essas partes, formar um retângulo.

P O corte que satisfaz as condições do problema deve ser perpendicular à base e chegar ao vértice:

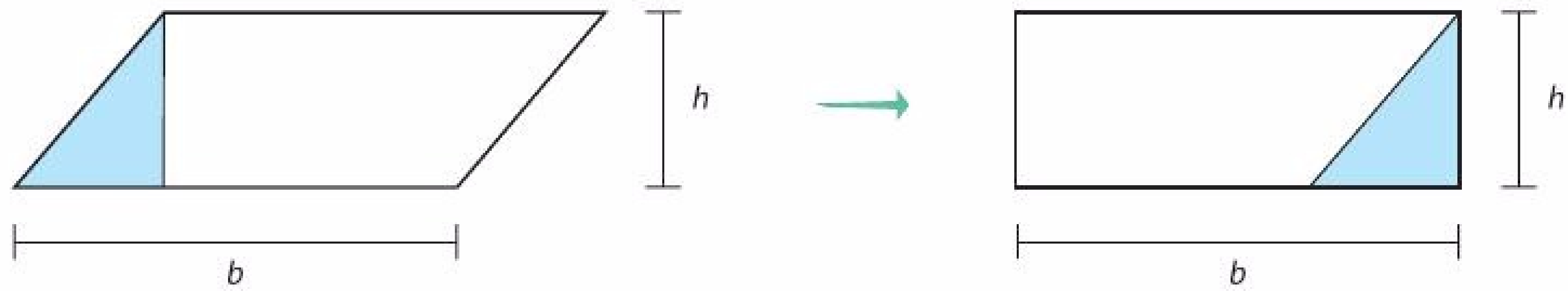
a) Que característica deve ter esse corte feito no paralelogramo?

EstudioMil/Arquivo da editora

b) Compare o seu resultado com os de outros colegas da classe.
Qual é a característica do corte que você fez?

O paralelogramo e o retângulo construídos devem ter, respectivamente, bases e alturas com as mesmas medidas. Como esses dois quadriláteros podem ser formados pelas mesmas peças, eles são equivalentes.

EstudioMil/Arquivo da editora



Assim como a área do retângulo, a área do paralelogramo pode ser determinada pelo produto:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Ou, em linguagem algébrica:

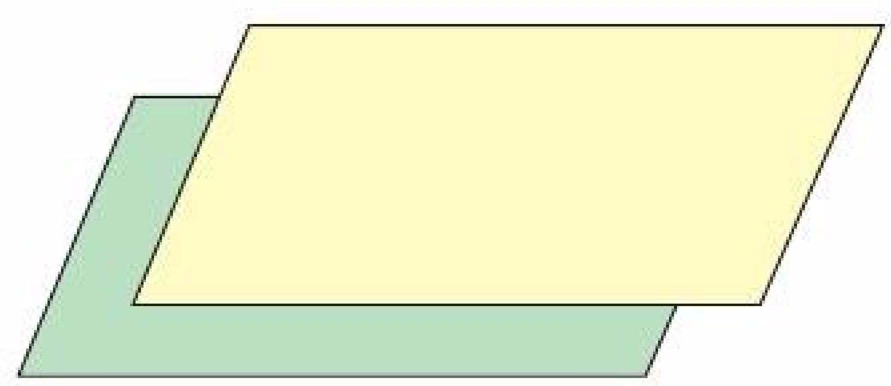
$$A = b \cdot h$$

Área do triângulo

P Recomendamos que o professor prepare esta aula, providenciando o material necessário, e que monitore as atividades aqui descritas sendo feitas por seus alunos mediante sua gestão.

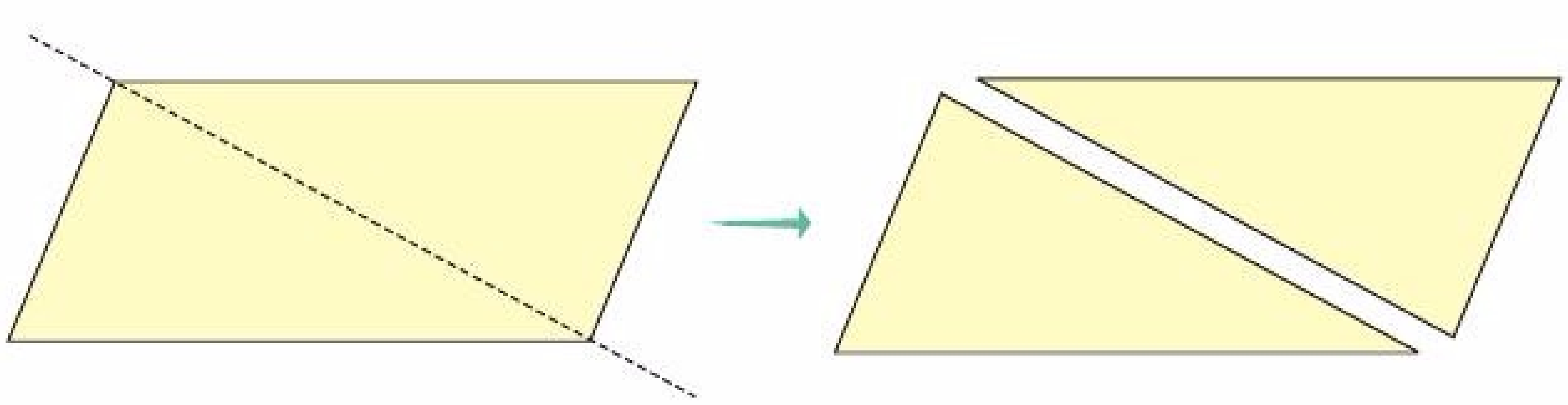
Para descobrir a fórmula da área de um triângulo qualquer, vamos desenvolver uma experiência semelhante às feitas anteriormente.

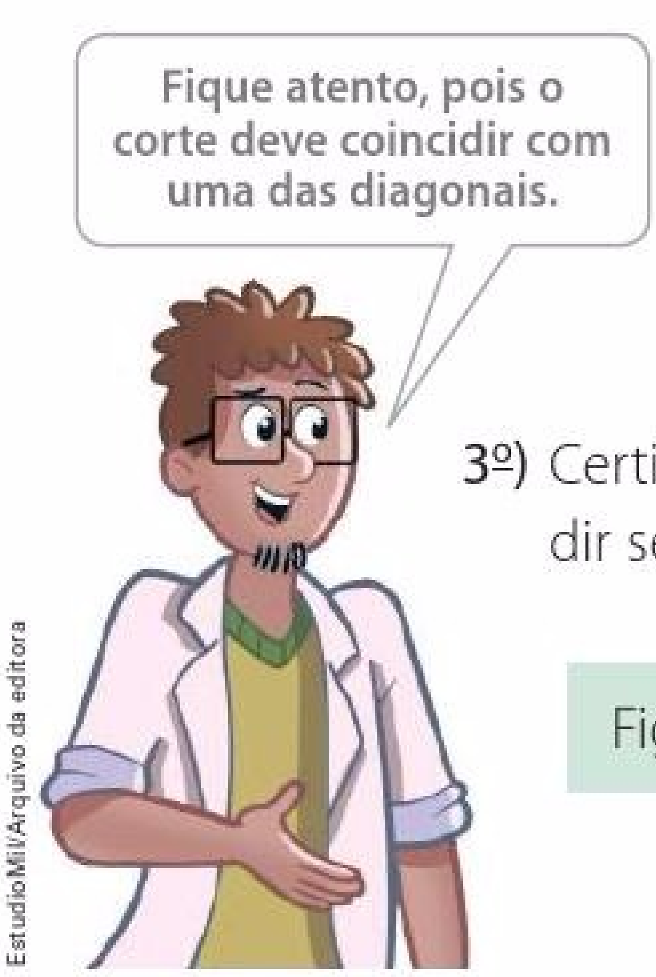
1º) Em papel sulfite ou cartolina, recorte dois paralelogramos com as mesmas medidas.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

2º) Com apenas um corte, decomponha um deles em dois triângulos com as mesmas medidas.

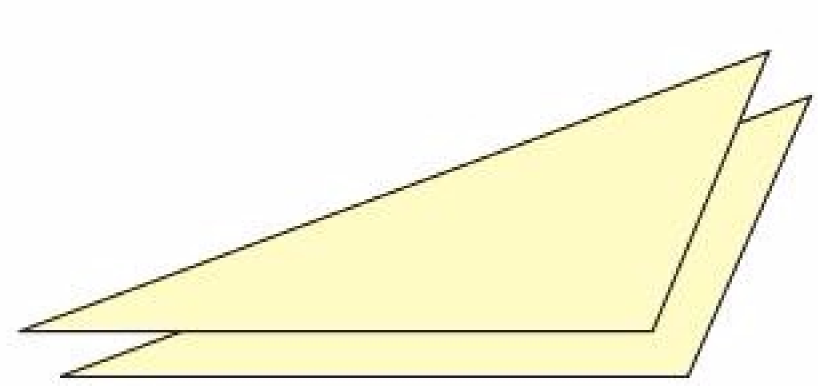




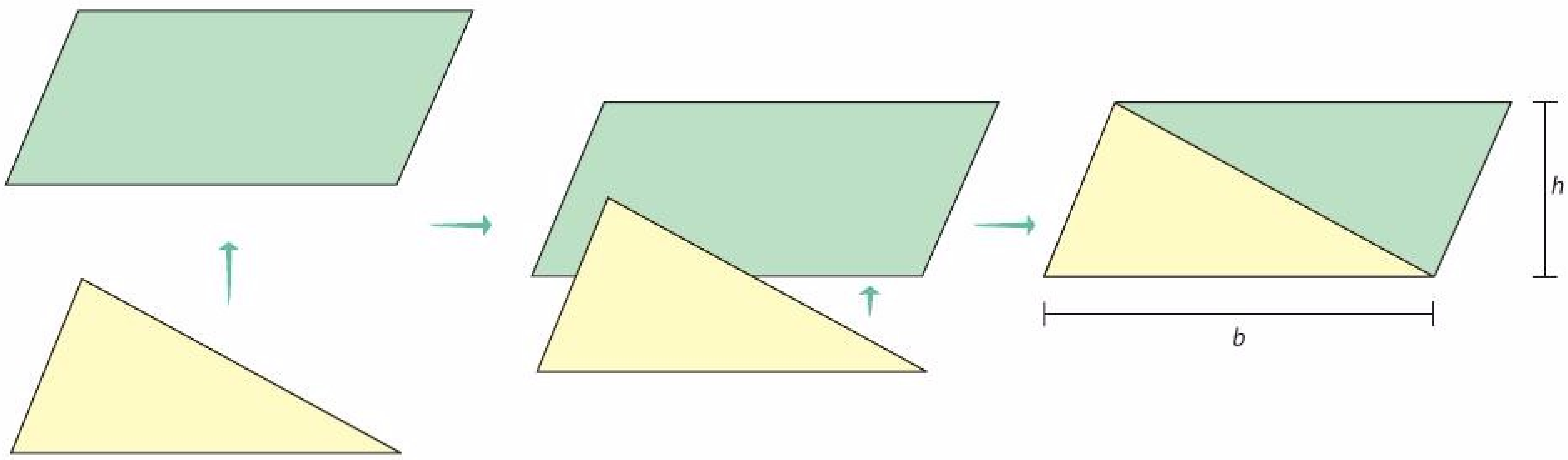
EstudioMil/Arquivo da editora

3º) Certifique-se de que os triângulos são "iguais", sobrepondo-os de modo a fazer coincidir seus lados.

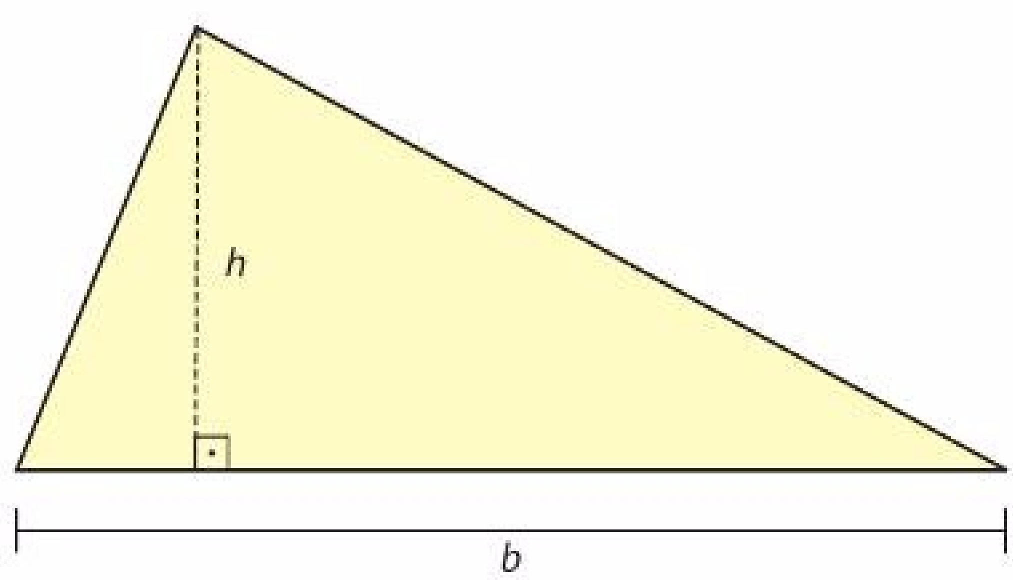
Figuras que têm todas as medidas iguais são chamadas figuras **congruentes**.



4º) Faça a base de um dos triângulos coincidir com a base correspondente do paralelogramo original.



O triângulo obtido dessa forma tem as medidas da base e da altura iguais às medidas do paralelogramo. Portanto, a área do triângulo construído dessa maneira é a metade da área do paralelogramo.

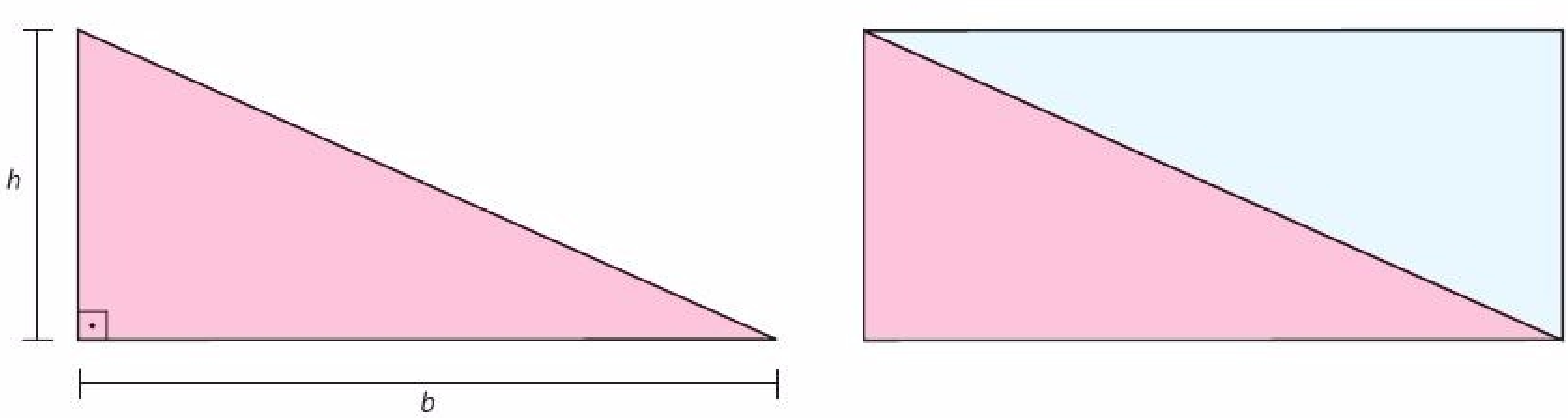


Sendo assim, dado um triângulo qualquer, é sempre possível obtê-lo da decomposição de um paralelogramo de mesma base e altura.

Logo, a fórmula geral que expressa a área de um triângulo, em que são conhecidas as medidas da base e da altura relativa a essa base, é: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

No caso particular em que o triângulo é retângulo, ou seja, um dos ângulos internos é um ângulo reto, se um dos lados perpendiculares é uma base, o outro tem a mesma medida que a altura relativa a esta base.

Pode-se visualizar esse fato sobrepondo o triângulo retângulo a um retângulo de mesma base e altura. Observe que o triângulo é a metade do retângulo.



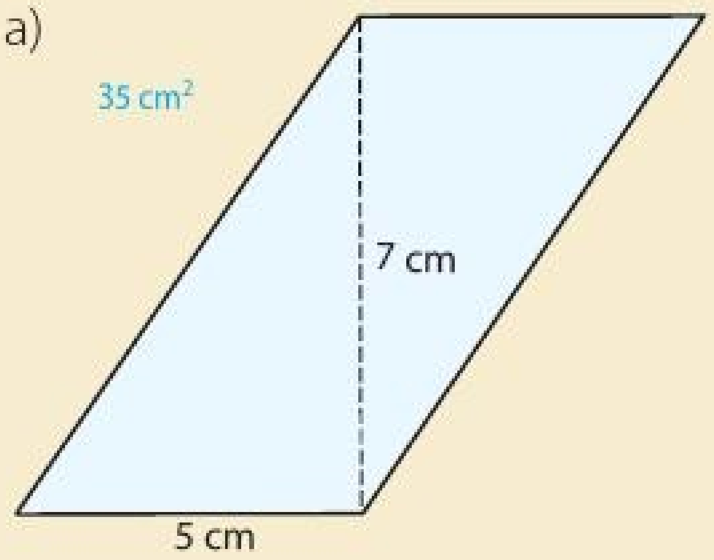
ATIVIDADES

faça no seu caderno

As imagens não estão representadas em proporção.

17 Calcule a área dos paralelogramos:

a) 35 cm²

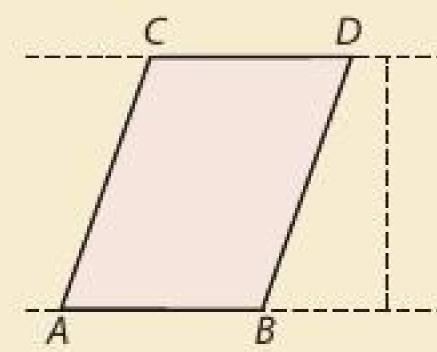


b) 90 cm²

c) 28 cm²

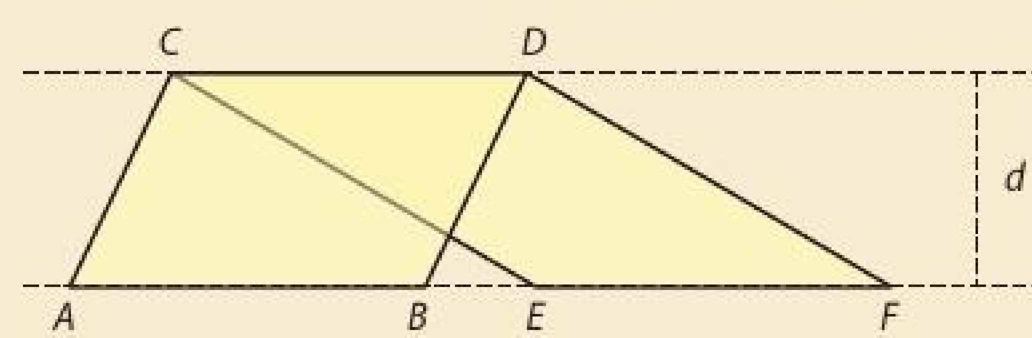
d) 44 cm²

18 Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do paralelogramo estão sobre as duas linhas retas tracejadas que são paralelas e distam uma da outra 5 cm. Determine a área do paralelogramo sabendo que o lado $\overline{AB}$ mede 4 cm. 20 cm²



19 ***Desafio olímpico***

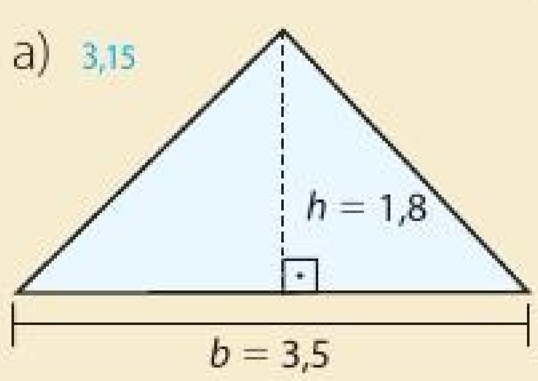
Sabendo que *ABCD* e *CDEF* são paralelogramos em que os lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ estão sobre as duas linhas retas tracejadas que são paralelas, o que se pode dizer sobre a área dos dois paralelogramos? São iguais, pois têm mesma medida de base e de altura.



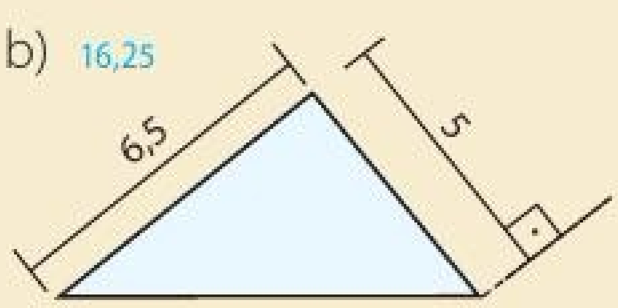
20 Expresse a área de um triângulo retângulo cujos lados medem *a*, *b* e *c*, em que *a* é maior que *b* e *c*, em função das medidas de dois de seus lados. $A = \frac{b \cdot c}{2}$

21 Calcule a área dos triângulos.

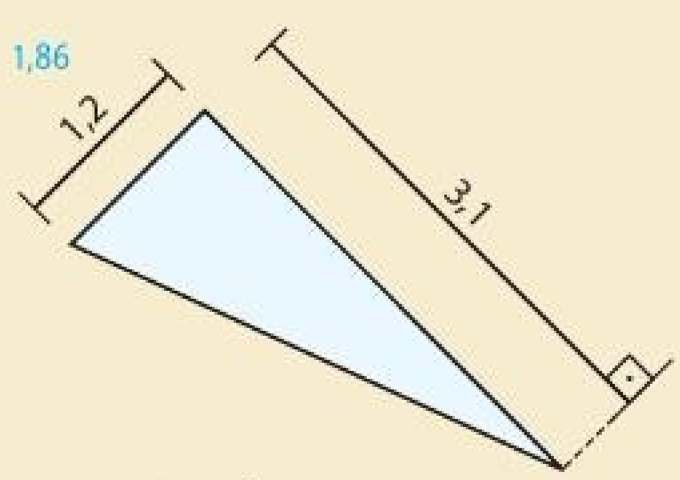
a) 3,15



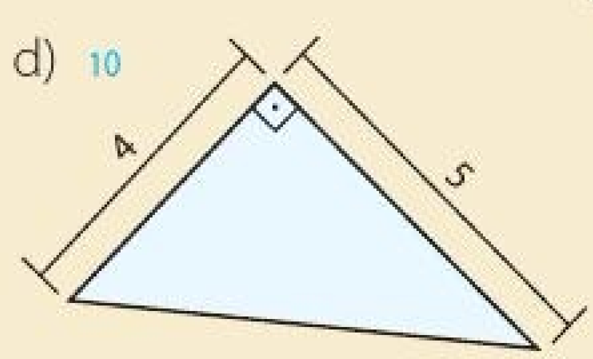
b) 16,25



c) 1,86

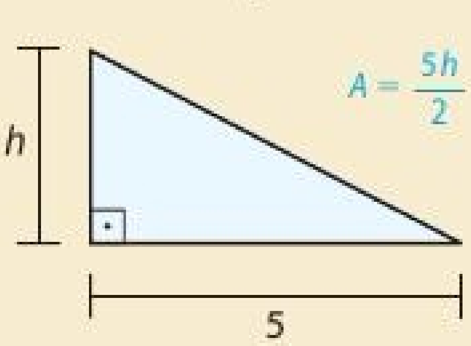


d) 10

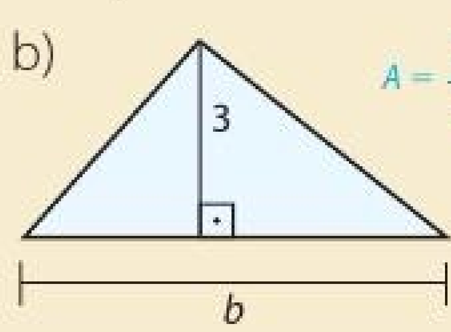


22 Escreva as expressões algébricas que expressam as áreas dos triângulos a seguir.

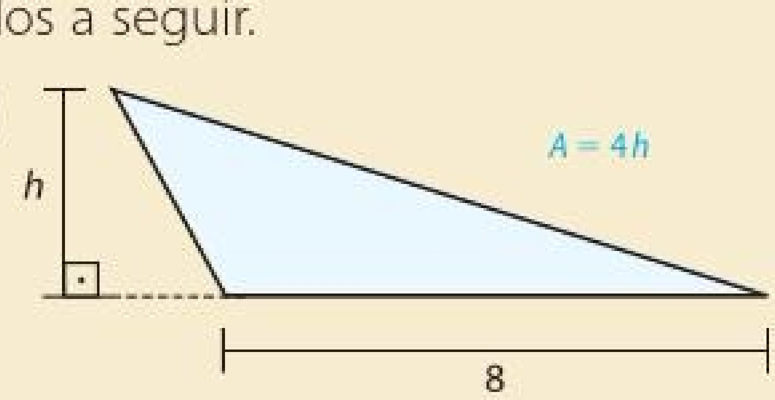
a) $A = \frac{5h}{2}$



b) $A = \frac{3b}{2}$

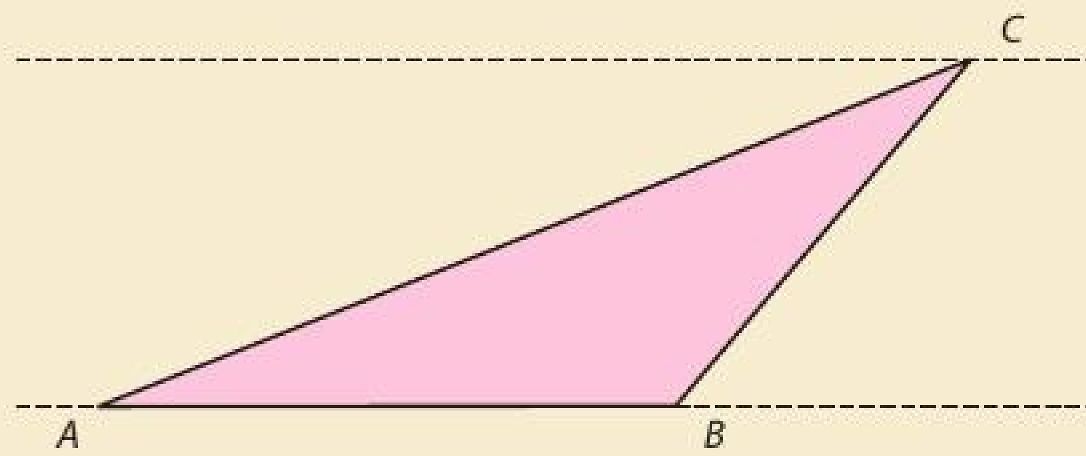


c) $A = 4h$



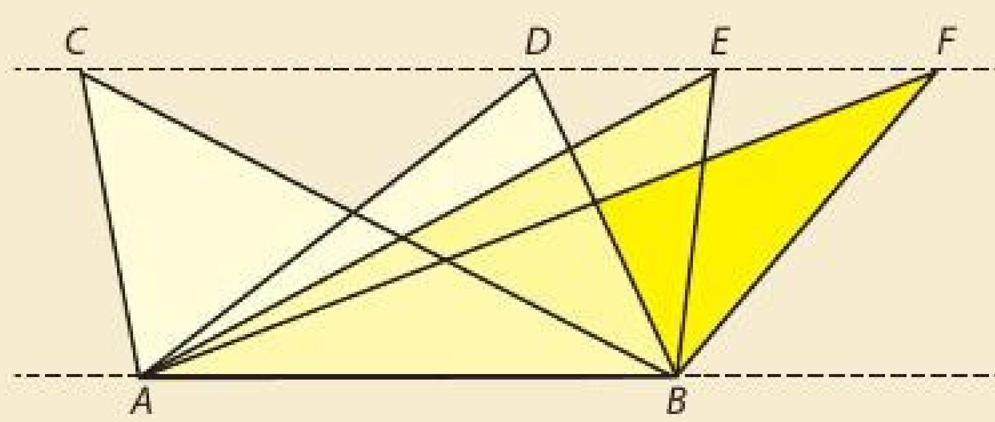
23 As duas linhas tracejadas são paralelas e distantes uma da outra 3 cm. Calcule a área do triângulo, sabendo que a base $\overline{AB}$ mede 5 cm.

A altura do triângulo em relação à base $\overline{AB}$ é a distância entre as linhas tracejadas, portanto a área é $A = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5\ cm^2$.



24 ***Desafio olímpico***

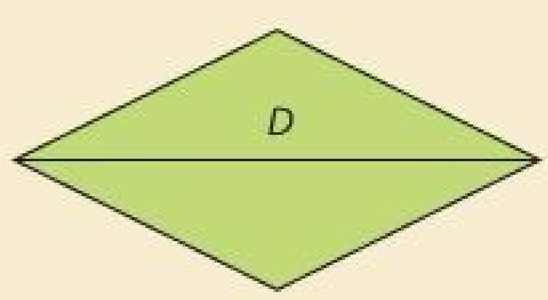
As duas linhas tracejadas são paralelas; as bases dos quatro triângulos coincidem; os vértices *C*, *D*, *E* e *F* estão alinhados sobre a linha tracejada superior. O que você pode dizer sobre a área dos triângulos *ABC*, *ABD*, *ABE* e *ABF*?

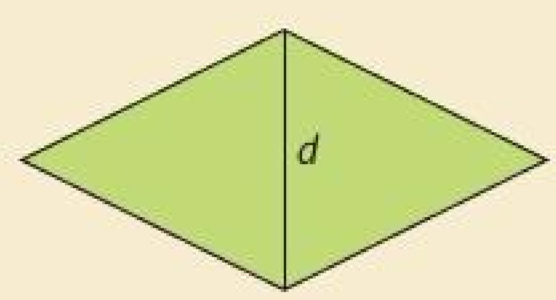


Os triângulos *ABC*, *ABD*, *ABE* e *ABF* têm a mesma base $\overline{AB}$ e mesma altura, determinada pela distância entre as linhas tracejadas paralelas. Portanto, os quatro triângulos têm a mesma área.

25 Descubra uma fórmula para a área do losango.

Sugestão: decomponha-o em dois triângulos pela diagonal; chame de *D* a diagonal maior e *d* a diagonal menor.





Responda.

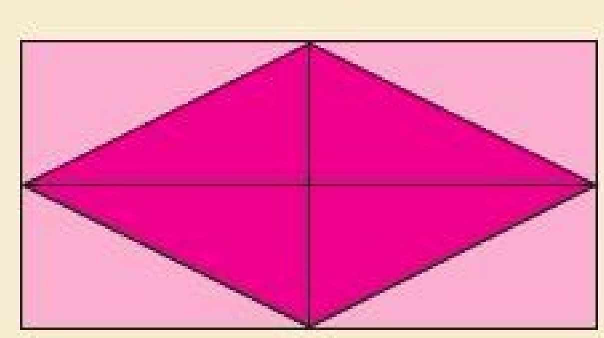
a) Os triângulos são iguais? Independentemente de como o losango seja decomposto pelas diagonais, resultam dois triângulos iguais, congruentes.

b) Escolha uma base apropriada para cada triângulo. Resposta pessoal.

c) Qual é a altura do triângulo relativa à base escolhida? Resposta pessoal.

d) Que relações você identificou entre a base ou a altura do triângulo com algum elemento do losango (lados, diagonais, etc.)? P Veja comentário no Manual do Professor.

26 Desenhe um retângulo em uma malha quadriculada, marque o ponto médio dos lados e desenhe um losango de modo que seus vértices coincidam com os pontos médios dos lados do retângulo. Veja o exemplo a seguir.

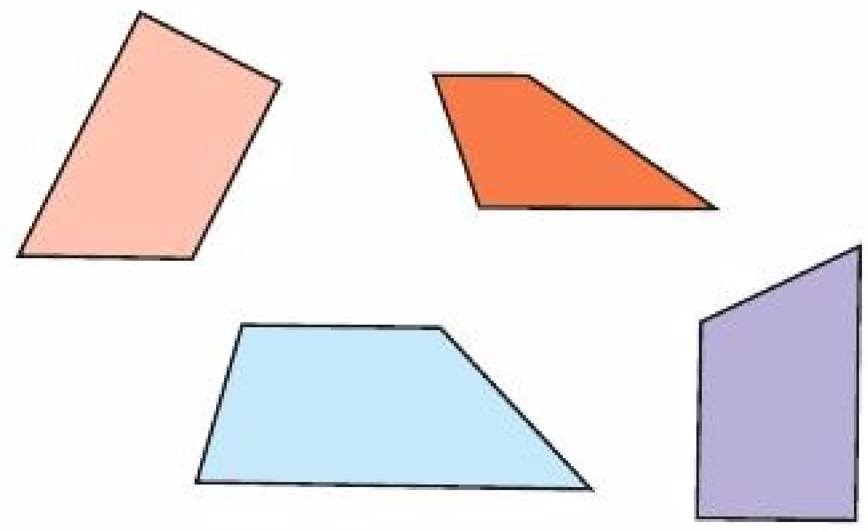


Determine a área do losango em função das medidas dos lados ou da área do retângulo.
P Veja sugestão de resposta no Manual do Professor.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Área do trapézio

Trapézio é um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos.

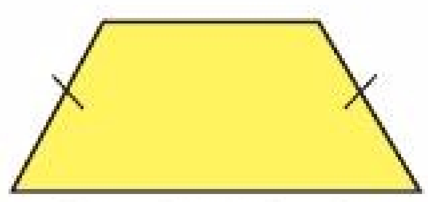


Diferentes tipos de trapézio

EstudioMil/Arquivo da editora

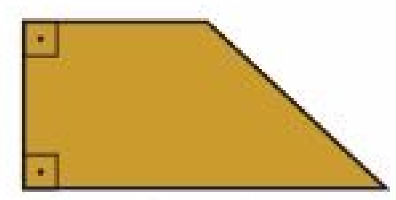
P Explore com os alunos a construção de trapézios por meio do recorte de triângulos. Dado um triângulo de papel, um corte paralelo a uma das bases produz um triângulo menor e um trapézio. De um triângulo isósceles pode-se recortar um trapézio isósceles; de um triângulo escaleno pode-se produzir um trapézio escaleno; de um triângulo retângulo pode-se recortar um trapézio retângulo.

Costuma-se classificar os trapézios de acordo com suas propriedades. Veja:



Os lados não paralelos são iguais.

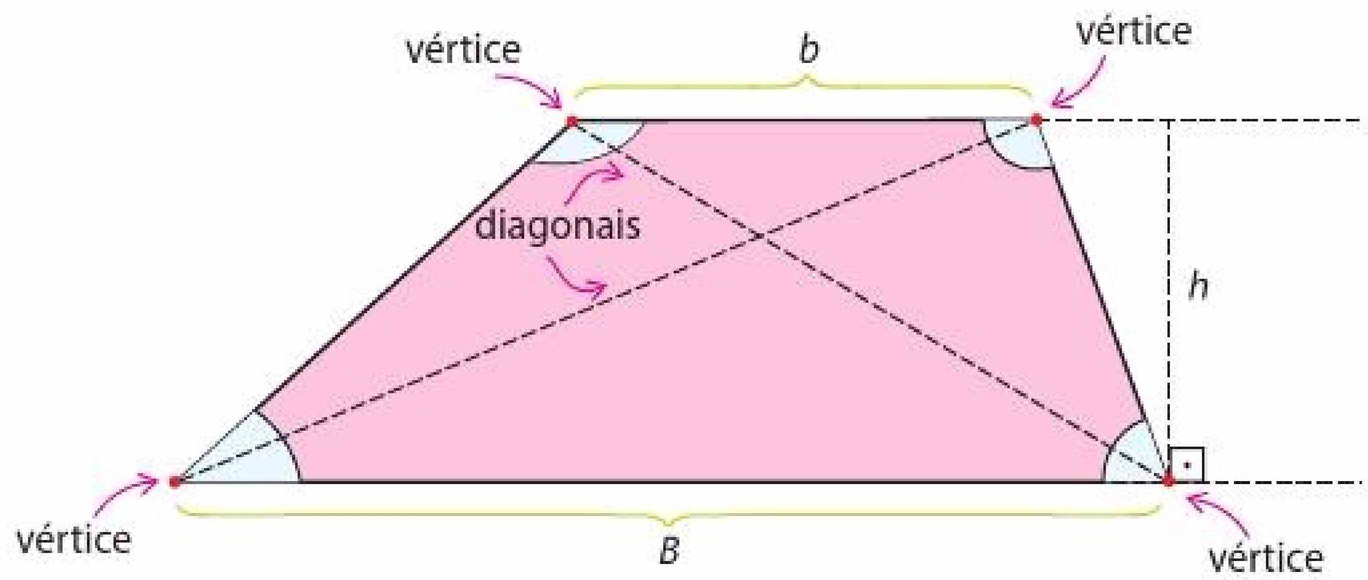
Trapézio isósceles



Tem dois ângulos retos.

Trapézio retângulo

Em um trapézio podem ser identificados os seguintes elementos:

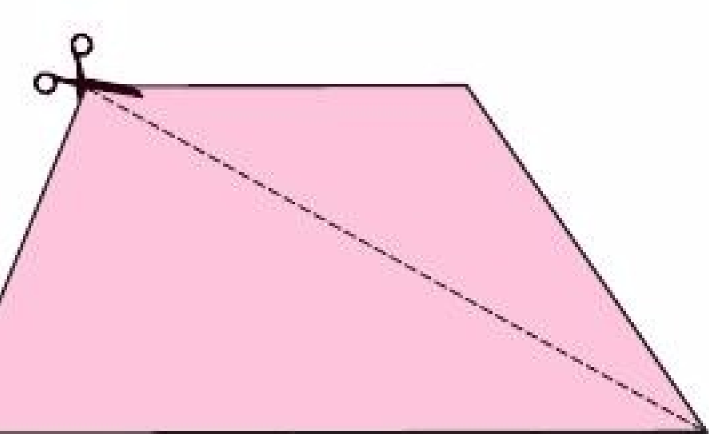


4 lados
4 vértices
4 ângulos internos
base maior: B
base menor: b
altura: h
2 diagonais

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

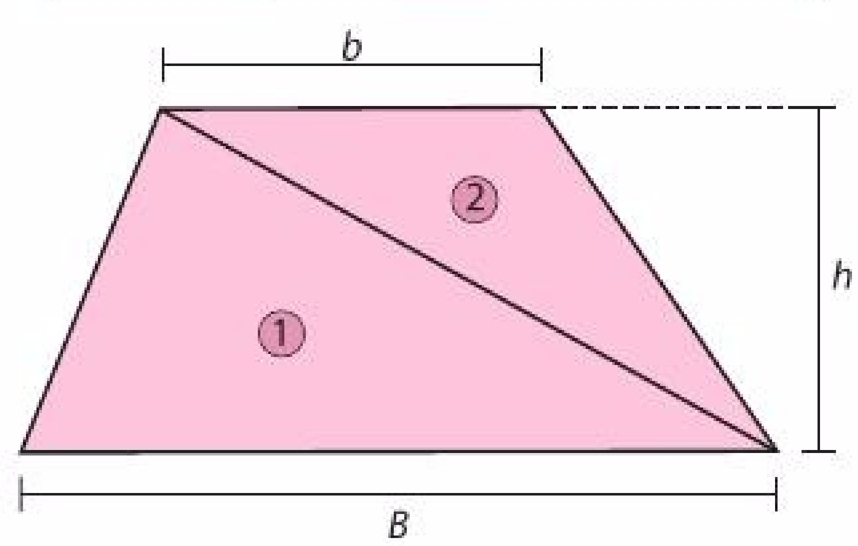
Para facilitar a visualização do processo que resulta na fórmula da área do trapézio, vamos apoiá-lo sobre a base maior e decompô-lo em dois triângulos.

Observe ao lado que o corte coincide com uma das diagonais.



P O objetivo aqui é explorar a forma. Os aspectos do cálculo algébrico e a distributividade, que justifica a última passagem, serão aprofundados no capítulo 5, que trata de cálculo algébrico.

Assim, a área do trapézio é igual à soma das áreas dos triângulos que o compõem.



Logo, a fórmula geral que expressa a área de um trapézio é:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Esta passagem será estudada no capítulo 5.

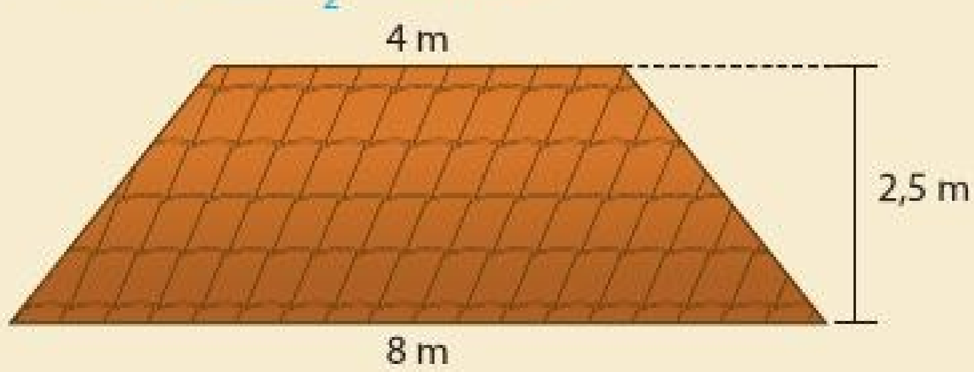
P As atividades 30 e 31 contribuem para que os alunos se familiarizem com expressões literais, que expressam relações. O objetivo é apenas encontrar a expressão da fórmula, e não efetuar o cálculo algébrico.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

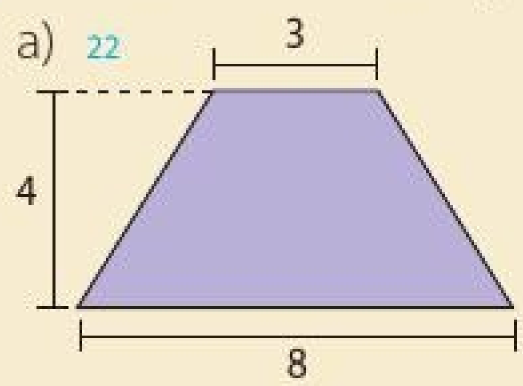
27 A parte de cima da maioria das casas é coberta por telhas. Para saber quantas telhas são necessárias para construir um telhado, o pedreiro tem que calcular a área de um trapézio.

Calcule a área de parte de um telhado cuja base maior mede 8 m, a base menor 4 m e a altura 2,5 m. $A = \frac{(8 + 4) \cdot 2,5}{2} = 15\ m^2$

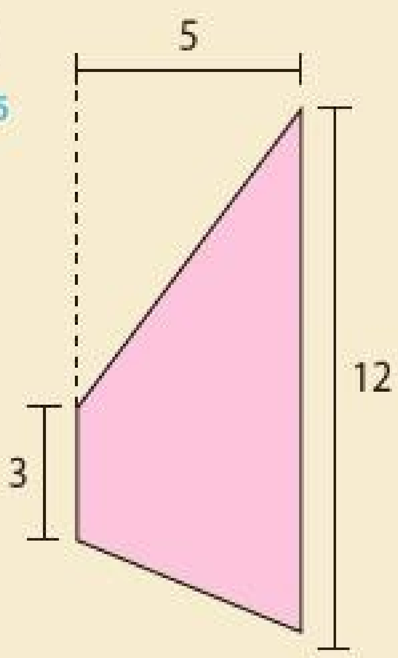


28 Qual é a área dos trapézios?

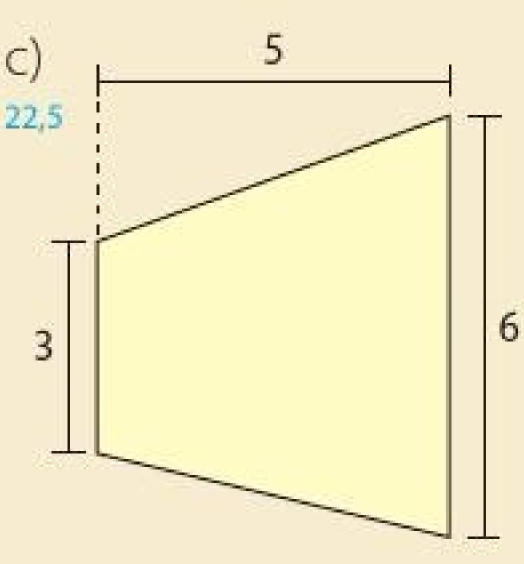
a) 22



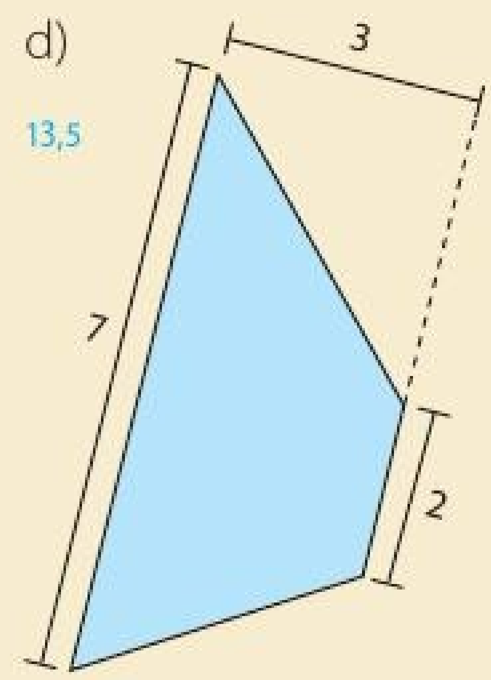
b) 37,5



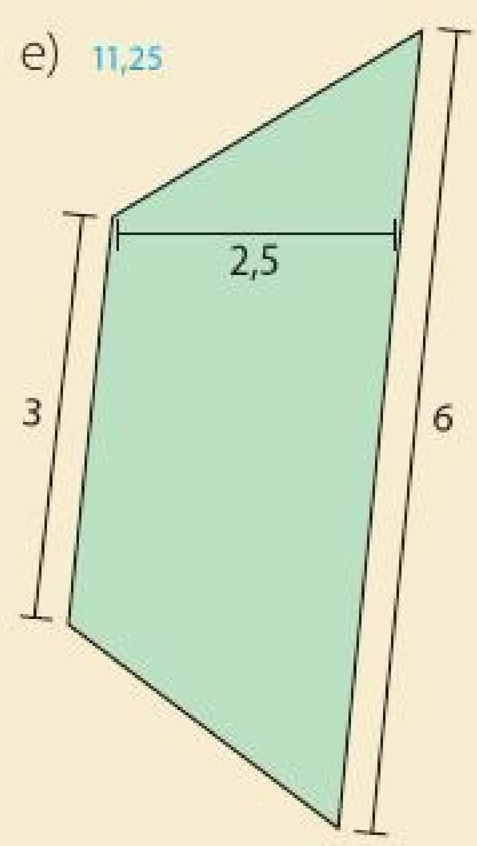
c) 22,5



d) 13,5



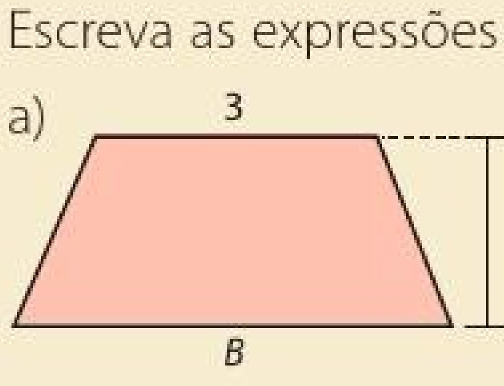
e) 11,25



29 Qual é a área de um trapézio em que $h = 5$, $B = 8$ e $b = 2$? 25

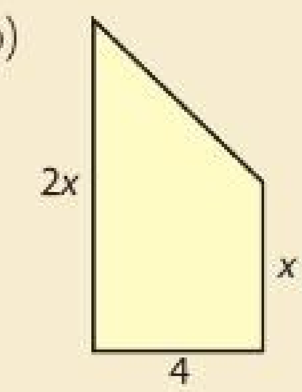
30 Escreva as expressões das áreas dos trapézios.

a)



$\text{Área} = \frac{(B + 3) \cdot 2}{2}$

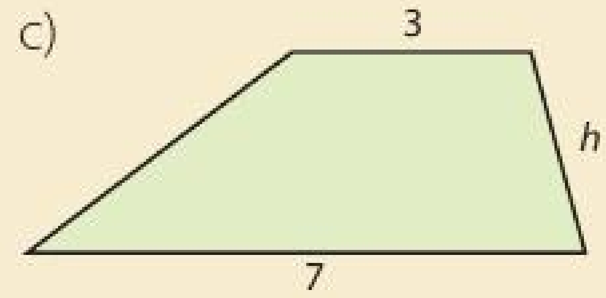
b)



$\text{Área} = \frac{(2x + x) \cdot 4}{2}$

As imagens não estão representadas em proporção.

c)



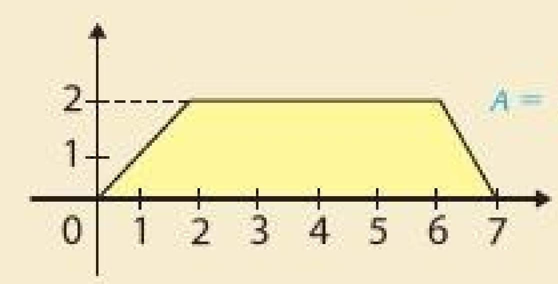
$\text{Área} = \frac{(7 + 3) \cdot h}{2}$

31 Escreva a expressão algébrica para a área de um trapézio com altura h, base maior $B = 5$ e base menor $b = 2$. $A = \frac{(5 + 2) \cdot h}{2} = 3,5\ h$

32 Use a régua para obter as medidas necessárias e calcule a área do trapézio isósceles. 11 cm²

33 Calcule as áreas das figuras coloridas.

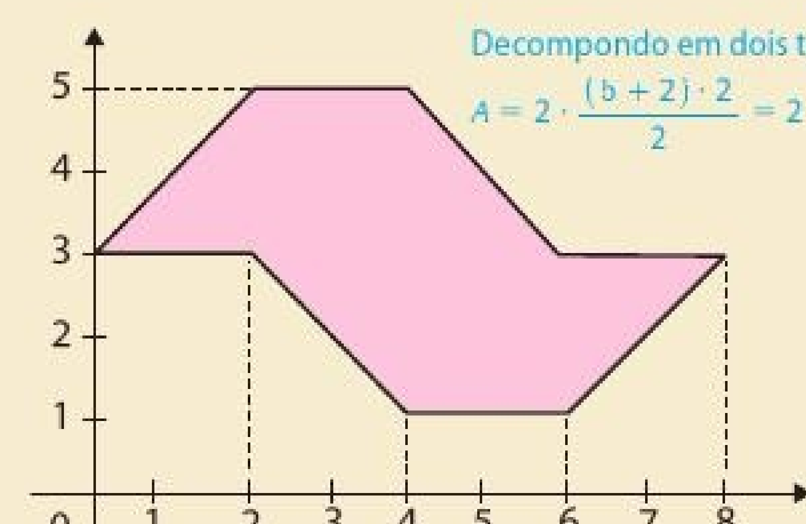
a)



$A = \frac{(7 + 4) \cdot 2}{2} = 11$

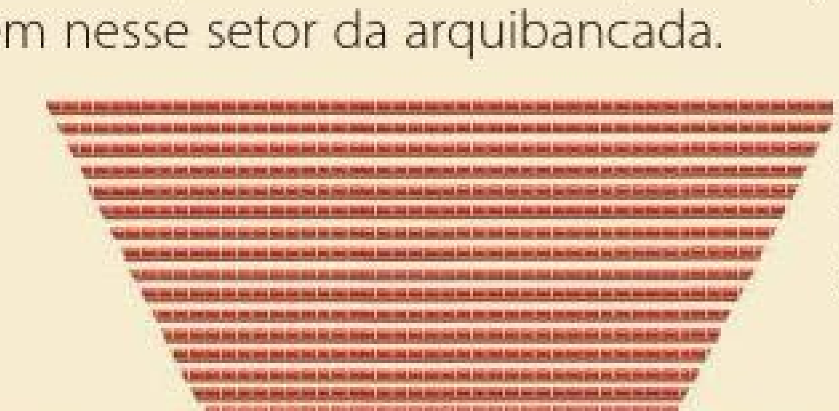
b)

Decompondo em dois trapézios, temos: $A = 2 \cdot \frac{(6 + 2) \cdot 2}{2} = 2 \cdot 8 = 16$.



34 ***Desafio olímpico***

Uma das arquibancadas de um estádio tem formato de trapézio, sendo mais larga na parte superior. A arquibancada tem 16 fileiras; na base inferior menor, cabem 30 torcedores sentados e, na parte superior, 50. Calcule quantas pessoas cabem nesse setor da arquibancada.



Contexto Digital/Arquivo da editora

P Mostre aos alunos que o número de torcedores pode ser calculado usando o modelo da área do trapézio. $T = \frac{(30 + 50) \cdot 16}{2} = 640$; 640 torcedores.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

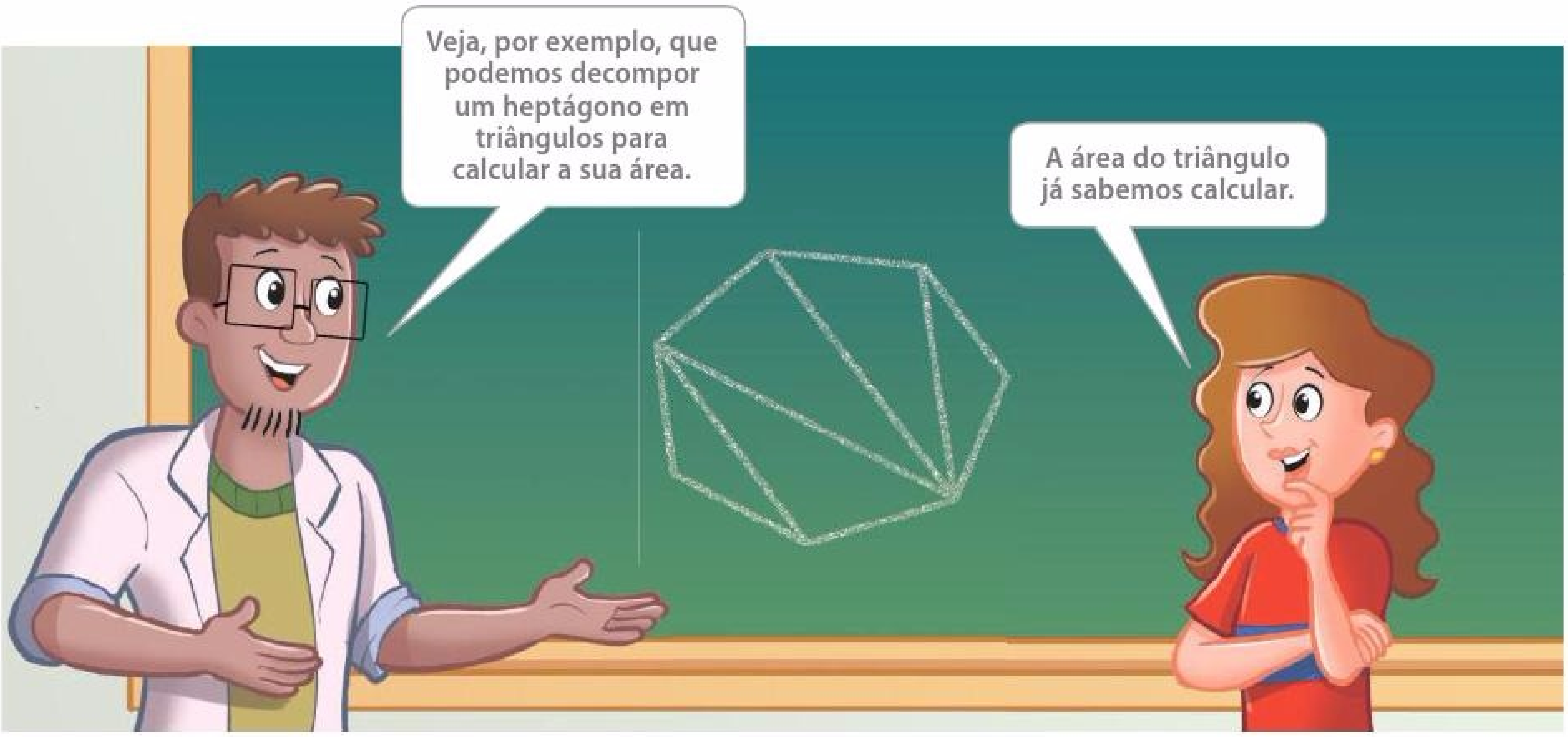
Área de polígonos por decomposição

A maioria dos terrenos tem forma poligonal irregular. Como é possível, então, calcular a área desses terrenos?

John Stanmeyer/Corbis/Latinstock

Desmatamento na Amazônia para plantio de soja e criação de gado. Mato Grosso, Brasil, 2008.

Para calcular a área de uma superfície poligonal com formato irregular, os topógrafos, técnicos especializados em determinar as medidas de terrenos, decompõem o polígono em figuras mais simples, como retângulos e triângulos.

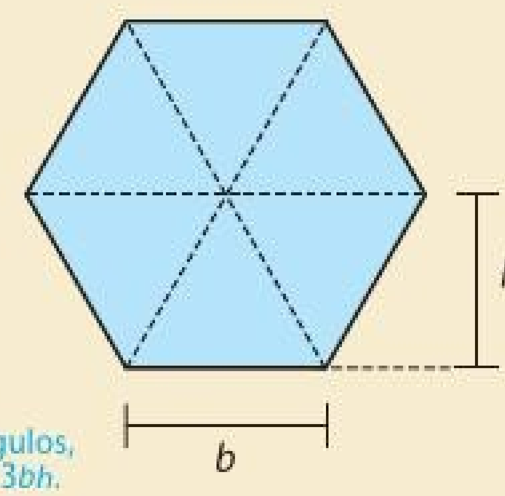


Estudio Mil/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

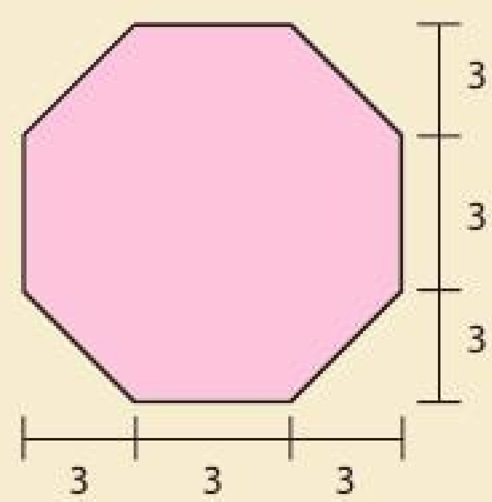
35 Dê a expressão para calcular a área do hexágono regular. Sugestão: decomponha-o em figuras cujas áreas você saiba calcular.



Decompor em 2 trapézios, ou em 6 triângulos, ou 2 triângulos e 1 retângulo; expressão: $3bh$.

36 Calcule a área do octógono da figura. Sugestão: decomponha-o em figuras das quais você saiba calcular a área.

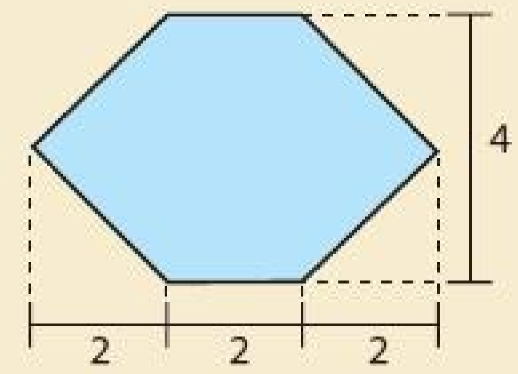
Decompor em 5 quadrados e 4 triângulos, ou em 2 trapézios e 1 retângulo; área: 63.



37 Calcule a área do hexágono do desenho:

a) decompondo-o em dois trapézios; 16

b) decompondo-o em retângulos e triângulos. 16

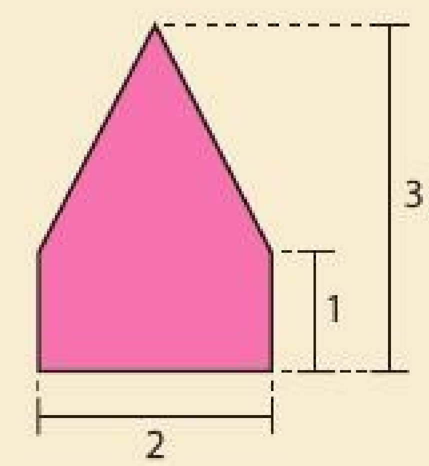


Compare os resultados obtidos nos dois itens. O que você pode concluir? São iguais.

38 Determine a área do pentágono do desenho:

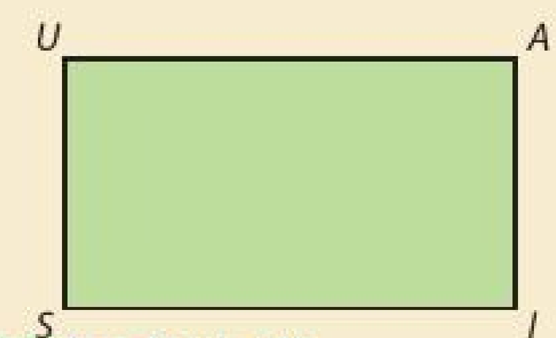
a) decompondo-o em dois trapézios; 4

b) decompondo-o em um triângulo e um retângulo. 4



Compare os resultados obtidos nos dois itens. O que você pode concluir? São iguais.

39 Explique para um amigo uma maneira simples de calcular a área do triângulo *UAI*.



Resposta pessoal.
A área do triângulo *UAI* é a metade da área do retângulo *UAIS*.

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

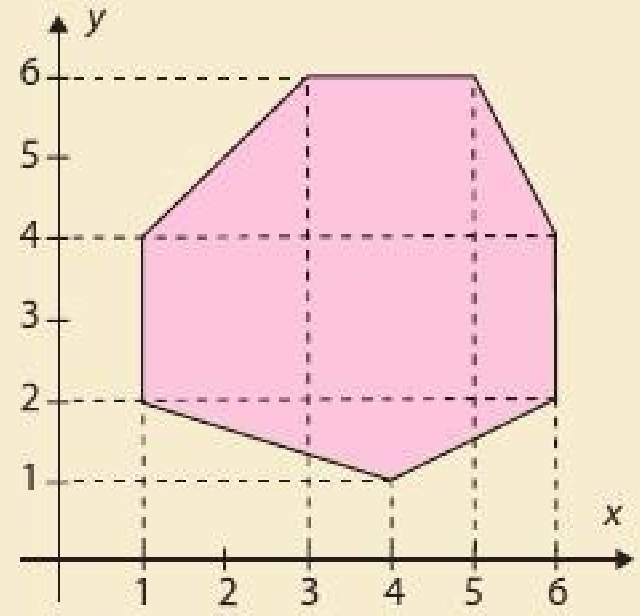
1 Calcule a área de uma sala retangular de dimensões 3,54 m e 5,85 m. 20,709 m²

2 Qual é a área de um quadrado cujo lado é 1,414 cm? 2 cm²

3 Sabendo que a área do triângulo grande do Tangram é 20 cm², qual é a área do paralelogramo do Tangram? 10 cm²

4 Qual é a altura de um triângulo cuja base mede 3,8 cm e cuja área é de 17,1 cm²? 9 cm

5 Determine a área do heptágono abaixo. 19,5



6 Qual é a área de um paralelogramo com todos os lados medindo 7 cm e que tem 3 ângulos retos? 49 cm², este paralelogramo só pode ser um quadrado.

7 Desenhe um losango em que a diagonal maior mede 8 cm e a diagonal menor mede 5 cm. Qual é a medida da área? 20 cm²

8 Qual é a área de um trapézio isósceles em que $b = 6$, $B = 10$ e $h = 5$? 40

9 Desenhe, em uma malha quadriculada, um octógono não regular de forma que seus vértices coincidam com os nós da malha. Calcule a área do octógono construído.

Resposta pessoal. Veja sugestão de resposta no Manual do Professor.

EstudioMil/Arquivo da editora

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Revista da
Matemática

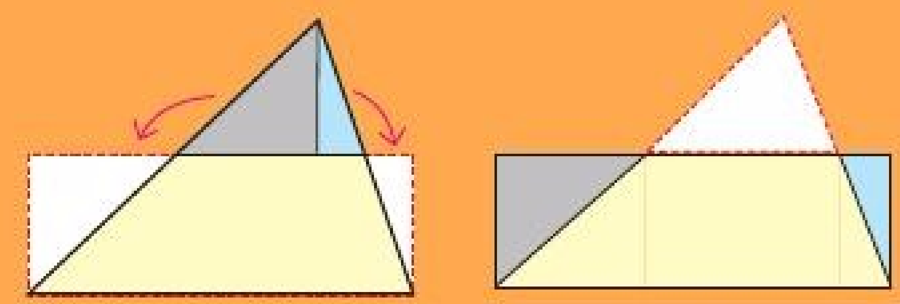
UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO EQUIVALENTE A UM QUADRADO

Alguns matemáticos apaixonados por Geometria e Matemática Recreativa inventam e estudam quebra-cabeças formados por figuras geométricas.

Um dos problemas clássicos é decompor, por meio de cortes, um determinado polígono e com as peças formar outro polígono equivalente, com a mesma área e com forma diferente.

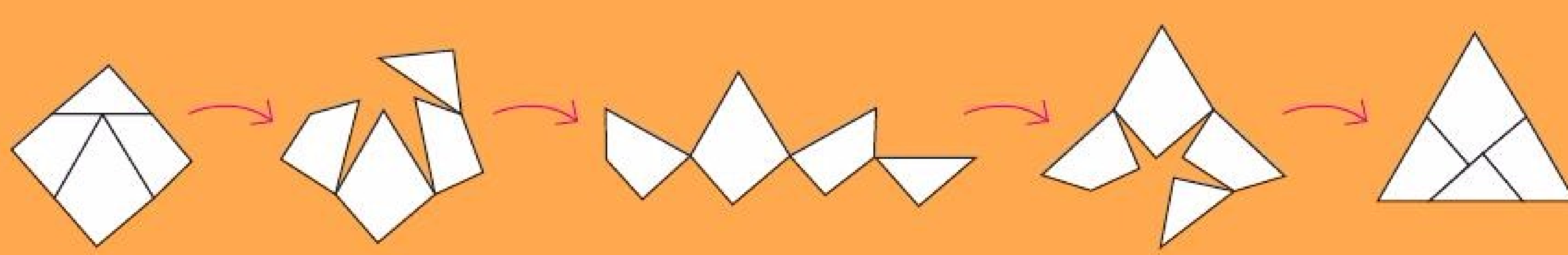
Um exemplo desse tipo de quebra-cabeça é o Tangram, pois com apenas 7 peças é possível montar milhares de formas diferentes.

Um dos desafios mais simples é decompor um triângulo e com as peças da decomposição montar um retângulo. Veja o esquema ao lado.



Um dos quebra-cabeças mais intrigantes foi apresentado pela primeira vez em 1902 por um dos maiores recreacionistas da Matemática da História, o inglês Henry Ernest Dudeney (1857-1930). Trata-se da decomposição de um quadrado em quatro partes e com elas formar um triângulo equilátero.

Não é possível, neste livro, explicar como fazer a decomposição, mas você pode ter uma ideia comparando visualmente as partes das figuras:



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Essa ideia tem sido aproveitada por arquitetos e *designers* que projetam móveis e objetos. A mesa com gavetas abaixo, por exemplo, pode ser remontada em formato de um triângulo equilátero ou de um quadrado, de acordo as necessidades de uso e o espaço do ambiente.

Fotos: Reprodução/<www.thedhaus.com/>

Mesa modular

O GRÁFICO DA ARANHA

O objetivo de apresentar o gráfico de radar é oferecer aos alunos a oportunidade de interpretar um gráfico não convencional, porém utilizado em determinadas atividades profissionais, contribuindo assim para que tenham melhores condições de interpretar a variedade de representações gráficas e infográficos cada vez mais comuns nos meios de comunicação e na internet.

Naddya/Shutterstock/Glow Images

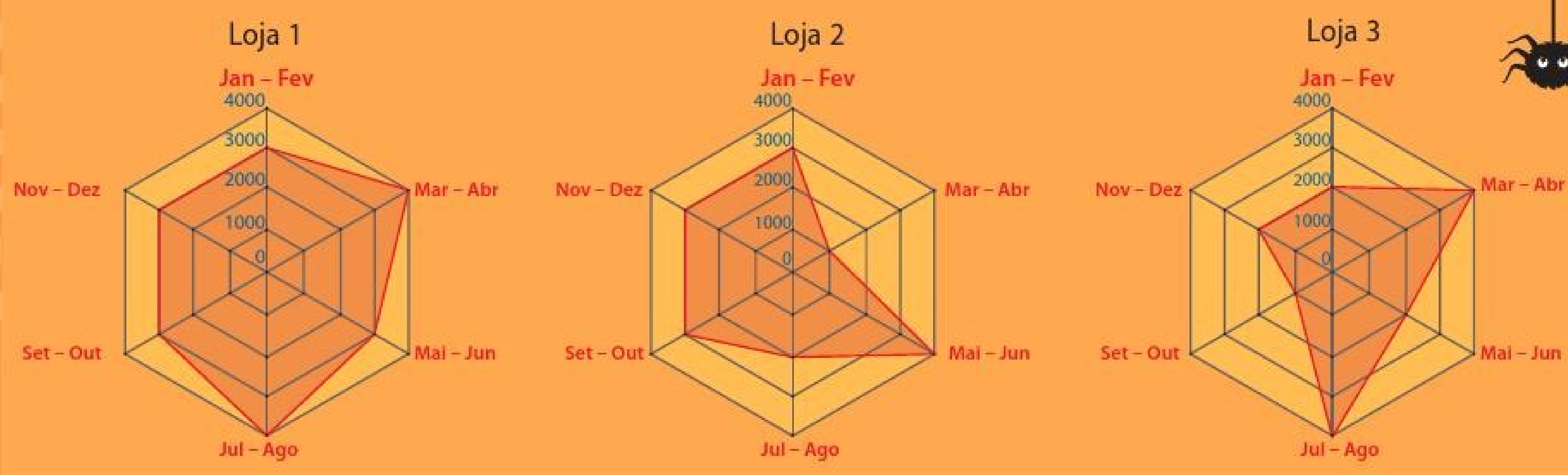
No estudo da representação de dados estatísticos aprendemos a ler e construir gráficos de barras, colunas, linha e setores, mas existem outros tipos de gráficos, que foram criados para melhor comunicar dados e informações. Um exemplo é o **gráfico de radar**, também conhecido como **gráfico de aranha**, pela semelhança com uma teia.

Outro nome para este tipo de gráfico é "gráfico polar".

O gráfico de radar tem como base um polígono regular com um sistema radial de eixos nos quais são marcados os dados, e a quantidade desses dados determina o número de lados do polígono.

Entenda um pouco mais sobre os gráficos de radar a partir do seguinte exemplo:

Veja no Manual do Professor uma sugestão de atividade complementar envolvendo gráficos de radar.



Gráficos: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os gráficos acima representam as vendas de computadores ocorridas no período de 1 ano em uma rede que é composta de três lojas.

Observando os gráficos, é possível perceber que existem quatro camadas de hexágonos concêntricos, e os vértices indicam a quantidade de computadores vendidos.

Por exemplo, analisando as vendas da loja 2, podemos ler a quantidade de computadores vendidos pela posição dos vértices do polígono mais escuro: 3 000 computadores no 1º bimestre (jan-fev). Podemos também ler que o número de vendas:

- baixou para 1 000 unidades no segundo bimestre (mar-abr);
- subiu para 4 000 unidades no 3º bimestre (maio-jun);
- caiu para 2 000 unidades no período seguinte (jul-ago);
- voltou a ser de 3 000 unidades nos meses de setembro e outubro;
- manteve-se em 3 000 unidades no último bimestre do ano.

Observe que, neste exemplo, foram consideradas as vendas em 6 períodos bimestrais. Sendo assim, a representação gráfica das vendas de qualquer uma das lojas no ano é sempre um hexágono. Se os dados fossem coletados mensalmente, o polígono teria 12 lados.

A área do polígono gerado pelos gráficos de radar fornece informações sobre o movimento de vendas. No exemplo citado, a área do polígono é um indicador do total das vendas anuais.

mais vendas → maior área
menos vendas → menor área

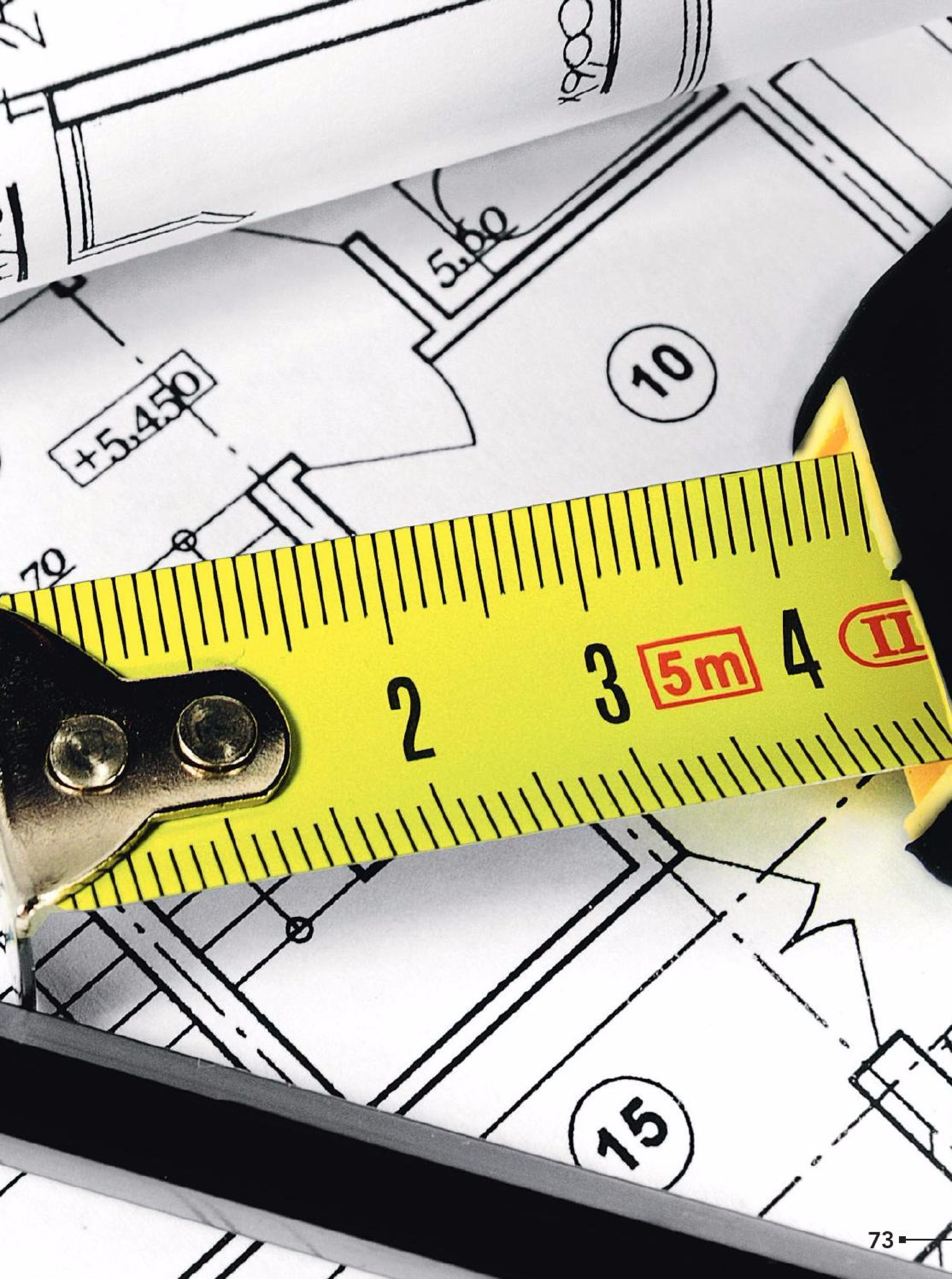
UNIDADE 2

Cálculo algébrico

Es75/Shutterstock/Glow Images

Nesta Unidade, aprofundaremos a Álgebra que você vem estudando desde o 7º ano, quando teve contato com as primeiras equações que se podiam resolver como se estivéssemos equilibrando uma balança de pratos.

Na Unidade anterior, você resolveu problemas usando equações e usou as letras para expressar relações entre medidas, no caso das fórmulas de área de figuras planas. Agora, aprofundaremos um pouco mais esse conhecimento, estudando as regras que regem o cálculo algébrico.


+5.450
10
2
3
5m
4
15

CAPÍTULO 4

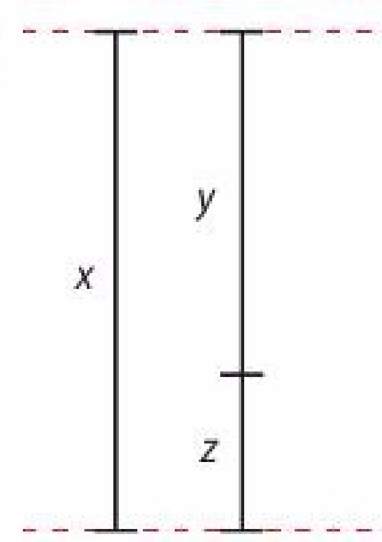
RELAÇÕES ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Linguagem algébrica para expressar relações entre medidas

EstudioMil/Arquivo da editora

Observe os segmentos e suas relações.

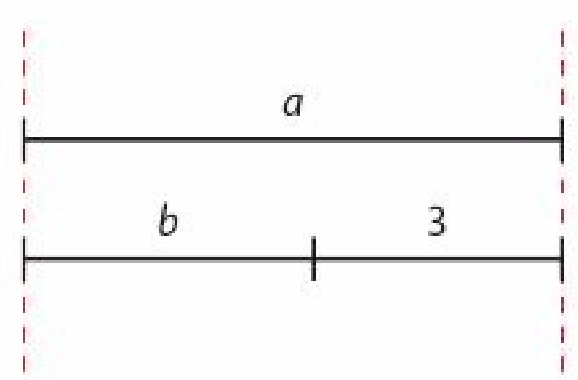
1º)



O esquema ao lado sugere as seguintes relações entre as medidas dos segmentos, representadas por letras:

$$x = y + z$$
$$y = x - z$$
$$z = x - y$$

2º)



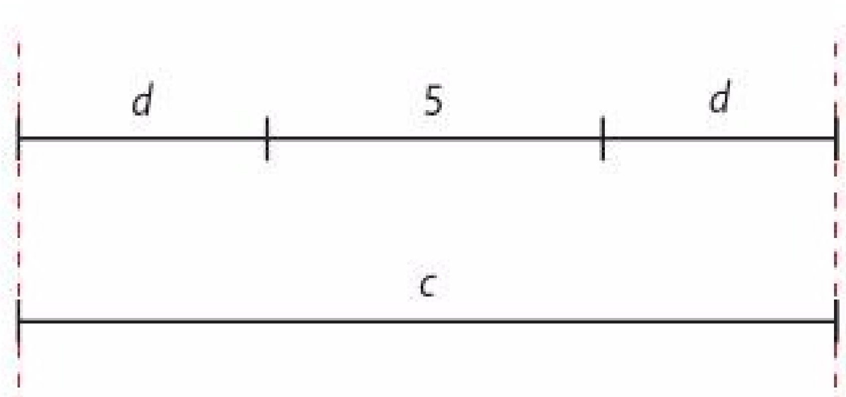
No esquema ao lado, podemos estabelecer as seguintes relações de desigualdade:

$$a > b$$
$$a > 3$$

E de igualdades:

$$a = b + 3$$
$$b = a - 3$$
$$a - b = 3$$

3º) No esquema abaixo podemos estabelecer que $c = d + 5 + d$.

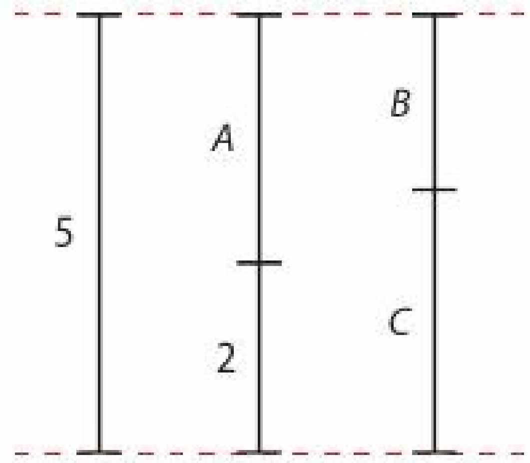


Podemos estabelecer também as desigualdades:

$$c > d$$
$$c > 5$$
$$c > 2d$$

E a igualdade: $c = 2d + 5$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

4º) 

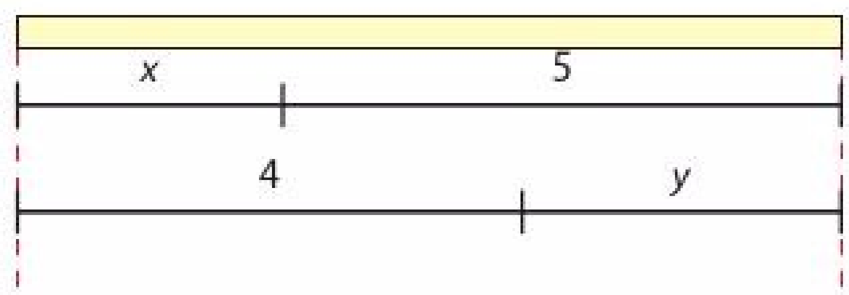
O segmento maior do esquema ao lado mede 5, que equivale aos segmentos $A + 2$ e $B + C$. Assim:

$$A + 2 = 5$$
$$B + C = 5$$

Se $A + 2 = 5$, então A mede 3 ($A = 3$).

Como A é maior que B ($A > B$) e $A = 3$, podemos concluir que $B < 3$.

O segmento C é maior do que 2 ($C > 2$) e $C = 5 - B$

5º) 

Ao lado, temos um esquema que sugere as desigualdades:

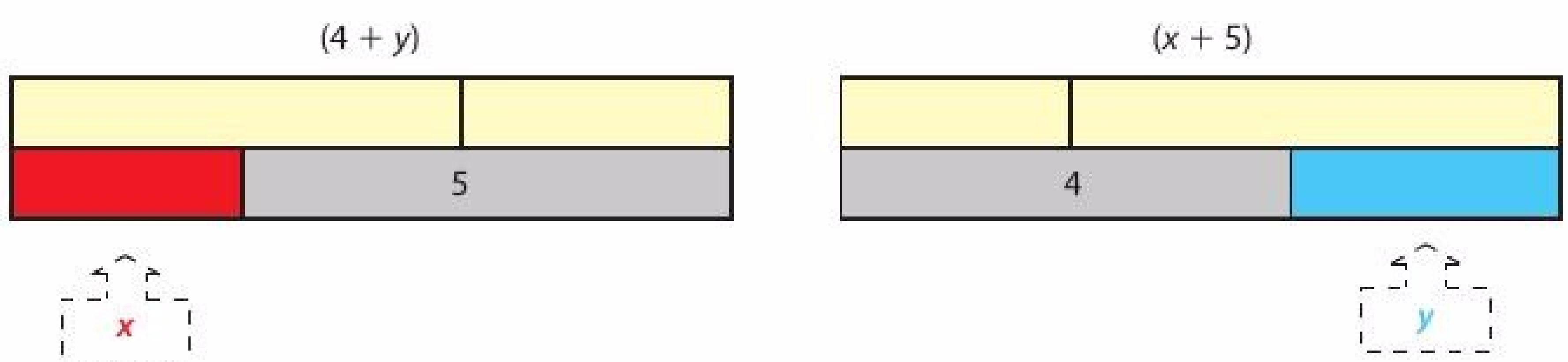
$$x < 4$$
$$y < 5$$

E a igualdade: $x + 5 = 4 + y$

Podemos expressar as medidas x e y observando as duas linhas.

Imagine, por exemplo, que $x + 5$ e $4 + y$ expressam a medida de uma mesma régua.

Subtraindo da régua um "pedaço" de tamanho 5, teremos a medida de x, e subtraindo um "pedaço" de tamanho 4, teremos a medida de y.



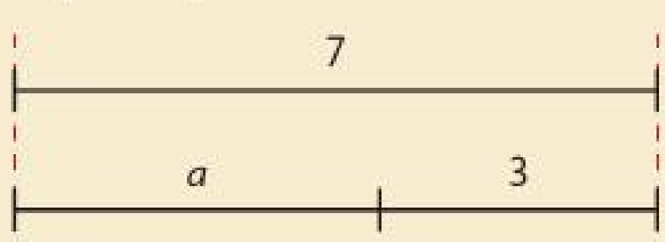
Isso pode ser expresso do seguinte modo:

$$x = (4 + y) - 5 \qquad \text{e} \qquad y = (x + 5) - 4$$

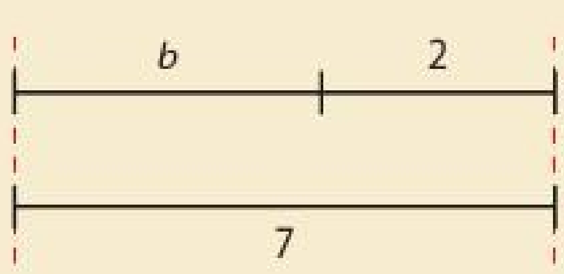
ATIVIDADES

faça no seu caderno

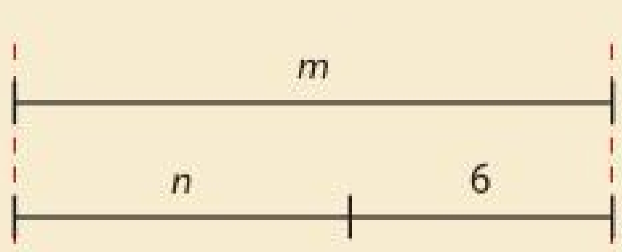
1 Expresse usando linguagem algébrica os esquemas que representam medidas de segmentos.

a) 

$a + 3 = 7$, em que $a = 4$.

b) 

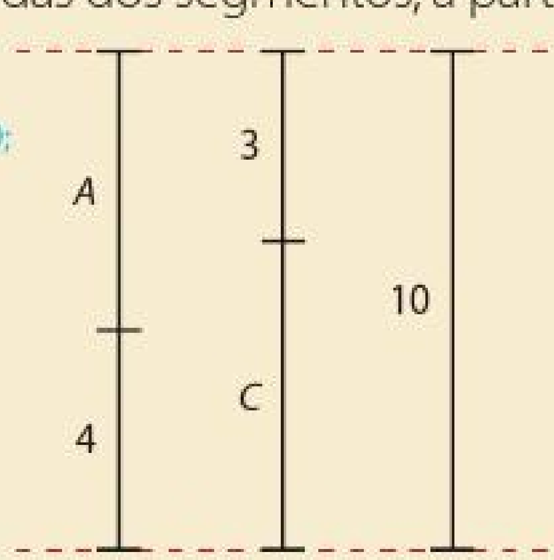
$b + 2 = 7$, em que $b = 5$.

c) 

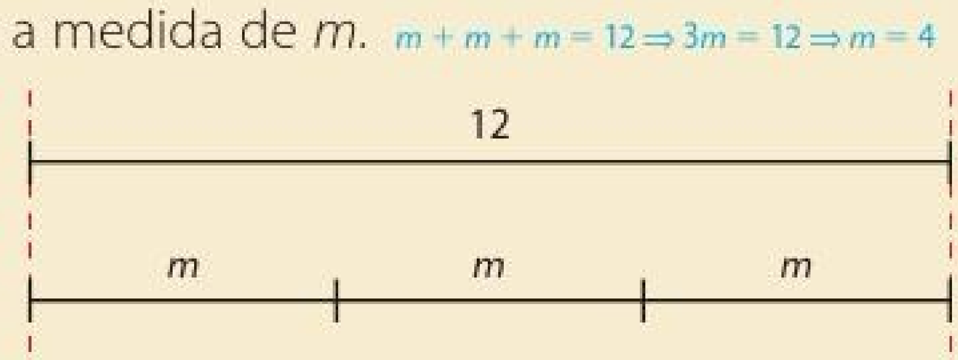
$m = n + 6$, em que $m - n = 6$.

2 Expresse relações de igualdade e desigualdade entre as medidas dos segmentos, a partir do esquema:

Igualdades:
$A + 4 = 3 + C = 10$;
$C = 7$ e $A = 6$.
Desigualdades:
$A < 10$, $A > 3$;
$C < 10$ e $C > 4$.



3 Expresse algebricamente o esquema e determine a medida de m. $m + m + m = 12 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = 4$



Decompondo retângulos

Considere um retângulo de lados que medem x e b, e sua decomposição em dois retângulos.

A área do retângulo amarelo é:

$$A = bx \quad \text{(I)}$$

Observe que, na decomposição que gerou os retângulos azuis, temos:

$$x = y + z \quad \text{(II)}$$

e

$$A = b(y + z) \quad \text{(III)}$$

É possível visualizar a partir dos retângulos azuis que:

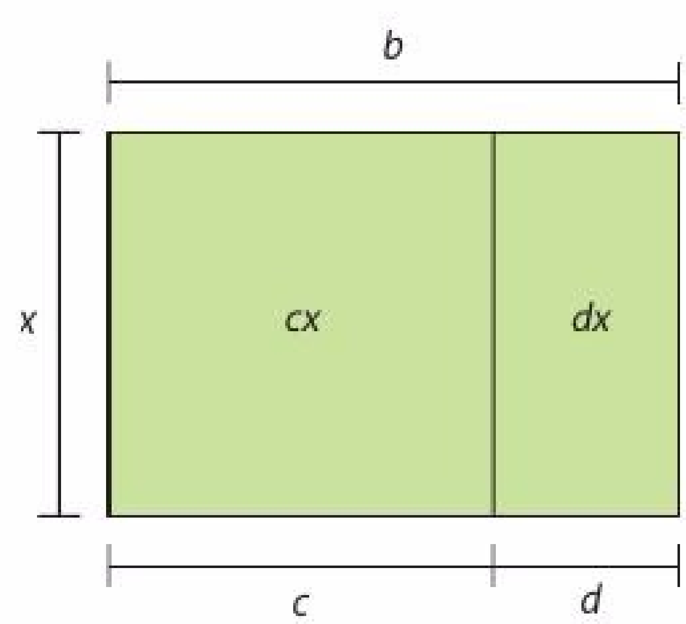
$$A = by + bz \quad \text{(IV)}$$

Igualando (III) e (IV), temos (I) uma igualdade verdadeira:

$$b(y + z) = by + bz$$

Algebricamente, a igualdade obtida representa uma aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

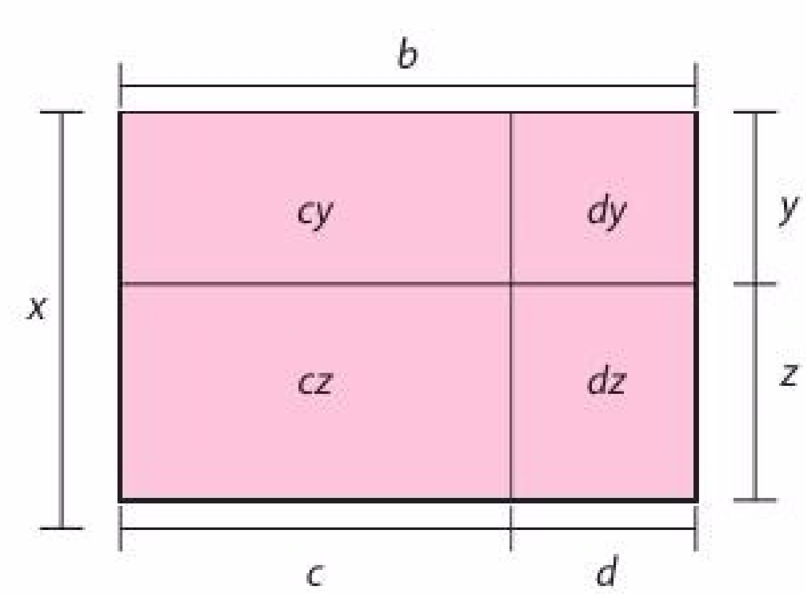
EstudioMil/Arquivo da editora



Podemos expressar a área desse retângulo assim:

$$A = x(c + d) \text{ ou } A = cx + dx$$

Decompondo o retângulo nas duas direções determinamos quatro retângulos, como mostra a figura ao lado.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

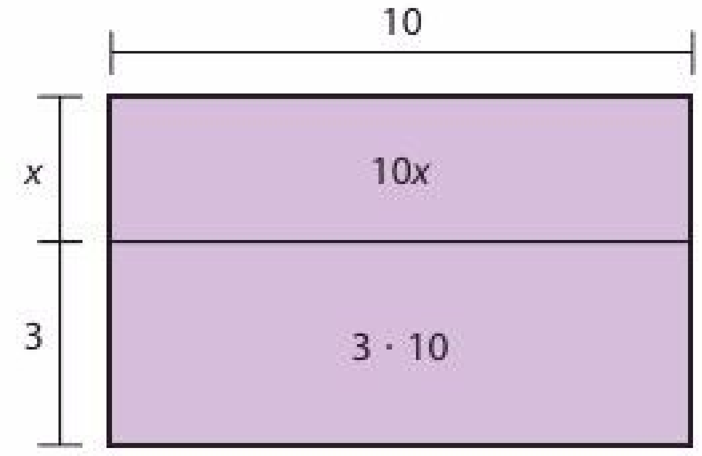
Veja as igualdades sugeridas na figura:

$$(c + d) \cdot (y + z) = c \cdot (y + z) + d \cdot (y + z) = cy + cz + dy + dz$$

P Estas relações serão úteis nos capítulos seguintes no estudo de produtos notáveis e fatoração.

Podemos usar esses procedimentos para expressar algebricamente relações entre áreas e perímetros. Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 1:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos calcular a área do retângulo grande de duas maneiras:

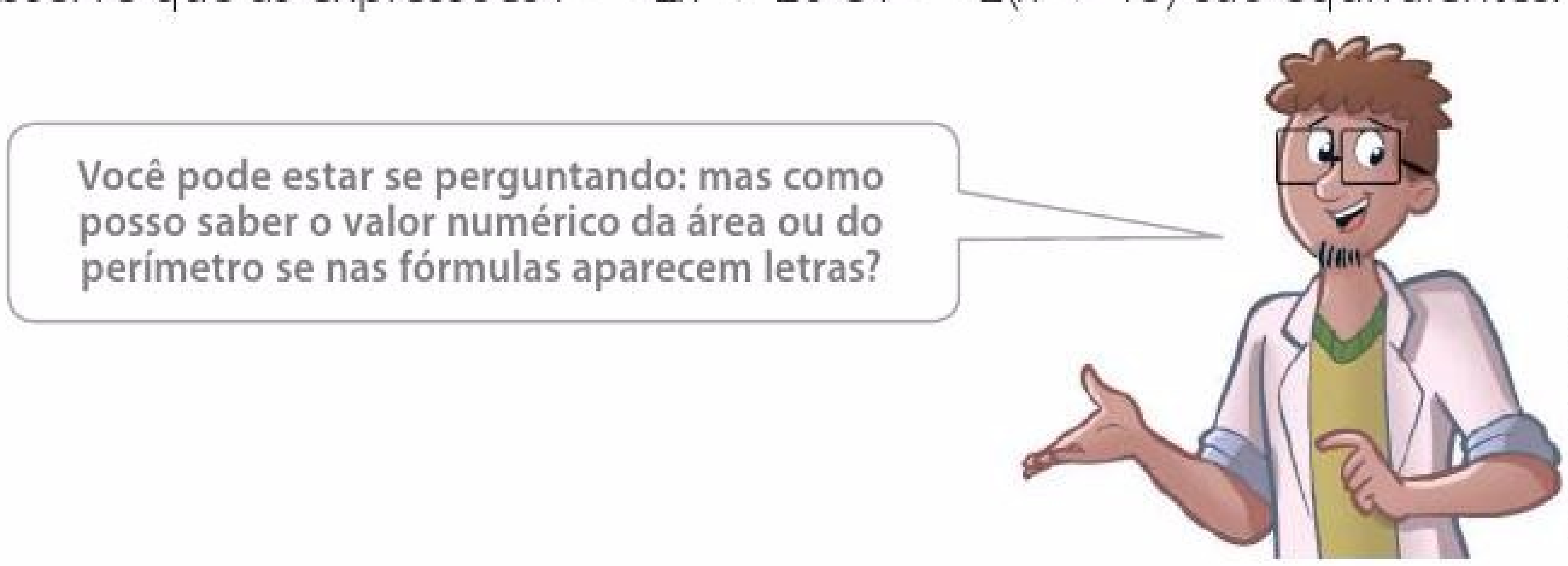
- Multiplicando as dimensões 10 e $(x + 3)$ para obter:
  $A = 10(x + 3)$
- ou calculando as áreas dos retângulos menores e somando-as, obtendo assim:
  $A = 10x + 3 \cdot 10 = 10x + 30$

As expressões $A = 10(x + 3)$ e $A = 10x + 30$ são equivalentes.

Podemos também calcular o perímetro do retângulo grande de duas maneiras:

- Somando as medidas dos lados para obter:
  $P = (x + 3) + 10 + (x + 3) + 10$
  Eliminando os parênteses e reorganizando, obtemos:
  $P = x + x + 3 + 10 + 3 + 10 = 2x + 26$
- ou pensando que os lados opostos de um retângulo são iguais:
  $P = 2(x + 3 + 10) = 2(x + 13)$

Observe que as expressões $P = 2x + 26$ e $P = 2(x + 13)$ são equivalentes.



EstudioMil/Arquivo da editora

Nesse caso, para obter as medidas, atribuímos um valor numérico para as letras. Por exemplo, se ao x que aparece nas fórmulas atribuirmos o valor numérico 5, então as medidas dos lados desse retângulo serão 10 e 8, pois $5 + 3 = 8$.

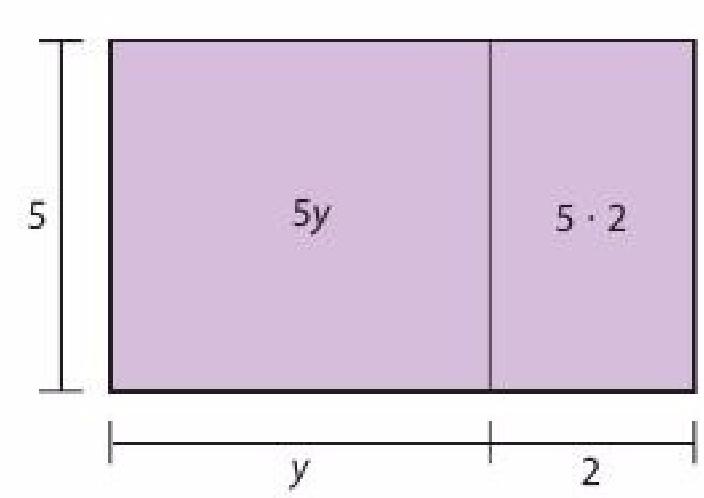
Veja como se calcula o valor numérico da área e do perímetro.

- $A = 10x + 30$, substituindo x por 5, temos: $A = 10 \cdot 5 + 30 = 50 + 30 = 80$.
- $P = 2x + 26$, substituindo x por 5, temos: $P = 2 \cdot 5 + 26 = 10 + 26 = 36$.

Admitindo o centímetro como unidade de medida, para esse retângulo, temos o perímetro medindo 36 cm e a área medindo 80 cm^2.

Exemplo 2:

- $A = 5(y + 2) = 5y + 10$
- $P = 2(5 + y + 2) = 2(y + 7) = 2y + 14$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo 3:

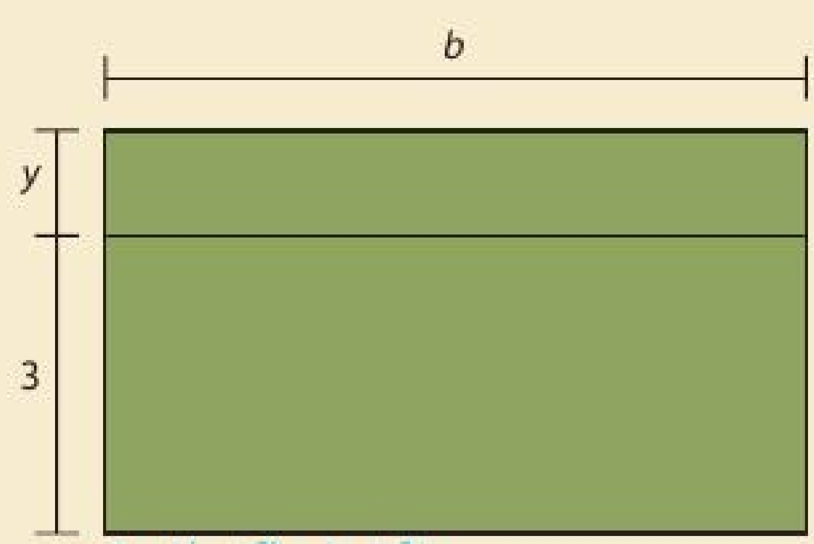
Nesse caso também é possível multiplicar as dimensões do retângulo grande ou calcular a área dos quatro retângulos menores e somá-las.

- $A = (x + 4)(7 + y) = x(7 + y) + 4(7 + y) = 7x + xy + 4 \cdot 7 + 4y = 7x + xy + 28 + 4y$
- $P = 2[(x + 4) + (7 + y)] = 2[x + y + 11] = 2x + 2y + 22$

ATIVIDADE faça no seu caderno

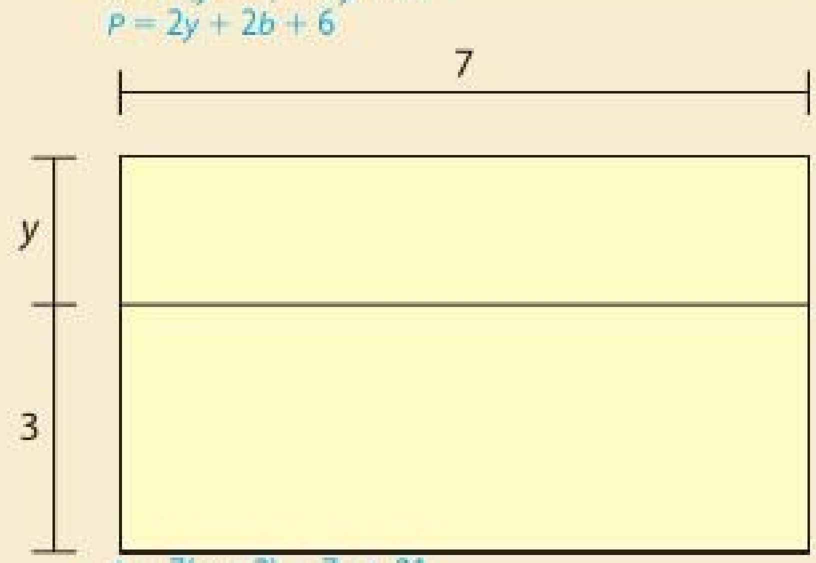
4 Expresse algebricamente as áreas e os perímetros de cada uma das figuras.

a)



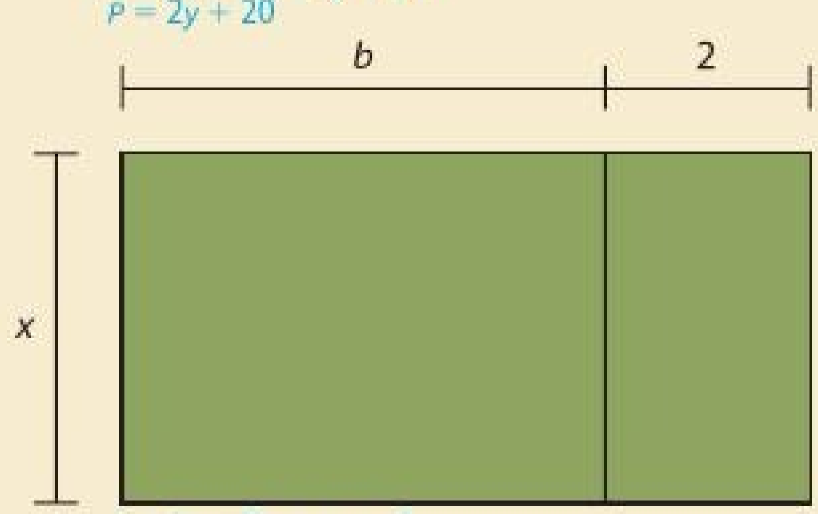
$A = b(y + 3) = by + 3b$
$P = 2y + 2b + 6$

b)



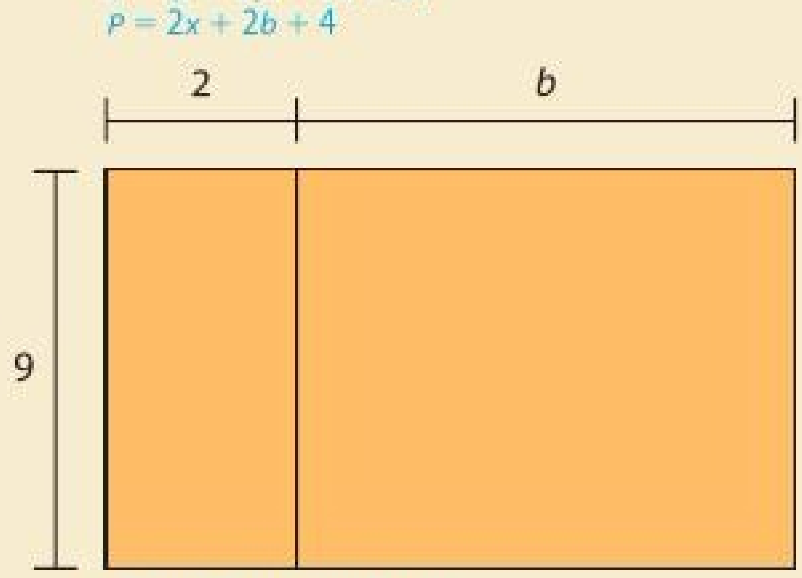
$A = 7(y + 3) = 7y + 21$
$P = 2y + 20$

c)



$A = (b + 2)x = bx + 2x$
$P = 2x + 2b + 4$

d)

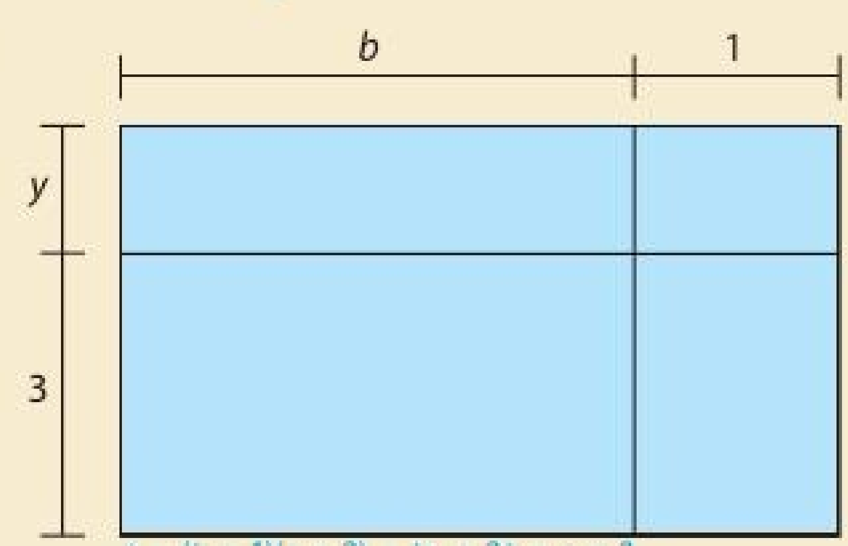


$A = 9(b + 2) = 9b + 18$
$P = 2b + 22$

e)

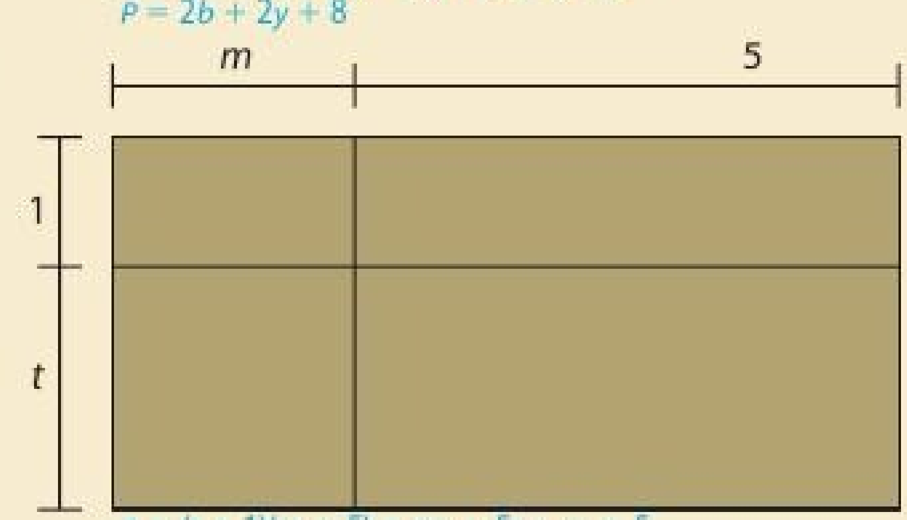
$A = (b + 1)(y + z) = by + bz + y + z$
$P = 2b + 2y + 2z + 2$

f)



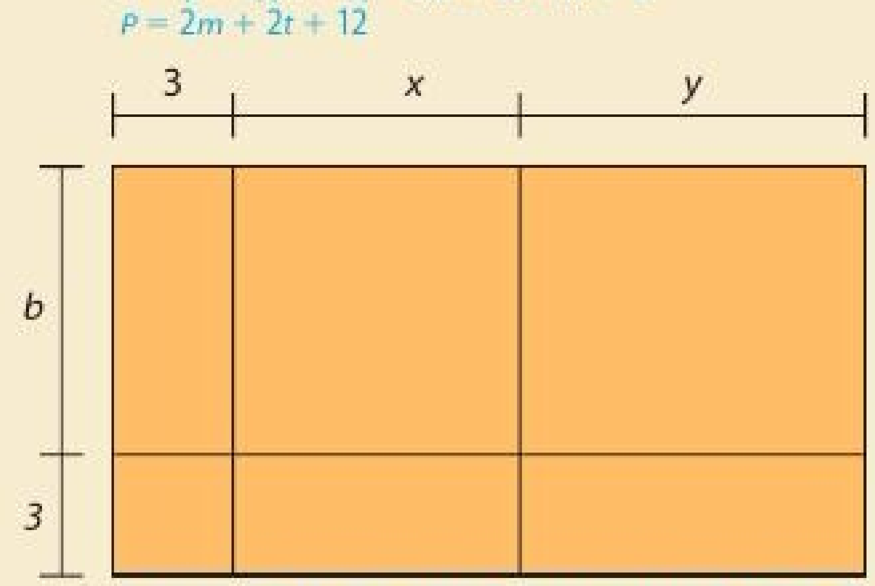
$A = (b + 1)(y + 3) = by + 3b + y + 3$
$P = 2b + 2y + 8$

g)



$A = (t + 1)(m + 5) = tm + 5t + m + 5$
$P = 2m + 2t + 12$

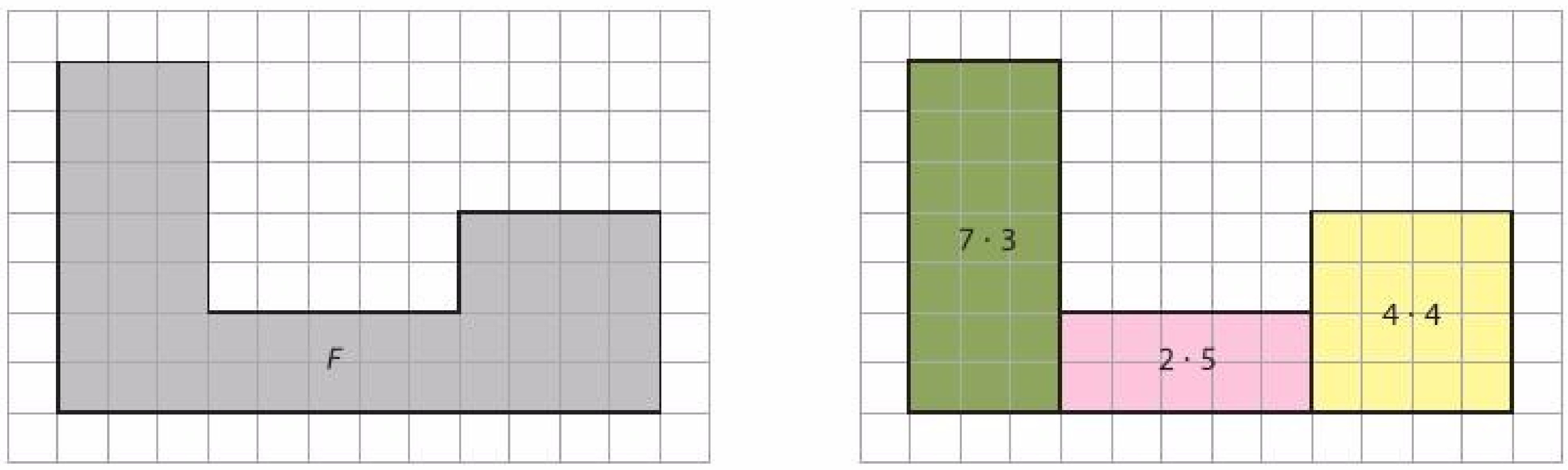
h)



$A = (b + 3)(3 + x + y) = 3b + bx + by + 9 + 3x + 3y$
$P = 2b + 2x + 2y + 12$

Área e perímetro de figuras irregulares

O que estudamos até aqui sobre áreas e perímetros de retângulos pode ser útil mesmo no caso de figuras irregulares, como o polígono *F* da figura a seguir. Veja:



Observe que a área do polígono *F* pode ser determinada decompondo-o nos retângulos indicados.

$$\text{Área } (F) = 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 21 + 10 + 16 = 47$$

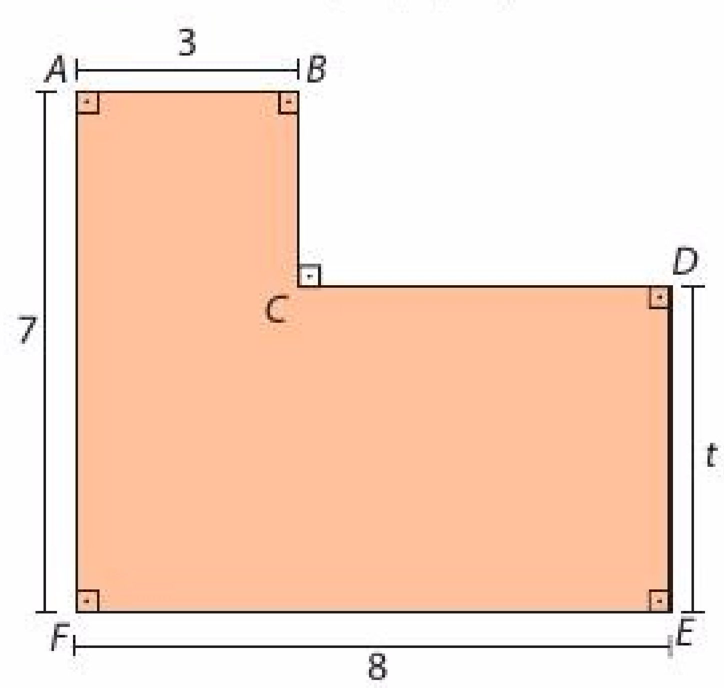
Assim, a área do polígono ***F*** é igual a 47 unidades de área.

O perímetro pode ser determinado somando as medidas dos oito lados da figura:

$$\text{Perímetro } (F) = 3 + 5 + 5 + 2 + 4 + 4 + 12 + 7 = 42$$

Portanto, o perímetro do polígono *F* é igual a 42 unidades de comprimento.

Agora, observe o polígono de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*.

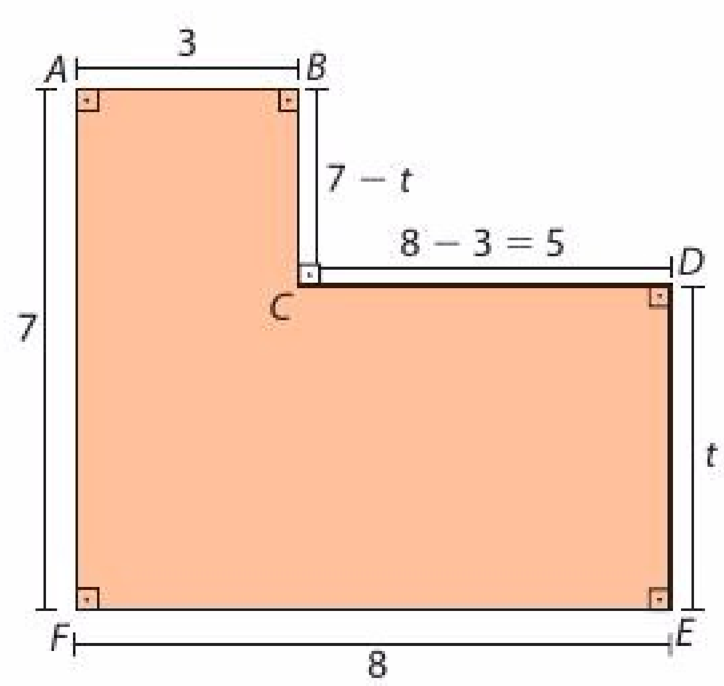


Veja que os lados desse polígono são paralelos ou perpendiculares e há ângulos retos em todos os vértices internos ou externos.

P Os ângulos internos das figuras que vamos estudar medem 90° ou 270°.

Esse polígono tem 6 lados, portanto é um hexágono. A medida de alguns de seus lados é conhecida e outras não: $AB = 3$; $AF = 7$; $EF = 8$ e $DE = t$.

Podemos representar a medida dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ a partir das informações que temos dos outros lados. Veja:



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos:

- o segmento $\overline{BC}$ mede $7 - t$
- o segmento $\overline{CD}$ mede $8 - 3 = 5$
- $\text{med}(\overline{AB}) + \text{med}(\overline{CD}) = \text{med}(\overline{EF}) = 8$
- $\text{med}(\overline{BC}) + \text{med}(\overline{DE}) = \text{med}(\overline{AF}) = 7$

A partir desses dados, é possível determinar o perímetro desse polígono. Acompanhe:

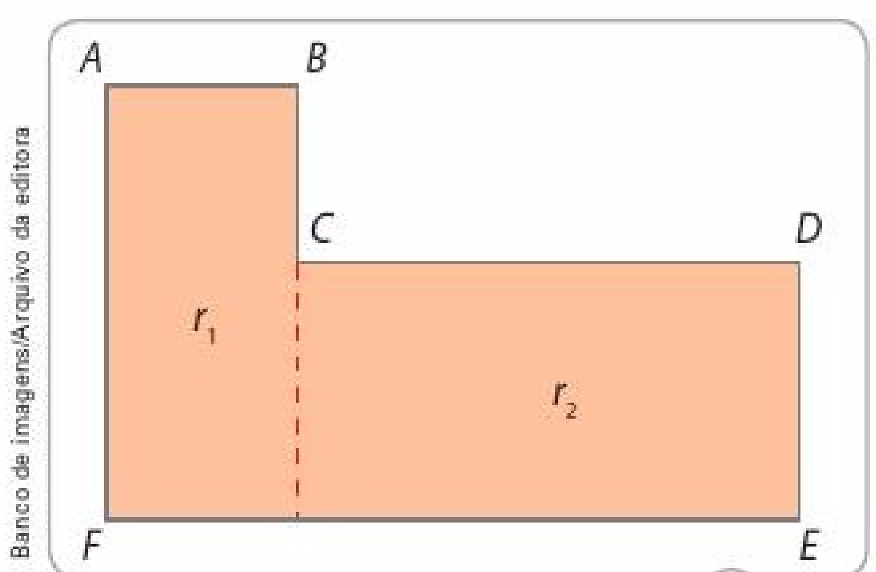
$P = 3 + 7 - t + 5 + t + 8 + 7$

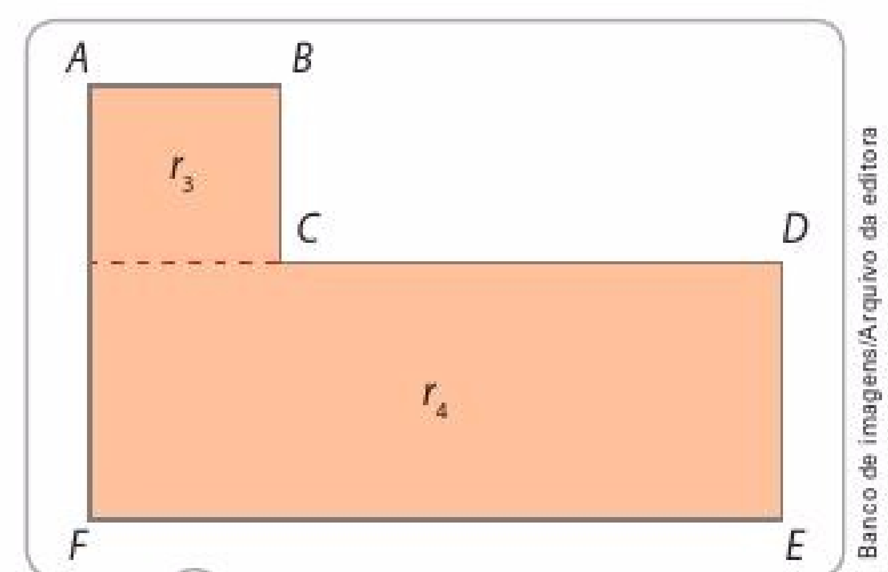
$P = \text{med}(\overline{AB}) + \text{med}(\overline{BC}) + \text{med}(\overline{CD}) + \text{med}(\overline{DE}) + \text{med}(\overline{EF}) + \text{med}(\overline{FA})$

$\quad 8 \qquad 7 \qquad\qquad 8 \qquad 7$

$P = 8 + 7 + 8 + 7 = 30$

Agora, acompanhe estratégias diferentes para expressar a área desse hexágono.





- Estratégia da aluna:

  $\text{Área}_{(\text{hexágono})} = \text{área } (r_1) + \text{área } (r_2) = 7 \cdot 3 + 5t = 21 + 5t \quad \text{(I)}$

- Estratégia do aluno:

  $\text{Área}_{(\text{hexágono})} = \text{área } (r_3) + \text{área } (r_4) = \boxed{3 \cdot (7 - t)} + 8t = 21 - 3t + 8t = 21 + 5t \quad \text{(II)}$

A prova de que duas expressões algébricas são equivalentes tem de ser feita por meio de métodos algébricos que envolvem o conhecimento de técnicas, como aplicação de propriedades (distributiva, cancelamento, etc.), redução de termos semelhantes, simplificação, substituição, entre outras.

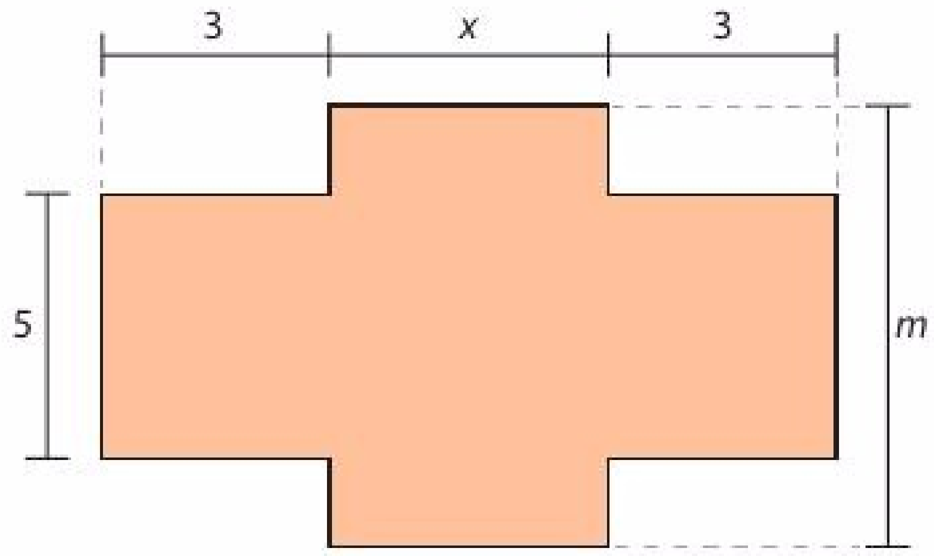
Você vai aprofundar esses métodos nos capítulos seguintes.

O cálculo algébrico é uma ferramenta matemática poderosa para mostrar que as expressões I e II, para a área do hexágono, são equivalentes.

Veja mais sobre cálculo algébrico no capítulo 5.

Acompanhe as explorações que faremos com o que estudamos até aqui.

1ª) A figura abaixo, em forma de cruz, tem 12 lados perpendiculares dois a dois (é um dodecágono) e dois eixos de simetria (vertical e horizontal).



Podemos escrever expressões diferentes e equivalentes para o perímetro e para a área dessa figura.

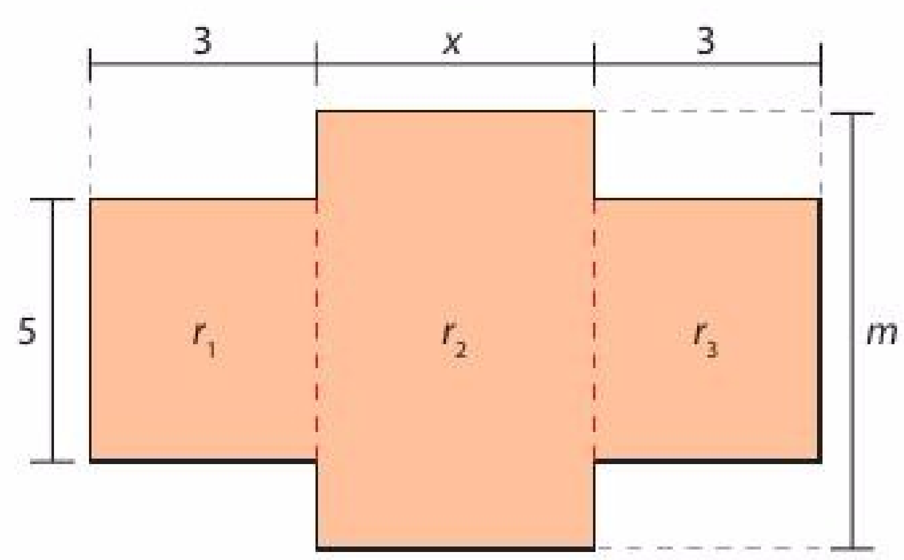
Veja as expressões que representam seu perímetro:

- $P = 2 \cdot [(3 + x + 3) + m]$
- $P = 2(x + 6) + 2m$
- $P = 2(x + 6 + m)$
- $P = 2x + 2m + 12$
- $P = 3 + x + 3 + m + 3 + x + 3 + m$

Observe que as expressões acima são equivalentes.

Agora, vamos decompor a figura de duas maneiras diferentes, obtendo assim expressões equivalentes para a área.

Acompanhe:

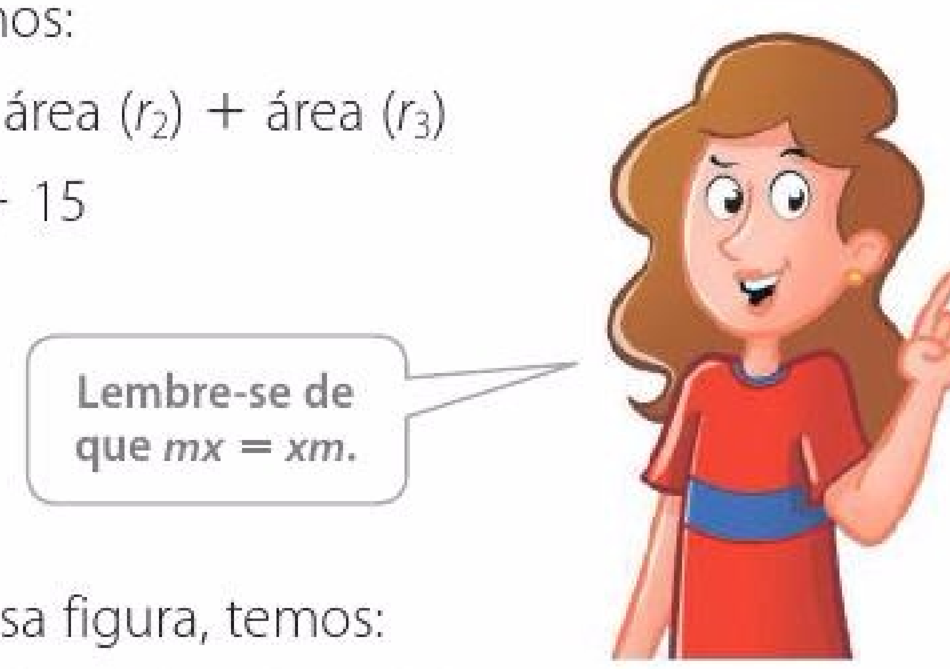


Nesse caso, temos:

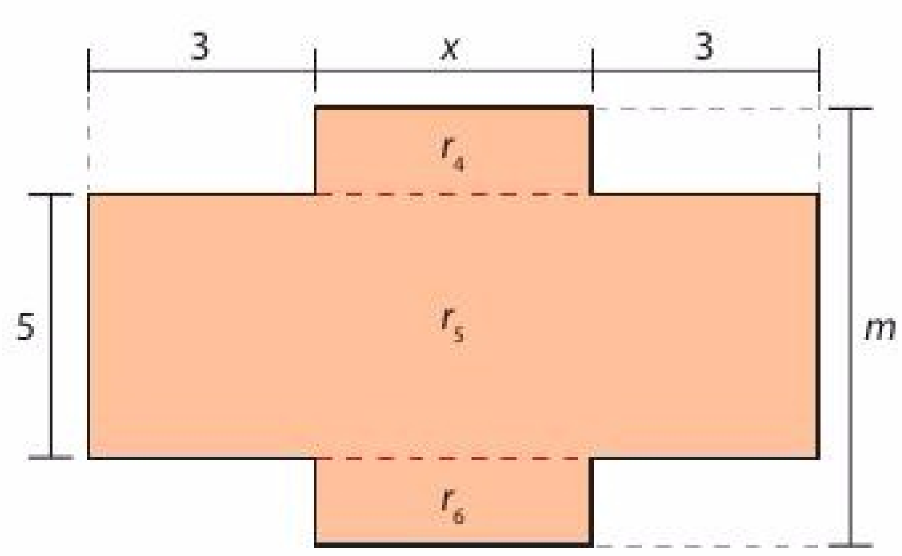
$A = \text{área } (r_1) + \text{área } (r_2) + \text{área } (r_3)$

$A = 15 + xm + 15$

$A = mx + 30$



EstudioMil/Arquivo da editora



Em relação a essa figura, temos:

$A = \text{área } (r_4) + \text{área } (r_5) + \text{área } (r_6)$

$$A = \frac{x(m - 5)}{2} + 5(x + 6) + \frac{x(m - 5)}{2}$$

$A = x(m - 5) + 5(x + 6)$

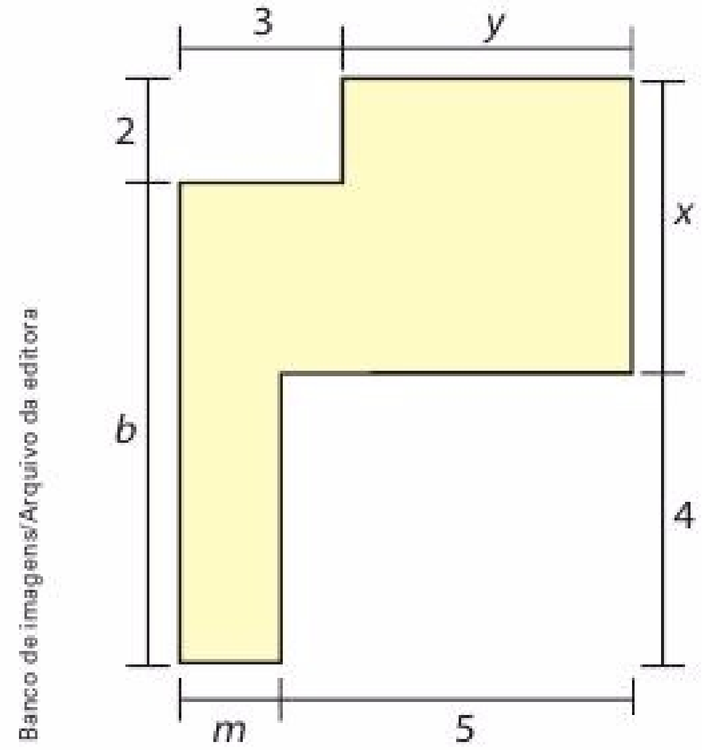
$A = xm - 5x + 5x + 30$

$A = xm + 30$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe que as expressões obtidas pelas duas maneiras de decomposição são equivalentes.

2ª) Agora, vamos analisar o octógono a seguir:



Primeiro, vamos obter as expressões diferentes e equivalentes para o perímetro dessa figura.

Observe que $3 + y = m + 5$ e $2 + b = x + 4$.

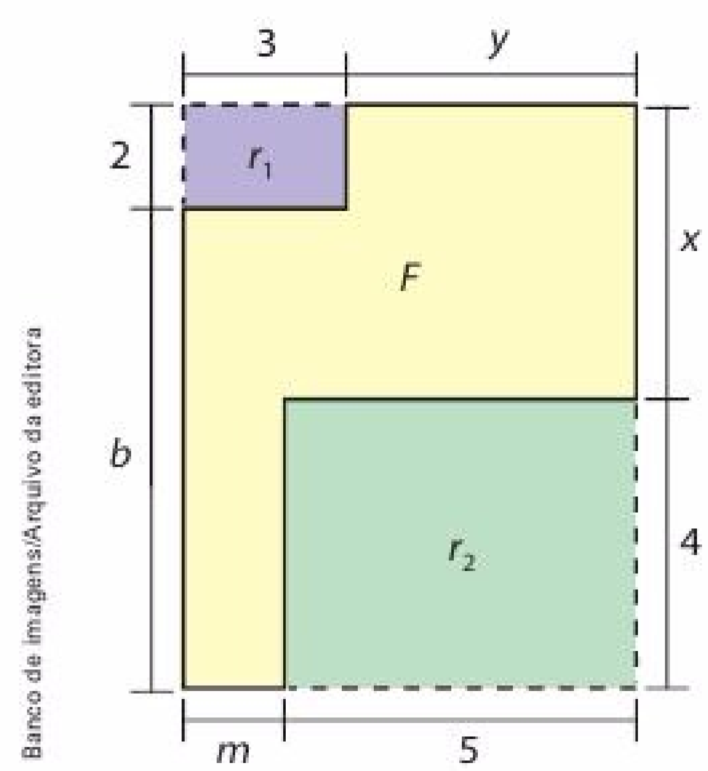
Então, temos:

- $P = 3 + y + x + 4 + 5 + m + b + 2$
  $P = y + x + m + b + 14$
- $P = 2[(3 + y) + (x + 4)]$
  $P = 2y + 2x + 14$
- $P = 2[(3 + y) + (2 + b)]$
  $P = 2y + 2b + 10$
- $P = 2[(m + 5) + (x + 4)]$
  $P = 2m + 2x + 18$
- $P = 2[(m + 5) + (2 + b)]$
  $P = 2m + 2b + 14$

Todas essas expressões são equivalentes.

Para expressar a área desse octógono, vamos usar um novo procedimento: a subtração.

Considere que o octógono F faz parte de um retângulo R de lados $(3 + y)$ e $(x + 4)$. Veja a figura a seguir.



Uma das maneiras para determinar a área do octógono é:

Área (F) = área (R) − área (r_1) − área (r_2)

Área $(F) = (3 + y)(x + 4) - 6 - 20$

Área $(F) = 3x + 12 + yx + 4y - 26$

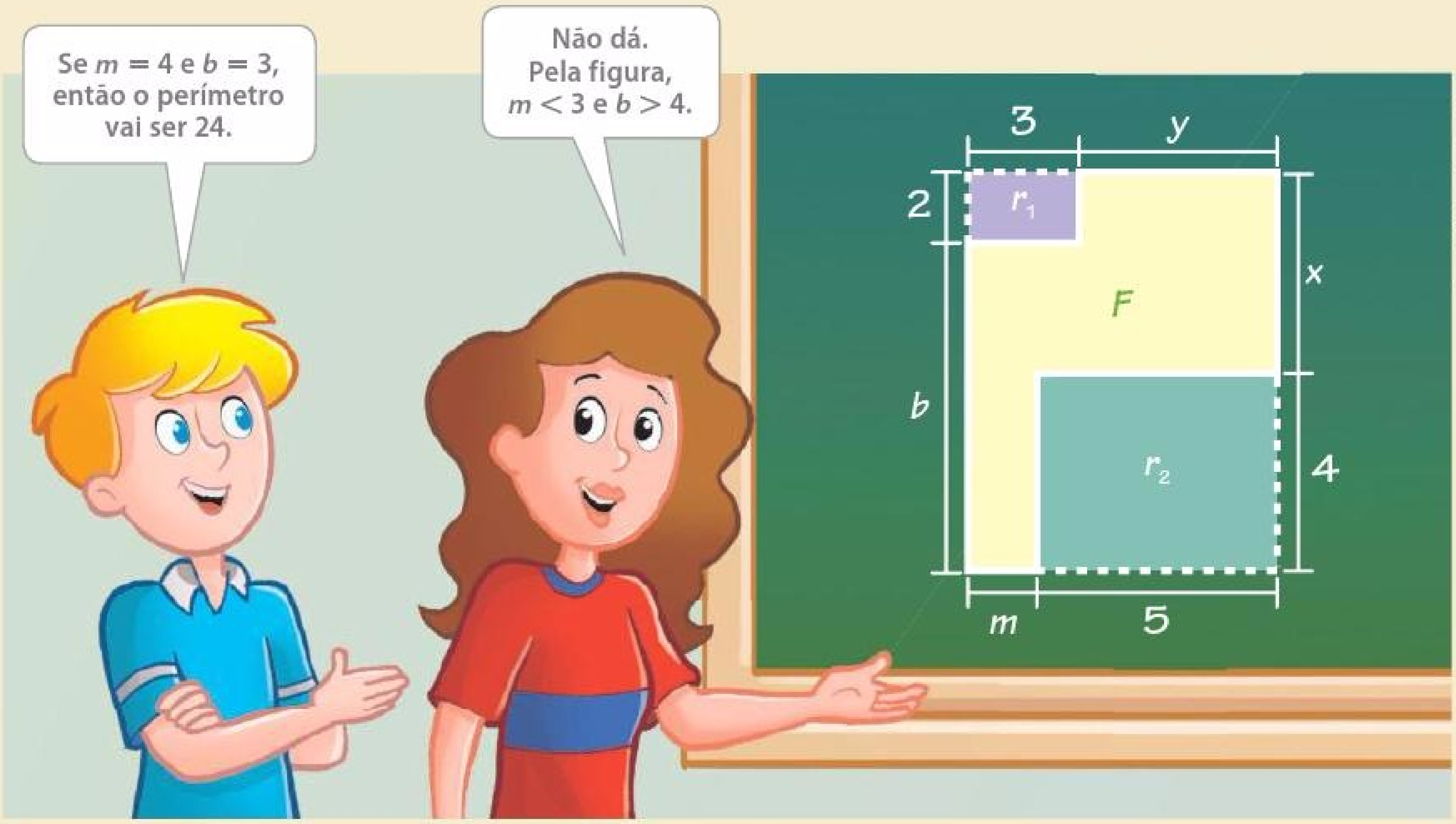
Área $(F) = 3x + 4y + yx - 14$

Vamos continuar explorando essa figura nas atividades a seguir.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

5 No final da aula de Matemática, alguns alunos travaram o seguinte diálogo sobre o octógono da 2ª exploração (página 82).



a) Quem está com a razão: o menino ou a menina? A menina.

b) Analise a figura desenhada no quadro de giz e escreva no seu caderno desigualdades que expressem restrições ao valor numérico de x e y. $x > 2$ e $y < 5$.

6 Observando o octógono, que aparece no quadro de giz da atividade anterior, construa um quadro com 11 linhas e 8 colunas. Veja a seguir como será a primeira linha:

y	x	m	b	$2y + 2x + 14$	$2y + 2b + 10$	$2m + 2x + 18$	$2m + 2b + 14$

a) Atribua valores arbitrários para as variáveis y, x, m e b, respeitando as restrições de cada uma. Resposta pessoal.

b) Compare os valores das quatro últimas colunas. O que você concluiu? Os valores são iguais.

7 Existem outras maneiras de expressar a área do octógono que aparece no quadro de giz da atividade 5. Então, encontre mais três maneiras diferentes de expressar essa área de modo que na expressão apareçam as variáveis:

a) b e m; $A = bm + 5b + 2m - 16$

b) b e y; $A = yb + 3b + 2y - 20$

c) m e x. $A = xm + 4m + 5x - 6$

8 Calcule a área do octógono substituindo os valores a seguir nas expressões obtidas na atividade anterior.

P Ver comentário no Manual do Professor.

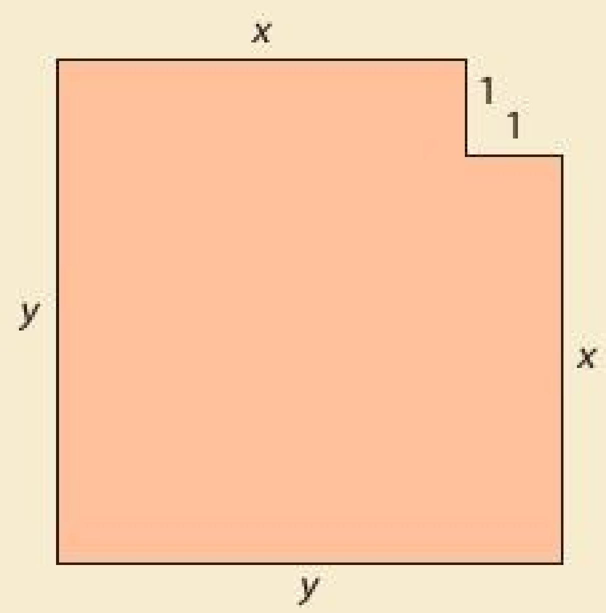
a) $b = 7$ e $m = 2$; $A = bm + 5b + 2m - 16 \Rightarrow A = 14 + 35 + 4 - 16 = 37$

b) $b = 6$ e $y = 4$; $A = yb + 3b + 2y - 20 \Rightarrow 24 + 18 + 8 - 20 = 30$

c) $m = 2$ e $x = 5$. $A = xm + 4m + 5x - 6 \Rightarrow 10 + 8 + 25 - 6 = 37$

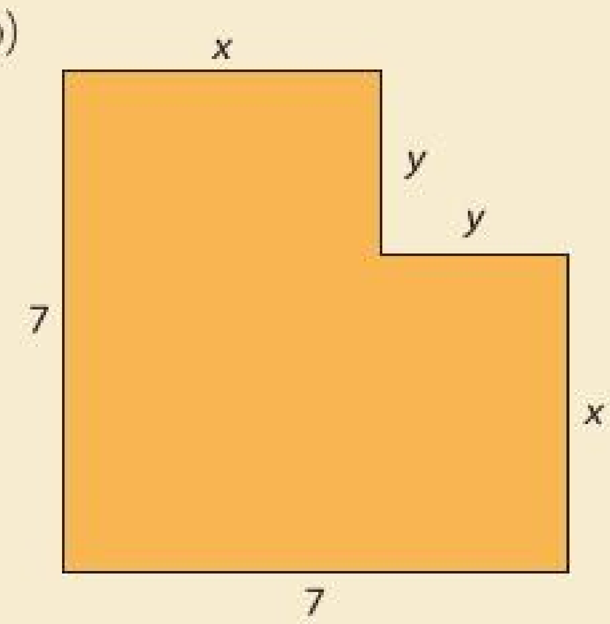
9 Expresse a área e o perímetro das figuras: **P** Veja comentário no Manual do Professor.

a)



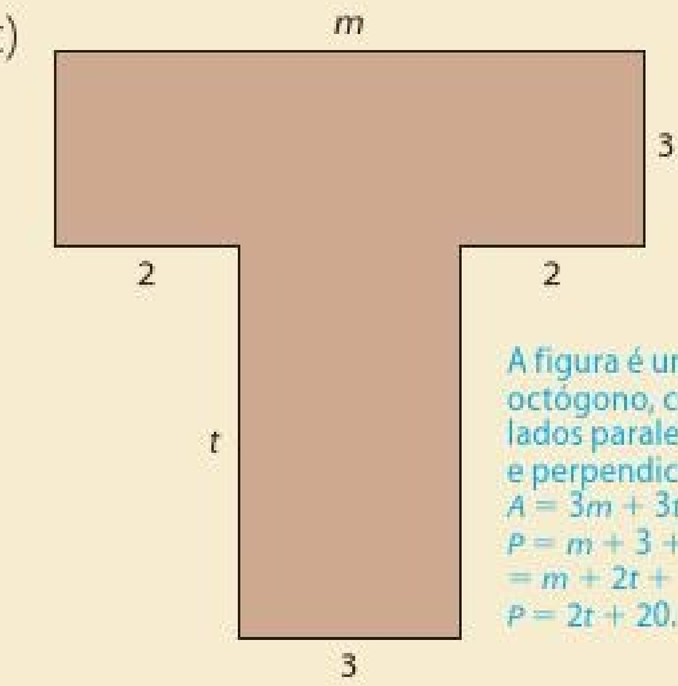
A figura é um hexágono, com lados paralelos e perpendiculares.
$A = y^2 - 1$
$P = 2y + 2x + 2$, como $y = x + 1$, logo $P = 4y$.

b)



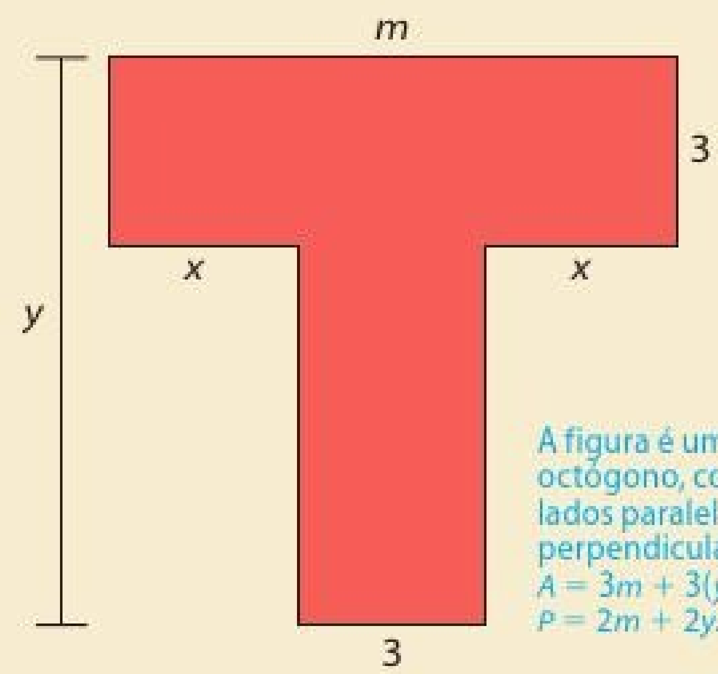
A figura é um hexágono, com lados paralelos e perpendiculares.
$A = 49 - y^2$
$P = 14 + 2x + 2y$, como $x + y = 7$, logo $P = 4 \cdot 7 = 28$.

c)



A figura é um octógono, com lados paralelos e perpendiculares.
$A = 3m + 3t$
$P = m + 3 + 2 + t + 3 + t + 2 + 3 =$
$= m + 2t + 13$, como $m = 7$; logo $P = 2t + 20$.

d)



A figura é um octógono, com lados paralelos e perpendiculares.
$A = 3m + 3(y - 3)$
$P = 2m + 2y$.

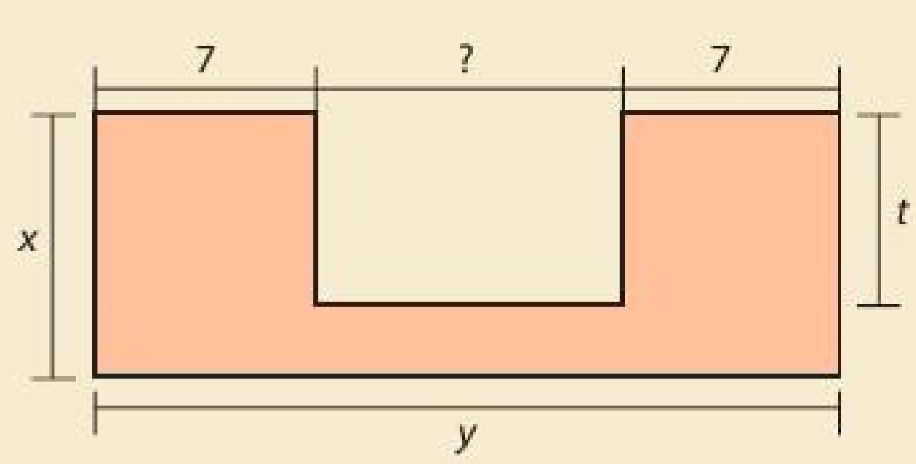
REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

1 Observe a figura abaixo e escreva a expressão da maneira mais simples possível:

a) do perímetro; $P = 2x + 2y + 2t$

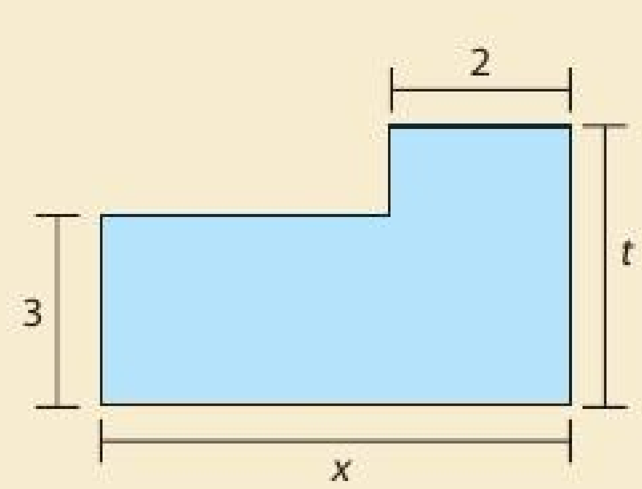
b) da área. $A = xy - t(y - 14)$



2 Com relação à figura a seguir, escreva três expressões diferentes e equivalentes:

a) do perímetro; $P = 2(x + t)$; $P = 2t + 2x$; $P = t + x + 3 + (x - 2) + (t - 3) + 2$.

b) da área. $A = 2t + 3(x - 2)$; $A = 3x + 2(t - 3)$; $A = tx - (t - 3)(x - 2)$.

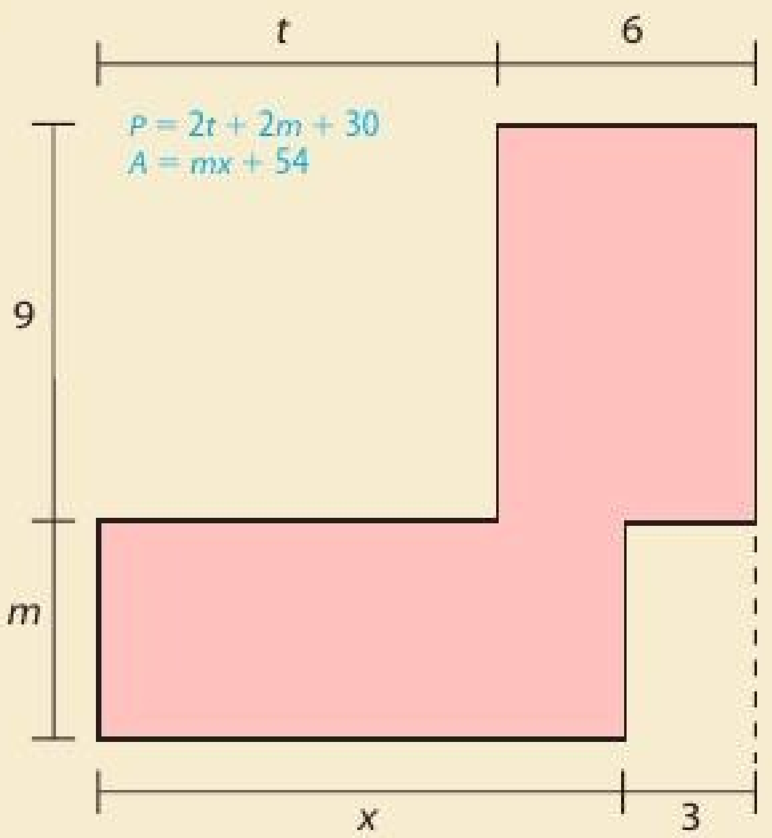


Não escreva no livro.

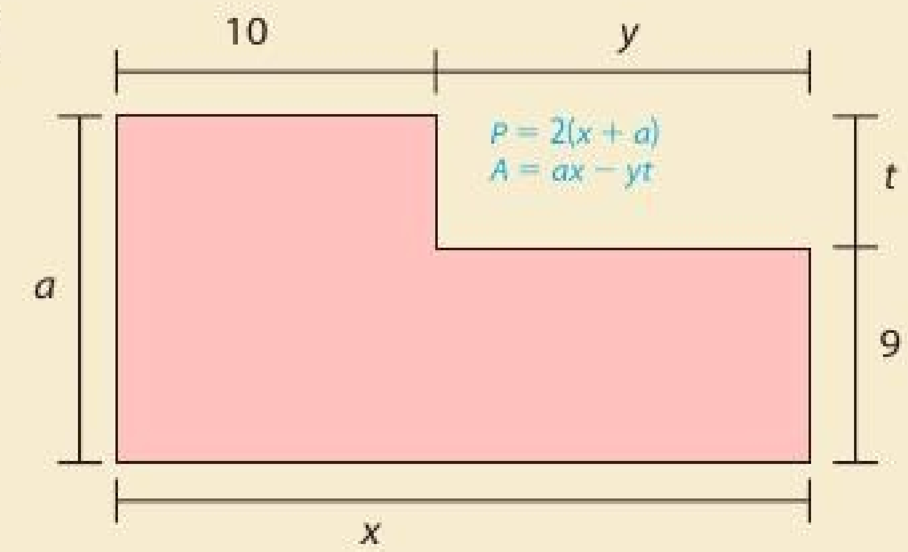
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Escreva as expressões algébricas correspondentes às áreas e aos perímetros das figuras a seguir.
Em cada item, há várias expressões possíveis.

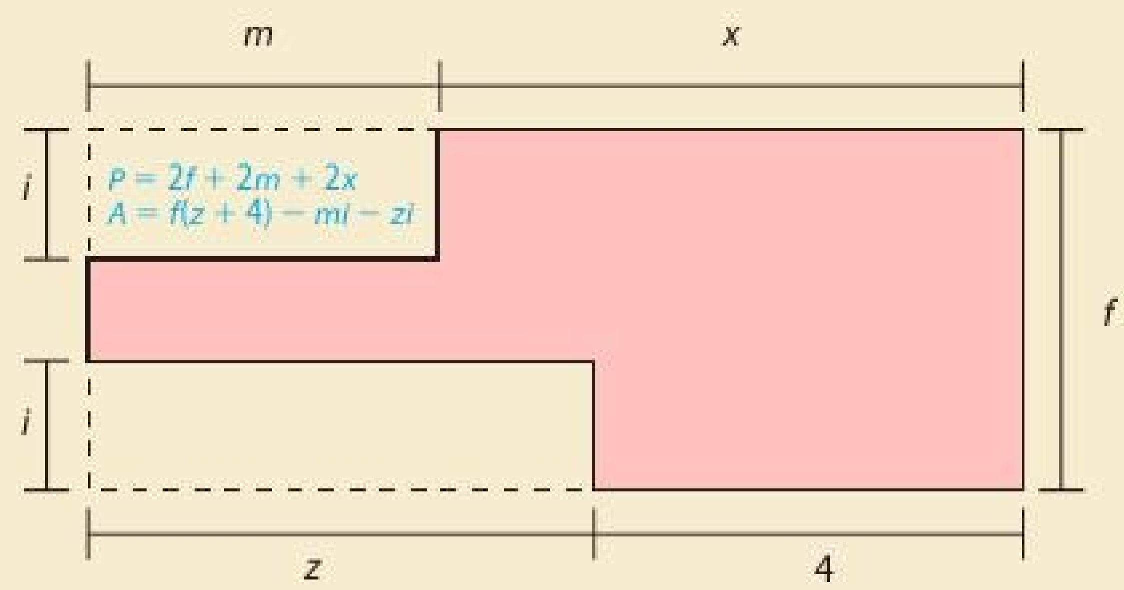
a)



d)

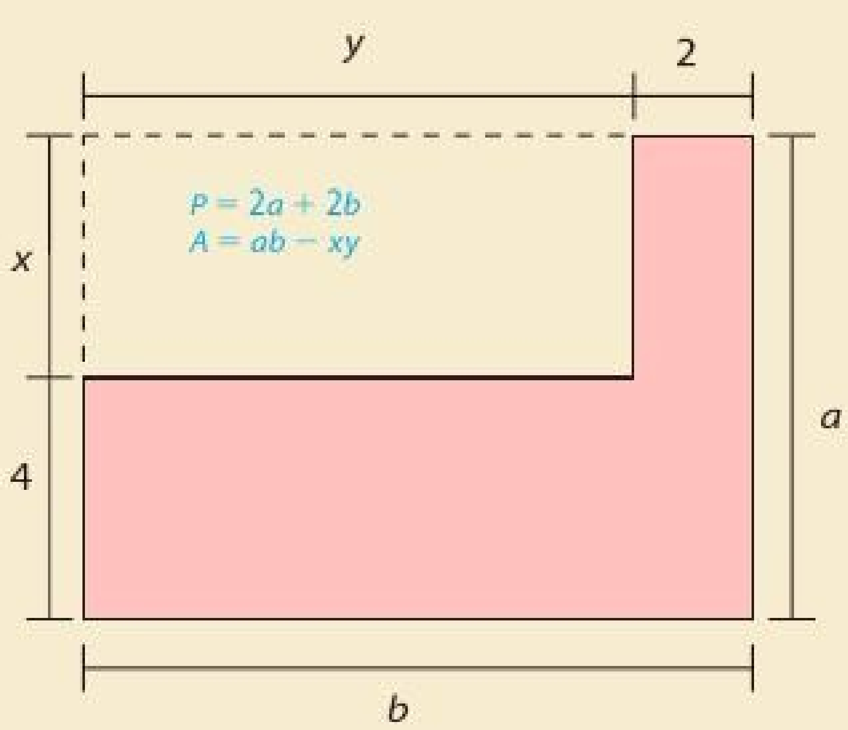


b)

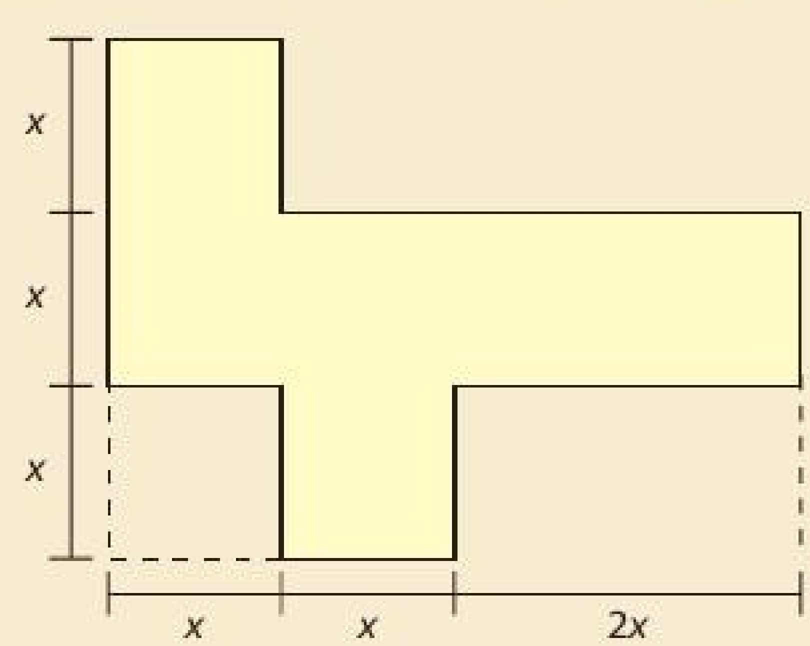


Não escreva no livro.

c)



4 Escreva a expressão da área desta planificação de um cubo. $A = 6x^2$



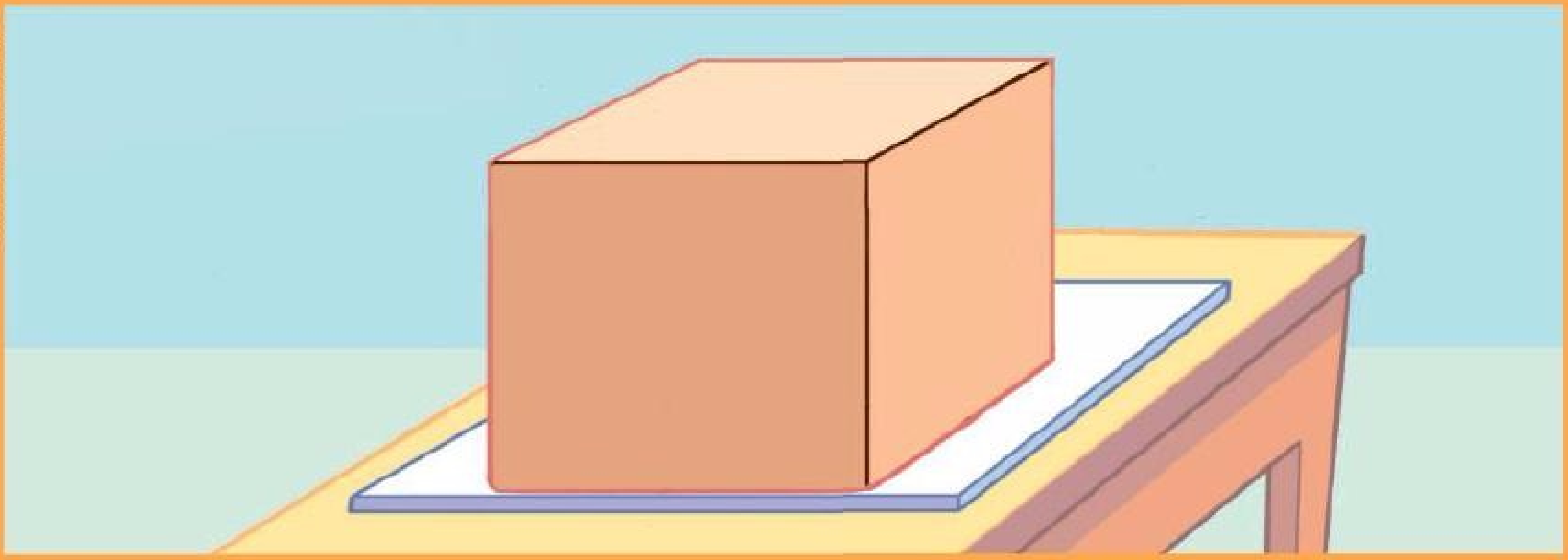
O BOLO, A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA

Dona Benta é uma confeiteira de mão cheia. No aniversário da Cátia, ela fez um delicioso bolo em forma de cubo.

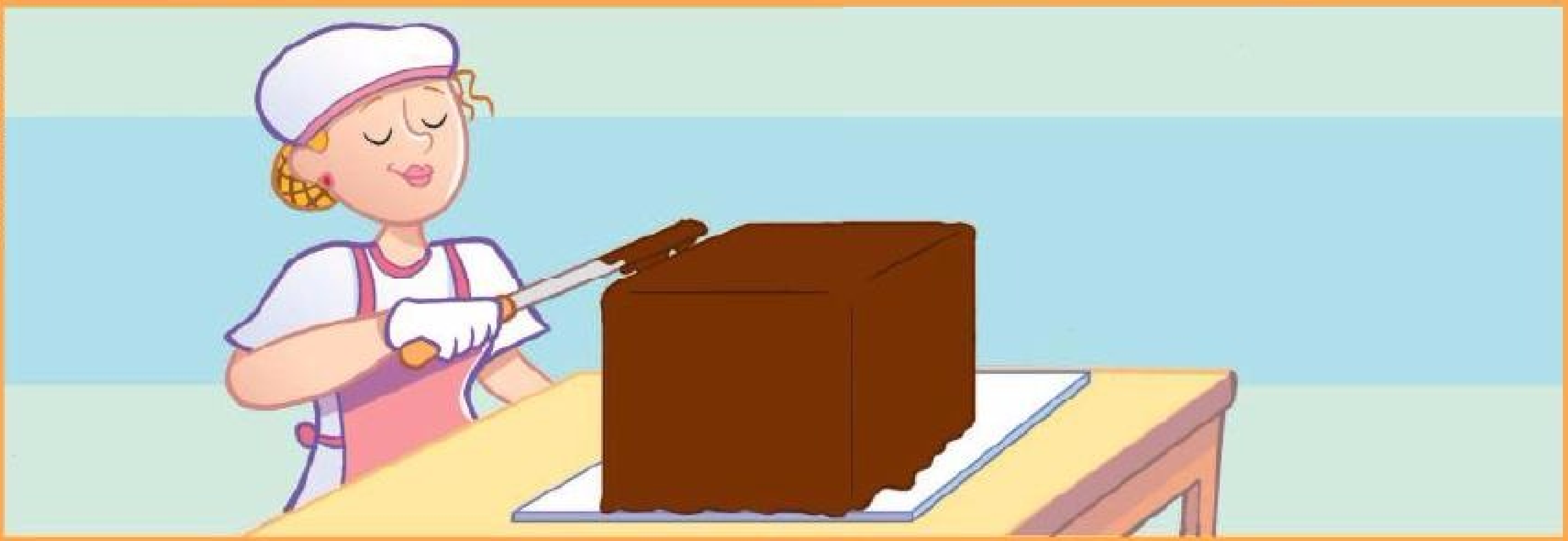
Depois de pronto, ela enfeitou a parte externa do bolo com cobertura de chocolate.

Por fim, cortou o bolo em cubos menores.

Veja a seguir o passo a passo de como Dona Benta preparou o bolo.

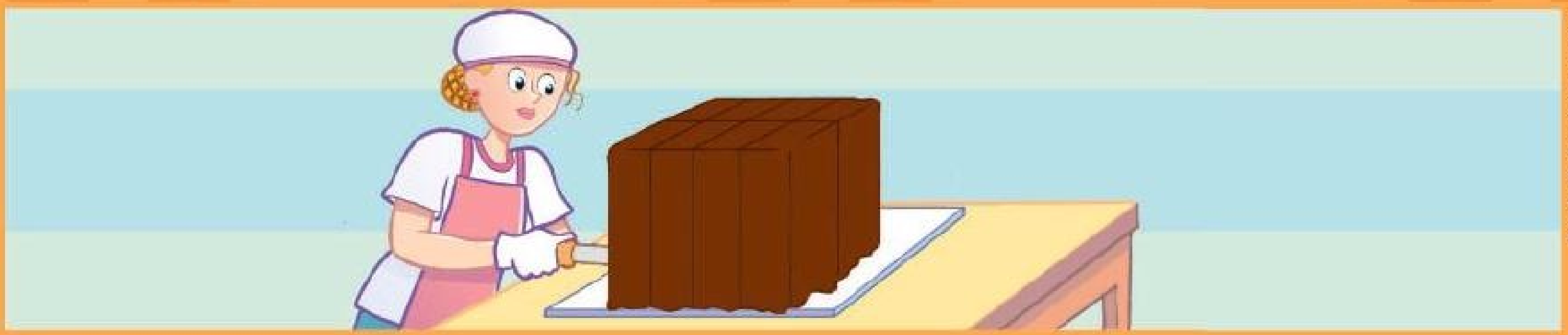


EstudioMil/Arquivo da editora



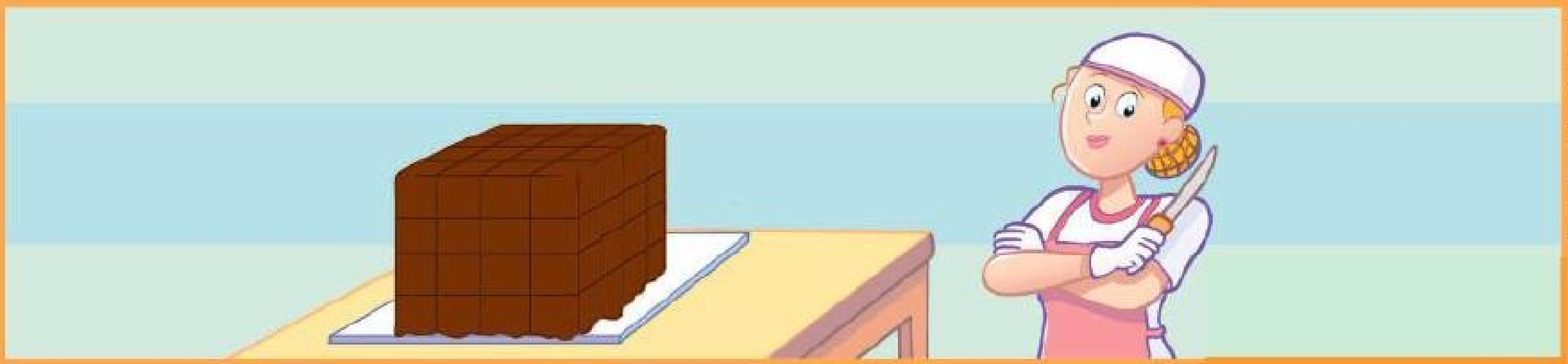
EstudioMil/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora



EstudioMil/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora



EstudioMil/Arquivo da editora

Na hora da distribuição, a turma disputou os melhores pedaços de bolo, que eram aqueles com maior quantidade de cobertura de chocolate.

a) Em quantos pedaços Dona Benta cortou o bolo? Em 64 pedaços.

b) Quantos pedaços têm cobertura de chocolate em 3 faces? 4 pedaços têm cobertura em 3 faces.

c) Quantos pedaços têm cobertura de chocolate em apenas 2 faces? 20 pedaços têm cobertura em duas faces.

d) Quantos pedaços têm cobertura de chocolate em apenas uma face? 28 pedaços têm cobertura em apenas uma face.

e) Quantos pedaços não têm cobertura chocolate em face alguma? 12 pedaços não têm cobertura em face alguma.

Observe que: $4 + 20 + 28 + 12 = 64 = 4^3$

Agora, um desafio!

Imagine um bolo com cobertura, em forma de cubo, que foi decomposto em n^3 pedaços iguais.

a) Quantos pedaços têm cobertura em 3 faces? 4

b) Quantos pedaços têm cobertura em 2 faces? $4(n - 2) + 4(n - 2) + 4$

c) Quantos pedaços têm cobertura em apenas uma face? $5(n - 2)^2 + 4(n - 2)$

d) Quantos pedaços não têm cobertura em face alguma? $(n - 2)^3 + (n - 2)^2$

Verifique que:

$(n - 2)^3 + (n - 2)^2 + 5(n - 2)^2 + 4(n - 2) + 4(n - 2) + 4(n - 2) + 4 + 4 = n^3$

CAPÍTULO 5

CÁLCULO ALGÉBRICO

François Viète (1540-1603).

Biblioteca Sainte-Genevieve, Paris, França/Bridgeman Art/Keystone

Nos capítulos anteriores, você já teve contato com o uso de letras na linguagem matemática. Elas foram usadas na resolução de problemas e equações, para representar grandezas como a quantidade de objetos relacionadas a preços, e as medidas dos lados de um polígono relacionadas ao seu perímetro e a sua área.

Daqui em diante usaremos as letras em cálculos sem nos preocupar com o que elas estão representando. O cálculo com letras também é chamado de **cálculo literal** ou **cálculo algébrico**.

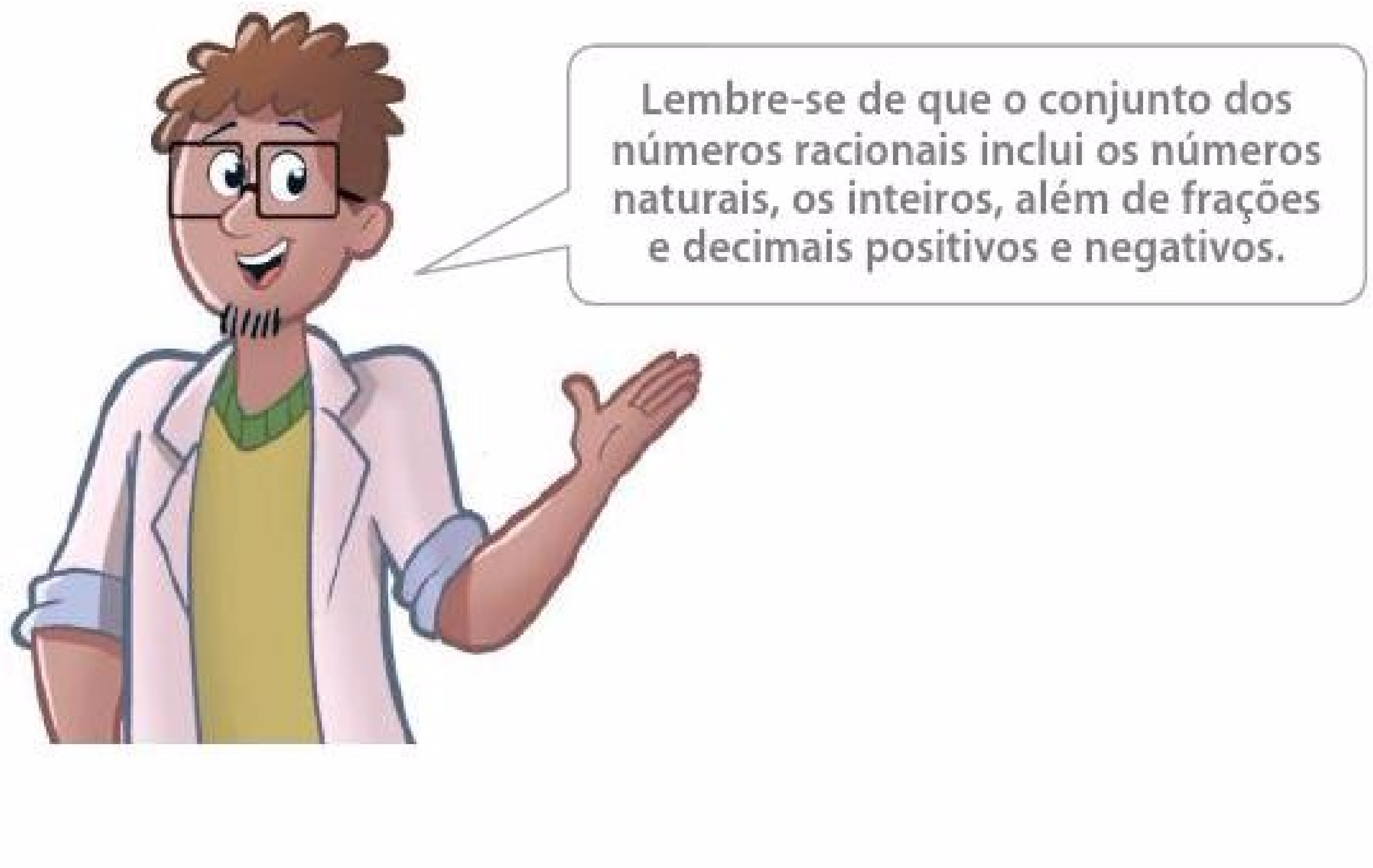
Esse tipo de cálculo foi desenvolvido pelos árabes há cerca de 1 000 anos, mas o cálculo algébrico e os métodos para resolver equações usando letras só se propagaram na Europa a partir do século XVII, com os trabalhos do matemático francês François Viète.

P O cálculo algébrico, objetivo deste capítulo, deve ser entendido como um exercício de manipulação de símbolos.

Cálculo algébrico com números racionais

O cálculo algébrico é feito de acordo com uma série de regras e propriedades, válidas para elementos de conjuntos numéricos.

Neste capítulo, as letras que formam uma expressão algébrica ou expressam quantidades e grandezas representam números racionais.



EstudioMil/Arquivo da editora

P O tratamento dado aos números neste início de capítulo não constitui uma visão conjuntista da Matemática. Recomendamos que seja feita uma discussão equilibrada das propriedades aritméticas dos conjuntos numéricos, sem exageros formais, somente para que seja possível justificar as passagens do cálculo algébrico, quando isso for necessário.

Propriedades operatórias nos racionais

Para melhor entender as regras do cálculo algébrico é preciso aprofundar o estudo de propriedades aritméticas válidas no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Muitas dessas propriedades são bem conhecidas, pois as utilizamos no cálculo com números naturais, inteiros e racionais (na forma fracionária ou decimal).

É importante revisar algumas dessas propriedades utilizando a linguagem algébrica.

Sejam a, b e c números racionais quaisquer, os números obtidos das operações $a + b$, $a - b$ e $a \cdot b$ também são números racionais.

P Dizemos que o conjunto dos números racionais é fechado em relação às operações aqui indicadas, porém uma discussão mais formal sobre a propriedade do fechamento será feita no livro do 9º ano.

Isso quer dizer que a soma, a diferença e o produto de dois números racionais quaisquer também são números racionais.

- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$

EstudioMil/Arquivo da editora

Você já deve ter usado essas propriedades nas séries iniciais, quando aceitou que $3 + 5 = 5 + 3$. Esse fato simples e intuitivo também é útil na resolução de determinados cálculos como $53 + 35 + 47$, pois a expressão pode ser reescrita como $53 + 47 + 35 = 100 + 35 = 135$.

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

EstudioMil/Arquivo da editora

As igualdades acima indicam que a multiplicação também é comutativa e associativa.

Há outras propriedades aritméticas que valem para quaisquer números inteiros e racionais, que são expressas pelas igualdades:

- $a + 0 = a \longrightarrow$ 0 é o elemento neutro da adição.
- $1 \cdot a = a \longrightarrow$ 1 é o elemento neutro da multiplicação.
- $a + (-a) = 0 \longrightarrow$ todo número racional tem um oposto e a soma de um número com seu oposto é sempre zero, o elemento neutro da adição.
- $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 \longrightarrow$ todo número racional diferente de zero tem um elemento inverso.

P Discuta com os alunos que essa propriedade não é válida para o conjunto dos números naturais ou inteiros, pois no conjunto dos números inteiros somente o número 1 tem inverso.

Todas as propriedades aqui listadas são válidas para o conjunto dos números inteiros, exceto a última, que é válida para quaisquer números racionais, mas não para todos os números inteiros.

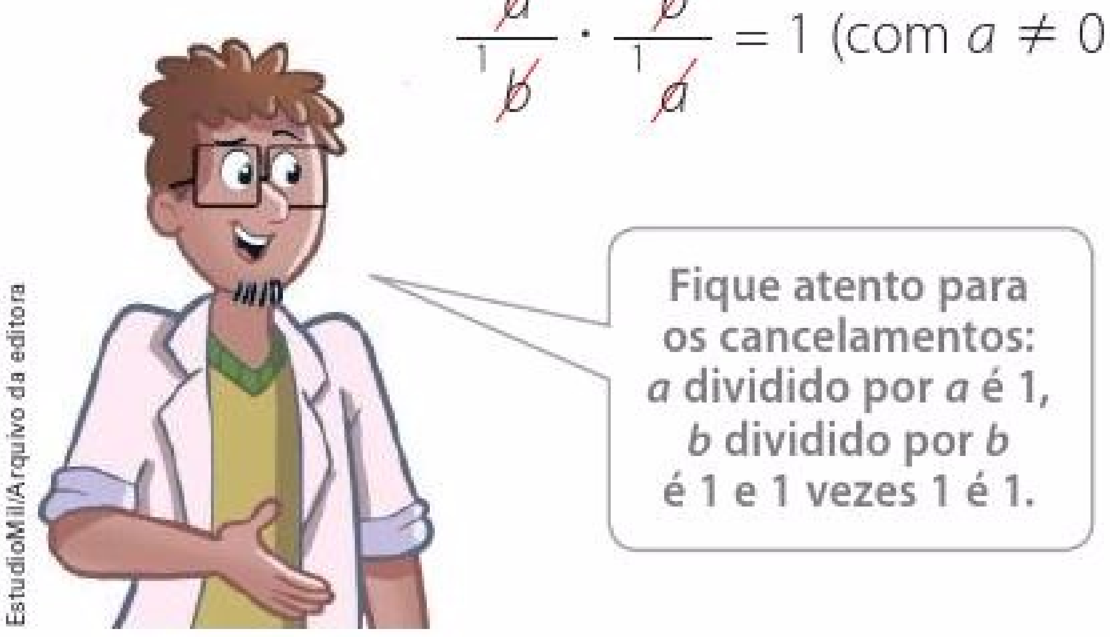
O inverso do número racional 3 é $\dfrac{1}{3}$, que é racional, mas não é inteiro, do mesmo modo que o inverso de $\dfrac{1}{5}$ é o 5 e o inverso de $\dfrac{3}{4}$ é $\dfrac{4}{3}$.

Com exceção do 1 e do -1, o inverso de qualquer número inteiro não é inteiro.

Além disso, o zero é o único número racional que não tem inverso.

- O inverso do racional $\dfrac{a}{b}$ é o racional $\dfrac{b}{a}$ (com $a \neq 0$ e $b \neq 0$).
- O produto dos inversos é sempre 1, o elemento neutro da multiplicação.

$$\frac{{}^{1}\cancel{a}}{{}_{1}\cancel{b}} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{b}}{{}_{1}\cancel{a}} = 1 \text{ (com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0\text{)}$$



EstudioMil/Arquivo da editora

Por fim, mais uma propriedade importante dos números racionais e muito útil para fazer cálculos.

- $a(b + c) = ab + ac \longrightarrow$ Vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Atenção: A subtração não é comutativa nem associativa e a divisão também não é comutativa nem associativa.

Exemplos:

- $\dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{4}{7} + 5\right) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{4} \cdot 5$
- $0{,}5 \cdot (1{,}41 - 3{,}14) = 0{,}5 \cdot 1{,}41 - 0{,}5 \cdot 3{,}14$
- $\dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{9}{4} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2}$

Operações

A linguagem algébrica permite generalizar os algoritmos das operações com números racionais na forma fracionária. Acompanhe.

Sejam a, b, c e d números inteiros e diferentes de zero. Então, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são números racionais.

- Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$

- Subtração: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$

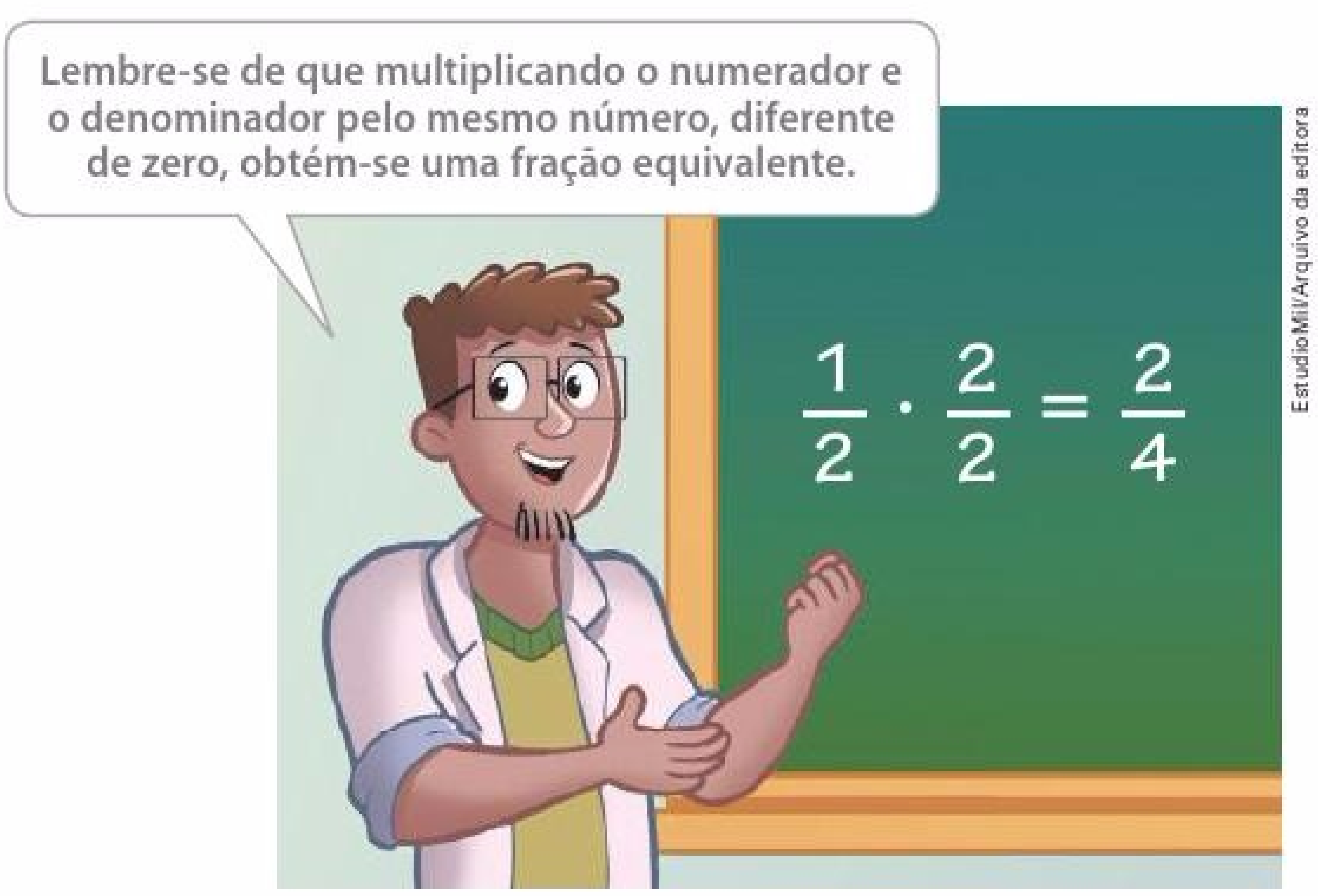
- Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

- Divisão: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{\frac{a}{b} \cdot \boxed{\frac{d}{c}}}{\frac{c}{d} \cdot \boxed{\frac{d}{c}}} = \dfrac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{ad}{bc}$

O numerador e o denominador foram multiplicados pelo inverso do denominador: $\frac{d}{c}$.

O produto dos inversos é 1.

Qualquer número dividido por 1 resulta nele mesmo.



EstudioMil/Arquivo da editora

Sejam a e b números racionais. Então:

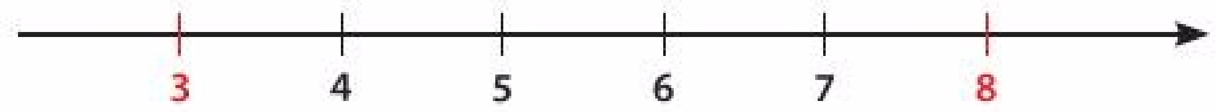
- $a + (-b) = a - b$
- $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = a : b$, sempre que b for diferente de zero.

Além destas propriedades, existe uma característica especial que distingue o conjunto dos números racionais do conjunto dos números inteiros.

Acompanhe a explicação, analisando cada conjunto.

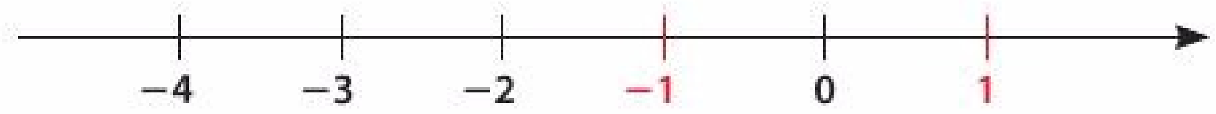
No conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$):

- entre os inteiros 3 e 8, existem apenas quatro números inteiros: 4, 5, 6 e 7;



- entre os inteiros -5 e -2, existem apenas dois números inteiros: -4 e -3;

- entre os inteiros -1 e 1, existe apenas um inteiro, o 0.

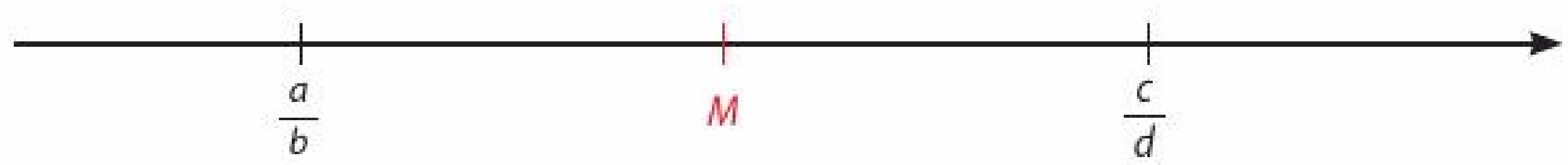


Observe que entre dois inteiros consecutivos não existe nenhum número inteiro e entre dois números inteiros quaisquer não consecutivos há um número finito de números inteiros.

P Dizemos que o conjunto dos números racionais é denso, como o conjunto dos números reais, mas essa nomenclatura não é importante nesta fase do Ensino Fundamental.

Porém, no conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$), entre dois números racionais quaisquer há infinitos números racionais. Acompanhe.

Considere dois números racionais quaisquer: $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sendo $b \neq 0$ e $d \neq 0$.



A média aritmética entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é o ponto M. Vamos investigar se M é um número racional:

$$M = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{\frac{ad + bc}{bd}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$$

Lembre-se de que um número racional é uma razão entre dois números inteiros. Então:

- se a, b, c e d são inteiros, então ad, bc e bd são inteiros;
- $ad + bc$ é uma soma de inteiros, é, portanto, um inteiro;
- se bd é inteiro, $2bd$ também é.

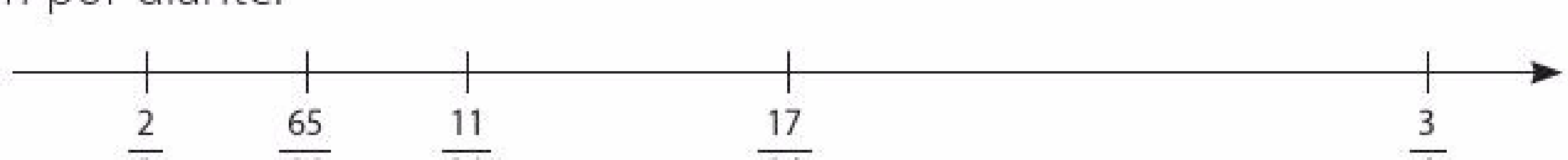
P É possível provar que entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos outro número racional, que é a média aritmética entre eles, mas não o faremos aqui.

Portanto, a média M é uma razão entre números inteiros. Logo, M é um número racional.

Se entre dois números racionais quaisquer é possível encontrar outro número racional, é possível pensar que entre dois números racionais quaisquer existam infinitos números racionais. Veja o raciocínio que leva a essa conclusão por meio de um exemplo.

Considere os racionais $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

- Entre eles, temos o racional $\frac{17}{24}$, que é a média aritmética.
- Entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{17}{24}$ temos a média aritmética $\frac{11}{16}$.
- Entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{11}{16}$ temos a média aritmética $\frac{65}{96}$.
- E assim por diante.



ATIVIDADES

1 Qual é o número que somado a $\frac{3}{4}$ é igual a zero? $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0$ O número procurado é $-\frac{3}{4}$, ou seja, o oposto de $\frac{3}{4}$.

2 Qual é o número que somado a $\frac{4}{5}$ é igual a $\frac{8}{10}$? 0 P Veja resolução no Manual do Professor.

3 Encontre o número que multiplicado por $\frac{3}{5}$ é igual a 1. $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$, o número procurado é $\frac{5}{3}$, que é o inverso de $\frac{3}{5}$.

4 Efetue $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15}\right)$. P Veja resolução no Manual do Professor.

5 Resolva as adições a seguir.

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ $\frac{31}{35}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\frac{13}{12}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{a}{b}$ $\frac{2b + 3a}{3b}$ $(b \neq 0)$

d) $\frac{x}{y} + \frac{3}{4}$ $\frac{4x + 3y}{4y}$ $(y \neq 0)$

6 Calcule os produtos.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$ $\frac{6}{35}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ $\frac{1}{24}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b}$ $\frac{2a}{3b}$ $(b \neq 0)$

d) $\frac{x}{y} \cdot \frac{3}{4}$ $\frac{3x}{4y}$ $(y \neq 0)$

7 Aplique as propriedades válidas para o conjunto dos números racionais e obtenha as expressões resultantes das operações a seguir.

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)$ $\frac{39}{80}$

b) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{4}\right)$ $\frac{12x + 15y}{80}$

c) $\frac{a}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)$ $\frac{13a}{60}$

d) $\frac{a}{3} \cdot \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{4}\right)$ $\frac{4a^2 + 5ab}{60}$

8 Escreva os inversos dos números racionais a seguir.

a) 1994 $\frac{1}{1994}$

b) $\frac{1}{13}$ 13

c) $\frac{2}{7}$ $\frac{7}{2}$

d) $\frac{7}{2}$ $\frac{2}{7}$

e) $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ t

f) $\frac{3}{b}$ $(b \neq 0)$ $\frac{b}{3}$

g) $\frac{a}{10}$ $(a \neq 0)$ $\frac{10}{a}$

h) $\frac{n}{m}$ $(m \neq 0$ e $n \neq 0)$ $\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$

9 Determine o oposto dos números racionais a seguir.

a) $\frac{2}{5}$ $-\frac{2}{5}$

b) $-\frac{3}{7}$ $\frac{3}{7}$

c) $\frac{a}{8}$ $-\frac{a}{8}$

d) $\frac{10}{b}$ $(b \neq 0)$ $-\frac{10}{b}$

10 Qual é o número? Zero é a soma desse número com:

a) $-\frac{3}{5}$ $\frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{7}$ $-\frac{2}{7}$

c) $-\frac{20}{17}$ $\frac{20}{17}$

d) $\frac{a}{b}$ $-\frac{a}{b}$

11 Qual é o número? Um é o produto desse número com:

a) $-\frac{3}{5}$ $-\frac{5}{3}$

b) $\frac{2}{7}$ $\frac{7}{2}$

c) $\frac{a}{5}$ $(a \neq 0)$ $\frac{5}{a}$

d) $\frac{2}{b}$ $(b \neq 0)$ $\frac{b}{2}$

12 Calcule as médias aritméticas entre os números racionais a seguir.

a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ $\frac{19}{24}$

b) 3 e $\frac{10}{3}$ $\frac{19}{6}$

c) x e $\frac{1}{3}$ $\frac{3x + 1}{6}$

d) $\frac{2}{3}$ e $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ $\frac{2b + 3a}{6b}$

13 Qual das propriedades dos números racionais está relacionada à frase: "A ordem dos fatores não altera o produto"? Comutativa

14 ***Desafios olímpicos***

I. Escreva um número racional maior que $\frac{2}{5}$ e menor que $\frac{2}{3}$. P Veja comentário no Manual do Professor.

II. Determine a expressão correspondente à média aritmética dos racionais $\frac{3}{4}$ e $\frac{a}{b}$ $\left(\text{considere que } \frac{3}{4} < \frac{a}{b}, b \neq 0\right)$. $\frac{3b + 4a}{8b}$

PARA PESQUISAR

Pesquise qual é o significado do verbo comutar e em que outros contextos, além do matemático, essa palavra aparece. P O verbo comutar significa trocar. Ele também é muito usado em Física (para indicar a inversão do sentido de uma corrente elétrica), e também é um termo jurídico (que significa substituir uma pena por outra menos severa).

Potenciação

Partindo do que já foi estudado sobre potências, envolvendo apenas números naturais, vamos continuar com o estudo da potenciação, agora com números inteiros e racionais, tanto para a base como para o expoente.

Vamos analisar quatro casos.

1º caso: A base é um número inteiro e o expoente é um número natural

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n \text{ fatores } a}, \text{ sempre que } n \geqslant 2$$

Produto de potências de mesma base

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{n \text{ fatores } a} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{m \text{ fatores } a}}_{(n+m) \text{ fatores } a} = a^{n+m}$$

Exemplos:

- $3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$
- $(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+5} = (-2)^7$
- $7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+2+3} = 7^7$

Divisão de potências de mesma base

Considerando $n > m$, temos:

$$a^n : a^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}^{n \text{ fatores } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{m \text{ fatores } a}}$$

Lembrando que ao simplificar uma fração em que o numerador e o denominador são iguais, temos: $\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$. Então:

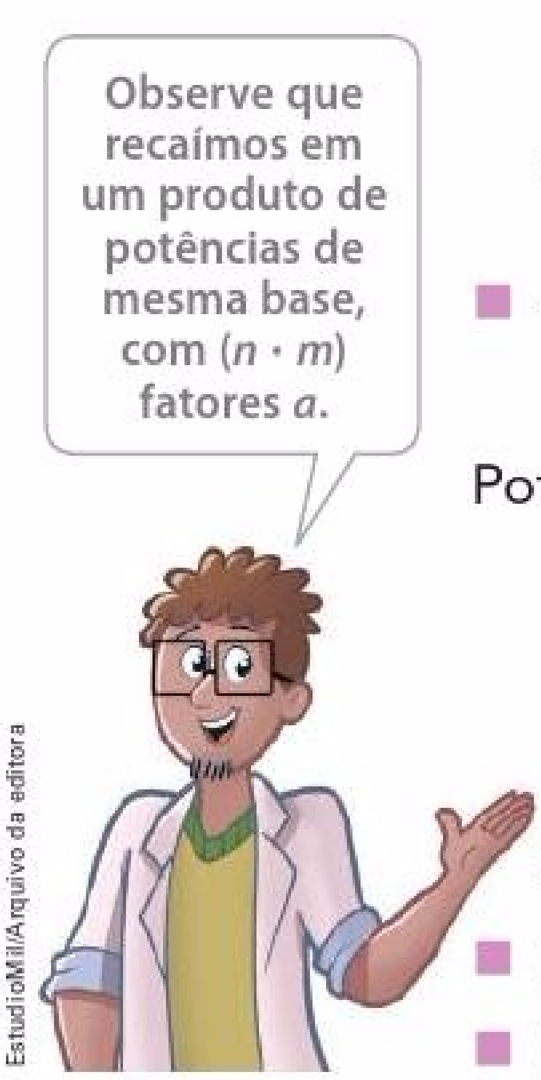
$$a^n : a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{\text{restam } (n-m) \text{ fatores}} = a^{n-m}$$

Exemplos:

- $\frac{(-3)^8}{(-3)^5} = (-3)^{8-5} = (-3)^3$
- $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$

Potência de potência

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot (a^n) \cdot ... \cdot (a^n)}_{m \text{ parcelas } a^n} = a^{\overbrace{n+n+...+n}^{m \text{ fatores } n}} = a^{n \cdot m}$$



EstudioMil/Arquivo da editora

Exemplos:

- $(7^3)^7 = 7^{3 \cdot 7} = 7^{21}$
- $((-10)^2)^2 = (-10)^{2 \cdot 2} = (-10)^4$
- $((2^2)^3)^5 = 2^{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2^{30}$

Produto de potências com mesmo expoente

Sejam a e b números racionais e n um número natural maior ou igual a 2.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n \text{ fatores } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n \text{ fatores } b}$$

Como a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é associativa, é possível rearranjar o produto, combinando cada fator a com os fatores b, que são em igual número.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot a \cdot ... \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot ... \cdot b) = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ fatores } (a \cdot b)} = (a \cdot b)^n$$

Exemplos:

- $3^4 \cdot 5^4 = (3 \cdot 5)^4 = 15^4$
- $(-3)^3 \cdot (+2)^3 = (-3 \cdot 2)^3 = (-6)^3$
- $(-2)^2 \cdot (-2)^2 = ((-2) \cdot (-2))^2 = (4)^2$
- $(-5)^3 \cdot (+4)^3 \cdot (-3)^3 = ((-5) \cdot (+4) \cdot (-3))^3 = (60)^3$

2º caso: A base é um número racional e o expoente é um número natural

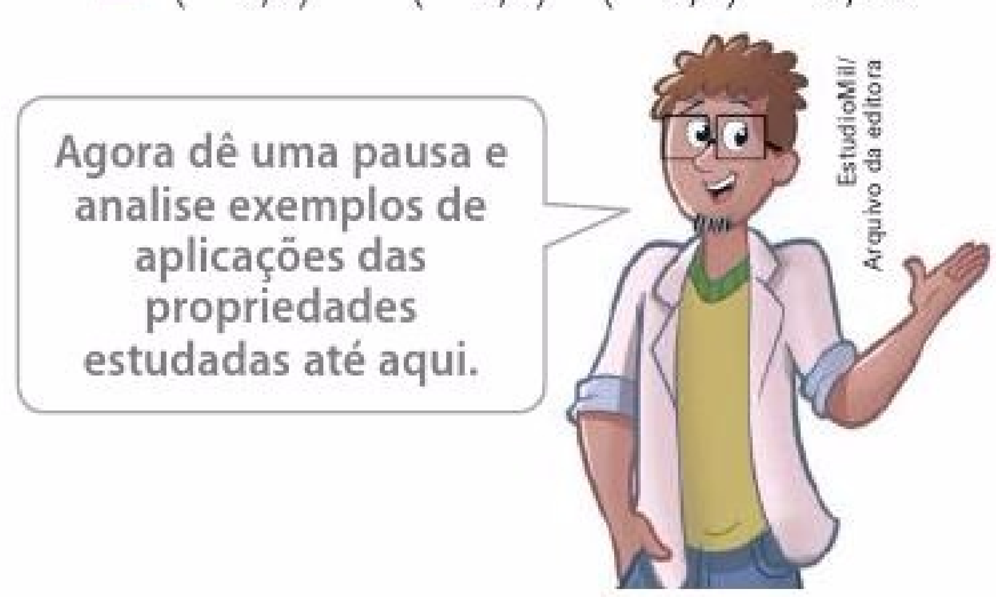
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot ... \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ fatores } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}^{n \text{ fatores } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{n \text{ fatores } b}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Lembre-se: Um número racional é a razão entre números inteiros, então a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

Todas as propriedades descritas para o 1º caso (base de número inteiro e expoente de número natural) continuam valendo.

Exemplos:

- $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$
- $(-0,4)^2 = (-0,4) \cdot (-0,4) = 0,16$



Divisão de potências com mesmo expoente

$$a^n : b^n = \frac{a \cdot a \cdot ... \cdot a}{b \cdot b \cdot ... \cdot b} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot ... \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ fatores } \frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemplos:

- $1^2 : 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$
- $2^3 : 3^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
- $(3 : 4)^4 = 3^4 : 4^4 = \frac{81}{64}$

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{2^5}{5^5}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

c) $\frac{(1,2)^4}{(1,2)^2} (1,2)^{4-2} = (1,2)^2$

d) $\left(\frac{7}{5}\right)^{10} : \left(\frac{7}{5}\right)^7 = \left(\frac{7}{5}\right)^{10-7} = \left(\frac{7}{5}\right)^3$

e) $(3,14159)^3 \cdot (3,14159)^3 = (3,14159)^{3+3} = (3,14159)^6$

f) $(2a^3b^2)^2 = 2^2(a^3)^2(b^2)^2 = 4a^6b^4$

g) $(x^2x^3)^2 = (x^5)^2 = x^{10}$

h) $x^2(x^2 + x^3) = x^2x^2 + x^2x^3 = x^4 + x^5$

i) $(3a^3)(4a^4) = 12a^7$

Expoente 1 e expoente 0

A potenciação foi definida como uma operação a partir da multiplicação, e como qualquer produto envolve dois ou mais fatores, o expoente deve ser maior ou igual a 2.

$$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a, \text{ sempre que } n \geqslant 2$$

Dessa forma, potências com expoente 0 ou 1 não têm significado.

Claro! Não dá para imaginar uma multiplicação com apenas um ou nenhum fator.

EstudioMil/Arquivo da editora

Os matemáticos sabiam disso, porém, quando precisaram organizar os conjuntos numéricos e suas propriedades, procuraram fazer com que as propriedades funcionassem para todos os elementos do conjunto.

Não ficava muito bem que certas propriedades funcionassem para todos os números naturais, exceto para o 0 e o 1. Então, decidiram definir valores para a^1 e a^0 que permitissem a permanência das propriedades já definidas.

Coloque-se no lugar de um matemático que precisa escolher um valor para as potências 2^1 e 2^0 e quer que a propriedade do quociente de potências de mesma base continue funcionando.

Acompanhe os cálculos a seguir com especial atenção às regularidades na variação dos expoentes dos denominadores e do resultado da potência.

$$\left(\frac{2^5}{2^2}\right)\ 2^{5-2} = 2^3 = 8$$

$: 2$

$$\left(\frac{2^5}{2^3}\right)\ 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$: 2$

$$\left(\frac{2^5}{2^4}\right)\ 2^{5-4} = 2^1 = 2$$

$: 2$

$$\left(\frac{2^5}{2^5}\right)\ 2^{5-5} = 2^0 = ?$$

Observe que os expoentes das potências dos denominadores crescem, enquanto os resultados decrescem.

EstudioMil/Arquivo da editora

Sabemos que um número dividido por ele mesmo é igual a 1. Assim:

$$\frac{2^5}{2^5} = 1$$

Então, baseados nesse fato, os matemáticos escolheram um valor adequado para 2^0, para manter a regularidade.

$$2^0 = 1$$

Pode-se chegar a este mesmo valor usando a propriedade do produto de potências de mesma base. Veja:

0 é o elemento neutro da adição

$$\underbrace{2^3 \cdot 2^0}_{\text{produto de potências de mesma base}} = 2^{3+0} = 2^3$$

Assumindo que $2^0 = 1$, vamos escolher um valor conveniente para 2^1.

Vamos analisar alguns casos. Confira, fazendo a verificação direta e comparando.

$$\underbrace{\frac{2^5}{2^4} = \frac{32}{16}}_{\text{cálculo da potência e da divisão } 32 : 16} = 2 \qquad \underbrace{\frac{2^5}{2^4} = 2^{5-4}}_{\text{aplicação da propriedade da divisão de potências de mesma base}} = 2^1$$

Assim, é conveniente que 2^1 seja igual a 2.

Faça na calculadora: 1 024 : 2 = = = = ...
Analise o que vai aparecendo no visor.

P Na maiora das calculadoras a tecla = acionada em sequência reproduz a última operação. Assim, ao teclar = = ... = a calculadora vai dividir por 2 os números que forem aparecendo no visor. A sequência proposta vai gerar no visor a sequência: 1 024, 512, 256, 128, 64, 32, e assim por diante.

Podemos generalizar afirmando que para qualquer número racional $\boldsymbol{a}$: $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

Não importa se a base é muito grande como $123\,456\,789^0 = 1$ ou muito pequena como $(0{,}001)^1 = 0{,}001$.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

15 Revise os cálculos usando as propriedades de potenciação.

a) $2^2 \cdot 2^6$ 2^8

b) $11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3$ 11^9

c) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$ 5^{10}

d) $5^9 : 5^8$ 5

e) $2000^{2000} : 2000^{1999}$ $2\,000$

f) $(3^4 \cdot 3^5) : 3^6$ 3^3

g) $(2^4)^2$ 2^8

h) $(2^2)^4$ 2^8

i) $\dfrac{10^5 \cdot 10^4}{(10^5)^2}$ 1

16 Simplifique as expressões aplicando as propriedades de potenciação estudadas.

a) $(ab)^3 \cdot (ab)^3$ a^6b^6

b) $2x^3 \cdot x^4$ $2x^7$

c) $((x^2)^2)^2$ x^8

d) $(3ab)^2$ $9a^2b^2$

e) $(2xy^2)^2$ $4x^2y^4$

f) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$ $\dfrac{27}{125}$

g) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^5$ $\dfrac{a^5}{b^5}$

h) $\dfrac{(3ax^2)^3(3ax^3)^2}{(3ax^2)^4}$ $3ax^4$

17 ***Calculadora***

Dê o valor das potências a seguir.

a) 1^7 1

b) 1^{100} 1

c) 1^n 1

d) 0^4 0

e) 0^{123} 0

f) 0^n (com $n \neq 0$) 0

O que você concluiu?
Resposta pessoal.

P Os alunos devem descobrir que $1^n = 1$ e $0^n = 0$, qualquer que seja o valor de n, natural não nulo.

3º caso: A base é um número racional e o expoente é um número inteiro

O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é formado por números positivos, negativos e pelo zero.

Já estudamos as potências com expoente natural e com o expoente zero. Agora vamos discutir o significado de uma potência com expoente negativo.

Acompanhe a exploração do cálculo de $2^2 : 2^3$, aplicando a propriedade de quociente de potências de mesma base:

$$\frac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1}$$

Mas:

$$\frac{2^2}{2^3} = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1} \cdot \cancel{2}_{1} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Assim, simplificando $\frac{2^2}{2^3}$, obtemos $\frac{1}{2}$.

Portanto, podemos assumir que $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

> **Lembrete**: Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si, em linguagem matemática, se $a = c$ e $b = c$ então $a = b$.

Generalizando essa ideia, temos:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ em que } a \neq 0.$$

Considere um número racional $a \neq 0$ e um número natural n. Aplicando a propriedade de potência de potência, temos:

$$(a^{-1})^n = a^{-1 \cdot n} = a^{-n} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Lembre-se de que $1^n = 1$, qualquer que seja n. Logo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Você pode "perceber" essa propriedade usando uma calculadora. Acione a seguinte sequência de teclas:

Teclas	1 000	:	10	=	=	=	=	=
				↘	↘	↘	↘	↘
Visor	1 000	1 000	10	100	10	0,1	0,01	0,001

Na maioria das calculadoras, a tecla $\boxed{=}$, quando acionada seguidamente, repete a última operação, que no caso é a divisão por 10.

Assim, quando o primeiro $\boxed{=}$ for apertado, o visor vai exibir 100, que é o resultado de 1 000 : 10. Quando for acionado o segundo $\boxed{=}$, o visor vai exibir o número 10, que é o resultado de 100 : 10. Após ser acionado o terceiro $\boxed{=}$, o visor vai exibir o 1. No quarto $\boxed{=}$, vai exibir 0,1 e assim por diante.

Lembre-se que $1\,000 = 10^3$. Então:

$$((((1\,000 : 10) : 10) : 10) : 10) = 1\,000 : (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)$$

Assim, o que se obtém acionando essa sequência de teclas é o resultado de $10^3 : 10^4$.

$$10^3 : 10^4 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Teclas	Visor
10 : 10 =	1
10 : 10 = =	0,1
10 : 10 = = =	0,01
10 : 10 = = = =	0,001

EstudioMil/Arquivo da editora

4º caso: A base é um número racional e o expoente é um número racional

Até aqui, atribuímos significado para potências com expoente inteiro (positivo, negativo ou nulo). O que pode significar uma potência com expoente racional?

Para responder a essa questão, vamos estudar um caso particular conveniente: $9^{\frac{1}{2}}$.

Como não sabemos o valor de $9^{\frac{1}{2}}$ vamos fazer: $9^{\frac{1}{2}} = x$.

Ainda de forma conveniente, vamos tentar obter o resultado $9^{\frac{1}{2}}$ fazendo valer a propriedade do produto de potências de mesma base:

$$x^2 = x \cdot x = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$$

Se $x^2 = 9$, então $x = \sqrt{9}$

Como fizemos $x = 9^{\frac{1}{2}}$, então podemos assumir que: $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Generalizando, temos:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

P A potenciação tem duas operações inversas, a radiciação e a logaritmação, mas esta última só é estudada no Ensino Médio.

Lembre-se:
A radiciação é a operação inversa da potenciação.

ATIVIDADES — faça no seu caderno

Para as atividades 18, 19 e 20, vamos considerar que todos os denominadores são diferentes de zero.

18 Calcule:

a) $(5ax)^0$ 1 b) $(13a^2b^3)^1$ $13a^2b^3$ c) $(2014xy)^0$ 1

19 Calcule:

a) 3^{-1} $\frac{1}{3}$

b) 5^{-2} $\frac{1}{25}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ 2

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\frac{3}{2}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ $\frac{25}{4}$

f) x^{-1} $\frac{1}{x}$

g) $\left(\frac{2}{a}\right)^{-2}$ $\frac{a^2}{4}$

h) $\left(\frac{t}{3}\right)^{-3}$ $\frac{27}{t^3}$

i) $\left(\frac{2a}{b}\right)^{-2}$ $\frac{b^2}{4a^2}$

20 Calcule:

a) $(x^{-1})^{-1}$ x b) $(2^{-2})^{-1}$ 4 c) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^2$ 9

21 Determine o valor numérico de:

a) $16^{\frac{1}{2}}$ 4

b) $25^{\frac{1}{2}}$ 5

c) $\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{6}{7}$

d) $\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 2

22 Calcule:

a) $(7^2)^{\frac{1}{2}}$ 7

b) $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^2$ 64

c) $(a^4)^{\frac{1}{2}}$ a^2

d) $\left(\left((256)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

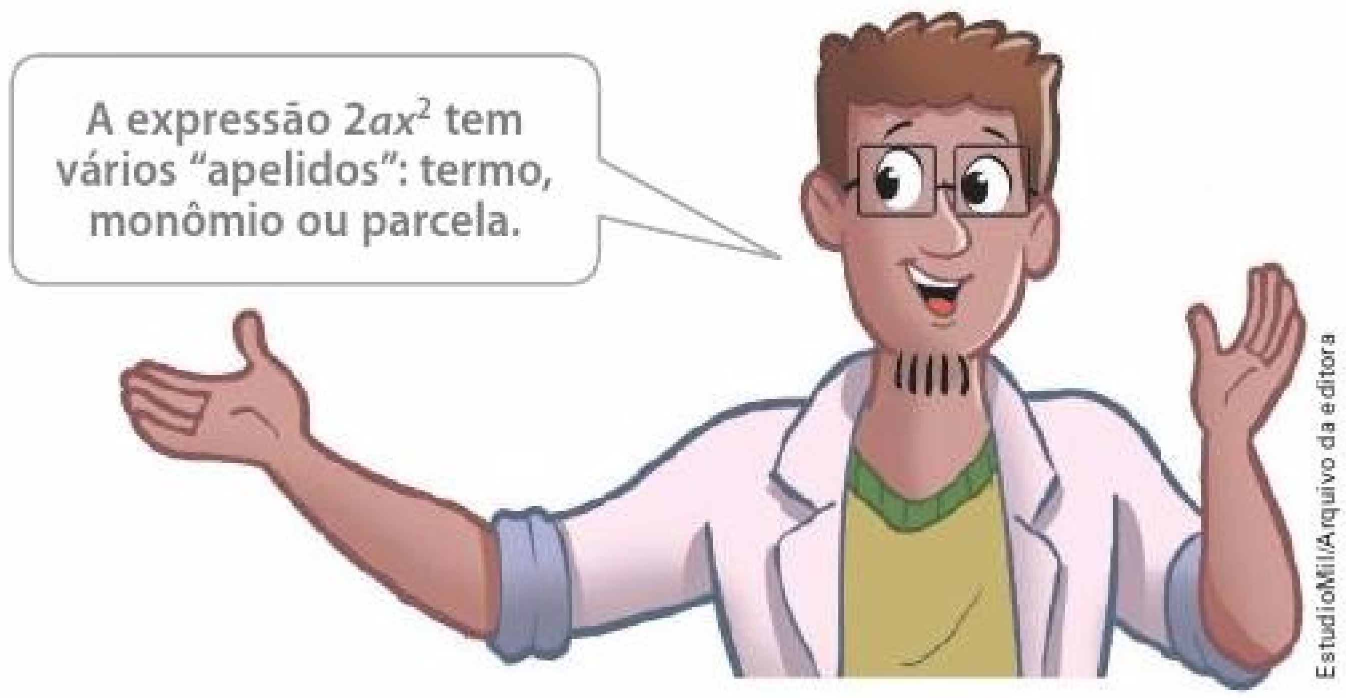
d) Este cálculo equivale a calcular a raiz quadrada da raiz quadrada da raiz quadrada de 256: $\sqrt{256} = 16$; $\sqrt{16} = 4$ e $\sqrt{4} = 2$.

Polinômios

É usual atribuirmos nomes diferentes para as partes que compõem uma expressão algébrica, em que as letras aparecem multiplicando ou elevadas a um expoente natural.

Por exemplo, na expressão $2ax^2$, temos:

- coeficiente numérico $\longrightarrow$ 2;
- parte literal $\longrightarrow$ ax^2.



É comum atribuir nomes diferentes às expressões algébricas, de acordo com a quantidade de parcelas com partes literais diferentes que compõem essas expressões. Acompanhe:

Número de parcelas	Nome	Exemplo
1	monômio	$3ax^2$
2	binômio	$2by - 3ax^2$
3	trinômio	$4x + by - 3ax^2$
4 ou mais	polinômio	$x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$

Procure no dicionário o significado do prefixo *poli*.

P Prefixo grego relacionado a multiplicidade, pluralidade.

Apesar dos nomes específicos, os matemáticos consideram os monômios, binômios e trinômios como casos particulares de **polinômios**.

Redução de termos semelhantes

Dois ou mais monômios com a mesma parte literal podem ser simplificados pela redução de termos semelhantes. Veja:

- $3a + 4a = 7a$
- $2a - b + 5b = 2a + 4b$
- $ax^2 + 3ax^2 = 4ax^2$
- $3x^2y - x^2y + 4x^2y = 6x^2y$
- $2x + 3y + 3x - 5y = 5x - 2y$

Observe que a expressão $2a^2b + 3x^3y$, por exemplo, não pode ser reduzida, pois os monômios não têm a mesma parte literal.

A redução dos termos semelhantes transforma uma expressão algébrica em uma expressão equivalente mais simples, também chamada de **forma reduzida**.

Veja estes outros exemplos:

- $ax^3 + (-ax^3) = 0$
- $-3a^2b^3 + 3a^2b^3 = 0$

Quando temos duas parcelas com a mesma parte literal cujas partes numéricas são números opostos, como nos casos acima, elas se anulam.

Agora, observe esta expressão: $ax^2 + a^2x$. Ela pode ser reduzida? As parcelas da expressão têm a mesma parte literal? A resposta para as duas perguntas é **não**.

EstudioMil/Arquivo da editora

O expoente de a é 1 na primeira expressão e 2 na segunda. E o expoente de x é 2 na primeira expressão e 1 na segunda. Logo, as duas parcelas não têm a mesma parte literal.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

23 Escreva monômios semelhantes aos monômios a seguir. Há várias respostas possíveis; exemplos:

a) ax $-3ax, 2ax, \frac{ax}{2}, \ldots$ b) $2a^2x$ $a^2x, \frac{5a^2x}{3}, \ldots$ c) $3ax^2$ $-100ax^2, -ax^2, \ldots$ d) $-5a^2x^2$ $4a^2x^2, a^2x^2$

24 Determine a forma reduzida de cada polinômio.

a) $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2$ $2x^2 + 2y^2$ b) $x^2 + 2xy - 2xy - y^2$ $x^2 - y^2$

25 Reduza os termos semelhantes de cada polinômio.

a) $3x^3 - 5x^2 - 5 + 2x^3 + 5 + 3x^2$ $5x^3 - 2x^2$ b) $5x^3 + 3x^2 + x - 2 - 5x^3 - 2x^2 - 3x + 5$ $x^2 - 2x + 3$

26 Simplifique a soma algébrica:

$2a^2bx - 3ab^2x + 4a^2bx + 2abx^2 - ab^2x + 3abx^2 + 2a^2b^2x + 4a^2b^2x - a^2b^2x$ $6a^2bx - 4ab^2x + 5abx^2 + 5a^2b^2x$

27 Efetue as somas algébricas, sabendo que $A = 2x^3 + 2x^2$; $B = x^3 + 2x$ e $C = 3x^2 - 5$. P Veja comentário no Manual do Professor.

a) $A + B$ $3x^3 + 2x^2 + 2x$ d) $A + B + C$ $3x^3 + 5x^2 + 2x - 5$ g) $B + A$ $3x^3 + 2x^2 + 2x$

b) $A + C$ $2x^3 + 5x^2 - 5$ e) $A - B$ $x^3 + 2x^2 - 2x$ h) $C - B$ $-x^3 + 3x^2 - 2x - 5$

c) $B + C$ $x^3 + 3x^2 + 2x - 5$ f) $B - A$ $-x^3 - 2x^2 + 2x$ i) $A - B + C$ $x^3 + 5x^2 - 2x - 5$

28 Escreva quais são os polinômios que não podem ser reduzidos. P Veja comentário no Manual do Professor.

a) $13xyz + 7abc$ Não pode, pois a parte literal é diferente.

b) $6xyz + 5xzy + 4yxz + 3yzx + 2zxy + zyx$ Pode.

29 Elimine os parênteses e reduza os termos semelhantes.

a) $(2x^3 + 3x^2 + x - 2) + (5x^3 - 2x^2 + 4x + 5)$ $7x^3 + x^2 + 5x + 3$

b) $(2x^2y + 3x^2y^2) + (4xy^2 - x^2y) - (x^2y + 3xy^2) + (x^2y^2 - 5xy^2)$ $4x^2y^2 - 4xy^2$

c) $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$ $2x^2 + 2y^2$

d) $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$ 0

e) $(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$ $-4xy$

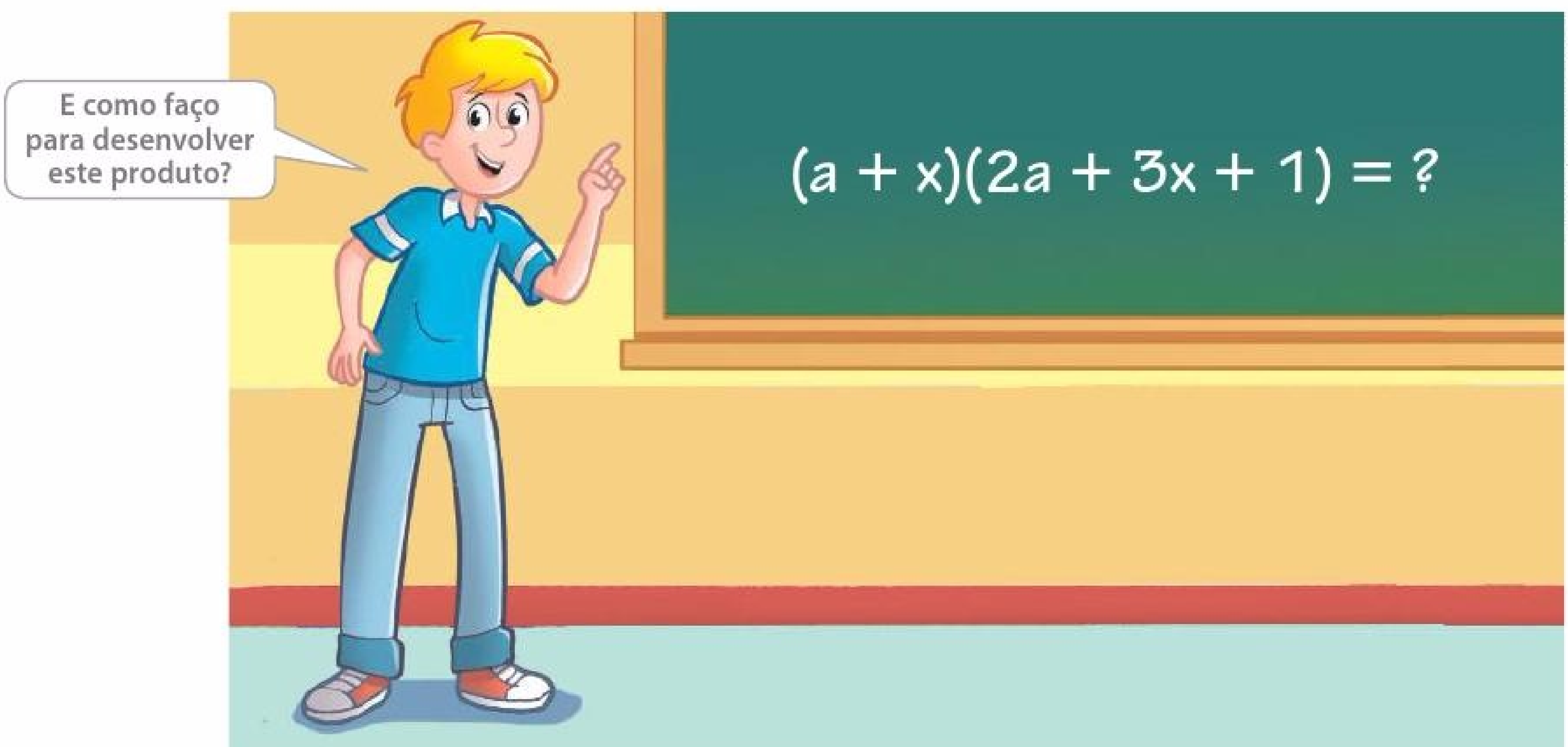
Multiplicação de polinômios

Para multiplicar dois polinômios quaisquer, basta aplicar as seguintes propriedades e regras:

- a propriedade distributiva;
- as regras de potenciação;
- a redução de termos semelhantes.

Acompanhe os exemplos:

- $ax(a^2x + 2) = ax \cdot a^2x + ax \cdot 2 = a^3x^2 + 2ax$
- $3a^2x(ax - a^2x + 2ax^2) = 3a^2x \cdot ax + 3a^2x(-a^2x) + 3a^2x \cdot 2ax^2 = 3a^3x^2 - 3a^4x^2 + 6a^3x^3$
- $x^2(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2$
- $5a(2ax + 3a^2b - a + 1) = 10a^2x + 15a^3b - 5a^2 + 5a$



Estudio Mil/Arquivo da editora

Nesse caso, temos um binômio multiplicado por um trinômio. O procedimento é o mesmo adotado até aqui, só que teremos mais passagens. Veja:

$$(a + x)(2a + 3x + 1) = (a + x) \cdot 2a + (a + x) \cdot 3x + (a + x) \cdot 1$$

Reorganizando o segundo membro e aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$(a + x) \cdot 2a + (a + x) \cdot 3x + (a + x) \cdot 1 = 2a^2 + 2ax + 3ax + 3x^2 + a + x$$

Reduzindo os termos semelhantes:

$$2a^2 + \boxed{2ax + 3ax} + 3x^2 + a + x = 2a^2 + \boxed{5ax} + 3x^2 + a + x$$

Então:

$$(a + x)(2a + 3x + 1) = 2a^2 + 5ax + 3x^2 + a + x$$

Divisão e simplificação de polinômios

Neste livro, vamos analisar apenas os casos mais simples de divisão de um polinômio, nos quais o denominador é um monômio.

Podemos dizer que simplificamos uma expressão algébrica quando conseguimos representá-la por outra equivalente, porém mais simples, com menos parcelas, por exemplo. Neste sentido a redução dos termos semelhantes é um modo de simplificar uma expressão. Porém, alguns matemáticos têm reservado o termo simplificação para se referir a casos de divisão de polinômios, que veremos a seguir.

Em uma divisão de monômios pode ocorrer que a mesma letra apareça no numerador e no denominador. Quando isso ocorre, a **fração algébrica** que resulta dessa divisão pode ser simplificada.

Acompanhe o exemplo: $6a^3x^2 : 9a^2x$ ou $\dfrac{6a^3x^2}{9a^2x}$.

Para simplificar esta fração algébrica, aplicamos as regras de divisão de frações e de divisão de potências de mesma base. Veja:

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a \qquad \frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x^1 = x$$

Assim, $\dfrac{6a^3x^2}{9a^2x} = \dfrac{2}{3}ax$.

EstudioMil/Arquivo da editora

Outros exemplos:

- $\dfrac{12a^3b^2x^4}{8a^3bx^2}$

  $\dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{a^3}{a^4} = a^{3-4} = \dfrac{1}{a}$; $\dfrac{b^2}{b} = b^{2-1} = b$; $\dfrac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

  Então:

  $\dfrac{12a^3b^2x^4}{8a^4bx^2} = \dfrac{3bx^2}{2a}$

- $\dfrac{30a^2b^3t^5x}{10ab^3t^3x^2}$

  $\dfrac{30}{10} = 3$; $\dfrac{a^2}{a} = a^{2-1} = a$; $\dfrac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^0 = 1$; $\dfrac{t^5}{t^3} = t^{5-3} = t^2$;

  $\dfrac{x}{x^2} = x^{1-2} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

  Então:

  $\dfrac{30a^2b^3t^5x}{10ab^3t^3x^2} = \dfrac{3at^2}{x}$

- $\dfrac{x^3y^4 + x^3y^3 + x^2y^3}{x^2y^3} = \dfrac{x^3y^4}{x^2y^3} + \dfrac{x^3y^3}{x^2y^3} + \dfrac{x^2y^3}{x^2y^3} = xy + x + 1$

- $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x} = x^3 + x^2 + x + 1$

30 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{6x^2y^2 + 4xy^2}{2xy^2}$ $3x + 2$

b) $\dfrac{8x^3y^3 + 4xy^2}{4xy^2}$ $2x^2y + 1$

c) $\dfrac{2x^3 + 4x^4 + 6x^5}{2x^2}$ $x + 2x^2 + 3x^3$

d) $\dfrac{2x^3 + 4x^4 + 6x^5}{2x^3}$ $1 + 2x + 3x^2$

31 Efetue as divisões:

a) $(a^4x^3 + a^3x^4 + a^2x^5) : a^2x^3$ $a^2 + ax + x^2$

b) $(-6b^4y^3 + 10b^4y^4 + 4b^3y^4) : (-2b^2y^2)$ $3b^2y - 5b^2y^2 - 2by^2$

c) $(-70x^5 + 7x^4 - 14x^3 + 49x^2) : 7$ $-10x^5 + x^4 - 2x^3 + 7x^2$

d) $(-70x^5 + 7x^4 - 14x^3 + 49x^2) : x^2$ $-70x^3 + 7x^2 - 14x + 49$

Não escreva no livro.

32 Qual é o polimônio que dividido por ax^2 resulta no polimônio $x^2 - a^2 + abx + a$? $ax^4 - a^3x^2 + a^2bx^3 + a^2x^2$

33 Desenvolva as multiplicações:

a) $2x(x + 2)$ $(2x \cdot x) + (2x \cdot 2) = 2x^2 + 4x$

b) $3y(2y - 5)$ $(3y \cdot 2y) - (3y \cdot 5) = 6y^2 - 15y$

c) $2a(3a + b)$ $(2a \cdot 3a) + (2a \cdot b) = 6a^2 + 2ab$

d) $5b(a - 2b)$ $(5b \cdot a) - (5b \cdot 2b) = 5ab - 10b^2$

e) $2x(3y + 7)$ $(2x \cdot 3y) + (2x \cdot 7) = 6xy + 14x$

f) $3y(2x + 7)$ $(3y \cdot 2x) + (3y \cdot 7) = 6xy + 21y$

34 Multiplique as expressões:

a) $(2x + 1)(2a + 3)$
$(2x \cdot 2a) + (2x \cdot 3) + (1 \cdot 2a) + (1 \cdot 3) = 4ax + 6x + 2a + 3$

b) $(3y - 2)(a + 5)$
$(3y \cdot a) + (3y \cdot 5) + ((-2) \cdot a) + ((-2) \cdot 5) = 3ay + 15y - 2a - 10$

c) $(2x + 1)(3y + 1)$
$(2x \cdot 3y) + (2x \cdot 1) + (1 \cdot 3y) + (1 \cdot 1) = 6xy + 2x + 3y + 1$

d) $(2x - 3)(2y + 3)$
$(2x \cdot 2y) + (2x \cdot 3) + ((-3) \cdot 2y) + ((-3) \cdot 3) = 4xy + 6x - 6y - 9$

e) $(3a + 5)(2x - 1)$
$(3a \cdot 2x) - (3a \cdot 1) + (5 \cdot 2x) - (5 \cdot 1) = 6ax - 3a + 10x - 5$

f) $(x + 1)(x + 1)$
$(x \cdot x) + (x \cdot 1) + (1 \cdot x) + (1 \cdot 1) = x^2 + 2x + 1$

35 Efetue as multiplicações em seu caderno:

a) $x\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ $(x \cdot x) + \left(x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + 1$

b) $x^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ $(x^2 \cdot x) + \left(x^2 \cdot \dfrac{1}{x}\right) = x^3 + x$

36 Desenvolva os produtos em seu caderno:

a) $(a + b)(a + b)$
$(a \cdot a) + (a \cdot b) + (b \cdot a) + (b \cdot b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(2x + 3)(2x + 3)$
$(2x \cdot 2x) + (2x \cdot 3) + (3 \cdot 2x) + (3 \cdot 3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9^2 = 4x^2 + 12x + 9^2$

c) $(x - y)(x - y)$
$(x \cdot x) + (x \cdot (-y)) + ((-y) \cdot x) + ((-y) \cdot (-y)) = x^2 + (-xy) + (-xy) + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

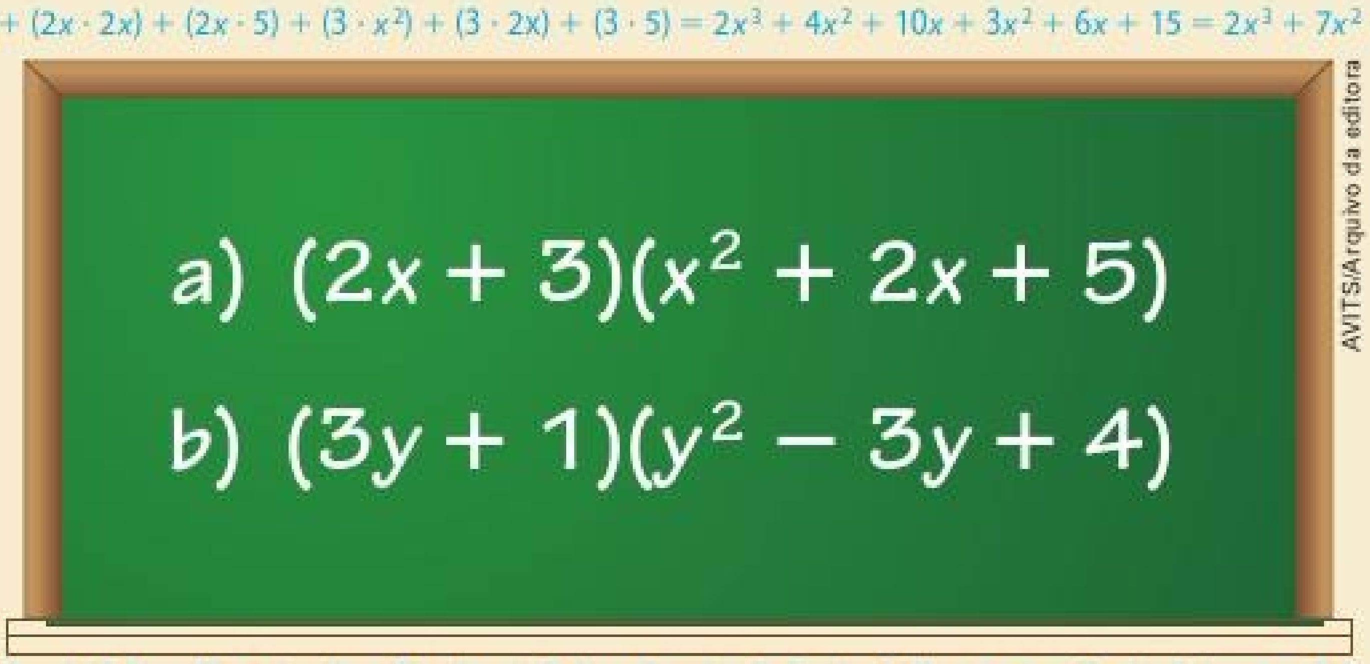
d) $(3x - 2)(3x - 2)$
$(3x \cdot 3x) + (3x \cdot (-2)) + ((-2) \cdot 3x) + ((-2) \cdot (-2)) = 9x^2 + (-6x) + (-6x) + 4 = 9x^2 - 12x + 4$

e) $(x + 1)(x - 1)$
$(x \cdot x) + (x \cdot (-1)) + (1 \cdot x) + (1 \cdot (-1)) = x^2 + (-x) + x - 1 = x^2 - 1$

f) $(2a + 3b)(2a - 3b)$
$(2a \cdot 2a) + (2a \cdot (-3b)) + (3b \cdot 2a) + (3b \cdot (-3b)) = 4a^2 + (-6ab) + 6ab - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

37 Desenvolva os produtos abaixo em seu caderno:

a) $(2x \cdot x^2) + (2x \cdot 2x) + (2x \cdot 5) + (3 \cdot x^2) + (3 \cdot 2x) + (3 \cdot 5) = 2x^3 + 4x^2 + 10x + 3x^2 + 6x + 15 = 2x^3 + 7x^2 + 16x + 15$



AVITS/Arquivo da editora

P Observe que os casos são produtos notáveis, porém os alunos devem resolver utilizando o que sabem sobre multiplicação de polinômios. Se, por acaso, perceberem alguma regularidade, ótimo. No próximo capítulo estudarão produtos notáveis.

b) $(3y \cdot y^2) + (3y \cdot (-3y)) + (3y \cdot 4) + (1 \cdot y^2) + (1 \cdot (-3y)) + (1 \cdot 4) = 3y^3 + (-9y^2) + 12y + y^2 + (-3y) + 4 = 3y^3 - 8y^2 + 9y + 4$

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

1 Efetue as somas algébricas sabendo que $A = 3x^4 - 2x^3$; $B = 2x^4 + 5x^3 - 2x$ e $C = 5x^2 - 3x + 1$.

a) $A + B$ $5x^4 + 3x^3 - 2x$

b) $A - C$ $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

c) $B + C$ $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

d) $A + B + C$ $5x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

e) $A - B - C$ $x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

f) $A + B - C$ $5x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

2 Efetue as multiplicações em seu caderno, sabendo que: $A = 2x + 1$; $B = 3x + 2$; $C = 5x - 3$.

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A \cdot C$

d) $2A + B$

e) $A + 3B$

f) $A \cdot (B + C)$

2. a) $A \cdot B = (2x + 1) \cdot (3x + 2) =$
$= (2x \cdot 3x) + (2x \cdot 2) + (1 \cdot 3x) + (1 \cdot 2) =$
$= 6x^2 + 4x + 3x + 2 = 6x^2 + 7x + 2$

b) $B \cdot A = (3x + 2) \cdot (2x + 1) =$
$= (3x \cdot 2x) + (3x \cdot 1) + (2 \cdot 2x) + (2 \cdot 1) =$
$= 6x^2 + 3x + 4x + 2 = 6x^2 + 7x + 2$

2. c) $A \cdot C = (2x + 1) \cdot (5x - 3) =$
$= (2x \cdot 5x) + (2x \cdot (-3)) + (1 \cdot 5x) + (1 \cdot (-3)) =$
$= 10x^2 + (-6x) + 5x + (-3) = 10x^2 - x - 3$

d) $2A + B = 2(2x + 1) + (3x + 2) = 4x + 2 + 3x + 2 = 7x + 4$

e) $A + 3B = (2x + 1) + 3(3x + 2) = 2x + 1 + 9x + 6 = 11x + 7$

f) $A\,(B + C) = (2x + 1) \cdot [(3x + 2) + (5x - 3)] =$
$= (2x + 1) \cdot (8x - 1) =$
$= (2x \cdot 8x) + (2x \cdot (-1)) + (1 \cdot 8x) + (1 \cdot (-1)) =$
$= 16x^2 + (-2x) + 8x + (-1) = 16x^2 + 6x - 1$

3 Simplifique as expressões a seguir.

a) $\dfrac{10xy^2 + 6x^2y^3}{2xy^2}$ $5 + 3xy$

b) $\dfrac{4x^4 + 2x^3 + 6x^2}{2x^2}$ $2x^2 + x + 3$

4 Efetue as divisões a seguir.

a) $(5x^3y^4 - 3x^4y^3 + 6x^2y^2) : x^2y^2$ $5xy^2 - 3x^2y + 6$

b) $(-80x^5 + 20x^4 - 40x^3 - 60x^2) : 20x$ $-4x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$

c) $(10a^4b^3 - 20a^3b^3 + 25a^5b^5) : 5a^3b^2$ $2ab - 4b + 5a^2b^3$

Não escreva no livro.

5 Seja $A = 2x + 3y$ e $B = (2x - 3y)$, calcule:

a) $2A$; $4x + 6y$

b) $2B$; $4x - 6y$

c) A^2; $4x^2 + 12xy + 9y^2$

d) B^2; $4x^2 - 12xy + 9y^2$

e) AB. $4x^2 - 9y^2$

6 Efetue:

a) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ $x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3$

b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ $x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$

7 ***Desafio olímpico***

Mostre que o sucessor do produto de dois números pares (ou ímpares) consecutivos é sempre um quadrado perfeito. $[(x + 1)(x - 1)] + 1 = [(x^2 - 1)] + 1 = x^2$

8 Encontre um número racional que satisfaça as seguintes condições: **P** Veja sugestão de resposta no Manual do Professor.

a) $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{5}$

b) $\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{2}{3}$

9 Simplifique usando as propriedades que você aprendeu.

a) $((y^2)^3)^4$ $y^{2 \cdot 3 \cdot 4} = y^{24}$

b) $(2ab)^3$ $4a^3b^3$

c) $(5xy^2)^3$ $125x^3y^6$

10 Determine quais das igualdades são verdadeiras: **b e c são verdadeiras**

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{6}{10}$

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{3^2}{5^2}$

11 Use as regras de potenciação para resolver:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$ 3

b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$ $\dfrac{2}{3}$

c) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$ $\dfrac{16}{9}$

A HISTÓRIA DE ALGUMAS PALAVRAS

A palavra álgebra vem do árabe *al-jebr*. O primeiro a usá-la foi, provavelmente, Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, o mais importante matemático de sua época, que viveu entre os séculos VIII e IX. Ele escreveu vários livros sobre Astronomia e Matemática, e o mais importante foi *Kitab al-jebr w'al muqabala*, cujo nome pode ser traduzido como "Tratado da restauração e da transposição".

A **restauração** de uma expressão algébrica equivalia a produzir expressões equivalentes mais simples, pela aplicação de propriedades:

- Distributiva $\rightarrow 2(x + 3y) = 2x + 6y$
- Redução dos termos semelhantes $\rightarrow 2x^2 + 3x^2 = 5x^2$

A **transposição** se dava pela regra de passagem de termos de um membro a outro em uma equação:

$$x - 2 = 3x \rightarrow x - 3x = 2$$

O livro *Kitab al-jebr w'al muqabala* é considerado o primeiro tratado completo de Álgebra e, segundo al-Khowarizmi, seu objetivo era que fosse "útil às pessoas interessadas em resolver questões de herança, como partilhas, regras de sociedade, problemas comerciais e em variadas atividades, como cálculo de área de terras, construção de canais, cálculos geométricos e todas as questões do tipo".

Neveshkin Nikolay/Shutterstock/Glow Images

Selo russo em que foi estampado o rosto de Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi.

Kitab: em árabe quer dizer livro ou tratado.

al-jebr: pode significar ligação, reunião, restauração.

w'al muqabala: pode significar oposição, transposição, balanceamento.

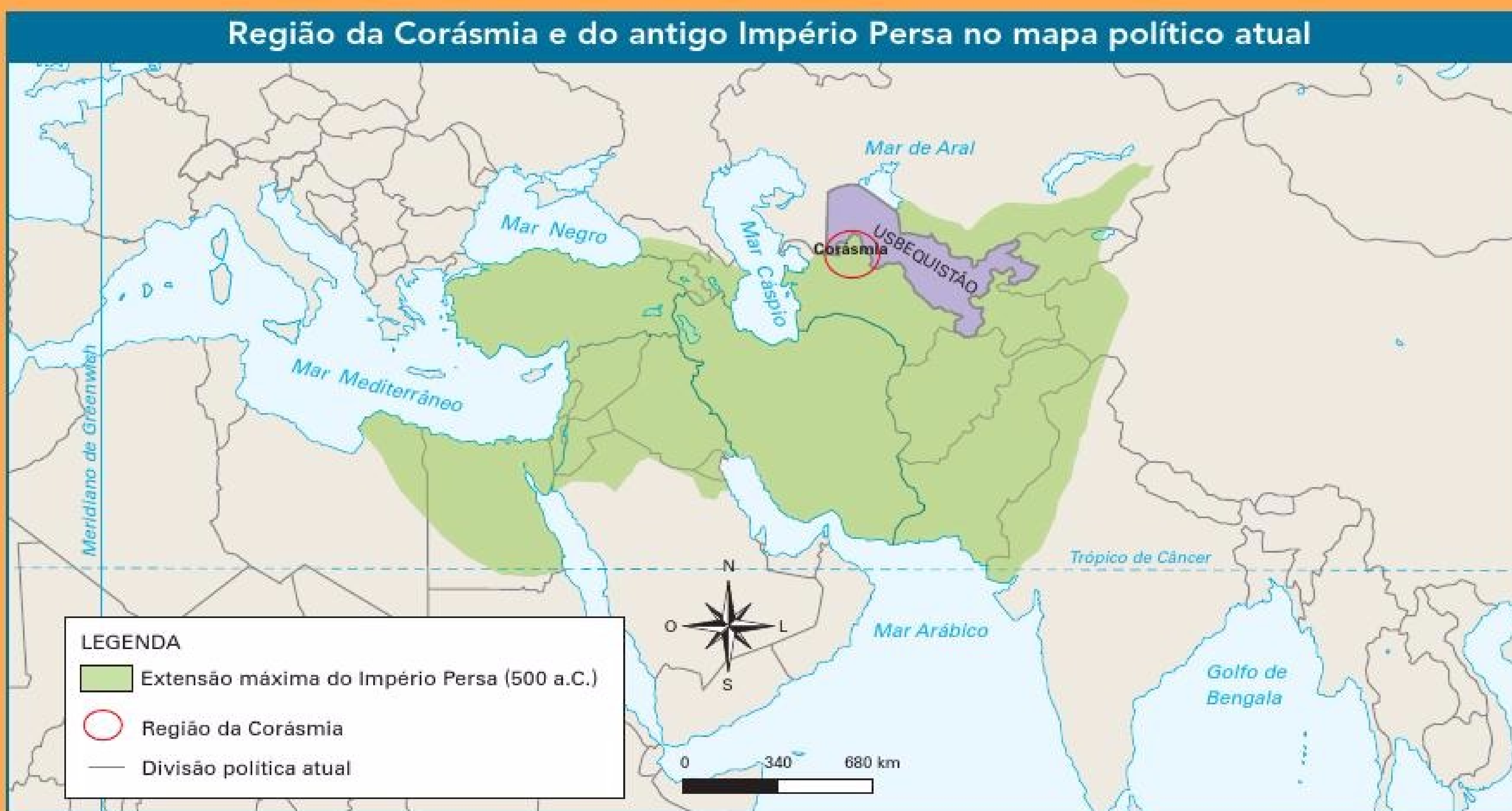
arithmos: em grego significa número e deu origem ao termo aritmética.

Na Espanha, que durante 800 anos foi ocupada pelos árabes, os ortopedistas – que restauravam ossos e pernas quebradas – eram chamados de "algebristas".

O nome Khowarizmi é derivado da localidade em que Muhammad ibn Musa nasceu: a região da Corásmia (do inglês *Khwarezm*). Há muitas outras formas derivadas como *Kharizmi* e *Al-Khwarizmi*. Esse nome deu origem aos termos algarismo e algoritmo.

Hoje a região da Corásmia corresponde a uma parte do Usbequistão, um país da Ásia Central que já fez parte da antiga União Soviética e do antigo Império Persa.

Região da Corásmia e do antigo Império Persa no mapa político atual

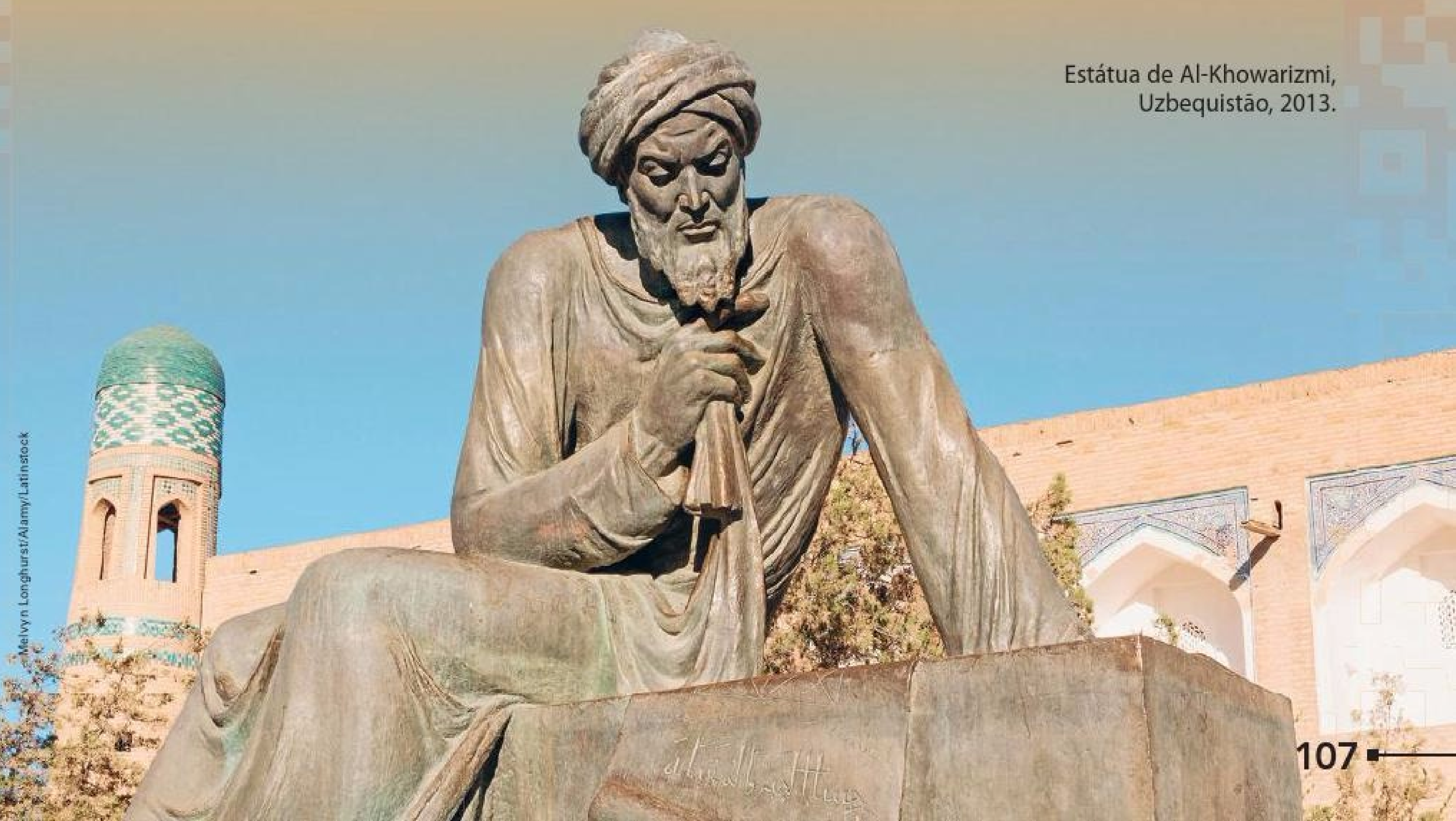


Banco de imagens/Arquivo da editora

Adaptado de: DUBY, Georges. *Grand atlas historique*. Paris: Larousse, 2006; *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Muhammad ibn Musa não é o único estudioso a receber o nome de Al-Khowarizmi. Outros estudiosos da antiga Pérsia ou do mundo árabe receberam o mesmo nome, como um enciclopedista do século X e um alquimista do século XI.

Em homenagem ao matemático do século IX, uma cratera localizada no lado negro da Lua foi batizada de Al-Khowarizmi.

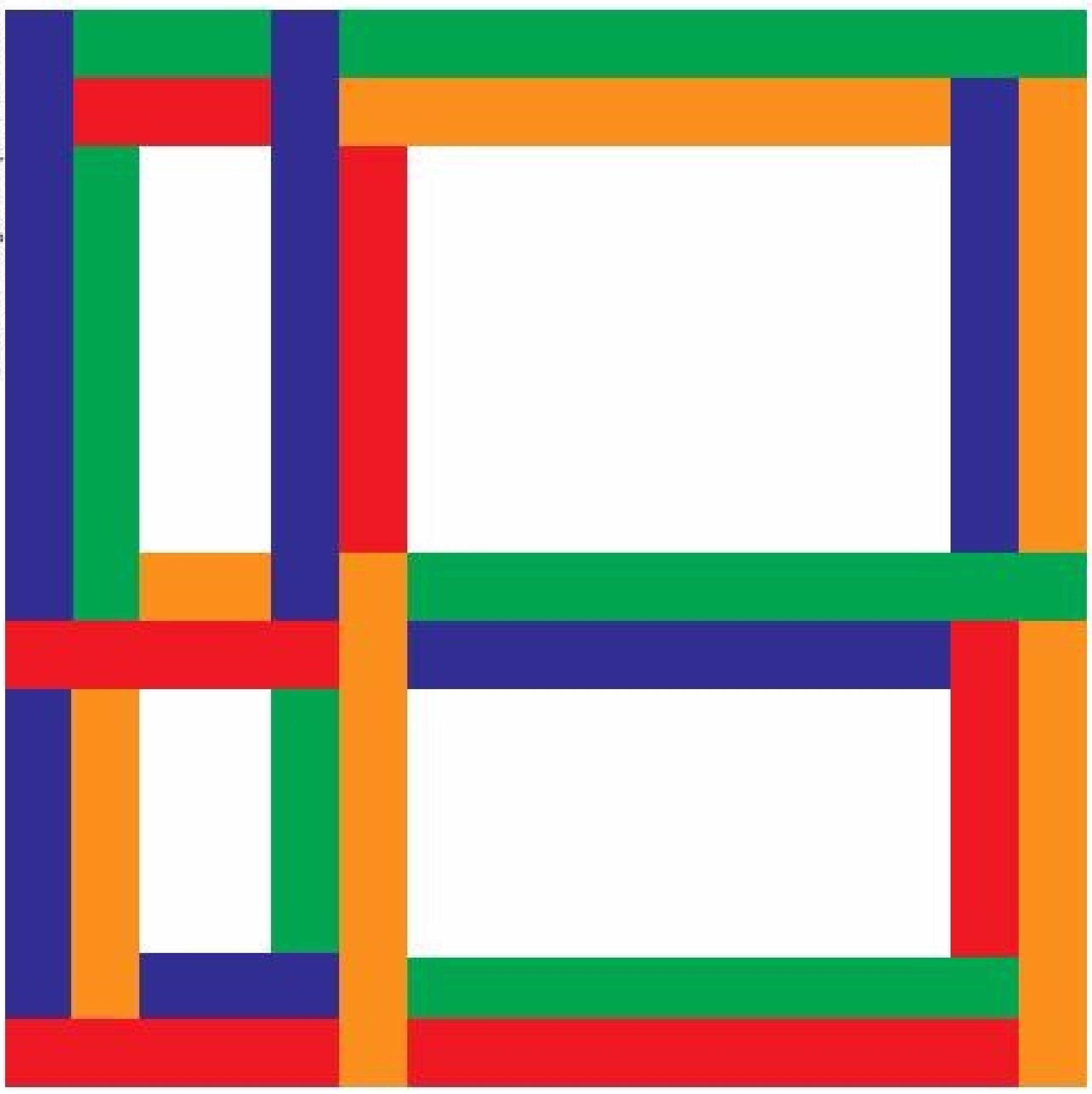


Estátua de Al-Khowarizmi, Uzbequistão, 2013.

Melvyn Longhurst/Alamy/Latinstock

CAPÍTULO 6

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO



Banco de imagens/Arquivo da editora

Obra do artista Max Bill inspirada na geometria e na álgebra

Um produto notável

Os matemáticos estão sempre atentos a regularidades que aparecem em situações numéricas, geométricas e nas expressões algébricas.

Muitas descobertas matemáticas se deram pela percepção de padrões, regularidades e conexões entre os números, a álgebra e a geometria.

Foi o que aconteceu com alguns tipos de operações algébricas como: o quadrado da soma $(a + b)^2$, o quadrado da diferença $(a - b)^2$ e a diferença de quadrados $a^2 - b^2$, entre outras.

O quadrado da soma

Acompanhe o desenvolvimento do produto de dois binômios iguais, como no exemplo a seguir.

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para esse desenvolvimento foi aplicada a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Como $(a + b)^2$ equivale ao produto $(a + b)(a + b)$, então o quadrado de um binômio obedece à seguinte igualdade:

EstudioMil/Arquivo da editora

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Binômios desse tipo, quando elevados ao quadrado, resultam em uma expressão com três parcelas, por isso elas são chamadas de **trinômios quadrados perfeitos**.

Ainda neste capítulo você vai ver uma abordagem geométrica deste produto.

Aplicando essa regra no desenvolvimento de um binômio do tipo $(2x + 3)^2$ obtém-se:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2,$$

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

O produto de binômios desse tipo chamou a atenção dos matemáticos, pois aparecem em diversas situações. Por essa razão, as multiplicações que têm esse mesmo padrão e estrutura ficaram conhecidas como **produtos notáveis**.

O quadrado da diferença

No caso do binômio da diferença ao quadrado, também aplicamos a propriedade distributiva.

- $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

O quadrado da diferença de dois termos $(a - b)^2$ é igual a: $a^2 - 2ab + b^2$.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Outro produto de binômios chamou a atenção pela simplicidade e regularidade do resultado final.

- $(a + b)(a - b) = a^2 + \overbrace{ab - ab}^{0} - b^2 = a^2 - b^2$

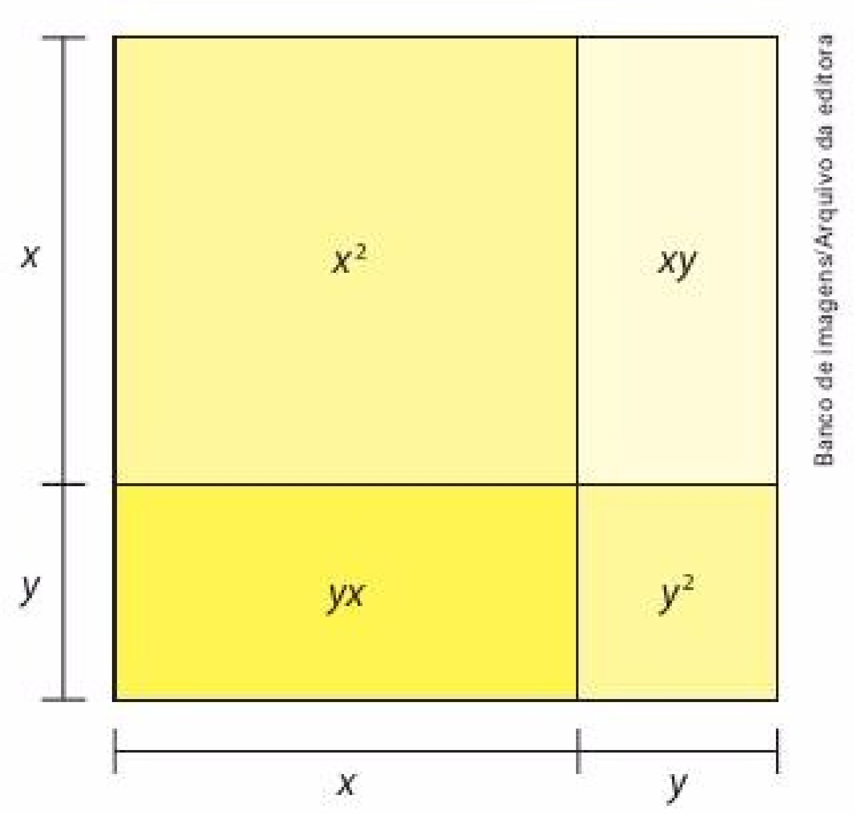
O produto $(a + b)(a - b)$ resulta na diferença de dois quadrados: $a^2 - b^2$.

$$(a + b)(a - b)^2 = a^2 - b^2$$

A Geometria dos produtos notáveis

Podemos visualizar as relações de um produto notável por meio de representações geométricas. Para isso, basta recordar como expressamos a área de um retângulo no capítulo 4 deste livro.

Considere um caso particular em que o retângulo é um quadrado cujos lados medem $x + y$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

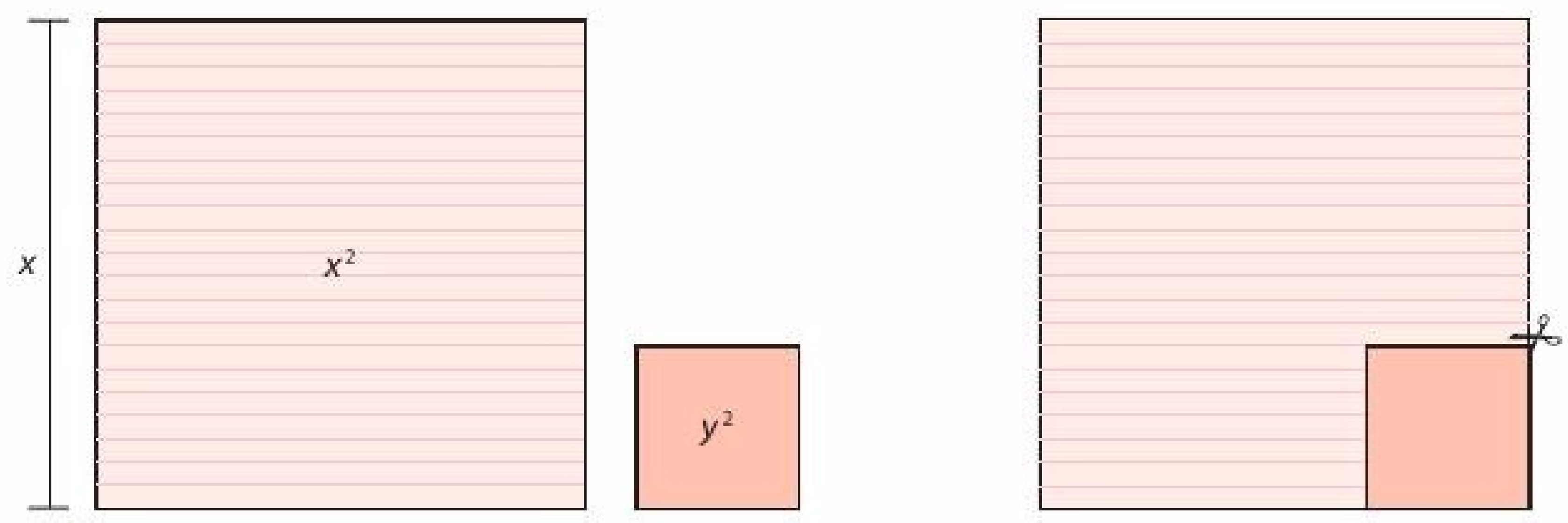
EstudioMil/Arquivo da editora

Esta é a representação geométrica do produto notável $(x + y)^2$. Nesse caso, a área do quadrado de lados $(x + y)$ é $(x + y)(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

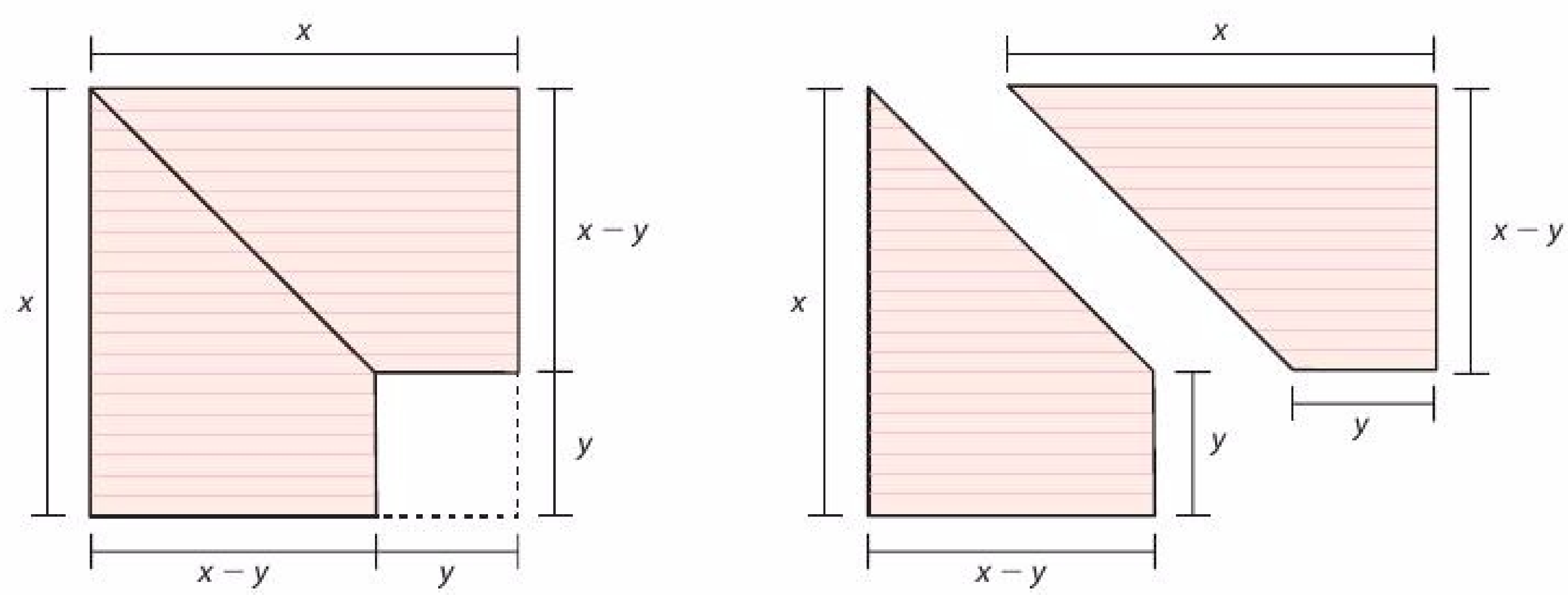
A diferença de quadrados

No caso da diferença de quadrados, também podemos usar a Geometria para explicar a relação. Acompanhe os passos:

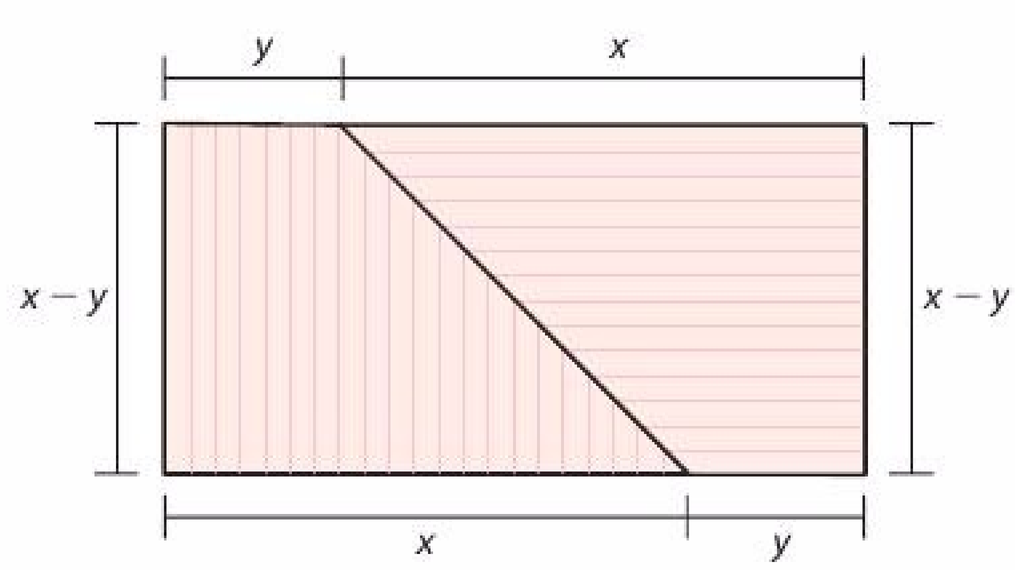
1º) Em uma cartolina, recorte dois quadrados: um de lado medindo x e outro de lado medindo y. Sobreponha-os e recorte o maior, como mostra a figura, obtendo um hexágono.



2º) Agora, trace uma diagonal e recorte o hexágono obtido por essa diagonal. Você vai obter dois trapézios retângulos.



3º) Componha um retângulo, juntando os dois trapézios de modo conveniente (a frente de um com o verso de outro).



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os lados desse retângulo são $x + y$ e $x - y$.

Observe que o hexágono e o retângulo são equivalentes, isto é, têm a mesma área, uma vez que o retângulo foi obtido do hexágono.

Dessa maneira, verificamos a igualdade $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ por métodos geométricos.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 Faça as multiplicações a seguir.

a) $2xy^2(3x + 2y)$ $6x^2y^2 + 4xy^3$

b) $(3x + 2y)^2xy^2$ $9x^3y^2 + 12x^2y^3 + 4xy^4$

c) $5(2x - 3y)$ $10x - 15y$

d) $-x(x^2 - x^3)$ $-x^3 + x^4$

e) $2x^2(10x^3 + x^2 + x - 7)$ $-10x^5 - x^4 - x^3 + 7x^2$

f) $-a^2x^3(a^2 + ax + ax^2)$ $-a^4x^3 - a^3x^4 - a^3x^5$

2 Desenvolva os produtos:

a) $(2a + b)(2a + b)$ $4a^2 + 4ab + b^2$

b) $(a + 2b)(a + 2b)$ $a^2 + 4ab + 4b^2$

c) $(2a + 3b)(2a + 3b)$ $4a^2 + 12ab + 9b^2$

d) $(3a + 2b)(3a + 2b)$ $9a^2 + 12ab + 4b^2$

e) $(2a - b)(2a - b)$ $4a^2 - 4ab + b^2$

f) $(a - 2b)(a - 2b)$ $a^2 - 4ab + 4b^2$

3 Sabendo que $A = 2xy^2$; $B = -3x^2y$; $C = 5xy$; $D = x^2y^2$, calcule: **P** Veja comentário no Manual do Professor.

a) $2A$ $4xy^2$

b) AB $-6x^3y^3$

c) $2AB$ $-12x^3y^3$

d) $3B$ $-9x^2y$

e) BC $-15x^3y^2$

f) BD $-3x^4y^3$

g) $-2AC$ $-20x^2y^3$

h) $2A + 3B$ $4xy^2 - 9x^2y$

i) $2(A + B)$ $4xy^2 - 6x^2y$

4 Qual é o número que multiplicado por:

a) $2ax + 3a^2$ resulta em $10ax + 15a^2$? 5

b) $ax + 2$ resulta em $a^2x^2 + 2ax$? ax

5 Qual é o monômio que multiplicado por $x^2 + x + 1$ resulta em $x^4 + x^3 + x^2$? x^2

6 Encontre dois binômios cujo produto é:

a) $a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b)(a + b)$

b) $x^2 + 2xy + y^2$; $(x + y)(x + y)$

c) $x^2 + 6x + 9$; $(x + 3)(x + 3)$

d) $ax + ay + bx + by$. $(a + b)(x + y)$

Atenção: As atividades a seguir são experimentais, portanto, providencie folhas de papel, régua e tesoura.

7 Recorte dois quadrados e dois retângulos com as seguintes medidas: quadrado maior: 8 cm de lado; quadrado menor: 5 cm de lado; e dois retângulos: 5 cm por 8 cm. Com essas quatro peças, forme um quadrado.

a) Qual é a área dos quadrados e dos retângulos que você recortou? $Q_{maior} = 64$ cm²; $Q_{menor} = 25$ cm²; $R_{(cada)} = 40$ cm².

b) Qual é a área do quadrado formado por todas essas peças? $8 + 5 = 13$; $13^2 = 169$; logo, a área do quadrado é 169 cm².

c) Some as medidas das áreas das peças que você recortou e compare com a área do quadrado que você compôs. O que você descobriu? $64 + 2 \cdot 40 + 25 = 64 + 80 + 25 = 169$; a soma das áreas das figuras de cada peça é igual a área do quadrado composto pelas quatro peças.

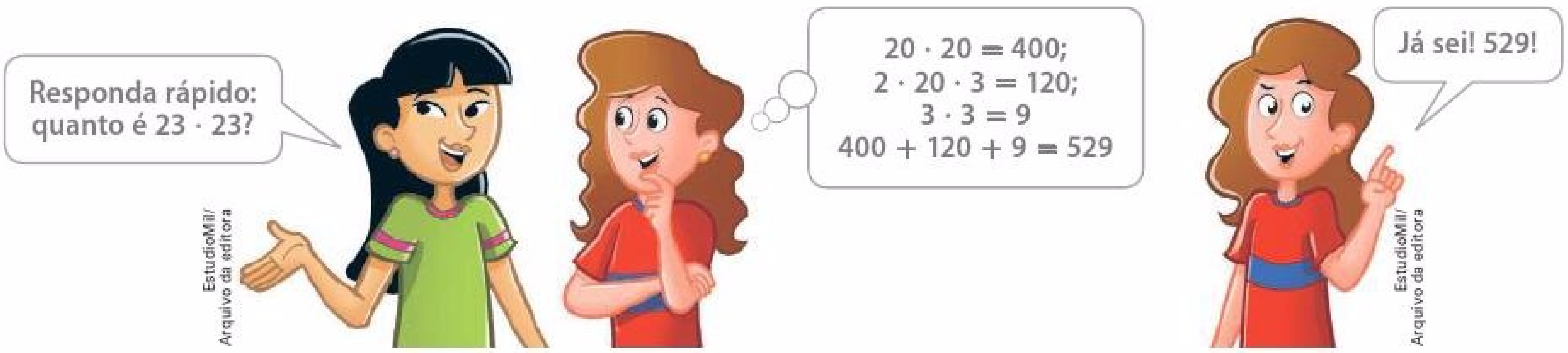
8 Recorte dois quadrados de medidas: quadrado maior: 7 cm de lado e quadrado menor: 3 cm de lado. Use o quadrado menor como molde. Encaixe um ângulo reto do quadrado menor em um ângulo reto do quadrado maior, como já feito anteriormente, para recortar uma região igual ao quadrado menor do quadrado maior. O resultado deve ser um polígono de 6 lados. Também como ilustrado anteriormente, com apenas um corte decomponha este hexágono em dois trapézios. Com esses dois trapézios componha um retângulo.

a) Quais as medidas dos lados do retângulo formado por esses trapézios? Lado maior = 10 cm e Lado menor = 4 cm.

b) Calcule as áreas dos quadrados originais, depois subtraia a medida da área do quadrado menor da medida do quadrado maior e compare com a área do retângulo que você montou com os trapézios. O que você descobriu? $Q_{maior} = 49$ cm²; $Q_{menor} = 9$ cm²; $49 - 9 = 40$; $Área_{retângulo}$ $(7 + 3) \cdot (7 - 3) = 10 \cdot 4 = 40$ cm².

Produtos notáveis e o cálculo mental

Vamos aproveitar o estudo de produtos notáveis para aprender alguns truques de cálculo.



Você consegue explicar o que está por trás do pensamento da menina?

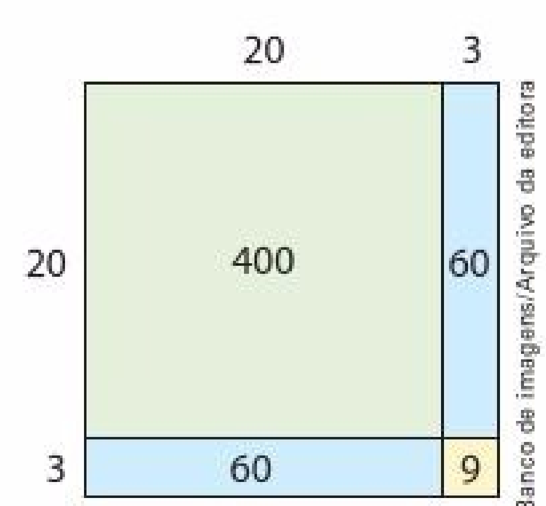
Para entender como ela raciocinou, acompanhe:

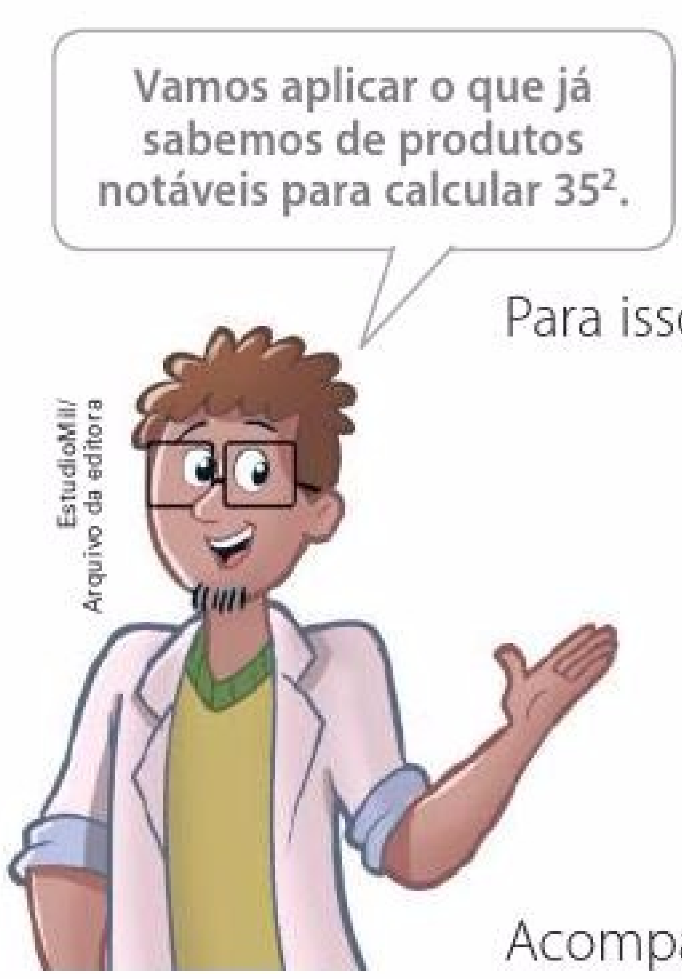
$$23 \cdot 23 = (20 + 3)(20 + 3) = 20 \cdot 20 + 20 \cdot 3 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 3 =$$

$$= 20 \cdot 20 + 2 \cdot 3 \cdot 20 + 3 \cdot 3 = 400 + 120 + 9 = 529$$

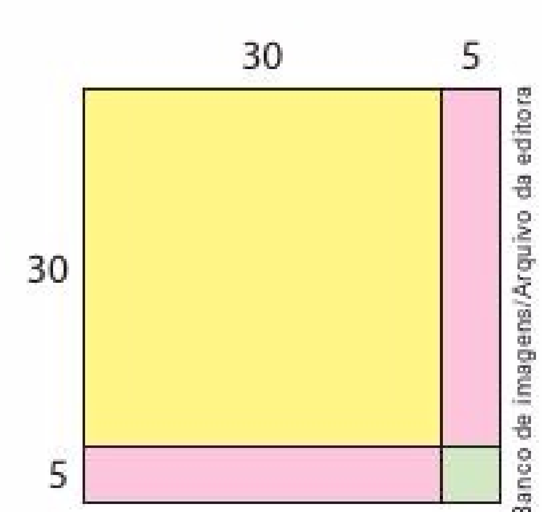
Então, para fazer esse cálculo mental rapidamente, precisamos conhecer os quadrados perfeitos e também saber dobrar e somar.

O procedimento do cálculo mental pode ser visualizado na ilustração abaixo.





Para isso vamos calcular 35^2 a partir de um quadrado de lado 35.



Acompanhe as etapas do cálculo:

$35^2 = 35 \cdot 35 = (30 + 5) \cdot (30 + 5) = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2$

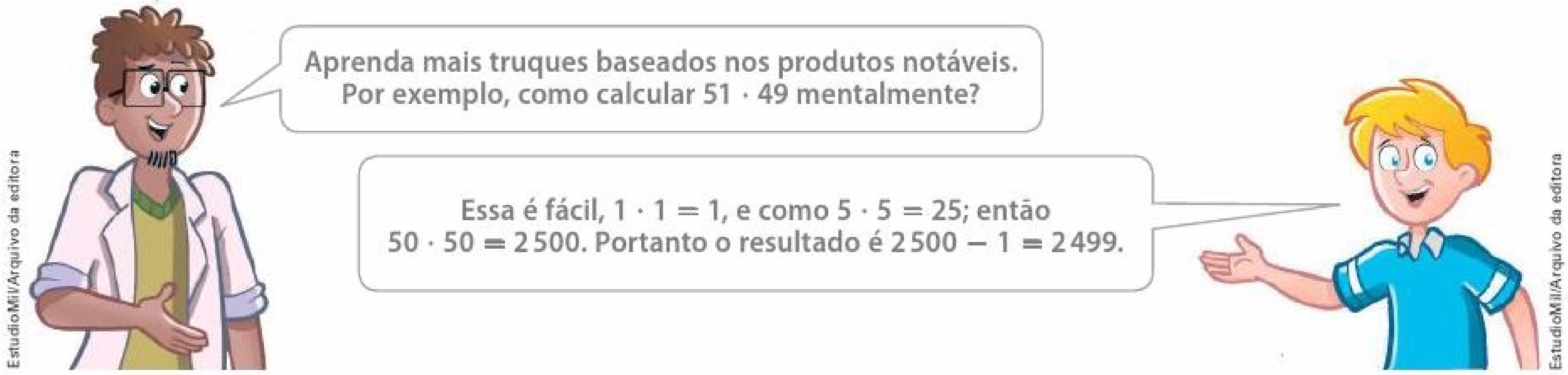
	30	5
30	30^2	$30 \cdot 5$
5	$30 \cdot 5$	5^2

→

	30	5
30	900	150
5	150	25

$35^2 = 900 + 2 \cdot 150 + 25 = 1\,225$

Cálculos feitos mentalmente, ou por meio de esquemas como neste caso, foram baseados em um dos casos de produtos notáveis.



EstudioMil/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

Para entender o que o menino fez, é importante relembrar o produto:

$$(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$$

O menino deve ter percebido um padrão nos números 51 e 49 e pensado neles como $50 + 1$ e $50 - 1$. Então, o cálculo fica:

$$51 \cdot 49 = (50 + 1) \cdot (50 - 1) = 2\,500 - 1 = 2\,499$$

Para fazer esse tipo de cálculo, basta conhecer os quadrados perfeitos e fazer subtrações.

Agora, acompanhe outro exemplo em que podemos usar a mesma regra.

$$\frac{2014^2 - 1}{2015}$$

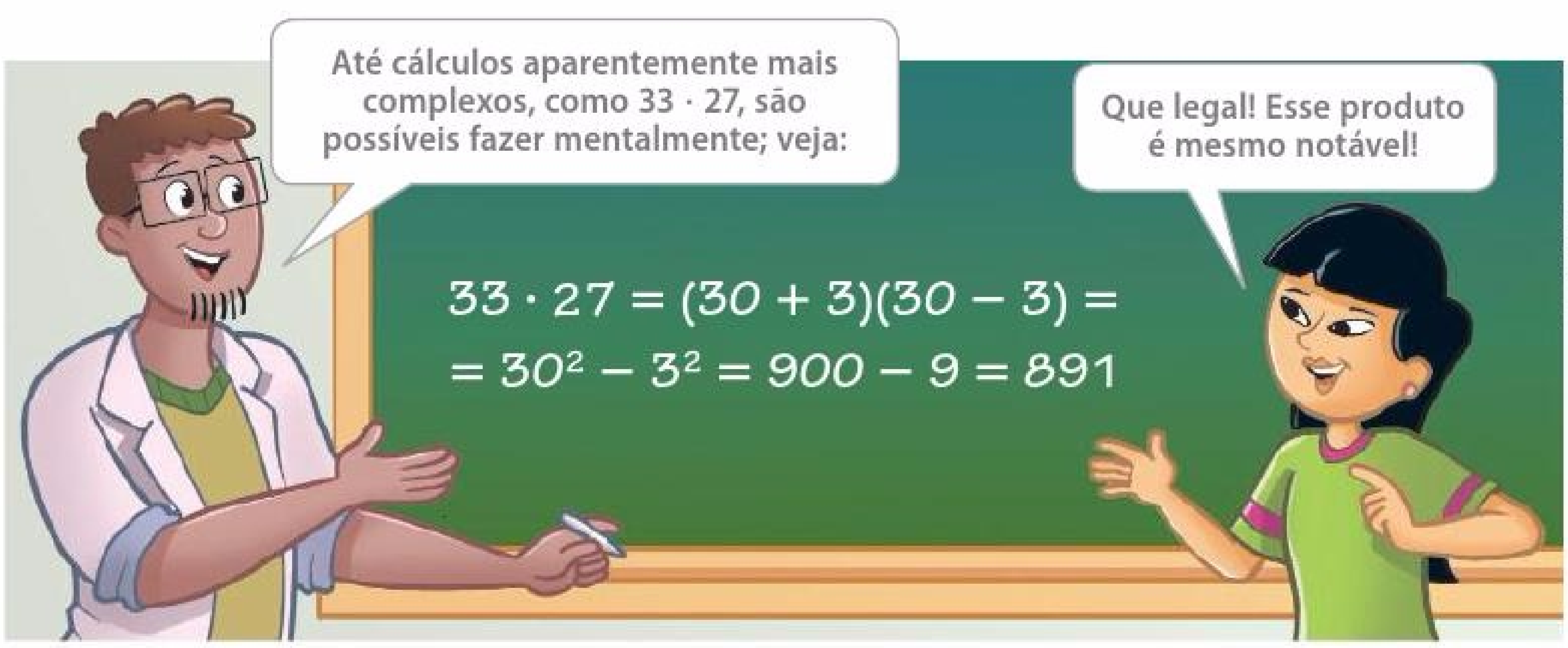
Observe que a expressão numérica do numerador ($2\,014^2 - 1$) é uma diferença de quadrados e, portanto, pode ser substituída pelo produto $(2\,014 + 1) \cdot (2\,014 - 1)$. Assim:

$$\frac{2014^2 - 1}{2015} = \frac{(2014 + 1)(2014 - 1)}{2015} = \frac{2015 \cdot 2013}{2015} = \frac{2013}{1} = 2013$$

Veja outro exemplo usando esse mesmo raciocínio:

$$999 \cdot 1\,001 = (1\,000 - 1)(1\,000 + 1) = 1\,000^2 - 1^2 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$$

Importante: Para realizar "de cabeça" cálculos como esses que fizemos, basta memorizar o quadrado de alguns números.



EstudioMil/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

9 Calcule os quadrados usando os truques baseados nos produtos notáveis. P Veja resolução no Manual do Professor.

a) 18^2 324 b) 29^2 841 c) 31^2 961 d) 75^2 5 625 e) 83^2 6 889 f) 92^2 8 464

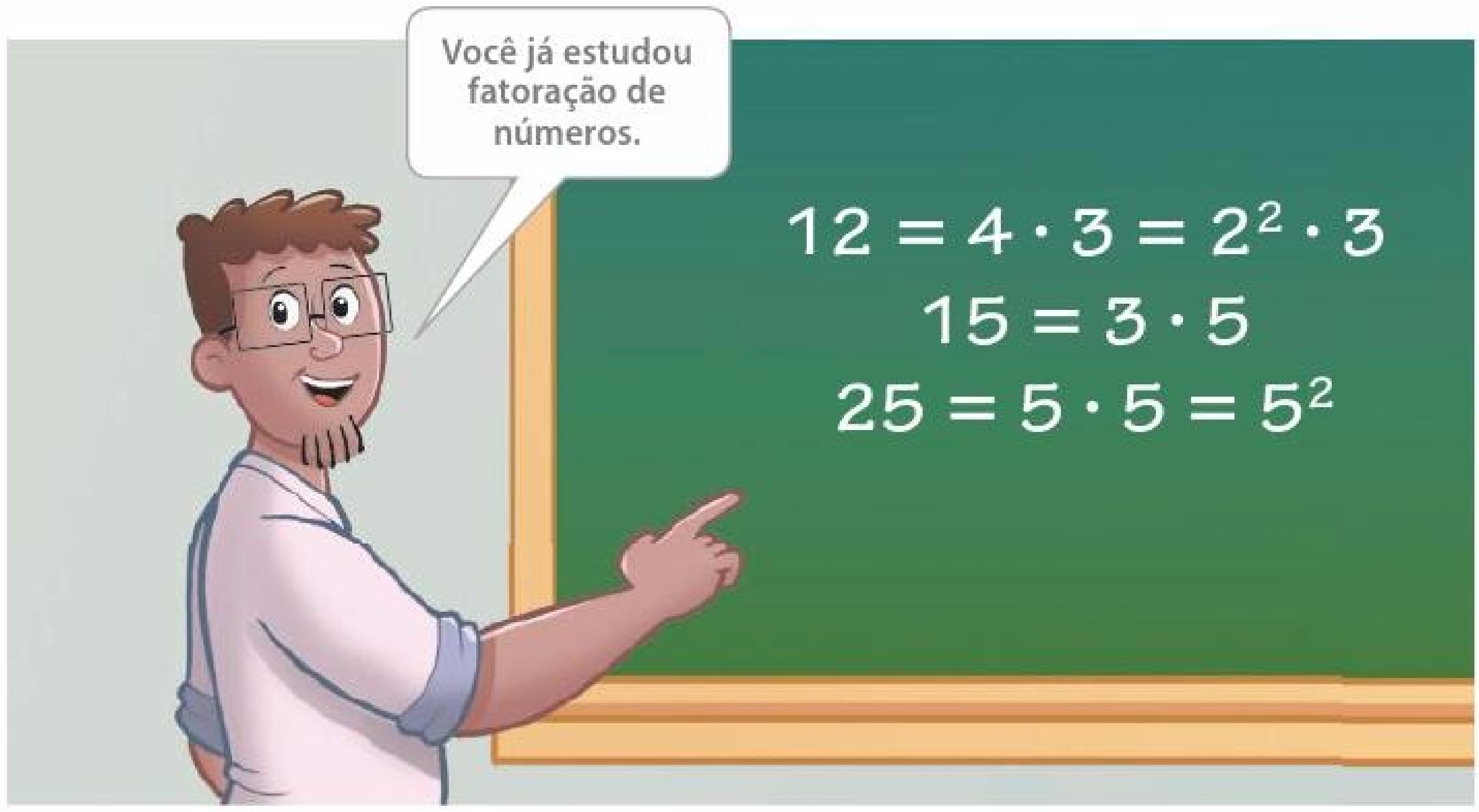
10 ***Cálculo mental***

Faça "de cabeça" as multiplicações indicadas a seguir no menor intervalo de tempo.

a) $29 \cdot 31$ 899
b) $28 \cdot 32$ 896
c) $19 \cdot 21$ 399
d) $47 \cdot 53$ 2 491
e) $55 \cdot 45$ 2 475
f) $59 \cdot 61$ 3 599
g) $72 \cdot 68$ 4 896
h) $88 \cdot 92$ 8 096
i) $202 \cdot 198$ 39 996
j) $303 \cdot 297$ 89 991

P Escreva no quadro de giz as multiplicações desse tipo e organize um torneio de cálculo mental. No final, use uma calculadora para conferir os resultados.

Fatoração



Lembre-se: Fatorar um número natural equivale a decompô-lo em um produto indicado de fatores.

A ideia de fatoração será estendida para as expressões algébricas. Assim, fatorar um polinômio equivale a decompô-lo em um produto de polinômios.

Acompanhe as explorações.

1ª) Ao multiplicarmos o monômio $2x$ pelo binômio $3a + b$, obtemos o binômio:

$$6ax + 2bx$$

Observe que $6ax + 2bx$ é o desenvolvimento do produto $2x(3a + b)$ que, pelo caminho inverso, pode ser decomposto em um produto de polinômios:

$$6ax + 2bx = 2x(3a + b)$$

Dizemos que $2x(3a + b)$ é a forma fatorada de $6ax + 2bx$.

2ª) O binômio $21x + 14$ é obtido da multiplicação de 7 por $3x + 2$.

$$21x + 14 = 7(3x + 2)$$

$7(3x + 2)$ é a forma fatorada de $21x + 14$.

Assim:

3ª) O trinômio $x^4 + x^3 + x^2$ é obtido da multiplicação $x^2(x^2 + x + 1)$.

Fatorar $x^4 + x^3 + x^2$ equivale a encontrar o produto indicado $x^2(x^2 + x + 1)$.

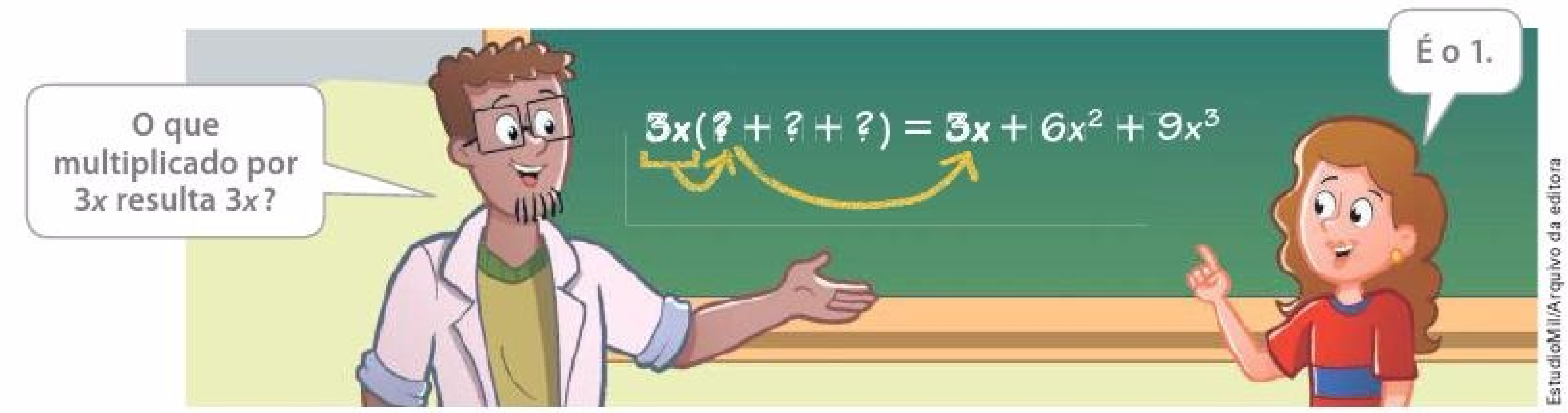
Como fatorar

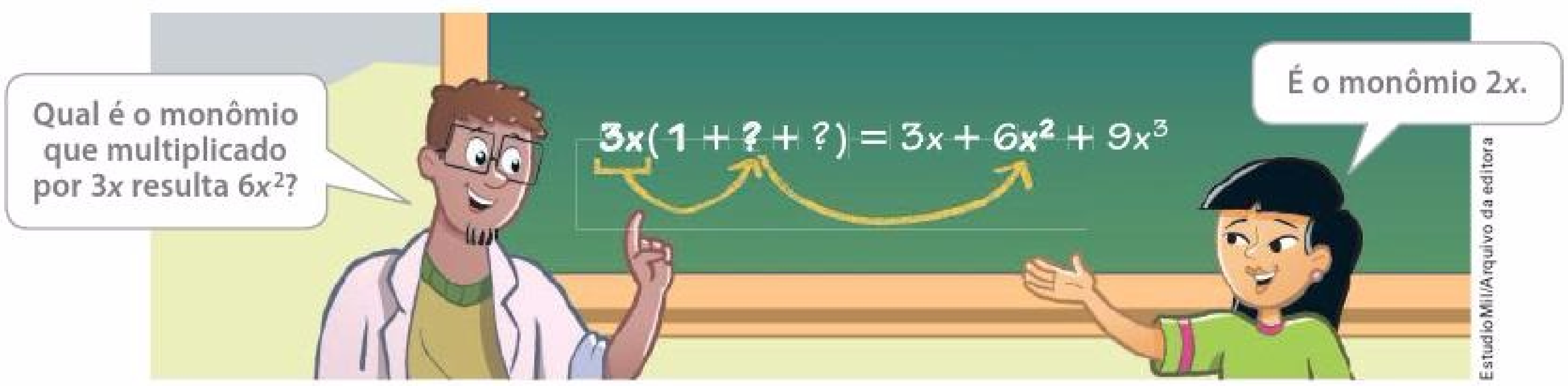
Há várias técnicas para fatorar uma expressão algébrica. Vamos descrever alguns casos especiais.

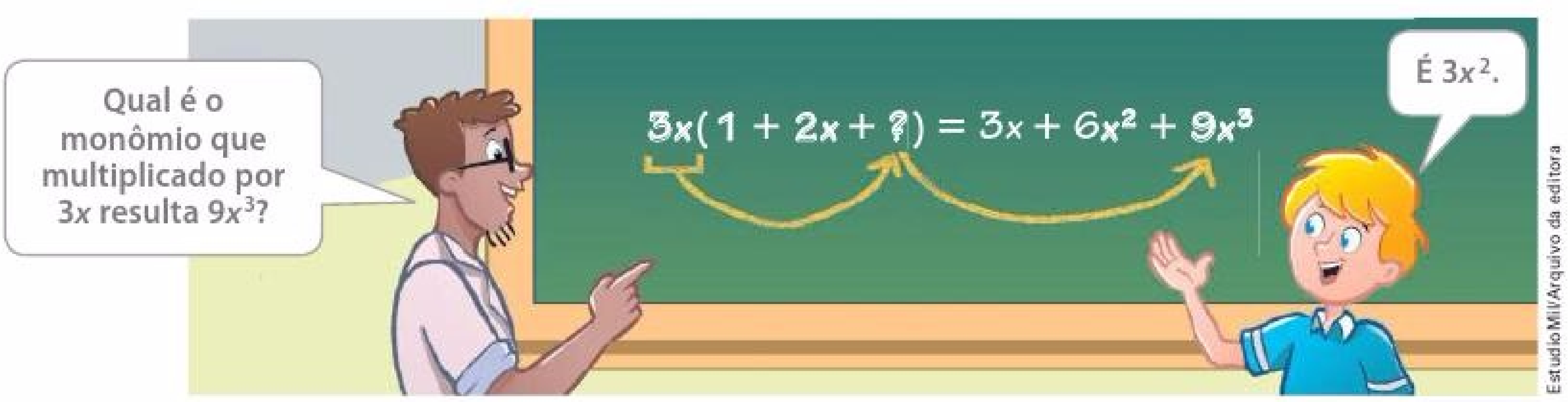
1º caso: Fator comum em evidência

Os três termos do trinômio $3x + 6x^2 + 9x^3$ têm em comum uma potência de x e o fator 3. Sendo assim, colocamos $3x$ em evidência:

$$3x(? + ? + ?) = 3x + 6x^2 + 9x^3$$







$3x(1 + 2x + 3x^2)$ é uma forma fatorada de $3x + 6x^2 + 9x^3$.

Veja outros exemplos:

- $2ax + 4ay + 8a^2$

  Fator comum: $2a$

  $2ax + 4ay + 8a^2 = \underbrace{2a(x + 2y + 4a)}_{\text{forma fatorada}}$

- $12a^2b^3x + 15ab^2x^2$

  Identificando os fatores comuns:

  $$12 = 2^2 \cdot \mathbf{3}$$
  $$15 = \mathbf{3} \cdot 5$$

  $3ab^2x$ é comum a todos os termos do polinômio.

  Portanto, a forma fatorada de $12a^2b^3x + 15ab^2x^2$ é $3ab^2x(4ab + 5x)$.

Atenção:
- Para verificar se a fatoração está correta, aplique à expressão fatorada a propriedade distributiva.
- Um polinômio está completamente fatorado quando os fatores que o compõem não podem mais ser fatorados.

■ $16a^2b^3x + 24ab^2x^2$

$4abx(4ab^2 + 6bx)$ é uma forma fatorada de $16a^2b^3x + 24ab^2x^2$, porém a fatoração ainda não está completa, pois o binômio $4ab^2 + 6bx$, que compõe o produto, ainda pode ser fatorado:

$2b(2ab + 3x)$

Então, $16a^2b^3x + 24ab^2x^2 = 4abx \cdot 2b(2ab + 3x)$.

Assim, a fatoração completa de $16a^2b^3x + 24ab^2x^2$ é $8ab^2x(2ab + 3x)$.

2º caso: Fatoração por agrupamento

Em alguns casos, o polinômio pode ser fatorado embora não exista um fator comum a todos os termos.

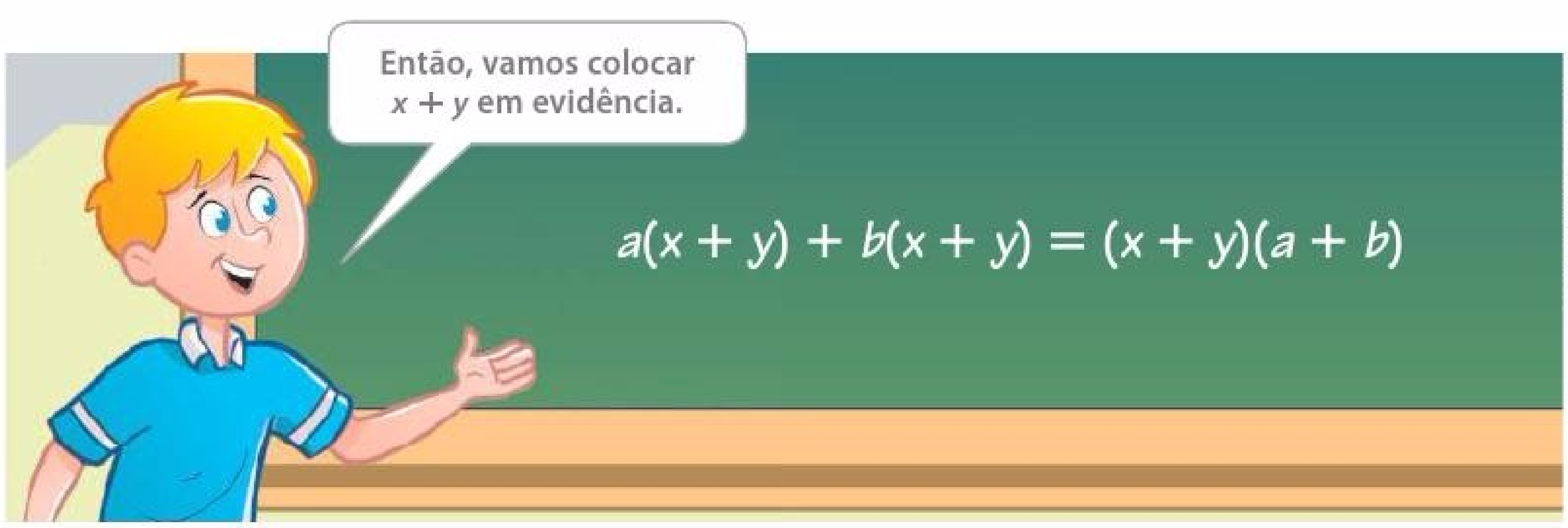
Acompanhe os exemplos.

■ Considere o polinômio $ax + ay + bx + by$.

Não há fator comum. No entanto, pode-se fatorar os termos agrupando-os. Veja:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

EstudioMil/Arquivo da editora



EstudioMil/Arquivo da editora

■ Considere o polinômio $tx + 2ty + t + 3x + 6y + 3$.

Observe que os três primeiros termos têm em comum o fator t e os três últimos, o fator 3:

$$tx + 2ty + t + 3x + 6y + 3 = t(x + 2y + 1) + 3(x + 2y + 1)$$

Assim, podemos observar que $(x + 2y + 1)$ é o fator comum. Então $(x + 2y + 1)(t + 3)$ é um produto e a fatoração está completa.

3º caso: Diferença de quadrados

Neste caso de fatoração, encaixam-se as expressões algébricas que têm a seguinte estrutura: $x^2 - y^2$. Lembre-se de que essa expressão é o resultado do desenvolvimento do produto $(x + y)(x - y)$, que é a forma fatorada de $x^2 - y^2$.

Exemplo:

A forma fatorada de $x^2 - 169$ é $(x + 13)(x - 13)$.

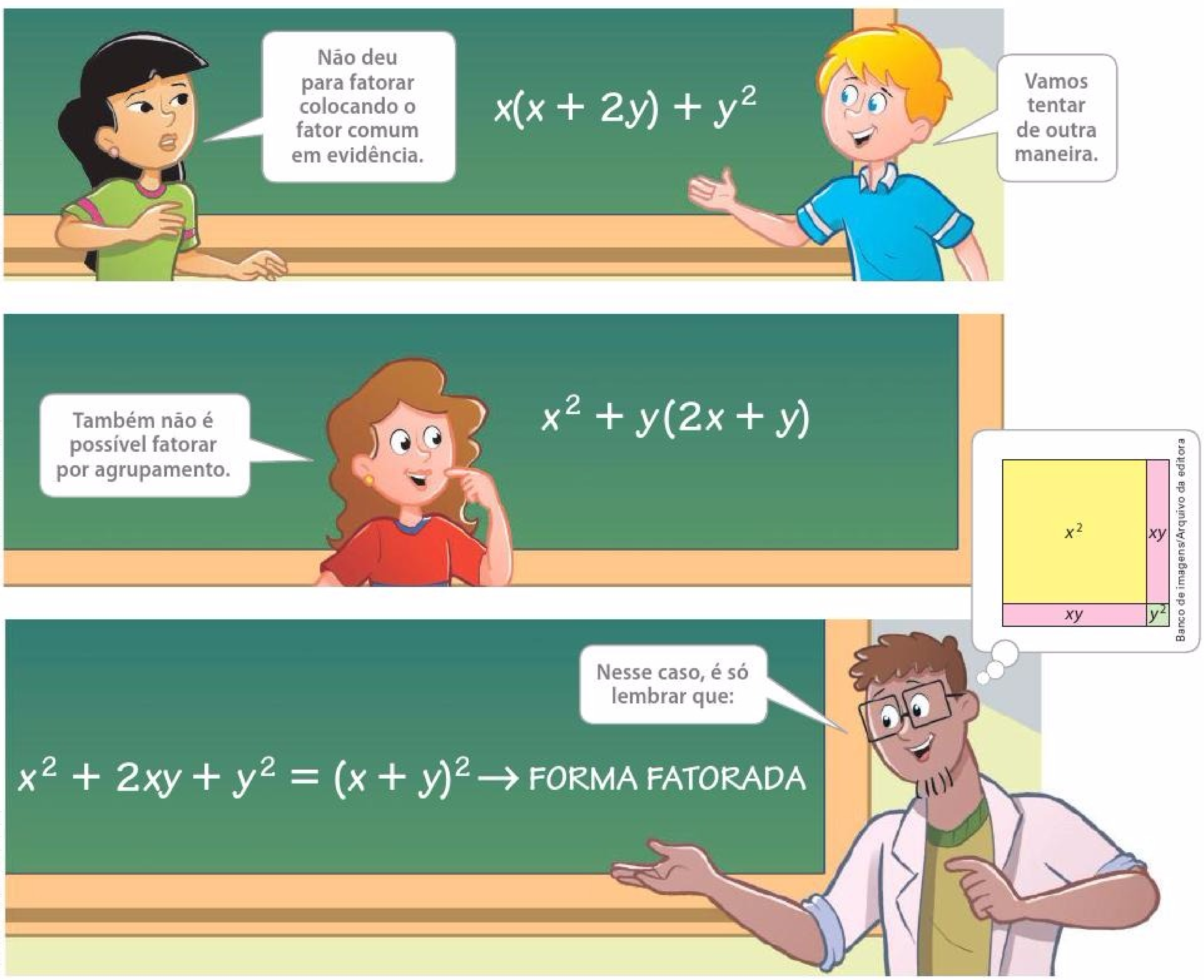
Confira aplicando a propriedade distributiva.

Para fatorar bem e rapidamente expressões do tipo "trinômio quadrado perfeito" ou "diferença de quadrados", facilita ter memorizada a sequência dos quadrados perfeitos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... , 289, 324, 361, ...

A fatoração de trinômios quadrados perfeitos será retomada e aprofundada no 9º ano.

4º caso: Expressões obtidas dos produtos notáveis

Certos polinômios fatoráveis não se encaixam em nenhum dos casos explorados até aqui. É o caso do trinômio quadrado perfeito: $x^2 + 2xy + y^2$.



EstudioMil/Arquivo da editora

Banco de imagens/Arquivo da editora

Então, fatorando $x^2 + 2xy + y^2$, obtém-se $(x + y)^2$ e fatorando $x^2 - 2xy + y^2$, obtém-se $(x - y)^2$.

Ampliando as técnicas de simplificação

Com o que foi estudado até agora, podemos ampliar as técnicas de simplificação de uma fração algébrica. Acompanhe os exemplos.

- $\dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$

  A expressão que está no numerador pode ser fatorada:

$$x^2 + 3x = x(x + 3)$$

Então, essa fração algébrica fica:

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 3} = \frac{x\,\cancel{(x + 3)}}{\cancel{x + 3}} = x$$

Estudio Mil/ Arquivo da editora

Lembre-se de que a simplificação é uma divisão! Por exemplo, quando simplificamos a fração $\frac{20}{28} = \frac{5}{7}$, estamos dividindo o numerador e o denominador por um mesmo número, no caso o fator comum 4.

Dessa forma, ao simplificar a fração algébrica $\dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$, devemos fazer o mesmo: dividir o numerador e o denominador pelo fator comum $x + 3$.

Estudio Mil/Arquivo da editora

Atenção! Nesses casos devemos nos certificar de que não dividimos por 0.

Portanto, essa simplificação só é válida se $x + 3 \neq 0$, ou seja, x tem de ser diferente de -3.

- $\dfrac{x^5 + x^4 + x^3}{x^2 + x + 1} = \dfrac{x^3\cancel{(x^2 + x + 1)}}{\cancel{(x^2 + x + 1)}} = x^3$

- $\dfrac{3x^2 + 6x^3 + 9x^4}{x + 2x^2 + 3x^3} = \dfrac{3x\,\cancel{(x + 2x^2 + 3x^3)}}{\cancel{(x + 2x^2 + 3x^3)}} = 3x$, para $x \neq 0$

- $\dfrac{2x^2 + 10x}{ax + 5a + bx + 5b}$

  Nesse caso, temos de fatorar numerador e denominador e depois cancelar a expressão comum, que é $x + 5$, considerando que $x \neq -5$ e $a + b \neq 0$.

$$\frac{2x^2 + 10x}{ax + 5a + bx + 5b} = \frac{2x\,\cancel{(x + 5)}}{\cancel{(x + 5)}(a + b)} = \frac{2x}{a + b}$$

- $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

  Nesse caso, o numerador é um trinômio quadrado perfeito: $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ e o denominador é uma diferença de quadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Então:

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)\cancel{(x + y)}}{\cancel{(x + y)}(x - y)} = \frac{x + y}{x - y}$$

Lembrando que $x^2 - y^2$ deve ser diferente de 0.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

11 Fatore os polinômios a seguir.

a) $3x^5 + 21x^4 + 27x^3$ $3x^3(x^2 + 7x + 9)$

b) $6x^2a - 8xa^3 + 10x^2a^2$ $2xa(3x - 4a^2 + 5xa)$

c) $12x^3y^5z - 36x^2yz^2 + 48xy^4z^3$ $12xyz(x^2y^4 - 3xz + 4y^3z^2)$

d) $ab + ac + bx + cx$ $(b + c)(a + x)$

e) $3ax + 9bx + 2ay + 6by$ $(a + 3b)(3x + 2y)$

f) $a^2 + ax + 2ab + 2bx$ $(a + x)(a + 2b)$

g) $2ax + 5bx + 2ay + 5by + 2ac + 5bc$ $(2a + 5b)(x + y + c)$

h) $x^2 + 6ax + 9a^2$ $(x + 3a)^2$

i) $16x^2 - 8x + 1$ $(4x - 1)^2$

j) $16m^2 - 4n^2$ $(4m - 2n)(4m + 2n)$

12 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 3}$; x^2

b) $\dfrac{x^7 + x^5 + x^3}{x^4 + x^2 + 1}$; x^3

c) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $x - 2$

d) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$; $\dfrac{x + 2}{x - 2}$

e) $\dfrac{7ax + ay + 7bx + by}{ax - ay + bx - by}$; $\dfrac{7x + y}{x - y}$

f) $\dfrac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$. $\dfrac{a + b}{a - b}$

A linguagem algébrica e a prova em Matemática

P Esta parte do capítulo foca o uso da linguagem algébrica para justificar logicamente proposições gerais. É importante, tão cedo quanto possível, colocar os alunos diante de atividades de argumentação lógica adequadas a sua faixa etária e a seu desenvolvimento cognitivo.

par + par = par

À medida que nos familiarizamos com os números e suas propriedades, alguns fatos são aceitos sem necessidade de prova, como o fato de que somando um número par a outro número par o resultado também é um número par. Em geral, para "provar" tal proposição, escolhemos alguns casos particulares, fazemos a conta e exibimos o resultado. Como nos exemplos:

- $2 + 4 = 6$
- $12 + 18 = 30$
- $24 + 48 = 72$
- $252 + 248 = 500$

É bem provável que você e a maioria das pessoas acreditem que essa proposição é verdadeira para quaisquer números pares, porém o conjunto dos números pares é infinito.

Os matemáticos, quando querem saber ou precisam provar que uma proposição vale para qualquer número de um conjunto infinito, não testam caso a caso, pois isso seria impossível. Então, para provar sem deixar margem para dúvidas, eles usam a **linguagem algébrica**.

EstudioMil/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

Um número par qualquer pode ser representado por $2k$, sendo k um número inteiro. Portanto, dois números pares podem ser representados como $2n$ e $2m$, por exemplo, e sua soma como $2n + 2m$.

Fatorando essa expressão, temos:

$$2n + 2m = 2(n + m)$$

Se n e m são números inteiros, então a soma $(n + m)$ também é um número inteiro.

Logo, $2(n + m)$ representa o dobro de um número inteiro. Portanto é par.

Agora, vamos explorar outra proposição:

ímpar + ímpar = par

O antecessor ou o sucessor de um número par é um número ímpar.

Um número ímpar pode ser representado por $2k - 1$, sendo k um número inteiro.

Logo, a soma de dois números ímpares pode ser representada por $(2n - 1) + (2m - 1)$.

Eliminando os parênteses e reagrupando, temos:

$$2n + 2m - 1 - 1 = 2n + 2m - 2$$

Colocando 2 em evidência, temos $2(n + m - 1)$.

Se n e m são inteiros, então $(n + m - 1)$ é um número inteiro, logo, $2(n + m - 1)$ é um número par.

Vamos analisar agora outra proposição:

par · par = par

$$2n \cdot 2m = 4nm = \mathbf{2} \cdot 2nm = \mathbf{2}(2nm)$$

Se n e m são inteiros, então $2nm$ é inteiro.

Logo, $2(2nm)$ é um número par.

E finalmente:

ímpar · ímpar = ímpar

$$(2n - 1)(2m - 1) = \underbrace{4nm - 2n - 2m}_{\text{2 é fator comum}} + 1 = \mathbf{2}(2nm - n - m) + 1$$

Como $(2nm - n - m)$ é um número inteiro, então $\mathbf{2}(2nm - n - m)$ é par, mas o sucessor de um número par é um número ímpar.

Podemos concluir que $\mathbf{2}(2nm - n - m) + 1$ é ímpar.

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

1 Resolva os produtos notáveis:

a) $(a + b)^2$; $a^2 + 2ab + b^2$

b) $(2a + 3)^2$; $4a^2 + 12a + 9$

c) $(3x + 4y)^2$; $9x^2 + 24xy + 16y^2$

d) $(a - b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2$

e) $(2a - 3)^2$; $4a^2 - 12a + 9$

f) $(3x - 4y)^2$; $9x^2 - 24xy + 16y^2$

g) $(2a + 3)(2a - 3)$; $4a^2 - 9$

h) $(4x + 3y)(4x - 3y)$. $16x^2 - 9y^2$

2 Recorte em cartolina quatro retângulos com as seguintes especificações: **P** Veja resolução no Manual do Professor.

R_1: $2 \cdot 3$;

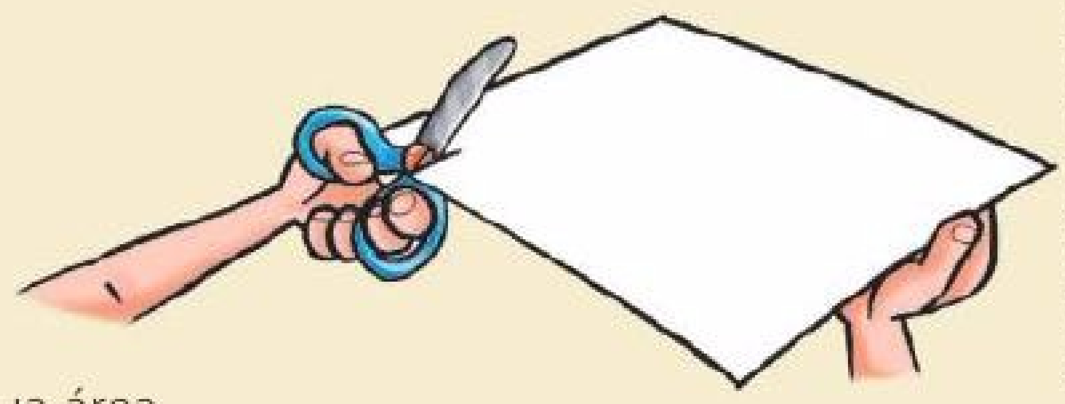
R_2: $2 \cdot m$;

R_3: $3 \cdot t$;

R_4: $m \cdot t$.

Sendo $m < 3$ e $t < 2$.

Com esses retângulos, monte um outro retângulo e dê a expressão algébrica de sua área.



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

3 Fatore as expressões:

a) $4x^4 - 5x^3 + 6x^2$; $x^2(4x^2 - 5x + 6)$

b) $8a^2b^2 - 4ab + 12a^3b^3$; $4ab(2ab - 1 + 3a^2b^2)$

c) $5b + 5c + ab + ac$; $(5 + a)(b + c)$

d) $am + bm + cm + an + bn + cn$; $(m + n)(a + b + c)$

e) $m^2 - 12m + 36$; $(m - 6)^2$

f) $4x^2 - 16y^2$. $(2x + 4y)(2x - 4y)$

4 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{(a + b)^2}{a + b}$; $a + b$

b) $\dfrac{(a + b + c)dx}{(a + b + c)x}$; d

c) $\dfrac{3a + 3b}{5a + 5b}$; $\dfrac{3}{5}$

d) $\dfrac{5ab + 5a}{15b + 15}$; $\dfrac{a}{3}$

e) $\dfrac{5b + 5c + mb + mc}{15 + 3m}$; $\dfrac{b + c}{3}$

f) $\dfrac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2}$. $\dfrac{1}{a + b}$

5 ***Cálculo mental***

Calcule as seguintes potências: **P** Veja cálculos no Manual do Professor.

a) 23^2 529

b) 28^2 784

c) 49^2 2 401

d) 51^2 2 601

e) 55^2 3 025

f) 72^2 5 184

6 ***Cálculo mental***

Faça "de cabeça" as multiplicações indicadas aplicando o que você aprendeu sobre diferença de quadrados.

a) $19 \cdot 21$ $400 - 1 = 399$

b) $38 \cdot 42$ $1600 - 4 = 1596$

c) $67 \cdot 73$ $4900 - 9 = 4891$

d) $69 \cdot 71$ $4900 - 1 = 4899$

e) $99 \cdot 101$ $10000 - 1 = 9999$

f) $302 \cdot 298$ $90000 - 4 = 89996$

Revista da

Matemática

ÁLGEBRA E OS TRUQUES ARITMÉTICOS

A linguagem e os métodos algébricos permitem a exploração de curiosos truques de cálculo e de "provas absurdas".

1º truque: Adivinhar o número natural pensado por uma pessoa.

Para adivinhar rapidamente o número pensado por uma pessoa, siga as etapas:

1ª) Peça que a pessoa pense um número natural qualquer.

2ª) Peça que multiplique o sucessor pelo antecessor do número pensado e diga o resultado.

		Exemplo numérico	Representação algébrica
	número pensado	28	x
Isto é o que a pessoa fez $\longrightarrow$	antecessor × sucessor	$27 \cdot 29$	$(x - 1) \cdot (x + 1)$
	resultado	783	$x^2 - 1$

Agora veja o que você deve fazer para adivinhar o número que a pessoa pensou:

	Exemplo numérico	Explicação baseada na álgebra
Resultado das operações informado pela pessoa	783	
Você soma mentalmente 1 ao número que a pessoa disse	$783 + 1 = 784$	$x^2 - 1 + 1 = x^2$ Este número é um quadrado perfeito.
Depois de somar 1, você extrai a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{784} = 28$	$\sqrt{x^2} = x$
Este é o número pensado por seu amigo	28	x

2º truque: Uma igualdade absurda.

EstudioMil/Arquivo da editora

Preste muita atenção nas transformações algébricas em cada passagem.

Seja: $x = y = 1$ (I)

Considerando que $1^2 - 1 \cdot 1 = 1^2 - 1^2$, podemos escrever: $x^2 - xy = x^2 - y^2$ (II)

Fatorando: $x(x - y) = (x + y)(x - y)$ (III)

Observe que $(x - y)$ é fator comum nos dois membros da igualdade.

Dividindo ambos os membros por $(x - y)$, temos:

$$x\cancel{(x - y)} = (x + y)\cancel{(x - y)}$$

Então:

$$x = x + y \quad \text{(IV)}$$

Substituindo x e y novamente por 1, temos: $1 = 1 + 1$

Finalmente, $1 = 2$

Está provado.

EstudioMil/Arquivo da editora

Em uma das passagens foi feita uma operação proibida. Acompanhe:

Na passagem de (III) para (IV) a "simplificação":

$$x\cancel{(x - y)} = (x + y)\cancel{(x - y)}$$

$$x = x + y$$

jamais poderia ser feita, pois equivale a $\frac{x\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}} = \frac{(x + y)\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}}$, e a divisão por $(x - y)$ não pode ser feita, pois se $x = y$, $x - y = 0$, e não se divide por zero!

UNIDADE

3

Relações e propriedades geométricas

Nesta Unidade, vamos explorar algumas das principais relações e propriedades das figuras geométricas. Iniciamos com o estudo das simetrias, que estão presentes na natureza, nas artes e nas formas dos objetos do cotidiano. Em seguida, exploramos os triângulos e quadriláteros, suas principais propriedades e como tais propriedades são aplicadas para resolver problemas do dia a dia, com uma atenção especial: a presença dos retângulos nos ladrilhamentos e pavimentações, dos quadriláteros nos mecanismos que exigem relações de paralelismo e, também, a propriedade do triângulo, único polígono rígido, o que faz dele parte obrigatória nas estruturas de torres e outras construções.

CAPÍTULO 7

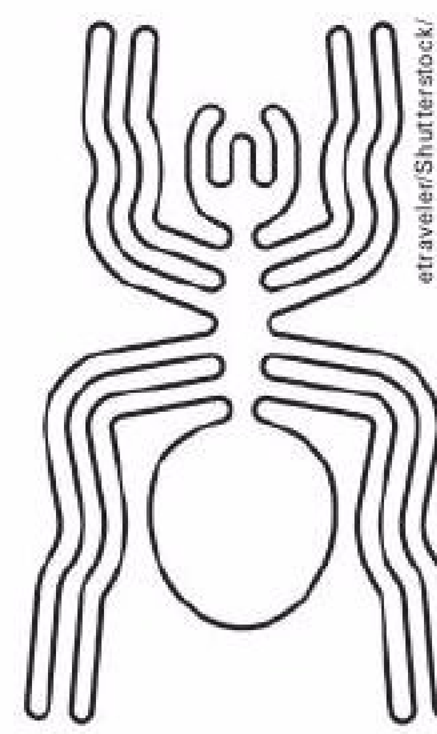
SIMETRIAS

Simetrias e regularidades

As figuras abaixo têm um padrão: são figuras espelhadas, isto é, é possível compor a figura inteira fazendo refletir uma de suas partes.

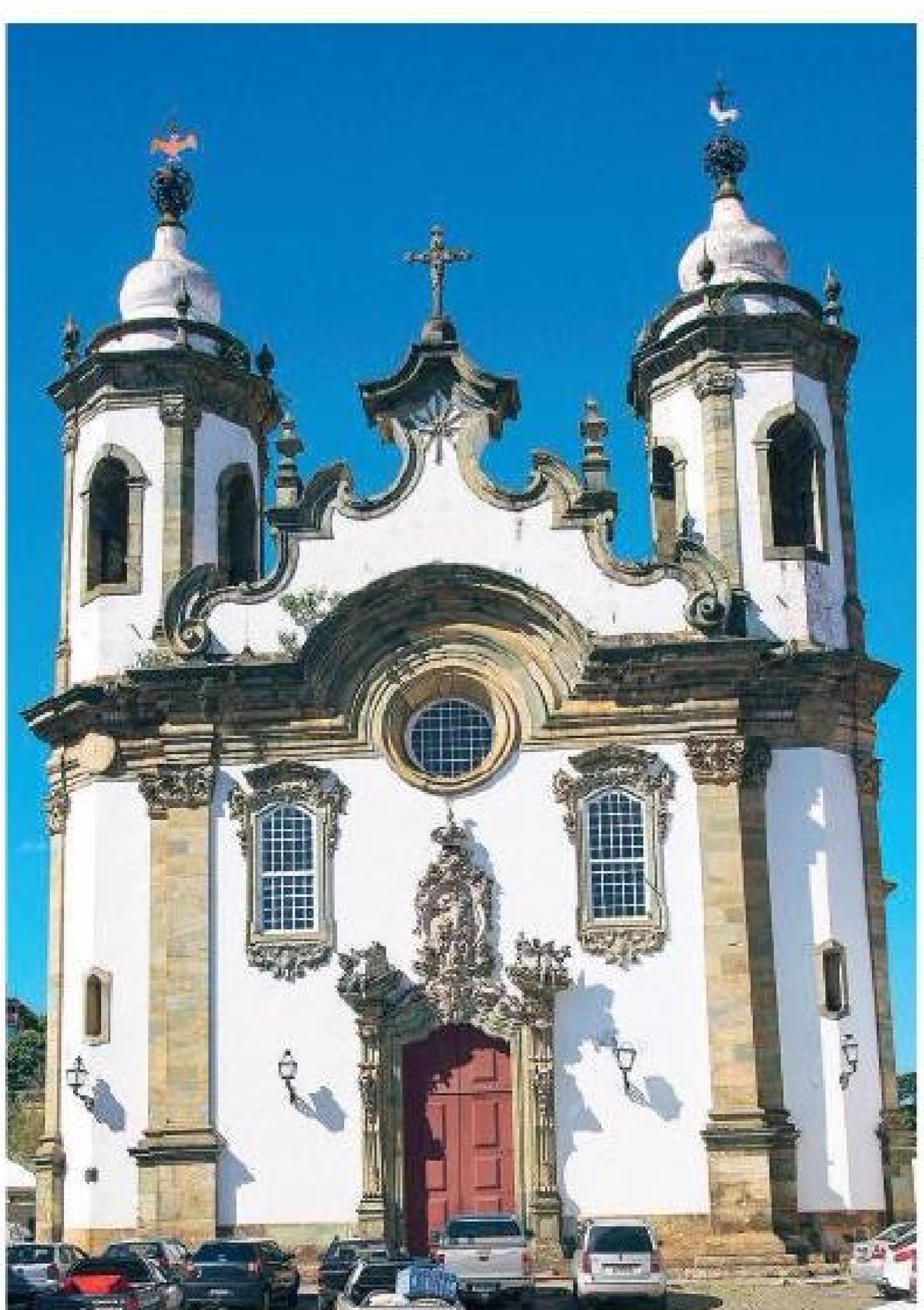

Ksanask/Shutterstock/Glow Images


RedKoala/Shutterstock/Glow Images


etraveler/Shutterstock/Glow Images

Figuras que são espelhadas.

A todo momento, vemos objetos e imagens com aparência simétrica.


Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Fachada da Igreja Nossa Senhora do Carmo, em Ouro Preto (MG).


Mikail Kovalev/Shutterstock/Glow Images

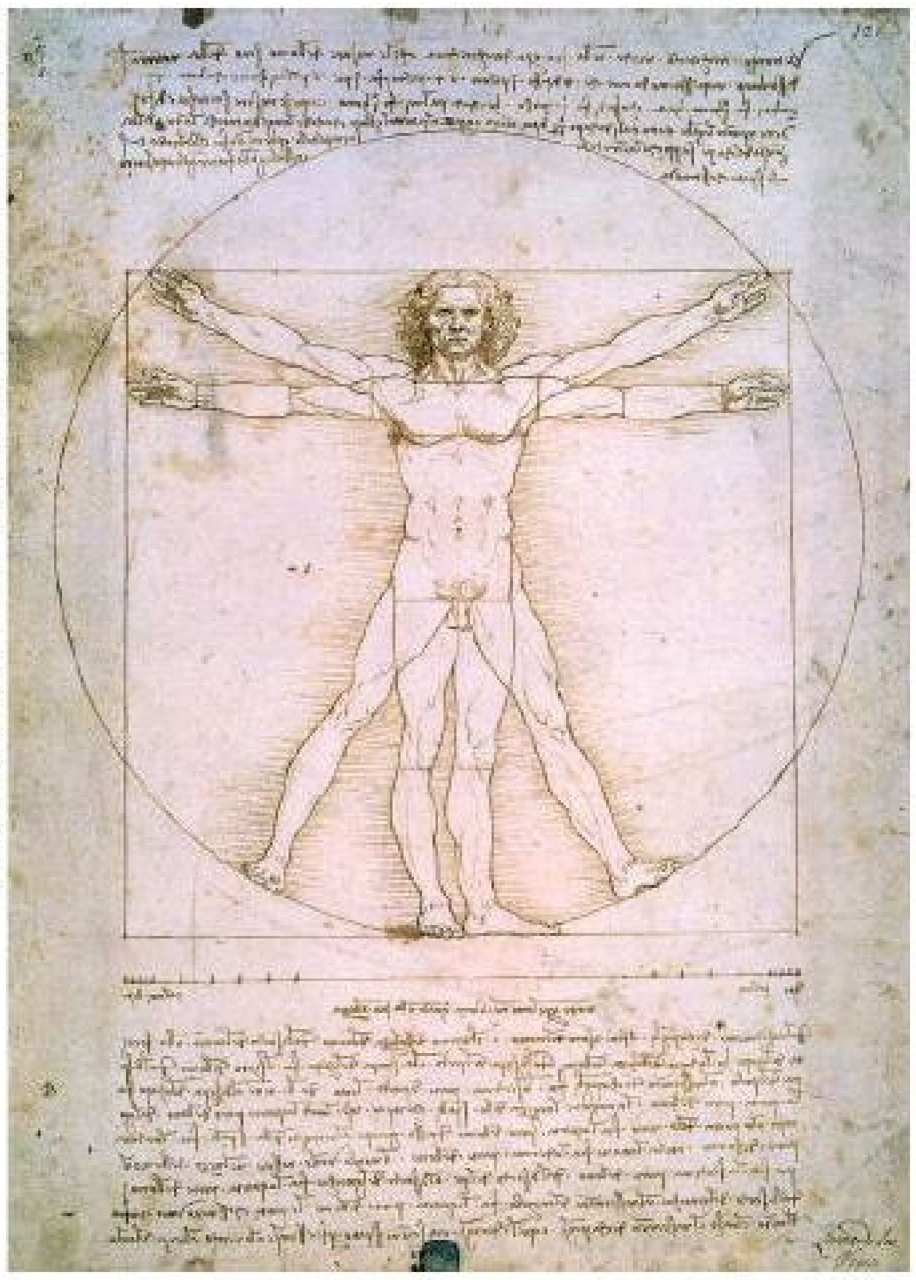
Óculos

As imagens não estão representadas em proporção.


elisekurenbina/Shutterstock/Glow Images

Caixa de presente

Galleria dell' Accademia, Veneza, Itália/The Bridgeman Art Library/Keystone



Homem vitruviano, de Leonardo da Vinci, 1490.

EstudioMil/Arquivo da editora

Muitas letras têm eixo de simetria, como a letra **A** e a letra **E**:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

P Há vários tipos de simetria, embora a maioria das pessoas reconheça somente as simetrias de reflexão.

Neste capítulo, vamos estudar três movimentos que produzem figuras simétricas.

Reflexão

Observe as fotografias abaixo. Não há nenhum truque fotográfico. Se você olhar de frente para uma ambulância ou um carro de bombeiros, vai ler assim mesmo: as palavras AMBULÂNCIA e BOMBEIROS estão escritas de trás para a frente.

Isso é feito para que essas palavras possam ser lidas corretamente ao se olhar pelo espelho retrovisor do carro que estiver à frente desses veículos.

Delfim Martins/Pulsar Imagens

Fabio Colombini/Acervo do fotógrafo

Contexto Digital/Arquivo da editora

Como está escrito na parte dianteira do veículo.

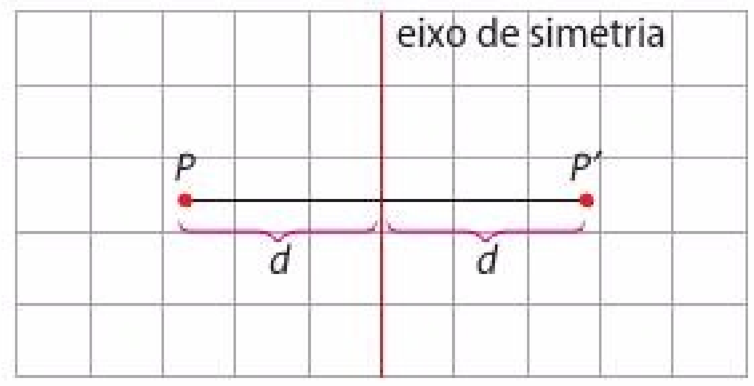
Contexto Digital/Arquivo da editora

Como se lê pelo retrovisor do veículo que está à frente.

A transformação geométrica que explica esse fenômeno visual é a **reflexão**.

Veja alguns exemplos:

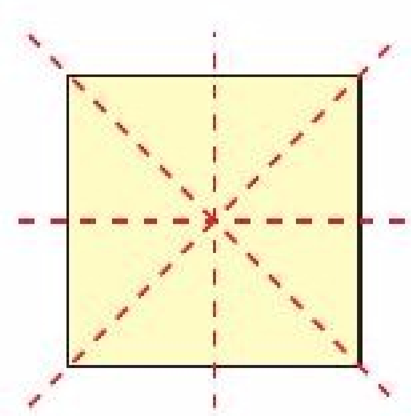
- reflexão do ponto *P* em relação a um eixo de simetria;



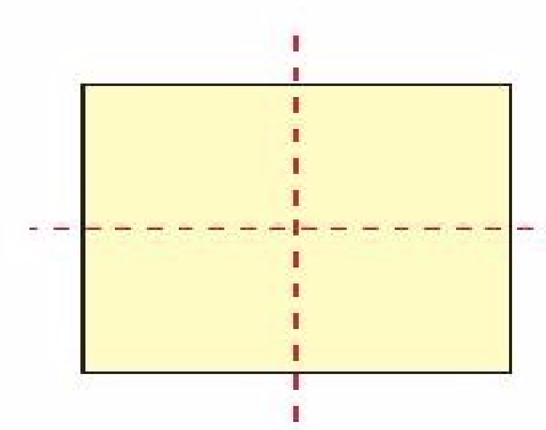
Observe que, na reflexão, a distância *d* do ponto *P* e de sua imagem refletida *P'* ao eixo de reflexão, que funciona como se fosse um espelho, é a mesma.

- reflexão de um pentaminó em relação a um eixo.

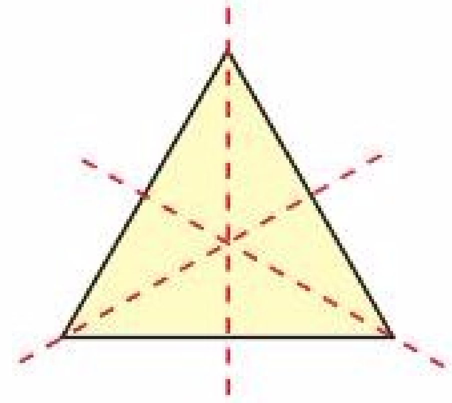
Muitas figuras geométricas que você estudou até aqui têm simetrias de reflexão. Veja alguns exemplos:



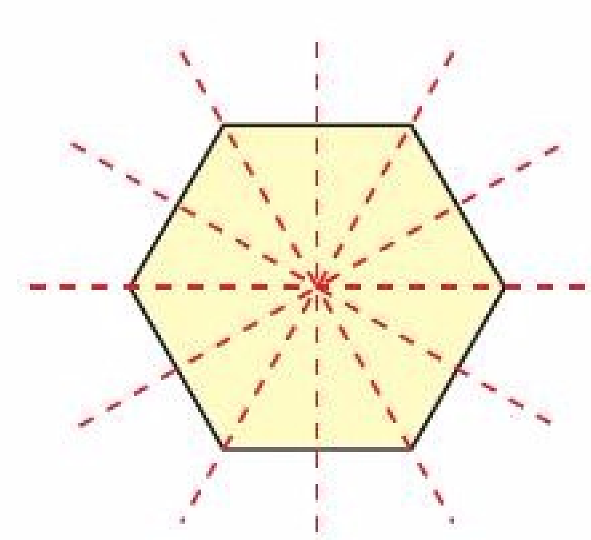
O quadrado tem
4 eixos de simetria.



O retângulo tem
2 eixos de simetria.



O triângulo equilátero
tem 3 eixos de simetria.



O hexágono regular
tem 6 eixos de simetria.

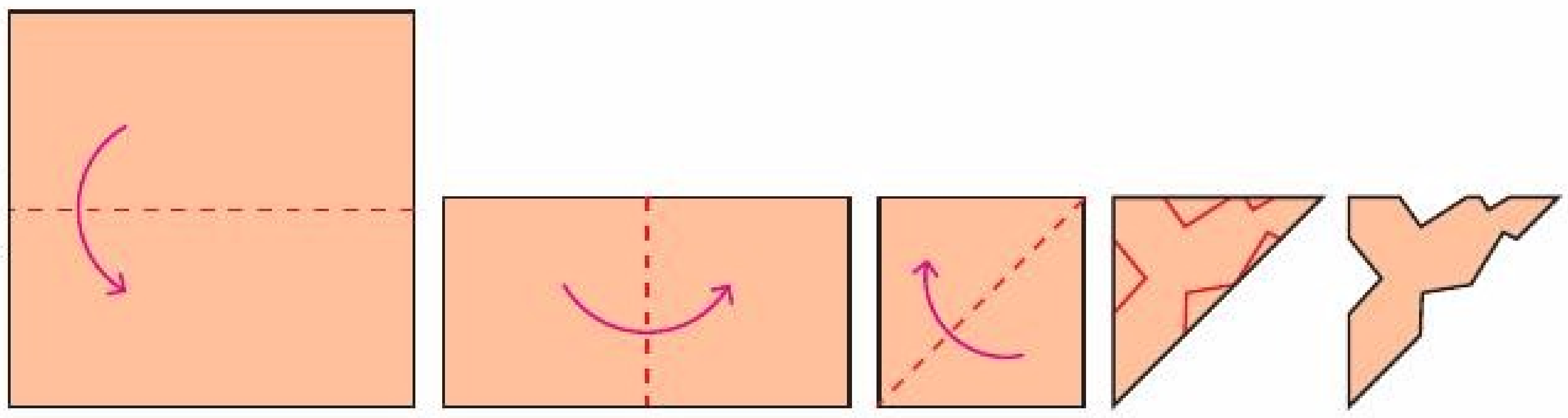
Cada linha tracejada indica onde colocar o espelho para que se possa visualizar a figura completa.

Nos polígonos regulares, os ângulos são todos de mesma medida, e os lados, também. Assim, qualquer polígono regular tem tantos eixos de simetria quanto o número de seus lados.

A simetria é utilizada para muitas finalidades, em especial nas atividades artísticas (por exemplo, no artesanato).

Um tipo de ornamento bastante popular são toalhinhas de papel com motivos geométricos que se parecem com renda. Para fazer esse tipo de padrão, basta ter em mãos uma folha de papel e uma tesoura; daí em diante é imaginar, dobrar e cortar como na sequência a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

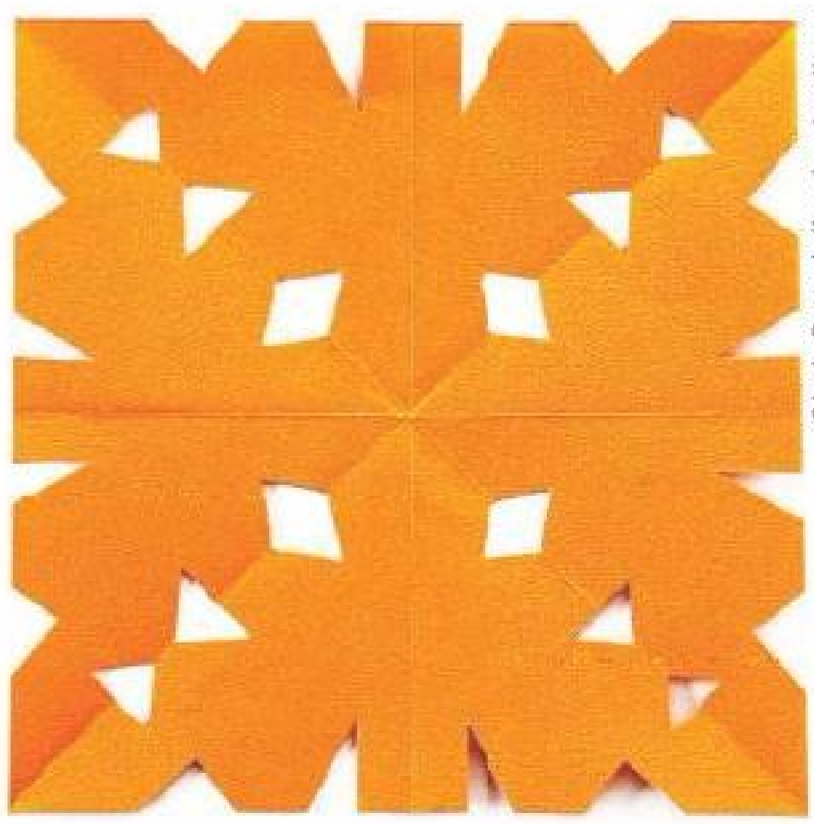


1º) Dobrar um quadrado pelo eixo horizontal e depois pelo eixo vertical.

2º) Em seguida, dobrar pela diagonal do quadrado menor obtido, para obter uma forma triangular.

3º) Fazer os cortes de acordo com sua criatividade. Ao desdobrar o papel, terá obtido uma toalha rendada.

Observe que as marcas das dobras coincidem com os eixos de simetria da toalha.



Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

Toalha de papel com motivo geométrico

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 Considere as letras de nosso alfabeto, na forma maiúscula, e reproduza aquelas que têm:

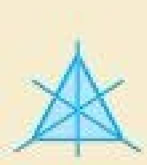
a) eixo de simetria vertical; A, H, I, M, O, T, U, V, X, W e Y.

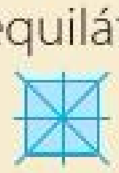
b) eixo de simetria horizontal; B, C, D, E, H, I, K, O e X.

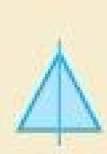
c) eixo de simetria vertical e horizontal. H, I, O e X.

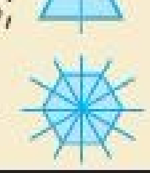
2 Desenhe as figuras indicadas e trace os eixos de simetria.

a) losango; 

b) triângulo equilátero; 

c) quadrado; 

d) triângulo isósceles; 

e) hexágono regular. 

3 Observe que todas as letras da palavra EIXO têm eixo de simetria horizontal.

Contexto Digital/ Arquivo da editora

Forme palavras com letras: Sugestões de resposta:

a) que têm eixo de simetria vertical; TIA, UVA, etc.

b) que têm eixo de simetria horizontal. DOCE, CEDO, etc.

4 Escreva seu nome no quadro de giz em letra de forma e de trás para a frente.

Dê as costas para o quadro de giz, coloque um espelho à sua frente e leia o que aparece no espelho.
Resposta pessoal. P Veja comentário no Manual do Professor.

Rotação

Os logotipos são formas gráficas que representam a marca de uma empresa, instituição pública, equipe, etc. Os desenhistas gráficos que produzem logotipos têm preferência por formas simples e de fácil identificação e utilizam muito as que são simétricas.

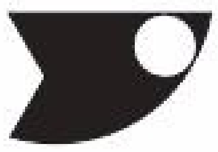


Figura 1

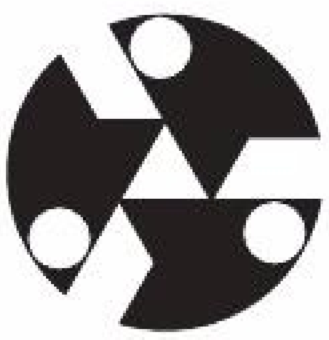


Figura 2

Observe as figuras ao lado. A figura 2 é um logotipo e a figura 1 corresponde à terça parte da figura 2.

O logotipo é gerado por giros de 120° da figura 1 em torno de um ponto *O*, imaginário, que é o centro do triângulo equilátero do meio do logotipo.

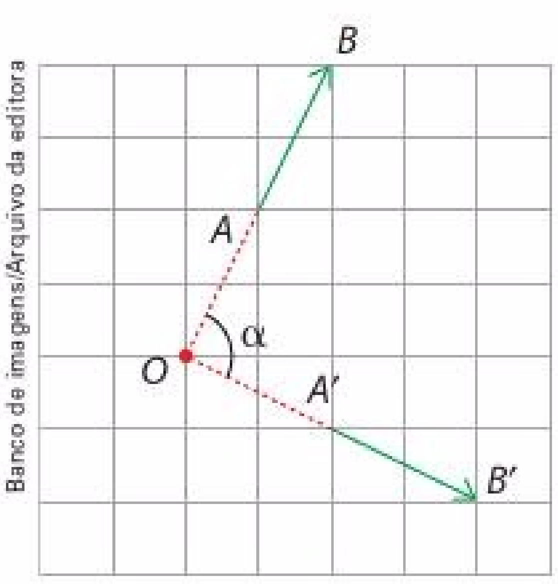
Dizemos que figuras como o logotipo da figura 2 são definidas por uma transformação chamada de **rotação**.

A rotação é definida por um centro *O* e um ângulo de giro α.

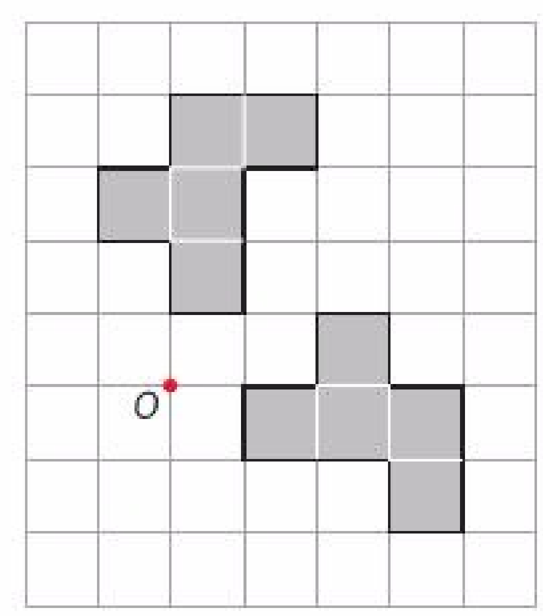
Observe alguns exemplos de rotação:

- rotação de uma seta *AB* em torno do centro *O*, com um ângulo de giro α;
- rotação de um pentaminó em torno do centro *O*, com um ângulo de giro de 90°.

P Costuma-se usar as primeiras letras do alfabeto grego para se referir à medida de um ângulo.



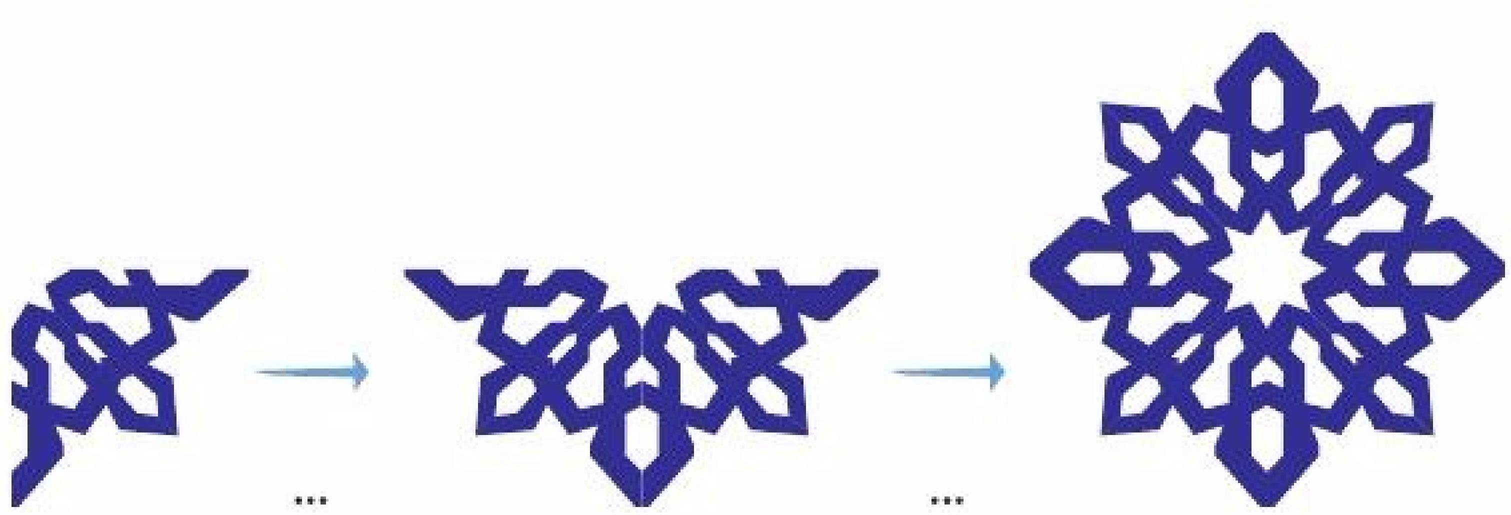
Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em uma figura simétrica, a parte que se repete é chamada **motivo**. Veja alguns exemplos:

- A toalha de papel a seguir, feita a partir de dobraduras e recortes, além de ter simetria de reflexão, tem também simetria de rotação, produzida por giros de 90° da parte correspondente ao motivo. Observe que girando o motivo, que corresponde à quarta parte da toalha, em um ângulo de 90°, obtemos a toalha completa.



Motivo: a menor parte que gera a toalha.

Toalha completa gerada por 4 giros de 90° do motivo.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Observe na fotografia ao lado, a simetria de uma rosácea que ornamenta o vitral da Catedral de São Paulo. O motivo que gera a rosácea completa corresponde a $\frac{1}{12}$ de sua circunferência.

Rosácea da Catedral de São Paulo

Jacek/kino.com.br

Translação

Pode não parecer à primeira vista, mas a figura abaixo apresenta simetria de **translação**.

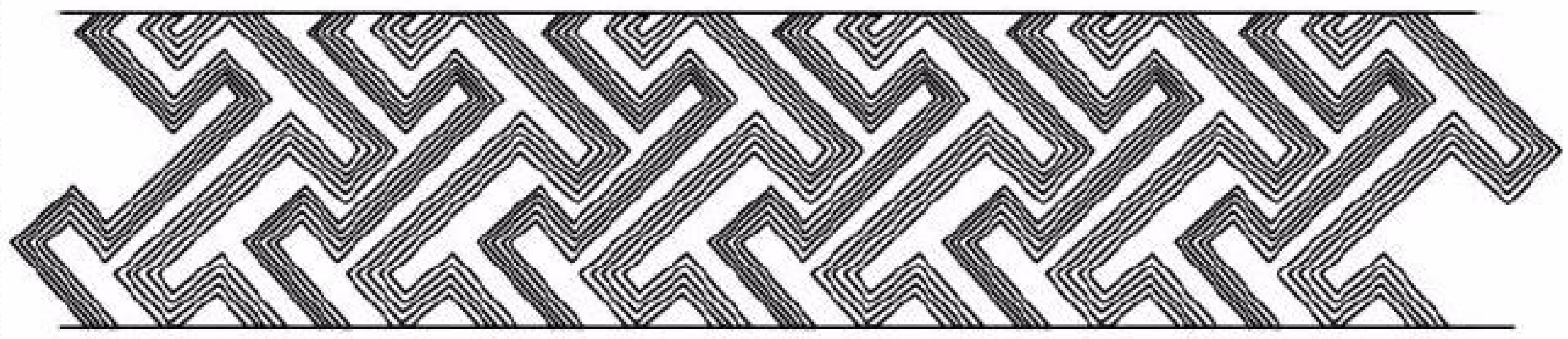
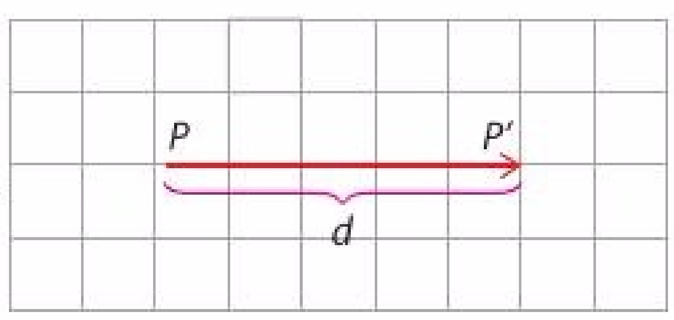

Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura com simetria de translação

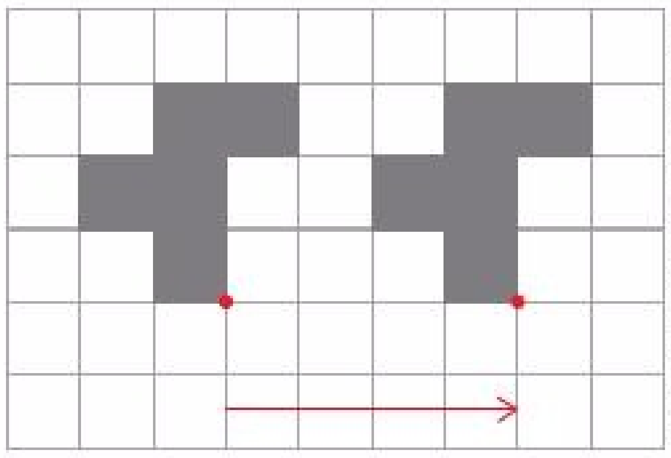
Observe alguns exemplos de translação:

- Translação do ponto P: desloca-se o ponto P para uma posição P' a uma distância d de P, definindo uma direção PP' e um sentido de P para P'.



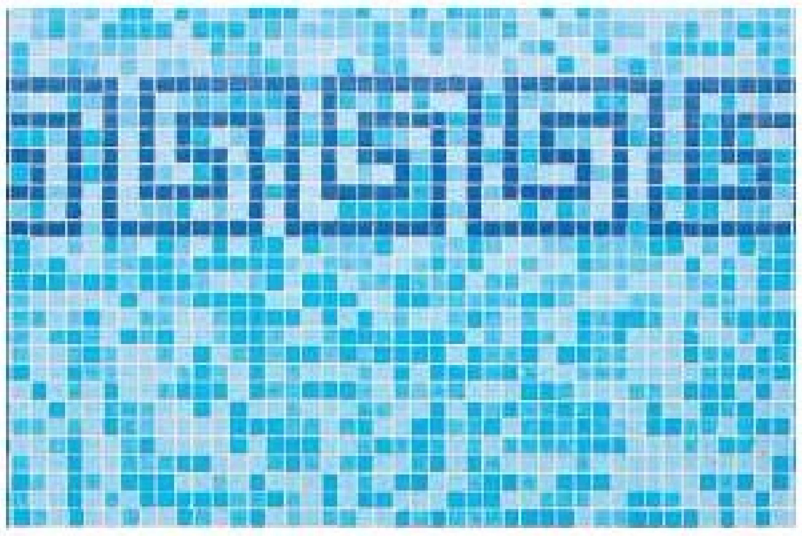
Banco de imagens/Arquivo da editora

- Translação do pentaminó: desloca-se o pentaminó 4 unidades de medida na direção horizontal.


Banco de imagens/Arquivo da editora

P Chamamos a distância de módulo da translação, mas não é necessário explorar esta nomeclatura no Ensino Fundamental.

Uma sequência de reflexões equidistantes em uma mesma direção ou translação, como os ornamentos gregos, produz uma **frisa**, também chamada de faixa ou fita.


pio3/Shutterstock/Glow Images

Frisa de piscina formada por simetria de translação

As três simetrias estudadas neste capítulo podem ser reconhecidas na arte indígena, como nas pinturas corporais, na cestaria e na cerâmica.


João Prudente/Pulsar Imagens

Artesanato de barro. Icoaraci, Belém, (PA).

Simetrias no dia a dia

P As transformações geométricas que preservam medidas são chamadas isometrias ou movimentos rígidos.

Os movimentos de reflexão, rotação e translação podem ser combinados para produzir outros padrões simétricos. Veja o exemplo das pegadas na areia abaixo.

Essas pegadas sugerem uma combinação de dois movimentos: translação (o passo para a frente) seguida de uma reflexão (as pegadas do outro pé).

O que une a reflexão, a rotação e a translação é uma propriedade comum. As transformações são exemplos de movimentos que preservam as medidas.

Hitdelight/Shutterstock/Glow Images

Pegadas na areia

A arte nacional portuguesa, a azulejaria, é baseada em movimentos simétricos.

Goran Bogicevic/Shutterstock/Glow Images

Azulejos simétricos

A aparência simétrica está presente na natureza.

Smit/Shutterstock/Glow Images

Trevo de 3 folhas

O artista plástico Antônio Peticov utiliza simetria em suas obras de arte.

Antonio Peticov/Acervo do artista

Obra do artista plástico Antônio Peticov

A simetria está presente na arte dos indígenas brasileiros.

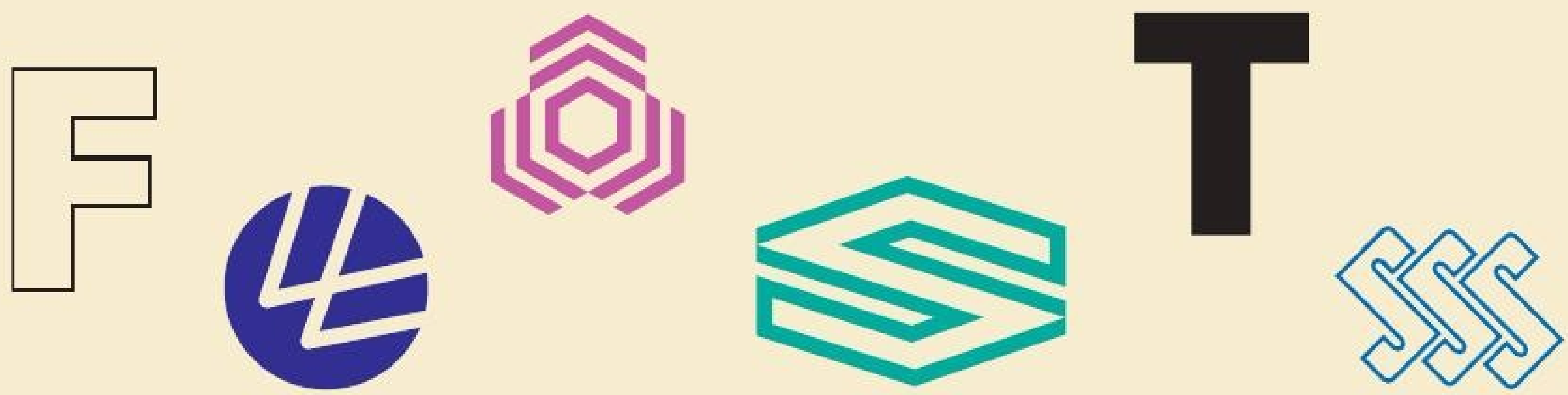
Du Zuppani/Pulsar Imagens

Artesanato indígena. Novo Airão (AM).

ATIVIDADES

faça no seu caderno

5 Indique quais entre as figuras abaixo são simétricas. Todas

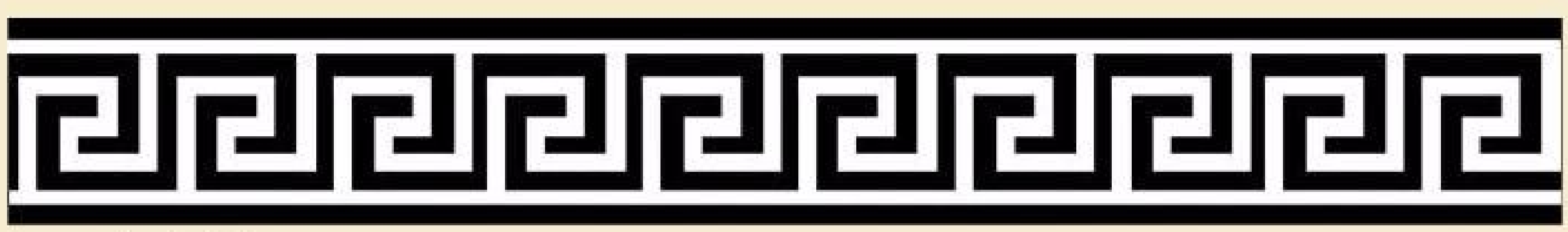


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

6 Crie um motivo, desenhe-o em uma malha quadriculada e gere uma frisa por reflexões sucessivas. Resposta pessoal.

7 Repita a atividade anterior, criando uma frisa por translação de um motivo. Resposta pessoal.

8 Era muito comum que nas aulas de desenho geométrico os alunos produzissem linhas gregas. As linhas gregas são frisas obtidas por translação, ou uma combinação de movimentos a partir de uma figura inicial chamada motivo. Escolha um motivo e construa uma linha grega. Resposta pessoal.



Orion-v/Shutterstock /Glow Images

Exemplo de linha grega

9 Procure num dicionário o significado das palavras: Resposta pessoal.

a) isometria;

b) isométrico.

PARA PESQUISAR

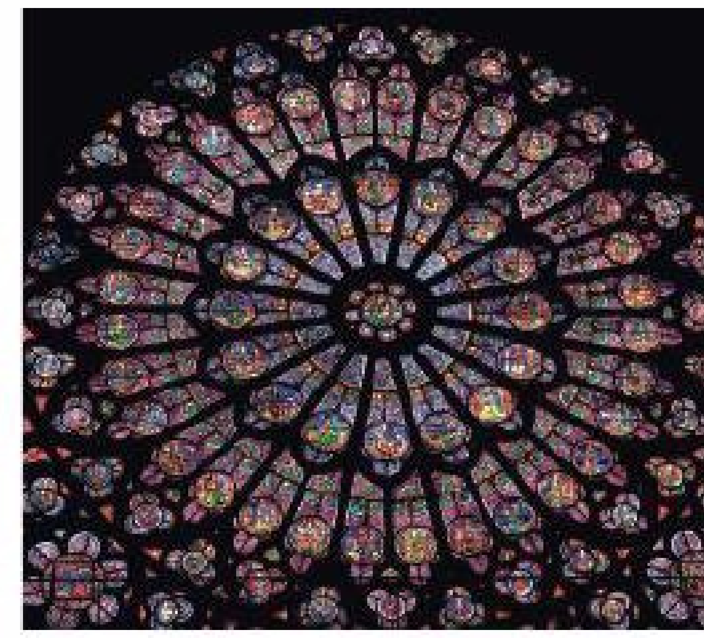
1. Pesquise em jornais, revistas ou na internet logotipos simétricos. Recorte-os ou imprima-os e cole-os numa folha de papel sulfite. Classifique-os de acordo com os seguintes atributos: Respostas pessoais.
   a) com um único eixo de simetria;
   b) com 2 eixos de simetria;
   c) com 3 eixos de simetria;
   d) com 4 eixos de simetria;
   e) com 5 eixos de simetria ou mais;
   f) com simetria de rotação de 90°;
   g) com simetria de rotação de 120°;
   h) com simetria de rotação de 180°;
   i) com alguma outra simetria de rotação;
   j) com simetria de translação.
2. Quais são as simetrias mais frequentes nos logotipos? Quais as menos frequentes? Compare suas conclusões com as de seus colegas. Resposta pessoal.
3. Observe a natureza, as artes, a arquitetura e os objetos do cotidiano. Identifique padrões geométricos. Desenhe-os, recorte-os de materiais impressos (desde que seja permitido) ou fotografe-os. Combine com seu professor e com seus colegas a organização de uma exposição ou painel. Resposta pessoal.

Mosaicos e ornamentos

A arte e a cultura estão repletas de simetrias e padrões de repetição.


Hemis/Alamy/Other Images

Mosaico do Castelo de Alhambra, que fica na cidade de Granada, Espanha.


kelis/Shutterstock/Glow Images

Rosácea da Catedral de Notre Dame, Paris, França.

Alguns matemáticos e artistas plásticos se interessaram pela arte árabe e estudaram suas propriedades geométricas. Um artista que estudou com profundidade os mosaicos árabes foi o gravurista holandês M. C. Escher (1898-1972).


M. C. Escher/The M.C. Escher Foundation

Xilogravura *Plane-filling Motif with Birds*, criada em 1949.


M. C. Escher/The M.C. Escher Foundation

Xilogravura *Fish vignette*, criada em 1954.

Ladrilhando ou pavimentando com polígonos

Imagine um plano coberto por polígonos sem deixar buracos e sem sobreposição de polígonos. Dizemos que esse mosaico de polígonos é uma **pavimentação** ou um **ladrilhamento**. Veja exemplos:


RAYphotographer/Shutterstock/Glow Images

Ladrilhamento com polígonos variados


Irmairma/Shutterstock

Ladrilhamento com um único tipo de polígono

Os ladrilhamentos podem ser formados por um único tipo de polígono ou por uma combinação de dois ou mais tipos de polígonos.


EstudioMil/Arquivo da editora

Mas atenção: para ser um ladrilhamento não pode haver buracos no plano.

Um problema matemático interessante é o de determinar quais são os ladrilhamentos formados por um único tipo de polígono regular. O quadrado é um exemplo bastante conhecido:

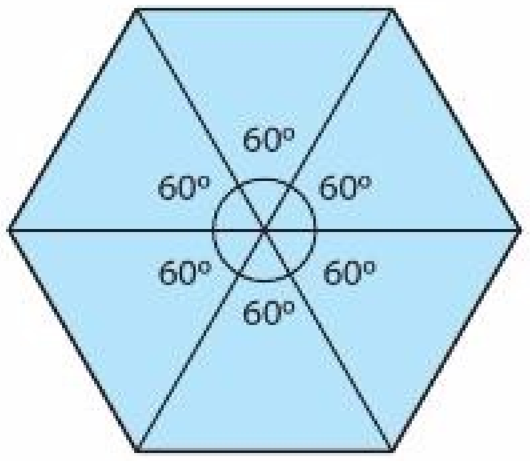
Você sabe dizer por que o quadrado é um polígono que gera um ladrilhamento perfeito?

A resposta está no ângulo reto.

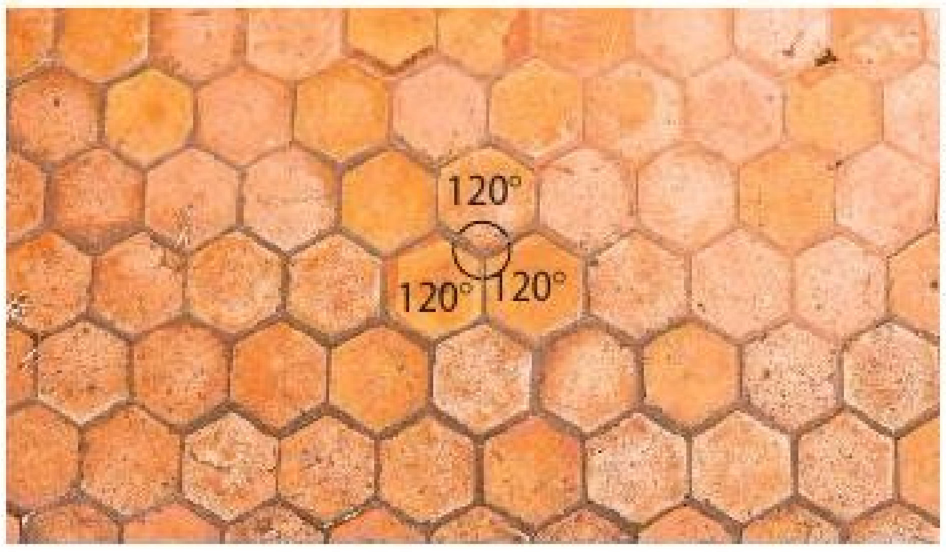
Todos os ângulos internos de um quadrado medem 90°, e $4 \cdot 90° = 360°$, ou seja, 90 divide 360. Quando a medida do ângulo do polígono é um divisor de 360°, o encaixe é perfeito.

Ladrilhamento formado por quadrados

O triângulo equilátero, que tem um ângulo interno que mede 60°, também ladrilha perfeitamente, pois $6 \cdot 60° = 360°$.



Outro polígono que permite ladrilhamento perfeito é o hexágono regular, pois $3 \cdot 120° = 360°$.



Ladrilhamento formado por hexágonos

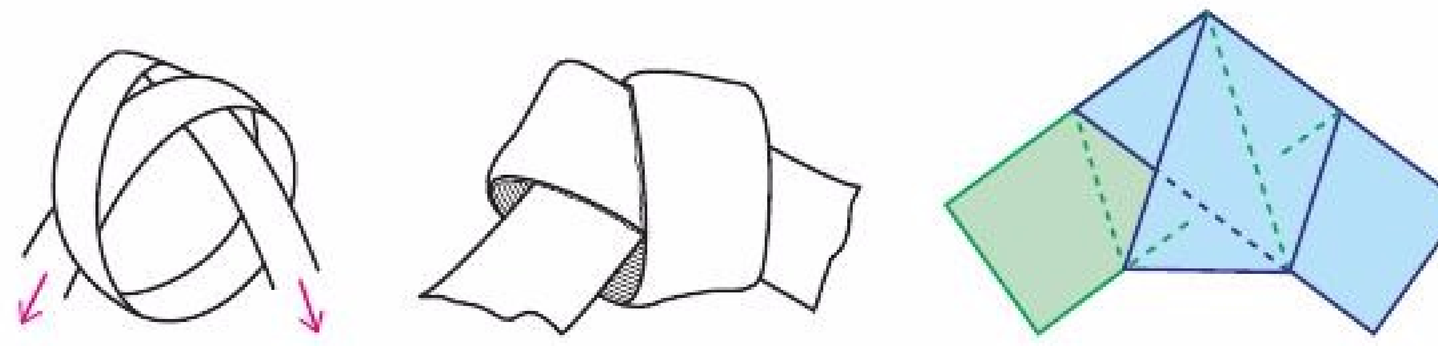
Esse mesmo encaixe está presente nos favos de mel, que são hexagonais.

Colmeia

O triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono são os únicos polígonos regulares que permitem produzir um ladrilhamento perfeito usando apenas um tipo de polígono.

Verifique que pentágonos regulares não preenchem o plano. Recorte alguns pentágonos regulares e tente compor um ladrilhamento.

Não é simples construir um pentágono regular com régua e compasso, mas há um jeito engenhoso de produzir um pentágono quase regular dando nó em uma fita de papel. Observe a sequência.

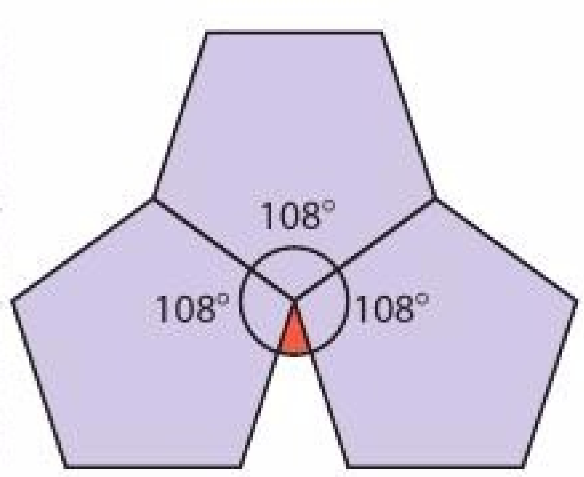


Contexto Digital/ Arquivo da editora

Ilustrações: EstudioMil/ Arquivo da editora

Não é possível fechar uma volta completa de 360° juntando ângulos de 108°. Veja:

Banco de imagens/Arquivo da editora



$$3 \cdot 108° < 360°$$
$$4 \cdot 108° > 360°$$

Assim, podemos concluir que para ser possível o ladrilhamento com um só tipo de polígono, o ângulo interno desse polígono tem que ser um divisor de 360°.

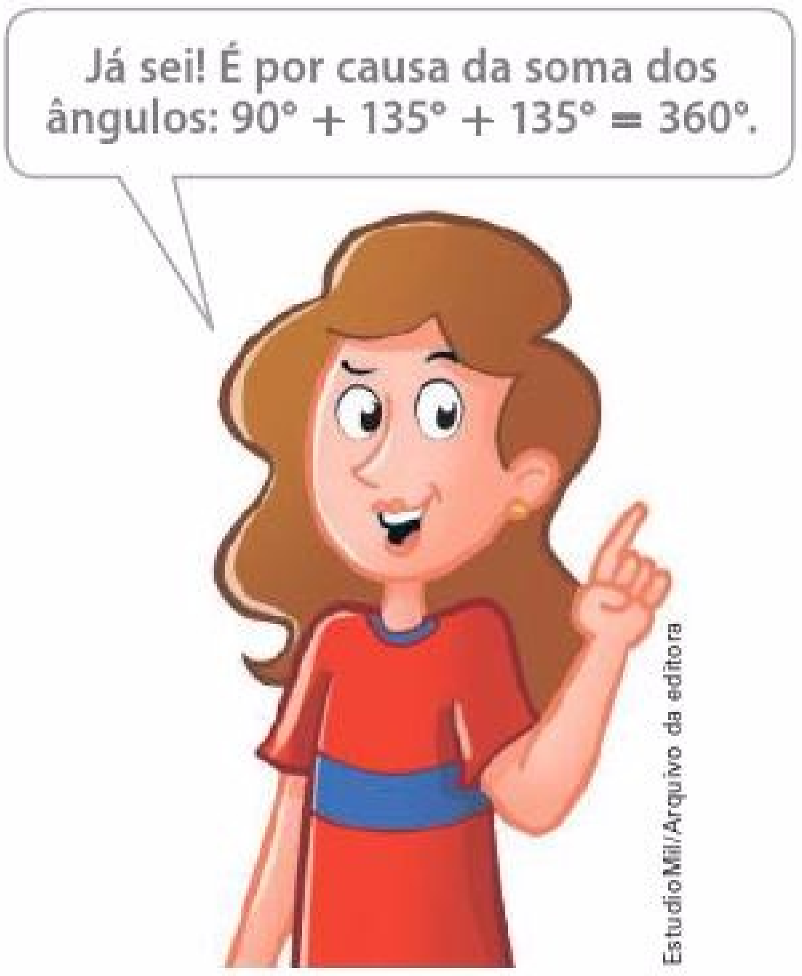
Polígono regular de lado *n*	Medida do ângulo interno	
3	60°	→ 60 divide 360
4	90°	→ 90 divide 360
5	108°	
6	120°	→ 120 divide 360
7	128°	
8	135°	
9	140°	
10	144°	

Porém, é possível cobrir uma superfície sem deixar buracos mesmo utilizando polígonos cuja medida do ângulo interno não é um divisor de 360. Basta combinar dois tipos de polígonos.

Veja:

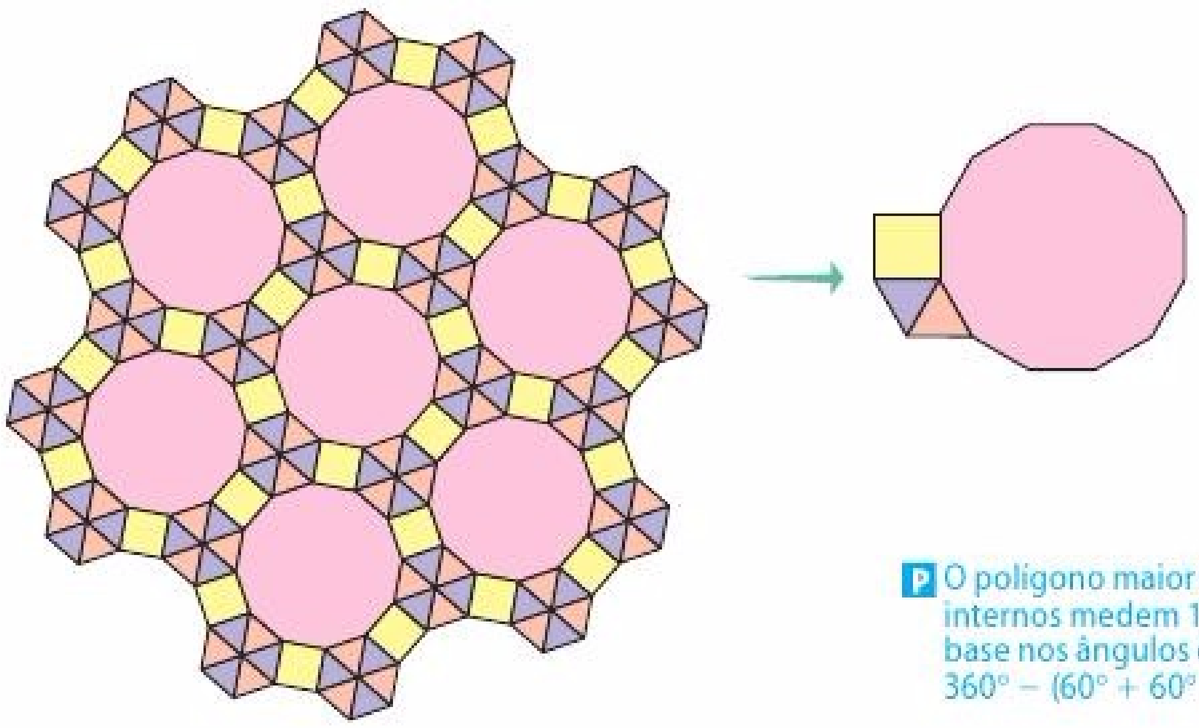
PAIRUT/Shutterstock/Glow Images

Ladrilhamento formado por octógonos e quadrados



EstudioMil/Arquivo da editora

Outro exemplo é o mosaico formado por triângulos equiláteros, quadrados e dodecágonos (12 lados) regulares, como mostrado abaixo.

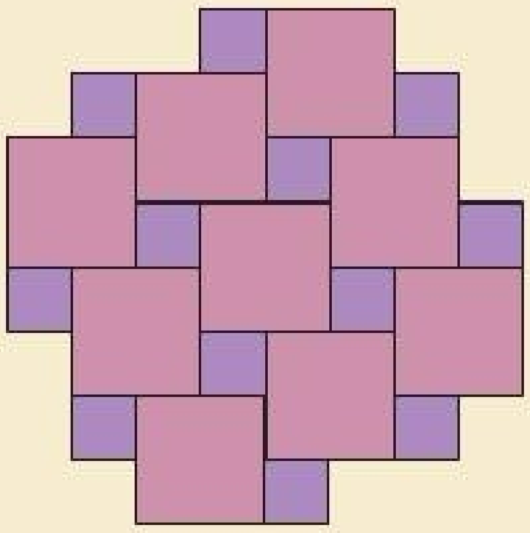


P O polígono maior tem 12 lados, seus ângulos internos medem 150°, como se pode calcular com base nos ângulos dos triângulos e do quadrado: $360° - (60° + 60° + 90°) = 360° - 210° = 150°$.

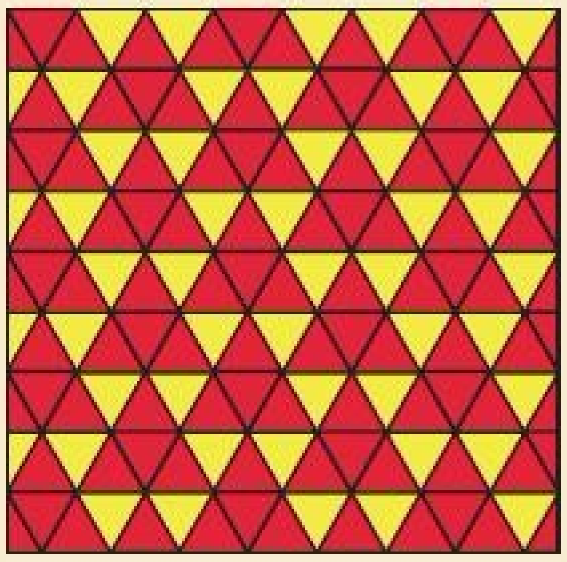
ATIVIDADES

faça no seu caderno

10 O mosaico abaixo é formado por quadrados de dois tamanhos diferentes. Reproduza um mosaico como este no seu caderno ou em uma malha quadriculada. Resposta pessoal.



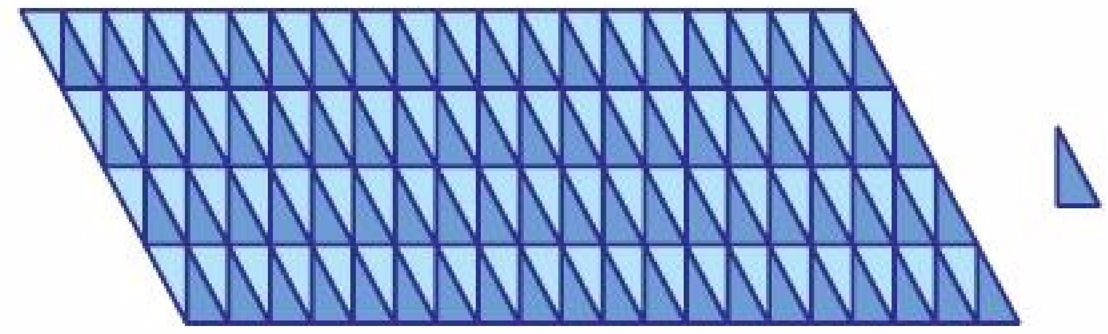
11 O mosaico abaixo é formado apenas por triângulos. Inspirado neste modelo, reproduza ou crie um mosaico que só tenha triângulos. Resposta pessoal.



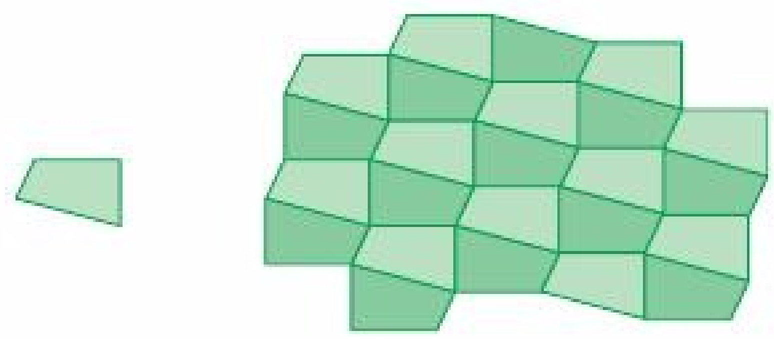
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Mosaicos não regulares

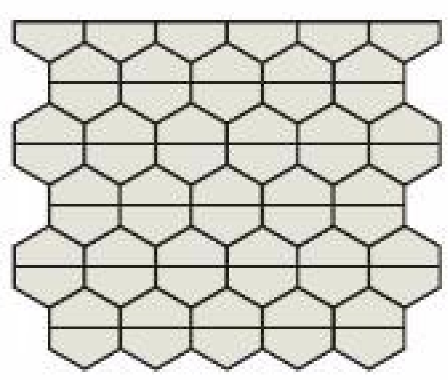
Os estudiosos de padrões geométricos sabem que é sempre possível ladrilhar usando um único tipo de triângulo (qualquer triângulo).

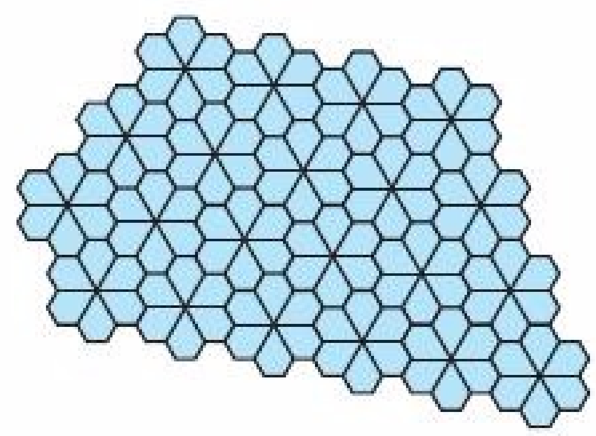


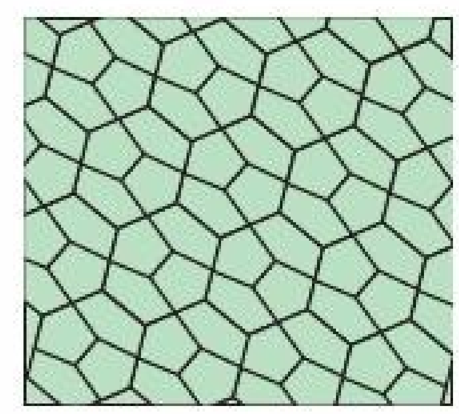
Com um quadrilátero também é sempre possível. A razão é a soma dos ângulos internos, que é 360° para qualquer quadrilátero.



Quanto aos pentágonos, o ladrilhamento só é possível em certos casos, como os mostrados abaixo.







P Os pisos paulistanos reproduzem em versão estilizada o mapa do estado de São Paulo, um octógono que pode ser formado de várias maneiras como, por exemplo, dois trapézios com orientações diferentes (giro de 180°). Mas também pode ser composto usando-se três tipos de lajotas: a branca, a preta e a mista, com uma parte branca e outra preta, separadas por uma diagonal.

Veja um exemplo de um ladrilhamento que mostra uma composição de octógonos não regulares.

Ladrilhamento das calçadas da cidade de São Paulo

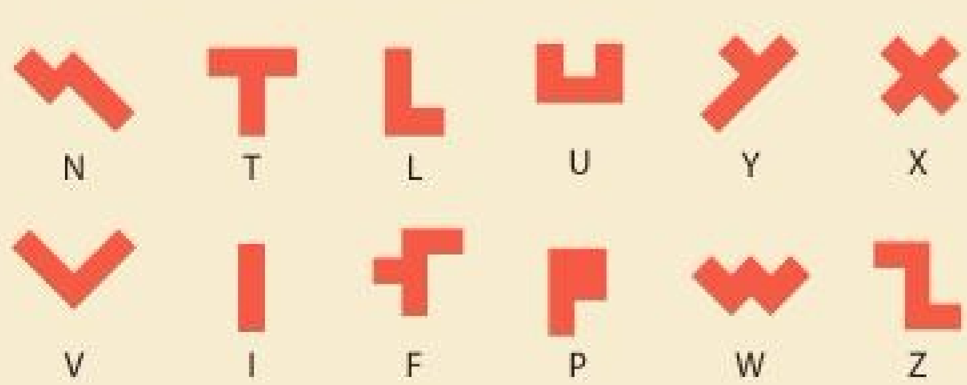
Douglas Cometti/Folhapress

ATIVIDADES

faça no seu caderno

Laboratório de geometria

12 Um pentaminó é um polígono composto por 5 quadrados congruentes ligados por pelo menos um lado. Há 12 tipos de pentaminós:



a) Pavimente uma malha quadriculada usando um mesmo tipo de pentaminó. Use cores diferentes para compor o mosaico de pentaminós.

b) Escolha outro pentaminó e pavimente outra malha.

c) Pavimente uma malha usando apenas o pentaminó em forma de cruz. Respostas pessoais.

13 Construa um triângulo qualquer. Recorte um molde desse triângulo.

Construa um mosaico formado apenas com triângulos congruentes ao triângulo que você construiu.

É sempre possível cobrir o plano com um mesmo tipo de triângulo? Sim

Compare seus resultados e suas conclusões com os de seus colegas.

14 Cubra uma folha de papel sulfite tamanho A4 com um mosaico formado por um único tipo de triângulo.

Faça essa atividade com régua e compasso.

Pinte o mosaico para destacar as linhas de fronteira. Respostas pessoais.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

REVISE O QUE ESTUDOU

P Antes de propor estas atividades combine com os alunos para eles trazerem revistas e jornais. Depois, pode ser montado um painel.

faça no seu caderno

1 Pesquise e recorte logotipos de marcas conhecidas que tenham: Respostas pessoais.

a) apenas um eixo de simetria;
b) dois eixos de simetria;
c) três eixos de simetria;
d) quatro ou mais eixos de simetria.

2 Pesquise e recorte logotipos que tenham simetria de: Respostas pessoais.

a) rotação;
b) translação.

3 Identifique formas simétricas nos objetos do seu entorno, na natureza, em obras de arquitetura, arte, artesanato, etc. Depois, faça uma lista.

P Veja comentário no Manual do Professor. Respostas pessoais.

4 Escreva palavras formadas apenas por letras que tenham:

a) eixo de simetria horizontal; DOCE, BODE, EIXO, DEDO, etc.
b) eixo de simetria vertical; TIA, TUA, UVA, AMA, UMA, etc.
c) simetria de rotação. SONHO, NINHO, XIXI, SINO, etc.

5 Desenhe uma figura geométrica que tenha:

a) apenas um eixo de simetria; Triângulo isósceles
b) dois eixos de simetria; Retângulo e losângo
c) três eixos de simetria; Triângulo equilátero
d) quatro eixos de simetria; Quadrado, pentaminós em forma de cruz
e) seis eixos de simetria; Hexágono regular
f) simetria de rotação. Paralelogramo

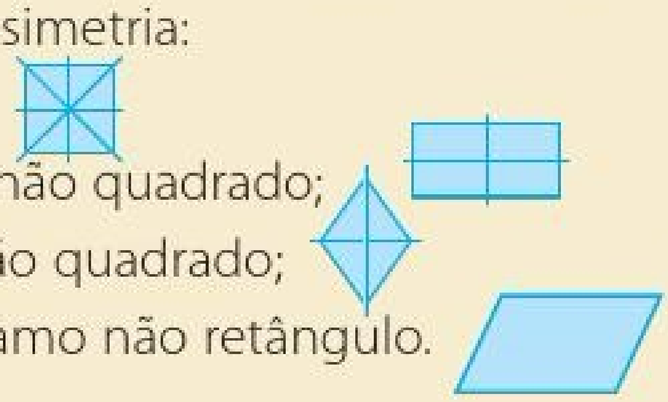
P Veja comentário no Manual do Professor.

6 Descubram quantos eixos de simetria têm os seguintes quadriláteros:

a) quadrado; 4
b) retângulo não quadrado; 2
c) losango não quadrado; 2
d) paralelogramo não retângulo. 0

7 Esboce no seu caderno os quadriláteros e trace seus eixos de simetria:

a) quadrado;
b) retângulo não quadrado;
c) losango não quadrado;
d) paralelogramo não retângulo.



8 Quantos eixos de simetria tem:

a) um triângulo equilátero; 3
b) um triângulo isósceles; 1
c) um triângulo escaleno. 0

9 Esboce no seu caderno os triângulos e coloque uma legenda indicando seus eixos de simetria.

P Veja representação da resposta no Manual do Professor.

10 Quantos eixos de simetria tem um:

a) pentágono regular? 5
b) hexágono regular? 6
c) octógono regular? 8

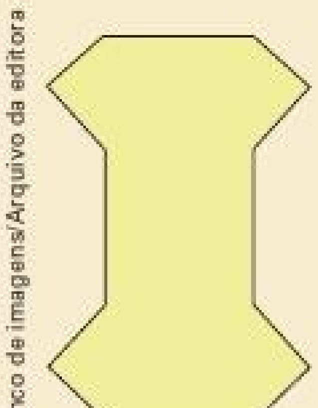
11 O pentagrama é a estrela de cinco pontas que se constrói ligando os vértices não consecutivos de um pentágono regular. Esboce no seu caderno um pentagrama e determine quantos são seus eixos de simetria. O pentagrama tem 5 eixos de simetria.

12 Desenhe um quadrilátero qualquer que caiba em um quadrado de 3 cm por 3 cm e recorte-o para servir como molde. Com esse molde, produza um mosaico plano formado por esse quadrado para cobrir um quadrado maior de 12 cm por 12 cm, sem deixar buracos. Resposta pessoal.

Estudio Mil/ Arquivo da editora

13 Use o papel quadriculado ou um geoplano de papel e produza uma forma livre que seja simétrica. Resposta pessoal.

14 A figura abaixo está presente nos ornamentos árabes do Castelo de Alhambra, na cidade de Granada, Espanha. Trata-se de um polígono que preenche o plano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

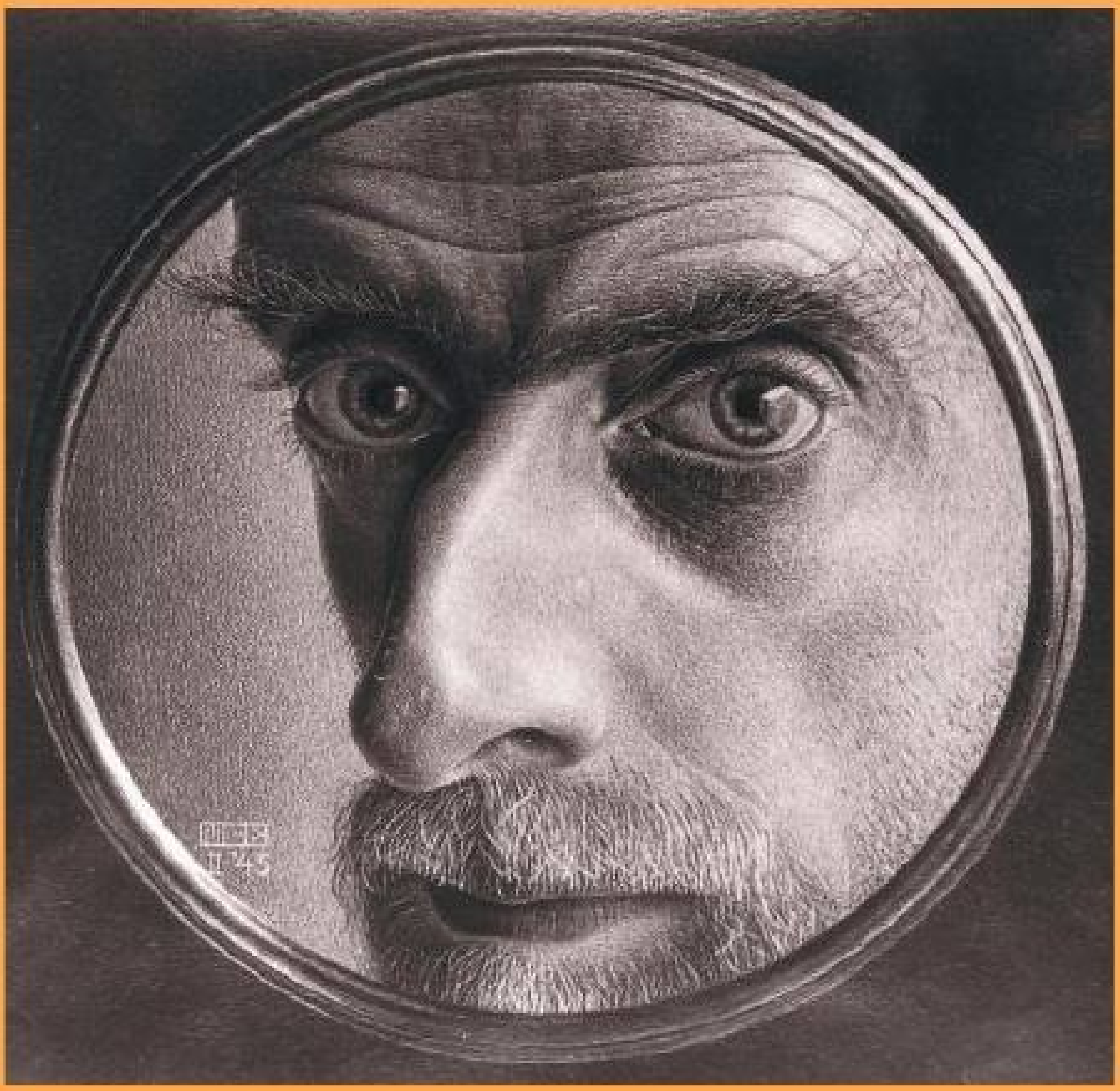
Reprodução/<http://www.mat.ucm.es/>

Dê as características deste polígono quanto ao número de lados (nomeio-o), convexidade e eixos de simetria.
É um dodecágono (12 lados) não convexo e com dois eixos de simetria.

MOSAICOS ESCHERIANOS

O artista plástico M. C. Escher conhecia todas as propriedades geométricas que acabamos de estudar e ficou famoso no mundo todo por suas gravuras com motivos que preenchem o plano infinitamente.

M. C. Escher/The M.C. Escher Foundation



Autorretrato de M. C. Escher (1898-1972).

M. C. Escher/The M.C. Escher Foundation

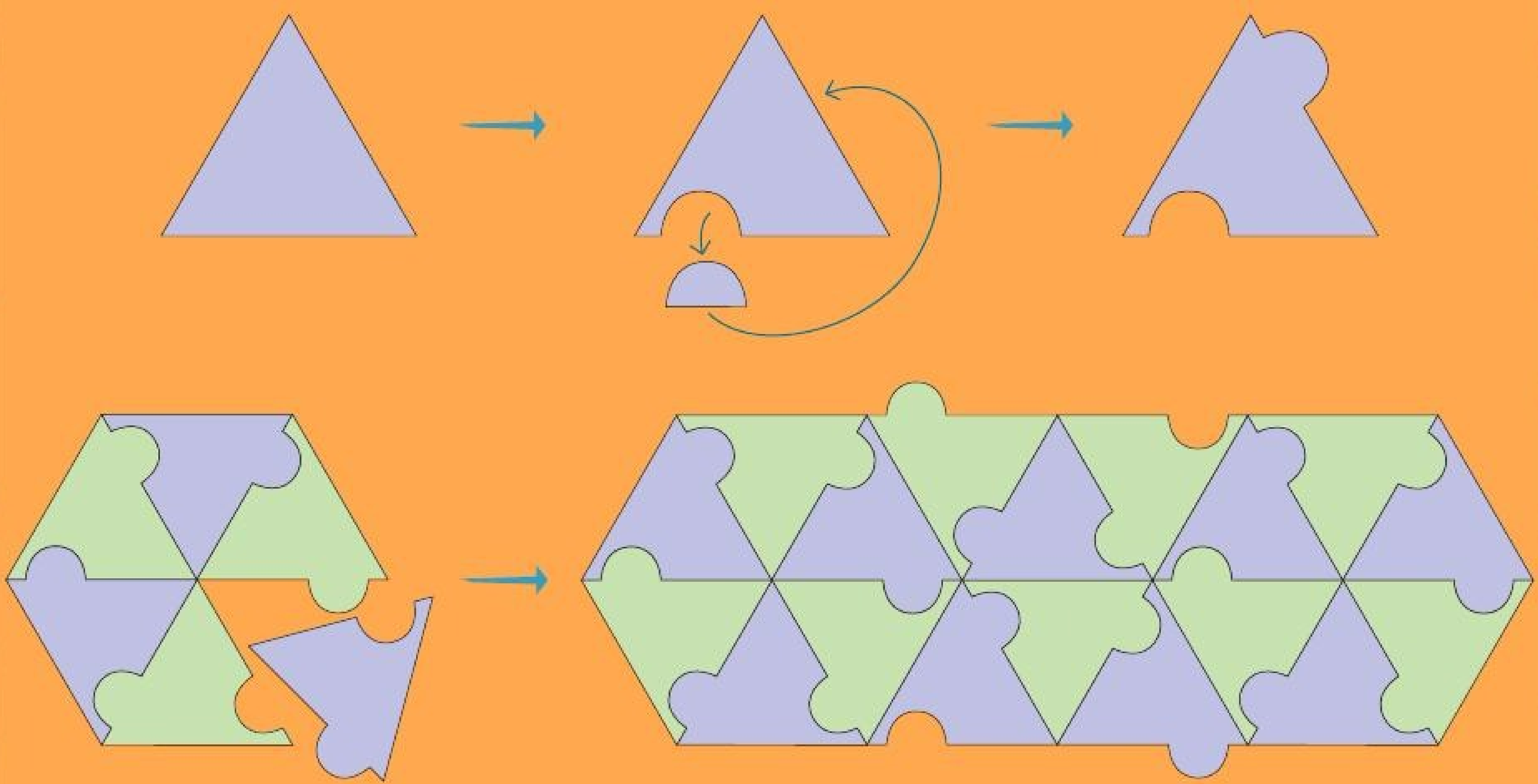
O Sol e a Lua. 251 cm × 270 cm, M. C. Escher.

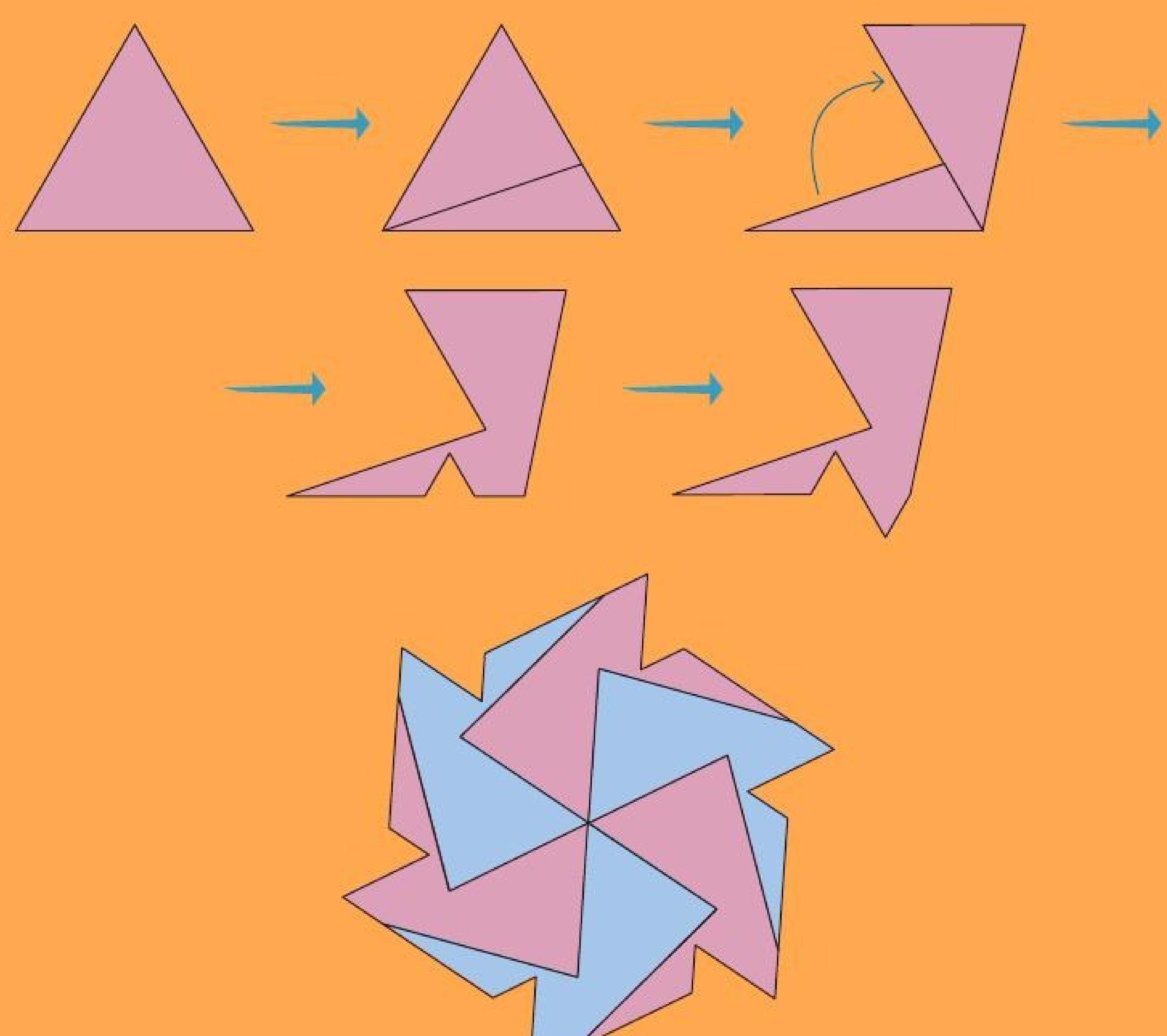
Ele morou no sul da Espanha por cinco anos, e nesse período teve a oportunidade de estudar a obra dos mosaicistas árabes que viveram nas cidades de Córdoba, Granada e Sevilha, cuja arte é essencialmente geométrica.

Martin Froyda/Shutterstock/Glow Images

Mural de mosaico do Castelo de Alhambra, em Granada, Espanha.

O segredo dos padrões escherianos é transformar um triângulo, quadrilátero ou hexágono por meio de movimentos de rotação, translação ou reflexão. O produto final é um mosaico formado por um único tipo de forma geométrica.





Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ladrilhos feitos dessa maneira cobrem o plano sem deixar buracos.

CAPÍTULO 8

TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

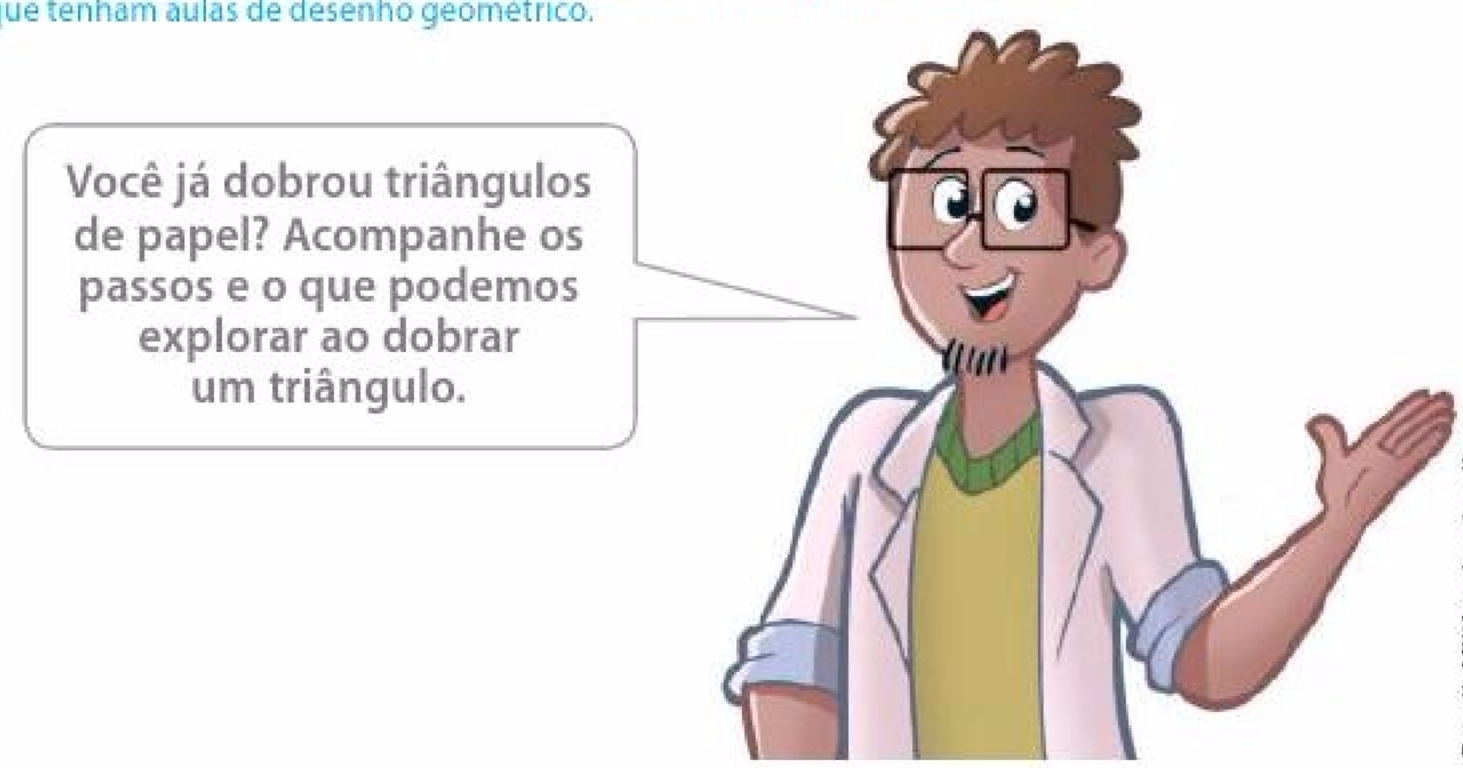
Você já sabe o que é um triângulo e um quadrilátero, conhece seus elementos e algumas propriedades. Neste capítulo você vai aprofundar seu conhecimento sobre essas figuras geométricas, em especial suas propriedades e como as utilizamos no dia a dia.

Triângulos

Quando estudamos os triângulos, nossa atenção é desviada para seus vértices, ângulos e lados e, dependendo da medida deles, podemos saber algo sobre o tipo do triângulo, seu perímetro e sua área.

Mas há outros elementos importantes em um triângulo, como por exemplo alguns segmentos especiais que ligam um vértice a um ponto pertencente a um lado do triângulo. P Estes segmentos são chamados de *cevianas*, mas o uso dessa nomenclatura não é importante no Ensino Fundamental; ela é mais utilizada em cursos técnicos que tenham aulas de desenho geométrico.

P Antes de iniciar o capítulo faça uma revisão com os alunos levantando o que sabem sobre triângulos e quadriláteros. Aproveite a interação para socializar nomenclatura e notação, bem como ajustar pequenos erros que os alunos cometem, como chamar losango de "losângulo".



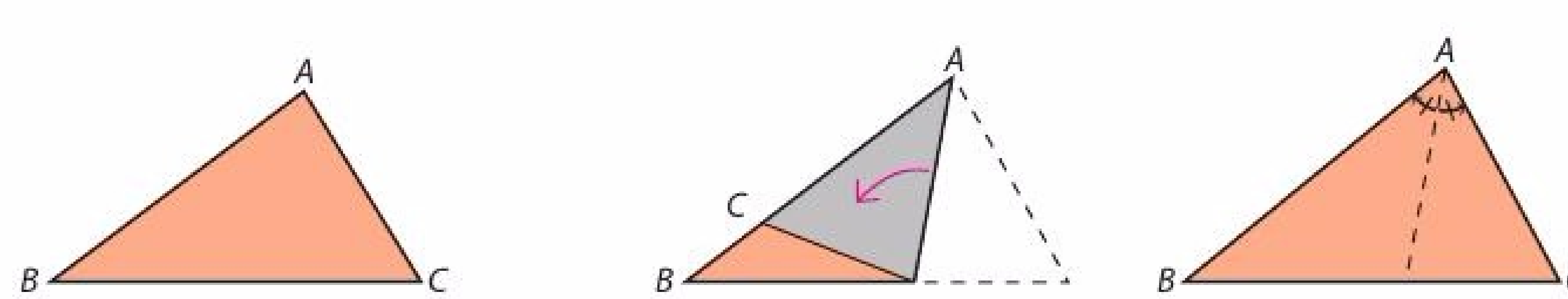
EstudioMil/Arquivo da editora

Consideraremos dois tipos de dobras:

1º tipo de dobra:

Considere um triângulo *ABC* feito em papel. Dobre-o pelo vértice *A*, de modo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, que são adjacentes, se sobreponham. Depois desdobre o triângulo.

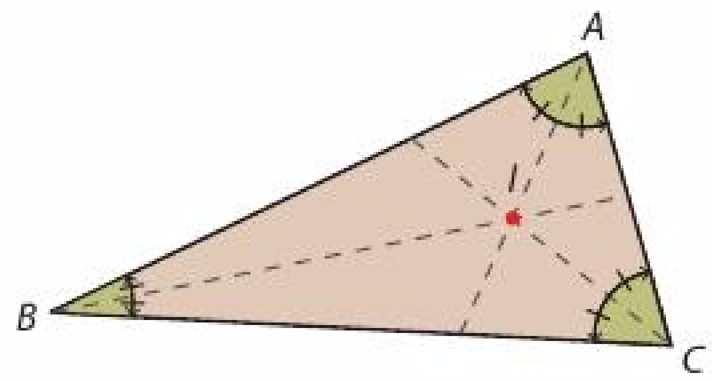
Banco de imagens/Arquivo da editora



O vinco formado corresponde ao segmento que divide o ângulo de vértice *A* em duas partes iguais e é chamado de **bissetriz** do ângulo de vértice *A*. Um triângulo tem 3 bissetrizes.

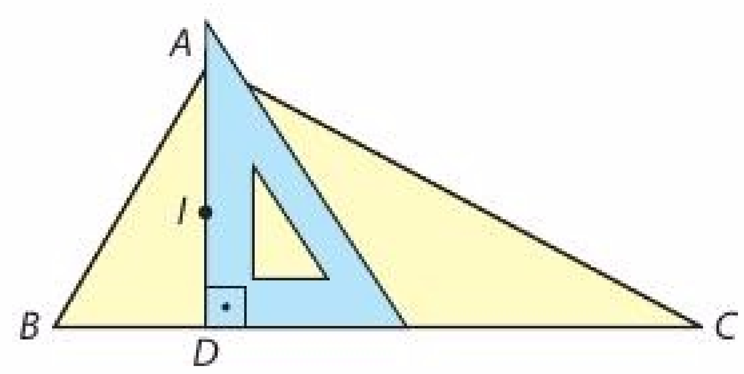
Agora, recorte um triângulo de papel e dobre-o de modo a achar as três bissetrizes dos ângulos internos.

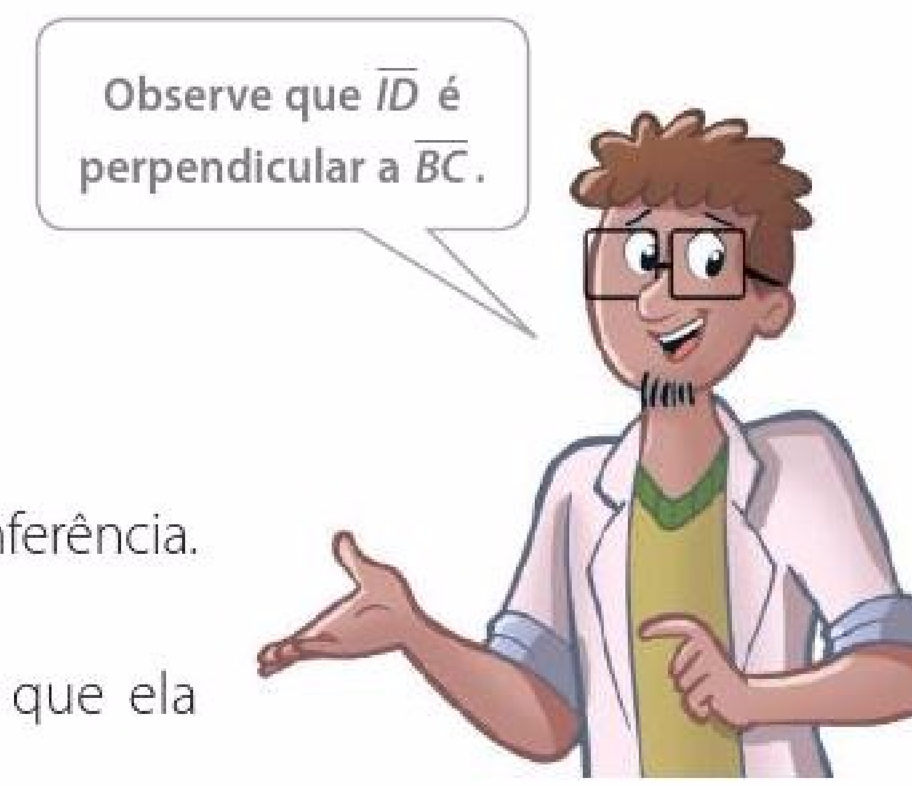
Se você dobrou com precisão, descobriu que as bissetrizes se encontram em um único ponto I, interno ao triângulo de papel. Esse ponto é chamado **incentro**.



O incentro tem uma propriedade importante, vamos explorá-la.

Pegue um esquadro e um compasso. Coloque o esquadro sobre um dos lados, conforme o desenho, e trace o segmento $\overline{ID}$.

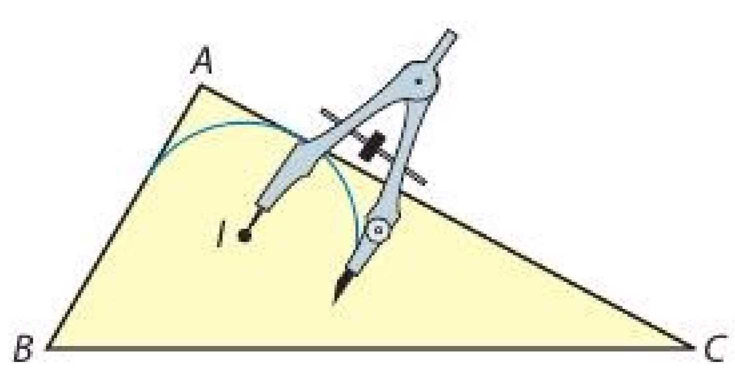


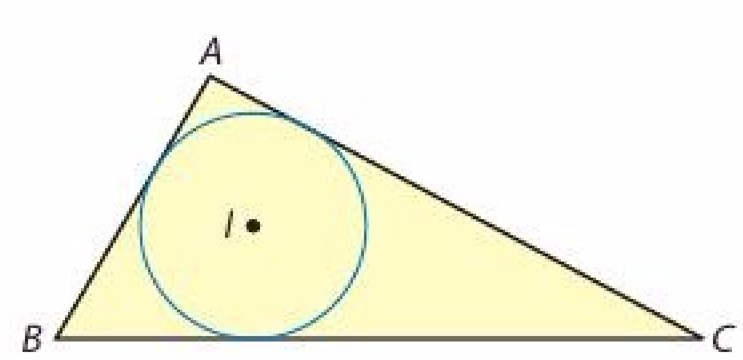


EstudioMil/Arquivo da editora

Com o centro do compasso em I e abertura $\overline{ID}$, trace uma circunferência. Observe que a circunferência encosta nos lados do triângulo.

Quando uma circunferência encosta em um lado, dizemos que ela **tangenciou** o lado.



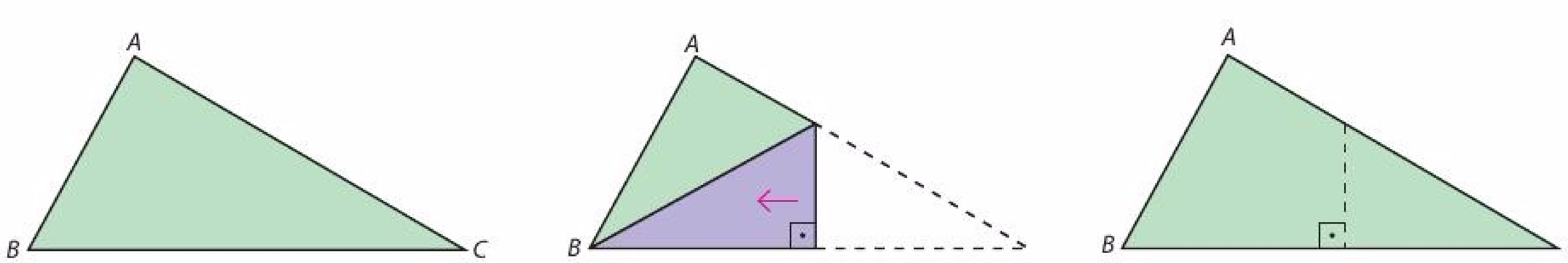


O incentro, ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

2º tipo de dobra:

Considere um triângulo *ABC* feito em papel e dobre-o de modo a fazer coincidir dois vértices consecutivos. Na representação a seguir os vértices *B* e *C* ficaram sobrepostos. Depois desdobre o triângulo.

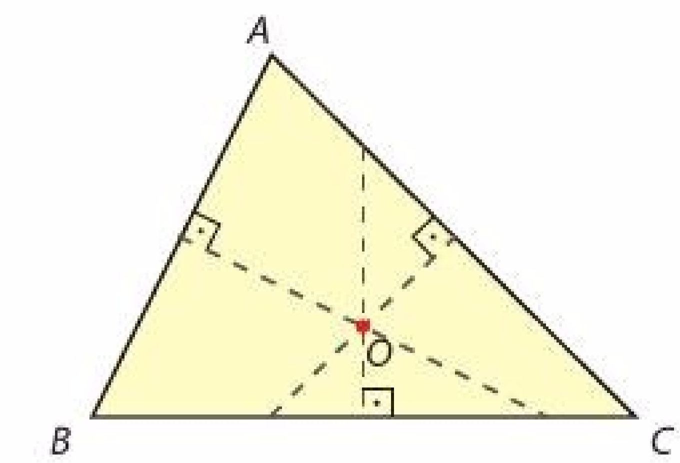


O segmento perpendicular que você obtém com a dobra é chamado de **mediatriz** do segmento $\overline{BC}$.

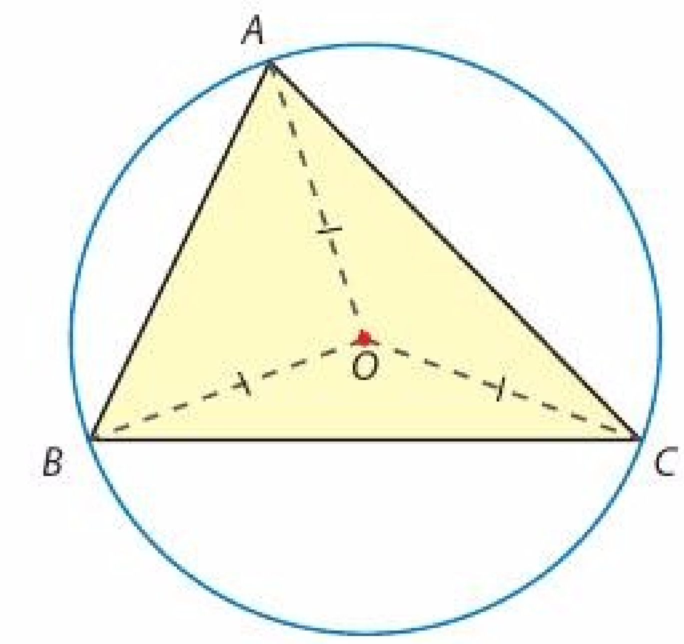
Lembre-se: Um triângulo acutângulo tem os três ângulos agudos.

Reproduza a experiência recortando um triângulo acutângulo de papel e dobrando de modo a encontrar as três mediatrizes dos lados.

Se você dobrou com precisão, descobriu que as mediatrizes se encontram em um único ponto *O* interno ao triângulo de papel. Esse ponto é chamado **circuncentro**.



Observe que os segmentos que ligam o circuncentro ao vértice têm todos a mesma medida. Isso quer dizer que o circuncentro, que é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo, coincide com o centro da circunferência que contém os vértices do triangulo, também chamada de circunferência circunscrita, como mostrado ao lado.



Construções com régua e compasso

EstudioMil/Arquivo da editora

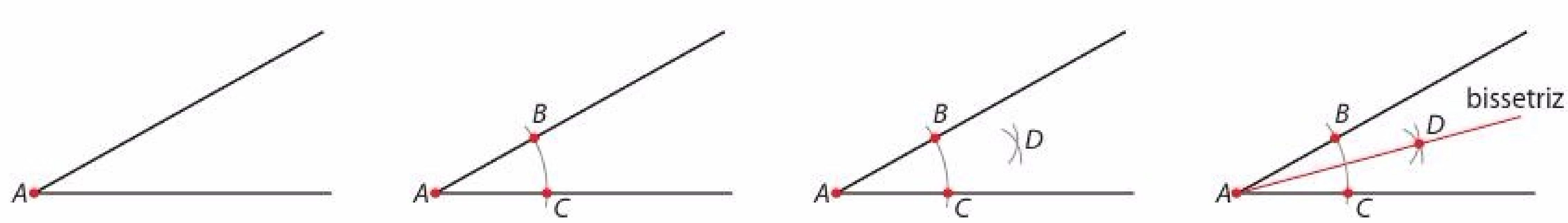
Bissetriz de um ângulo

1º) Trace duas semirretas com origem comum, definindo um ângulo de vértice *A*.

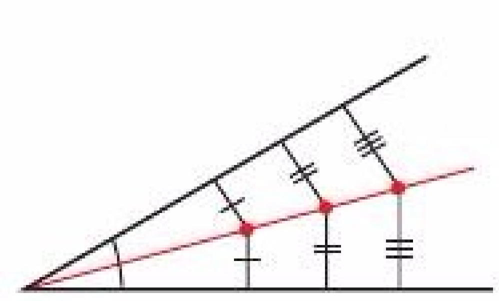
2º) Com centro em *A*, faça um arco que intercepte os lados do ângulo, determinando os pontos *B* e *C*.

3º) Com centro em *B*, depois em *C*, trace dois arcos com a mesma abertura, determinando assim o ponto *D*.

4º) A semirreta de origem *A* e que passa por *D* é a **bissetriz** do ângulo de vértice *A*.



Qualquer ponto da bissetriz é equidistante das retas suportes dos lados do ângulo e a bissetriz divide o ângulo em dois ângulos com medidas iguais.



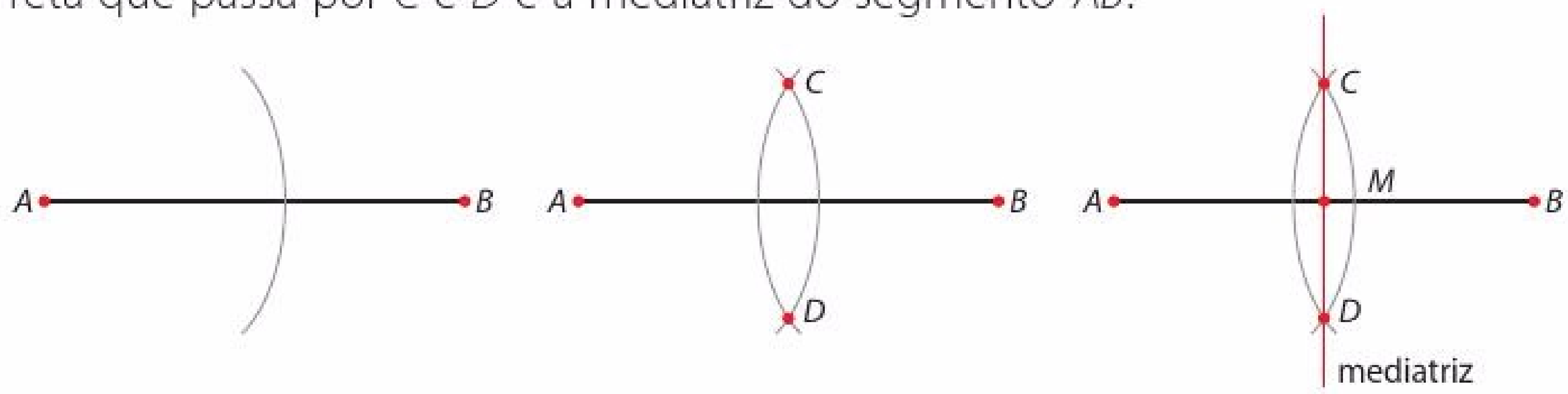
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Mediatriz de um segmento

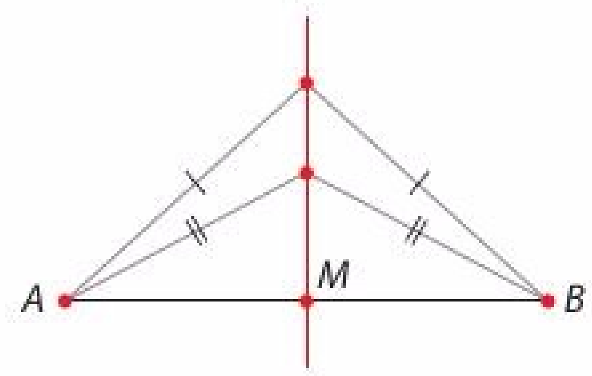
1º) Trace um segmento $\overline{AB}$.

2º) Com centro em A, depois em B, trace dois arcos com a mesma abertura (maior que a metade da medida de $\overline{AB}$). Assim ficam determinados os pontos C e D.

3º) A reta que passa por C e D é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



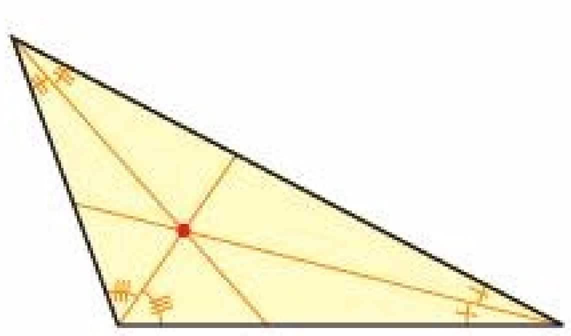
Qualquer ponto da reta mediatriz está equidistante dos pontos A e B e o ponto M é o ponto médio de $\overline{AB}$.



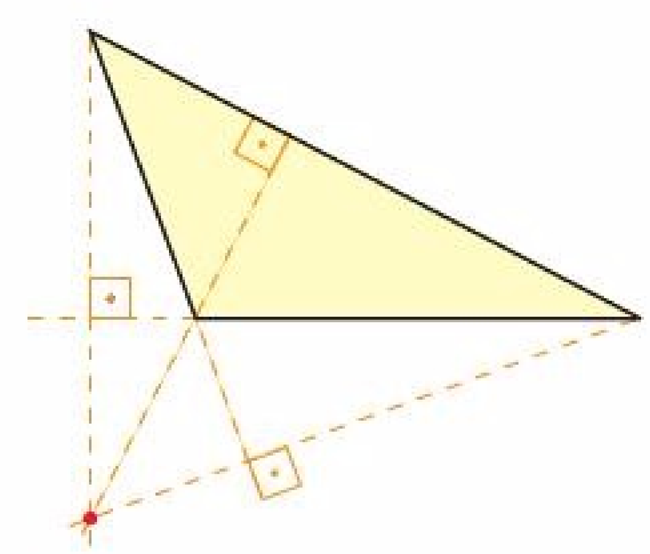
Pontos notáveis de um triângulo

Vimos que o encontro das bissetrizes é um ponto, o mesmo ocorre no encontro das mediatrizes, das alturas e das medianas.

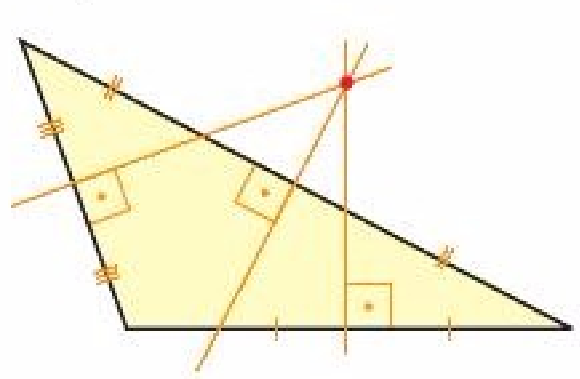
Esses pontos são especiais e conhecidos como pontos notáveis.



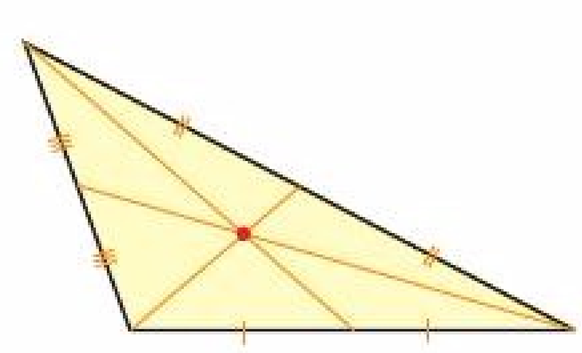
Incentro: é o encontro das bissetrizes dos ângulos internos.



Ortocentro: é o encontro das retas suportes das alturas.

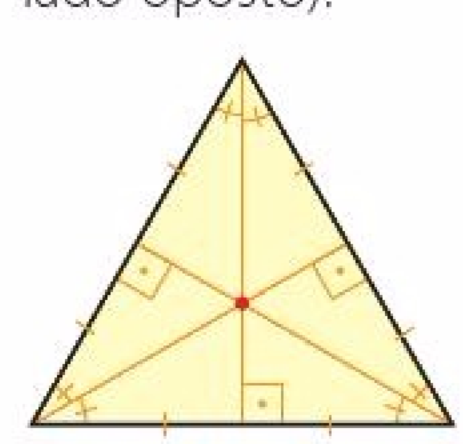


Circuncentro: é o encontro das mediatrizes dos lados.

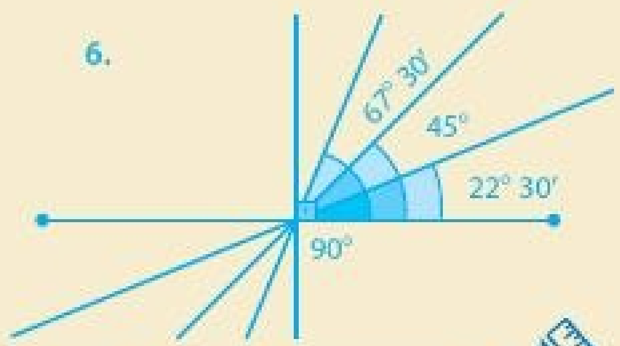


Baricentro: é o encontro das medianas (segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto).

No triângulo equilátero os pontos notáveis coincidem:

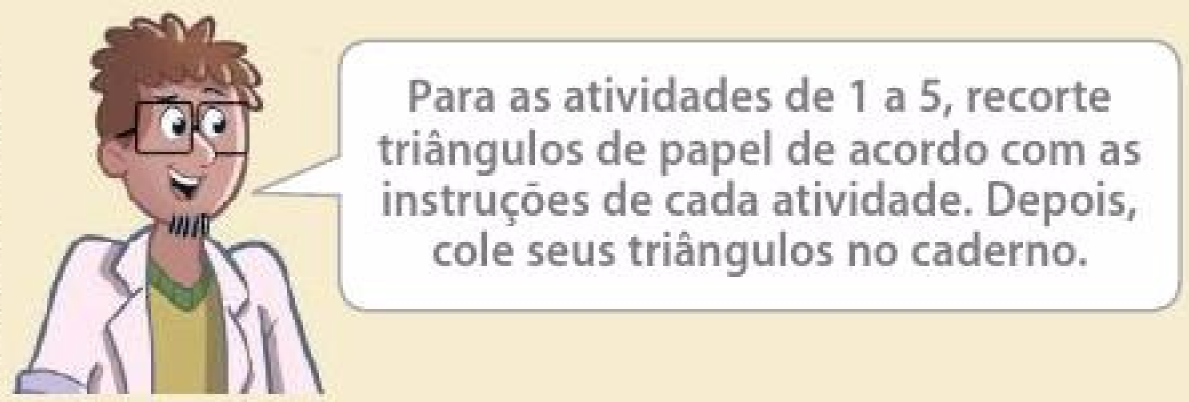


6.

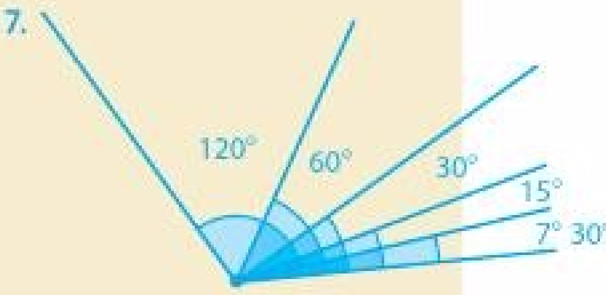


Laboratório de geometria

EstudioMil/Arquivo da editora



7.

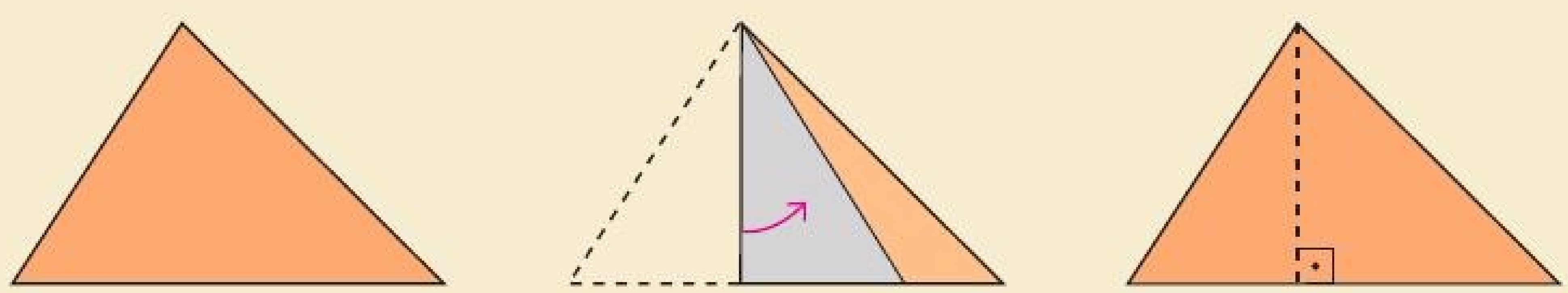


1 Dobre um triângulo *ABC* escaleno e determine o incentro. Observe que o centro da circunferência inscrita é o incentro.

2 Determine, por dobradura, o circuncentro de um triângulo *ABC* escaleno. Observe que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita.

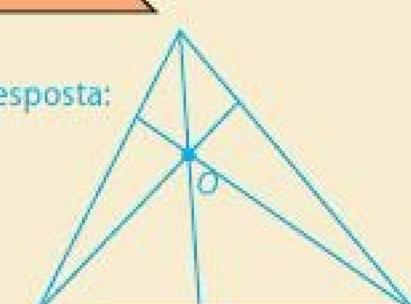
3 Recorte um triângulo equilátero. Determine o incentro e o circuncentro desse triângulo. O que você descobriu? No triângulo equilátero o incentro e o circuncentro coincidem.

4 Construa um triângulo acutângulo de papel e determine, por dobradura, como mostra a ilustração, a altura relativa a uma das bases.



Depois, determine o ortocentro desse triângulo.

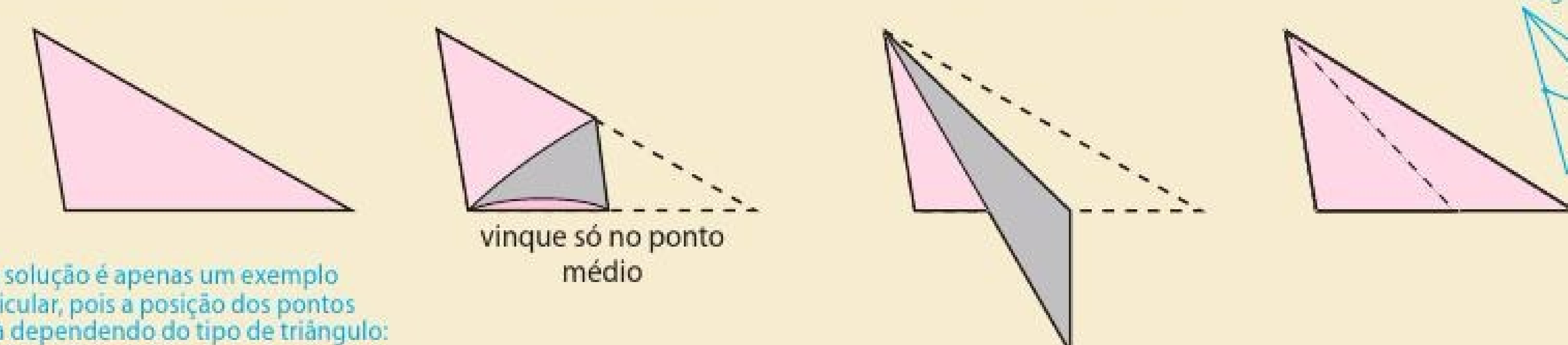
Exemplo de resposta:



O **ortocentro** é o ponto de intersecção das **alturas** de um triângulo.

5 Em um triângulo, a **mediana** é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra no ponto médio do lado oposto a este vértice. Veja os passos para obter uma das medianas de um triângulo:

Sugestão de resposta:



P Essa solução é apenas um exemplo particular, pois a posição dos pontos varia dependendo do tipo de triângulo: se retângulo, equilátero, acutângulo, etc.

Agora, encontre o ponto de intersecção das três medianas de um triângulo, que é chamado **baricentro**.

6 Construa, com régua e compasso, ângulos com as seguintes medidas:

a) 90° b) 45° c) 22° 30′ d) 67° 30′

7 Use o transferidor e construa um ângulo de 120°. Ache bissetrizes de modo a construir os seguintes ângulos:

a) 60° b) 30° c) 15° d) 7° 30′

8 Desenhe um triângulo de lados medindo 10 cm, 12 cm e 15 cm. Com a régua e o compasso:

a) encontre o incentro;
b) encontre o circuncentro;
c) verifique que o incentro é o centro da circunferência inscrita;
d) verifique que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita;
e) confira, por dobraduras, que o incentro e o circuncentro obtidos com régua e compasso coincidem com os obtidos por dobraduras.

P Veja representação da resposta no Manual do Professor.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Desigualdade triangular

Recorte canudos de plástico com medidas de: 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm e 6 cm.

Tente combinar os pedaços de canudos três a três de modo a formar triângulos.

Fotos: Fernanda Crevin/Shutterstock/Glow Images

As imagens não estão representadas em proporção.

Materiais para a construção de triângulos

Fotos: Fernanda Crevin/Shutterstock/Glow Images

Triângulos construídos com canudos

Que triângulos foi possível formar?

Tente formar um triângulo com as tiras de 2 cm, 3 cm e 6 cm.

EstudioMil/Arquivo da editora

Uma condição de existência de um triângulo é que a soma das medidas de dois lados quaisquer tem de ser maior que a medida do outro lado. Assim, as medidas de um triângulo com lados *a*, *b* e *c*, devem obedecer a uma das seguintes condições:

$a + b > c$ $\quad$ $a + c > b$ $\quad$ $b + c > a$

Essa propriedade é chamada **desigualdade triangular**.

Rigidez do triângulo

Vamos explorar uma atividade e descobrir a propriedade da rigidez do triângulo.

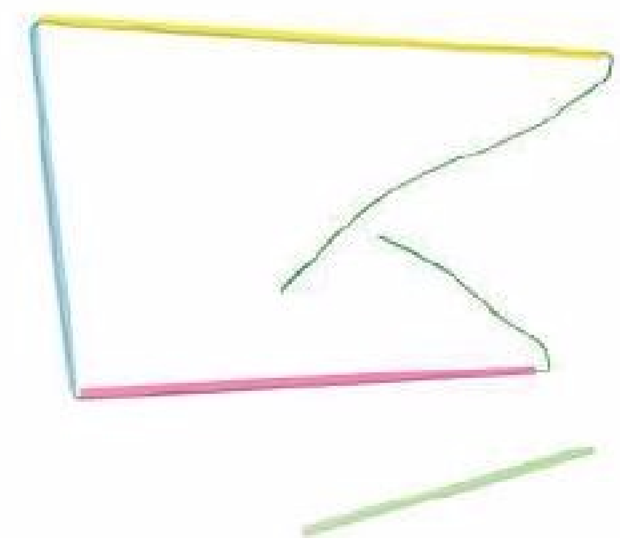
1º) Pegue 4 pedaços de canudinhos de plástico com as seguintes medidas: 10 cm, 12 cm, 15 cm e 18 cm.

2º) Junte-os, dois a dois, passando uma linha por dentro para construir um quadrilátero.

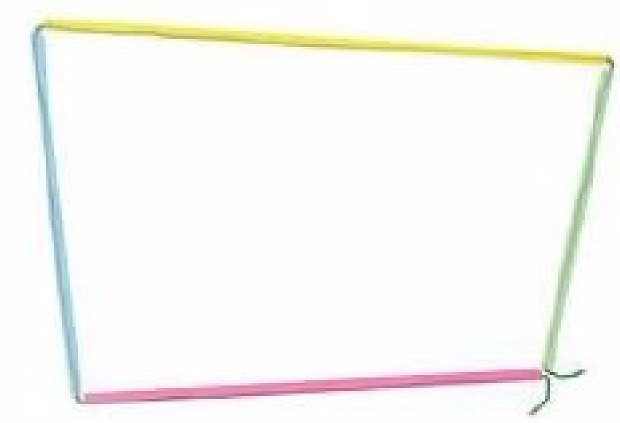
3º) Coloque o quadrilátero que você construiu sobre uma folha de papel e contorne-o.

Fotos: Fernanda Crevin/Shutterstock/Glow Images

Materiais para a construção de um quadrilátero



Construção de um quadrilátero



Quadrilátero construído com canudos

As imagens não estão representadas em proporção.

4º) Compare seu desenho com os de seus colegas. Os contornos são iguais?

É possível que em uma classe com 35 alunos surjam 35 desenhos diferentes, apesar de todos os alunos usarem as mesmas medidas para os lados do quadrilátero.

EstudioMil/Arquivo da editora

Agora, vamos repetir a experiência, construindo triângulos.

O professor pode dividir a classe em quatro grupos e:

- um grupo constrói triângulos com os canudinhos medindo 10 cm, 12 cm e 15 cm;
- outro constrói os triângulos com medidas 10 cm, 12 cm e 18 cm;
- outro constrói os triângulos com 10 cm, 15 cm e 18 cm;
- e, por fim, outro grupo constrói os triângulos com 12 cm, 15 cm e 18 cm.

Compare, dentro de cada grupo, os contornos dos triângulos. O que foi observado?

Você deve ter observado que não há variação na forma dos triângulos cujos lados têm as mesmas medidas. Essa é a importante propriedade da **rigidez do triângulo**.

Essa propriedade geométrica faz com que marceneiros, mestres de obras e engenheiros usem estruturas triangulares para garantir a rigidez de cadeiras, móveis, portões, vigas de sustentação ou pontes.

Ponte Hercílio Luz, Florianópolis (SC). 2010.

Paulo Fridman/Pulsar Imagens

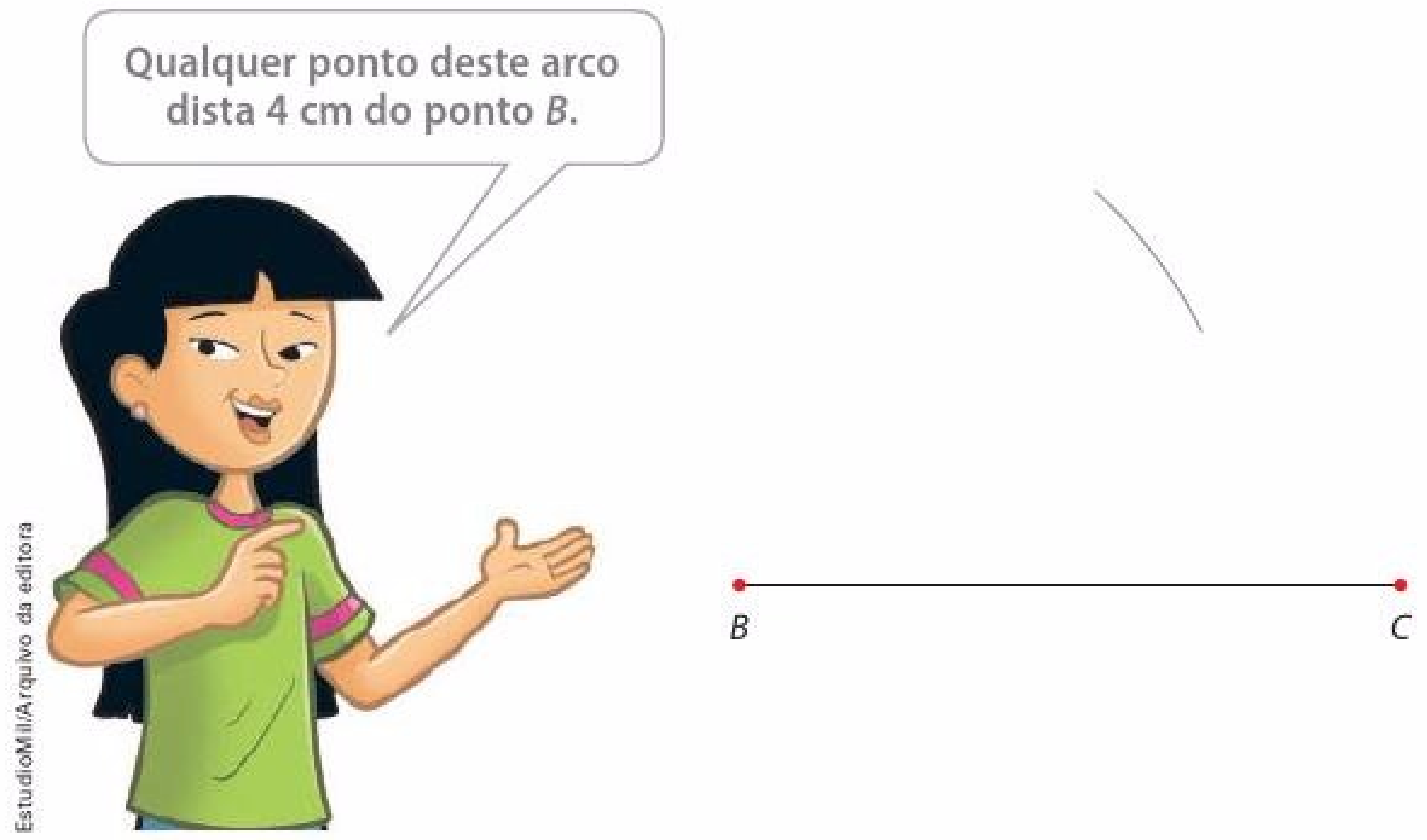
Construção de um triângulo

Com o auxílio de régua e compasso é possível construir um triângulo, mas é necessário conhecer as medidas de seus lados.

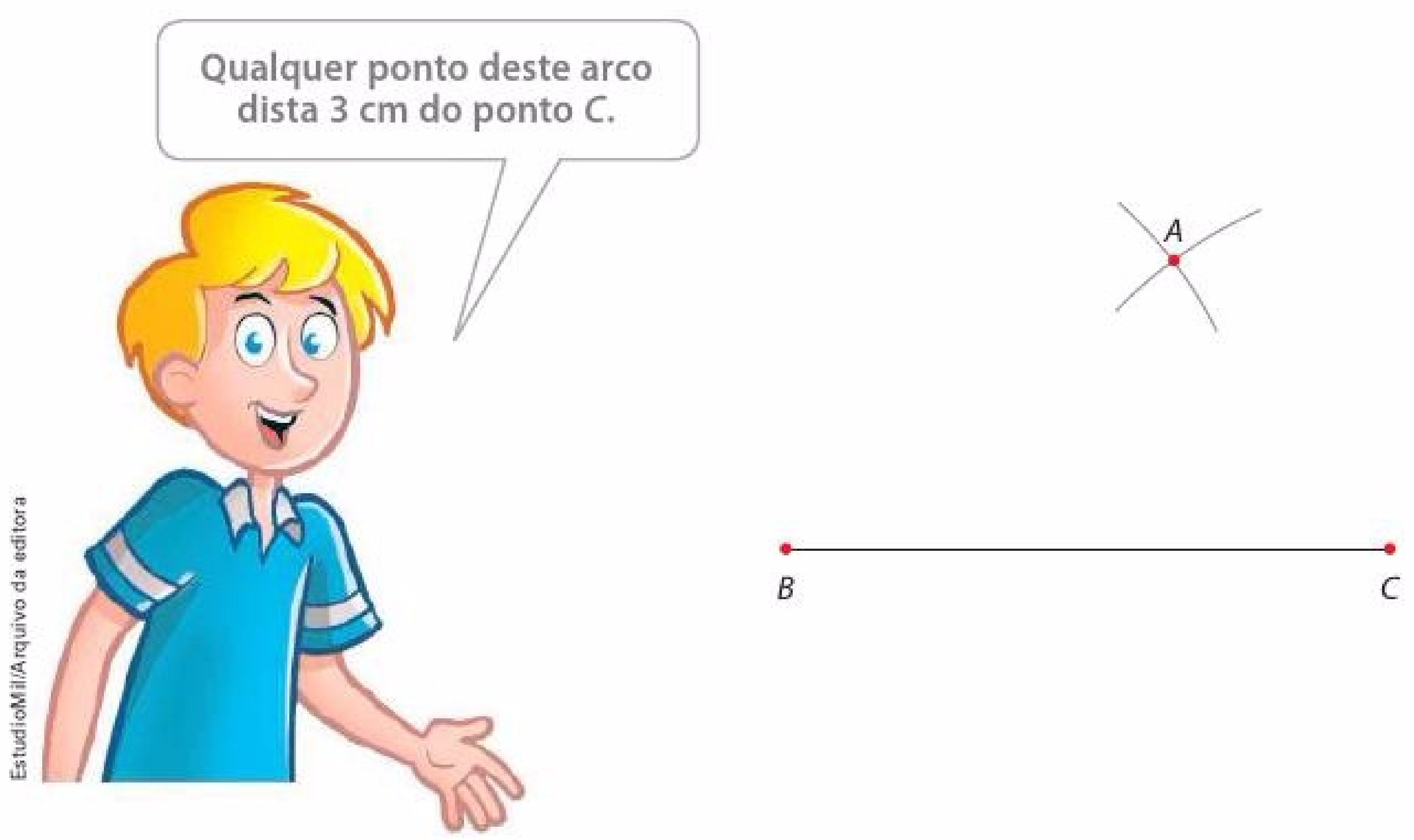
Vamos construir um triângulo cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 5 cm.

1º) Traçamos um segmento $\overline{BC}$ de 5 cm.

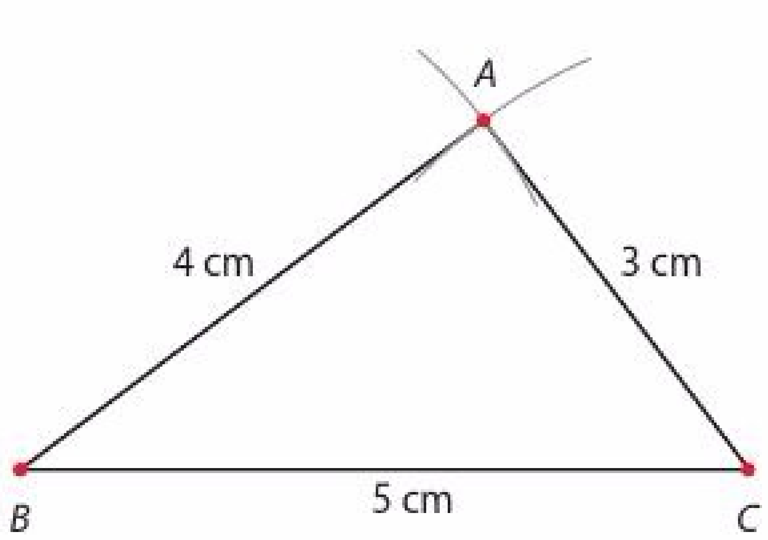
2º) Com o centro do compasso em *B* e abertura de 4 cm, fazemos um arco.



3º) Com o centro em *C* e abertura de 3 cm, fazemos outro arco até interceptar o arco traçado no passo anterior, determinando o ponto *A*.



4º) A intersecção *A* é o vértice oposto ao lado $\overline{BC}$ do triângulo. Então, traçamos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e obtemos um triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Quadriláteros

Agora, vamos estudar mais um pouco sobre quadriláteros. Mas antes, escreva em seu caderno tudo o que você sabe sobre eles.

EstudioMil/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

Vamos ver agora como podemos encontrar a resposta dessa pergunta:

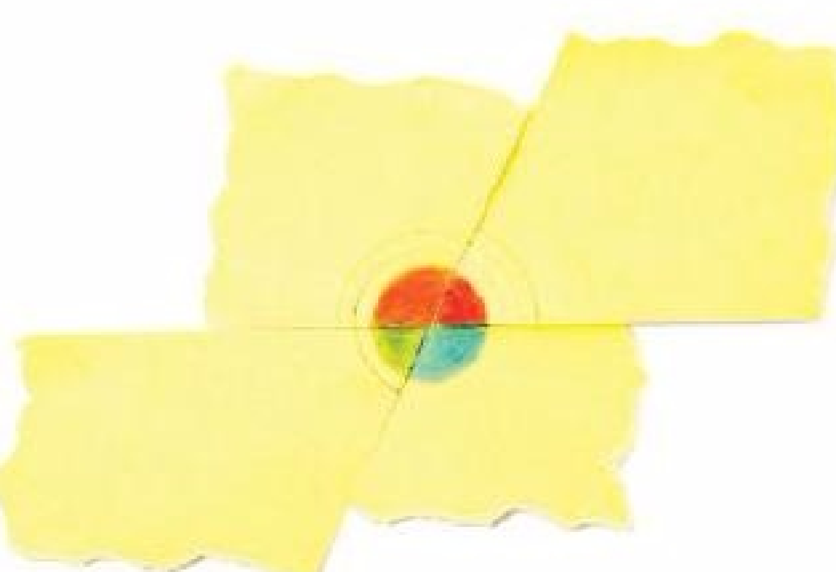
1º) Recorte um quadrilátero qualquer e pinte os ângulos internos.

Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

2º) Recorte o quadrilátero em 4 partes, de modo que cada ângulo fique em uma das partes.

Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

3º) Justaponha os ângulos em torno de um ponto, isto é, faça coincidir os vértices.



Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

Observe que os ângulos coloridos fecham uma volta completa em torno dos vértices. Este experimento sugere que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é sempre 360°.

Agora, faça as atividades a seguir para descobrir outras características dos quadriláteros.

faça no seu caderno

9 Chamamos de terna uma sequência de números (a, b, c). As ternas abaixo indicam medidas de lados de triângulos. Quais entre as ternas representam lados de triângulos? Justifique sua resposta. a, b, d, e, f e h.

a) (3, 4, 5)

b) (5, 7, 8)

c) (10, 2, 12) $2 + 10 = 12$

d) (7, 7, 7)

e) (32, 27, 14)

f) (12, 11, 10)

g) (30, 21, 8) $21 + 8 < 30$

h) (6, 14, 19)

i) (14, 21, 6) $6 + 14 < 21$

13.

10 As medidas dos lados de um triângulo satisfazem as seguintes condições:

- o lado médio mede 3 cm a mais do que o lado menor;
- o lado maior mede 3 cm a mais do que o lado médio.

a) O lado menor pode medir 3 cm? Não

b) Atribua uma medida para o lado maior, de modo que o triângulo seja possível. Qualquer número maior que 9.

11 A terna (a, $a + 1$, $a + 2$) representa as medidas dos lados de um triângulo. Para que valores de a o triângulo é possível? $a > 1$

12 A terna ($b - 2$, b, $b + 2$) representa as medidas dos lados de um triângulo. Para que valores de b o triângulo é possível? $b > 4$

13 Desenhe em seu caderno, em escala, as localizações de três cidades, sabendo que elas formam um triângulo e que a cidade de Santo Antônio da Serra está a 30 km de distância da cidade de São João do Vale e a 40 km de São Pedro da Aldeia. Use uma escala na qual 2 cm correspondem a 10 km.

14 Construa em seu caderno, com régua e compasso, os triângulos cujas medidas estão expressas pelas ternas: Respostas pessoais.

a) (3, 4, 5)

b) (5, 7, 8)

c) (10, 2, 12)

d) (7, 7, 7)

e) (32, 27, 14)

f) (12, 11, 10)

g) (20, 14, 6)

h) (6, 14, 19)

i) (14, 21, 6)

15 Reúna-se com um colega para jogar.

Desenhe um quadrilátero em uma folha de papel. Seu colega deve tentar descobrir o quadrilátero que você desenhou, apenas se baseando em perguntas do tipo:

a) Tem eixo de simetria? Quantos?

b) Tem ângulo reto? Quantos?

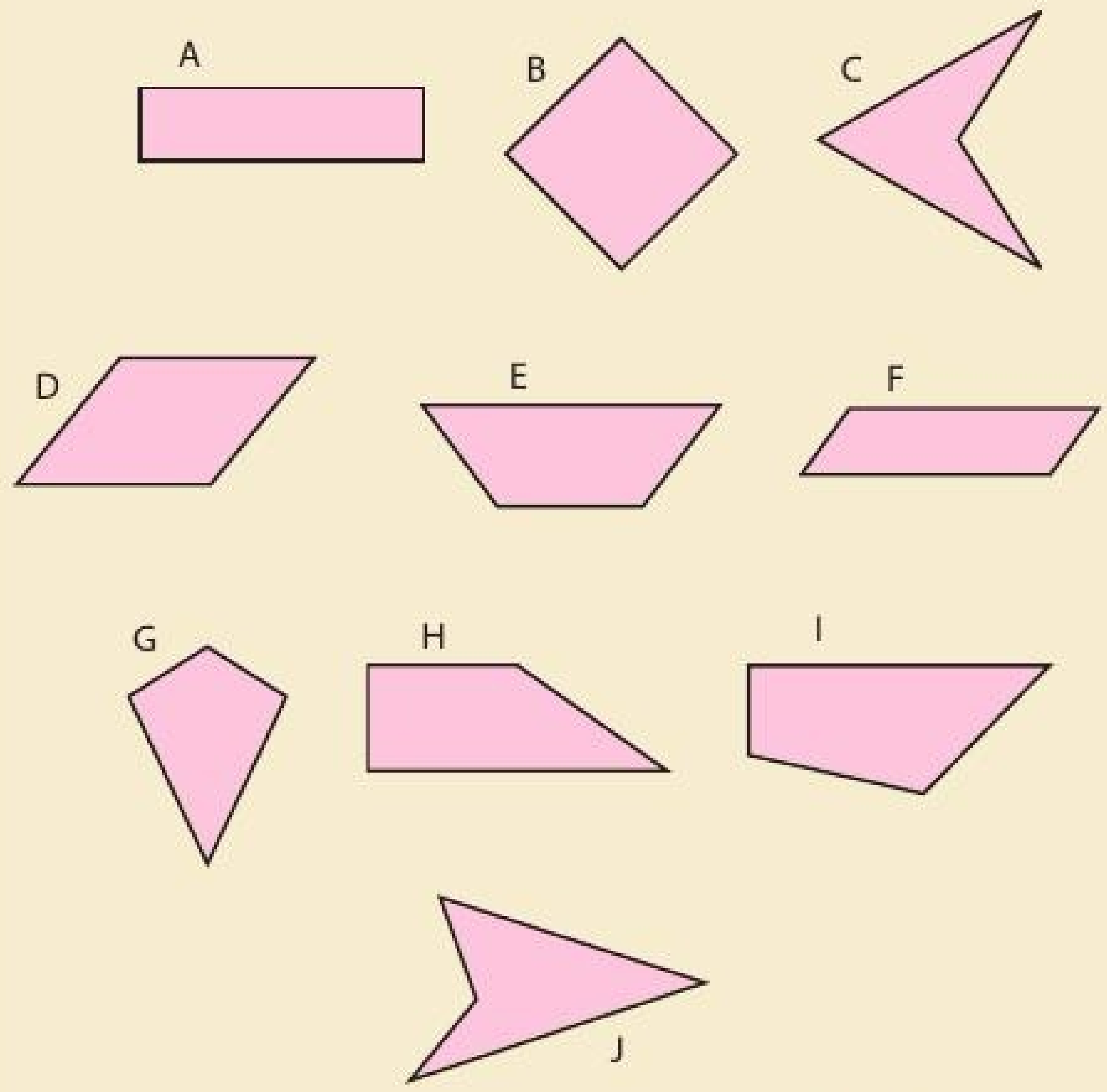
c) É convexo?

d) Tem lados paralelos? Quantos?

e) Tem pares de lados com medidas iguais?

Ganha o jogo o aluno que descobrir mais rapidamente (fazendo o menor número de perguntas) o quadrilátero que o colega desenhou.

16 Observe os quadriláteros.



a) Quais têm lados paralelos? A, B, D, E, F e H.

b) Quais são convexos? A, B, D, E, F, G, H e I.

c) Quais têm eixo de simetria? A, B, C, D, E e G.

Compare suas respostas com as de seus colegas.

17 Desenhe quadriláteros que tenham: Há várias possibilidades de resposta.

a) lados paralelos dois a dois;

b) apenas dois lados paralelos;

c) ângulos retos;

d) todos os ângulos retos iguais;

e) apenas dois ângulos retos;

f) apenas um ângulo reto;

g) pares de lados com medidas iguais;

h) apenas um par de lados com medidas iguais.

Classificação dos quadriláteros

Você já conhece uma diversidade de quadriláteros. O próximo passo é estudar seus elementos, suas propriedades e como classificá-los.

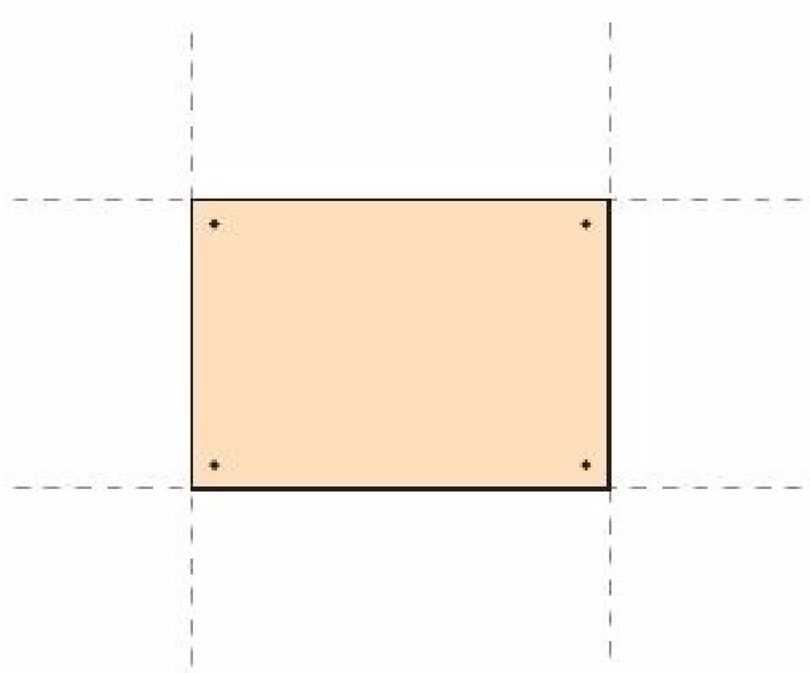
Ao organizar as figuras geométricas em "famílias" que têm certas características em comum chamadas atributos, estamos fazendo uma classificação dessas figuras.

No caso dos triângulos, podemos observar o atributo tamanho dos lados e, assim, separá-los nas seguintes famílias: equiláteros, isósceles e escalenos. Por outro lado, se observarmos o atributo medida dos ângulos podemos agrupá-los em: retângulos, acutângulos ou obtusângulos.

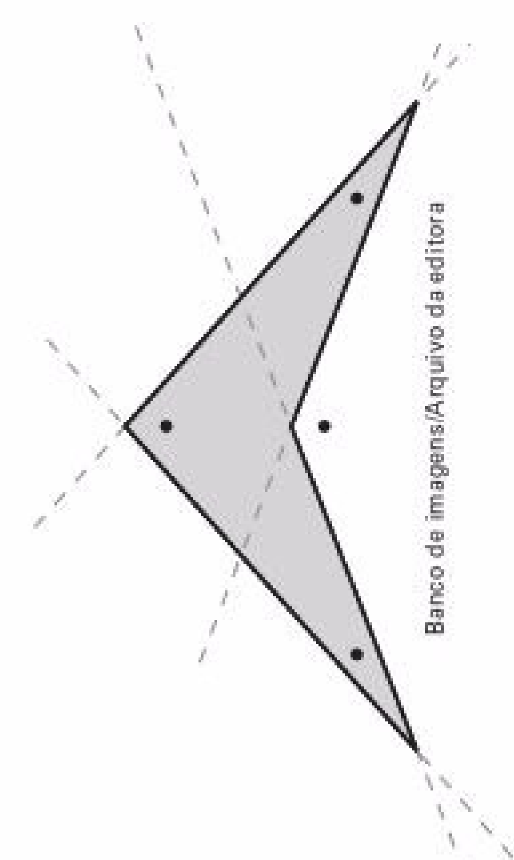
Um quadrilátero que está em uma família tem a característica comum a todos os quadriláteros dessa família; um quadrilátero que não tem essa característica não pode pertencer a essa família. Por exemplo, na família dos retângulos, só podem entrar os quadriláteros que têm todos os ângulos retos.

Há várias maneiras de classificar objetos geométricos, e a classificação depende da escolha de algum atributo, isto é, de uma característica ou de uma propriedade, como ser convexo ou não convexo.

Banco de imagens/Arquivo da editora



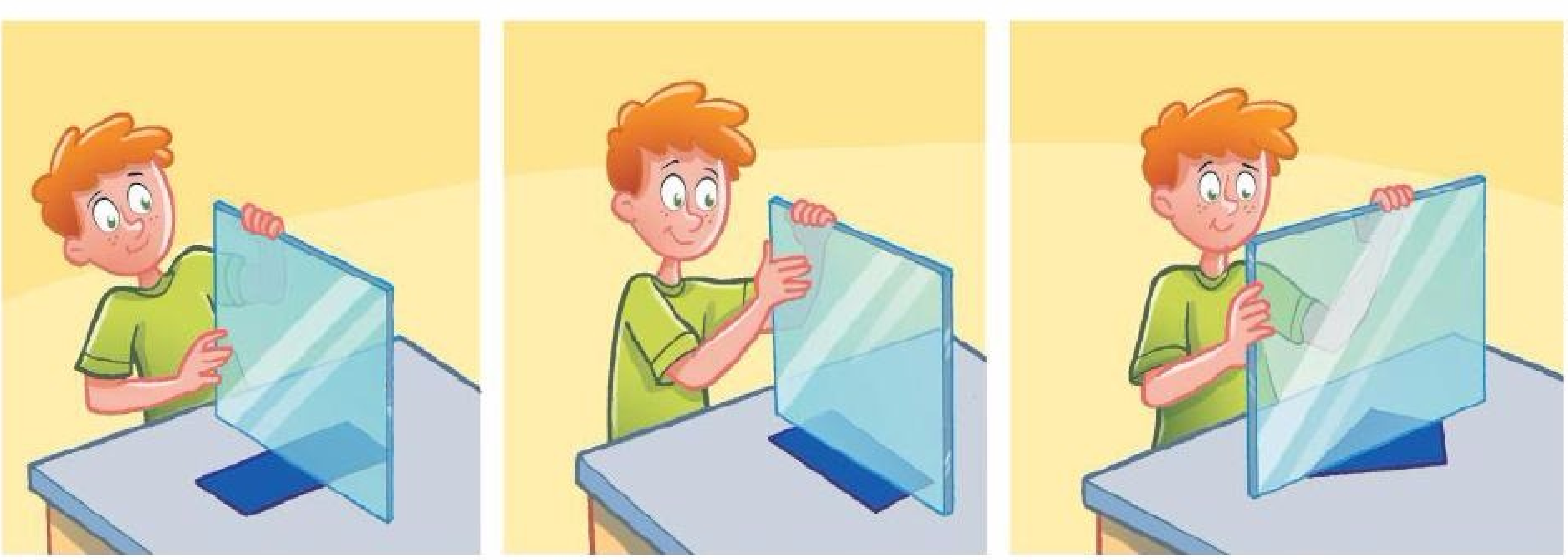
O retângulo é um quadrilátero convexo, pois o prolongamento de qualquer de seus lados não passa por seu interior.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O quadrilátero que se parece com um bumerangue não é convexo, pois existem lados cujos prolongamentos passam por seu interior.

Outro atributo é a simetria, um quadrilátero pode ou não ter eixo de simetria.

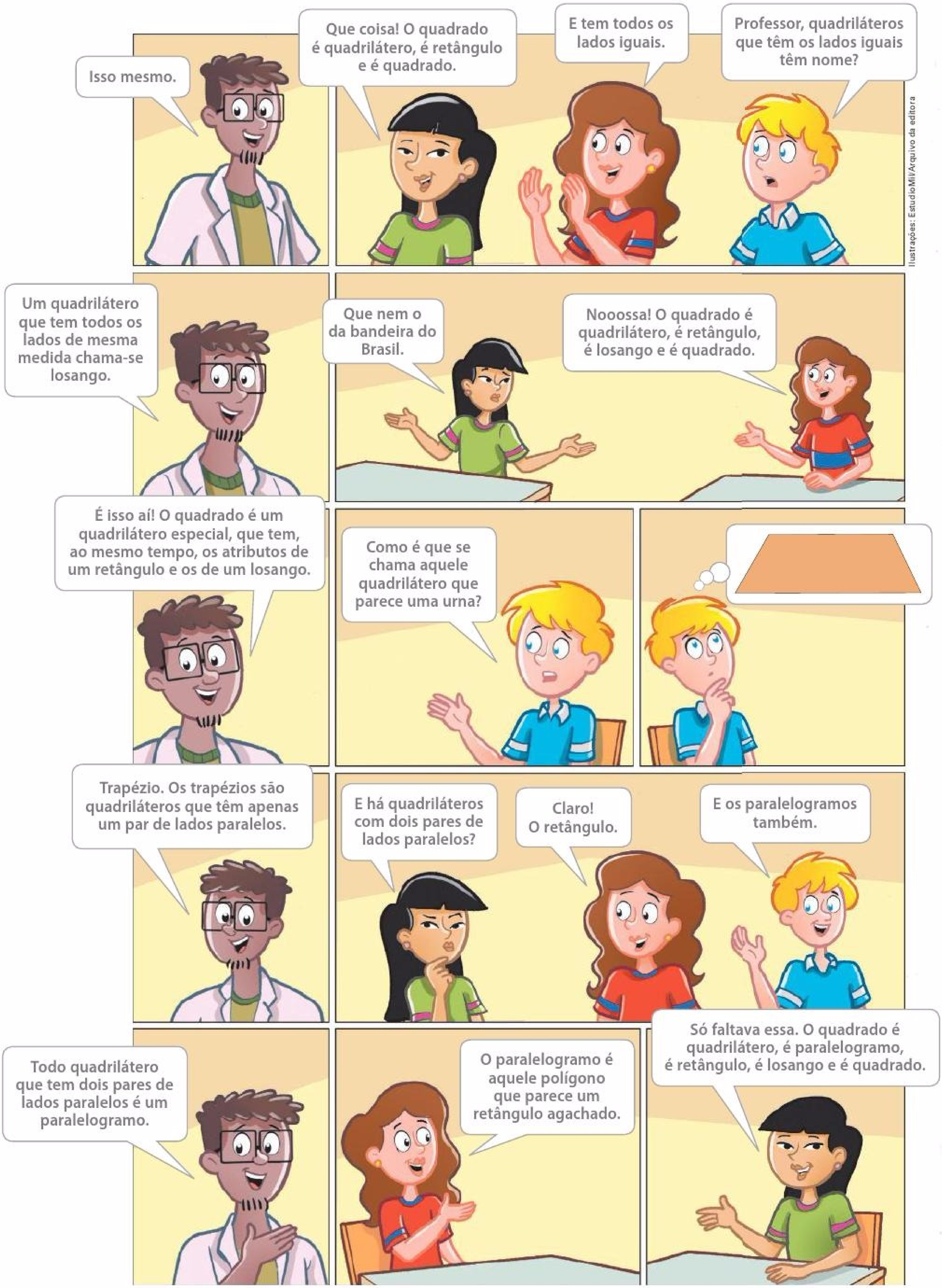


Ilustrações: EstudioMil/Arquivo da editora

Observe que o retângulo tem dois eixos de simetria e que sobre a diagonal não há eixo de simetria.

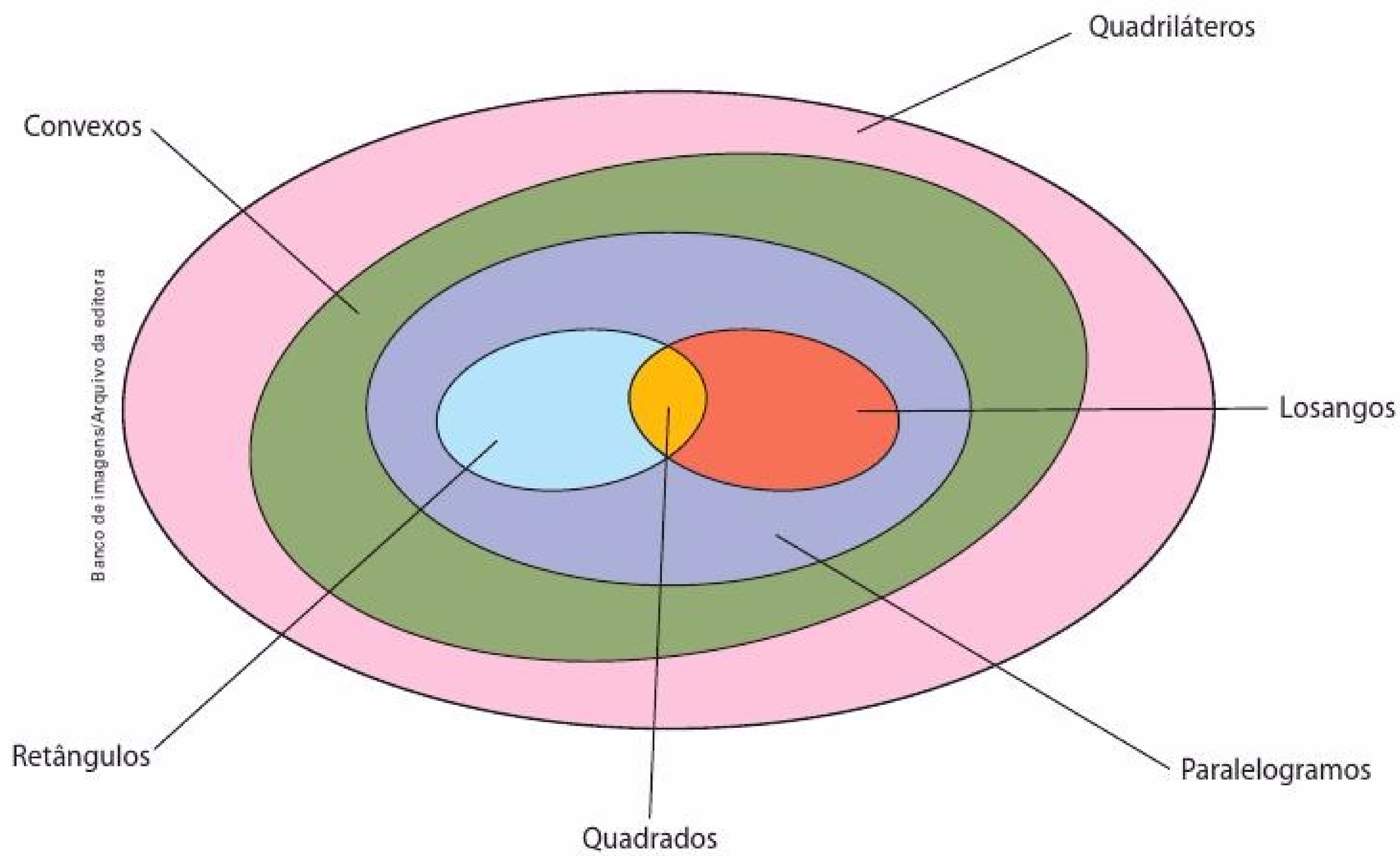
O nome dos quadriláteros também está relacionado a propriedades geométricas. Acompanhe uma discussão sobre classificação de quadriláteros em uma aula de Geometria.

Ilustrações: EstudioMil/Arquivo da editora



Ilustrações: Estudio Mil/Arquivo da editora

Veja como podemos representar essa classificação usando um esquema chamado diagrama de Venn.

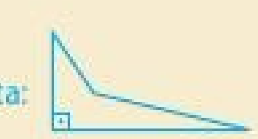


ATIVIDADES

faça no seu caderno

18 Uma "pandorga" ou "pipa" é um quadrilátero $ABCD$, em que os lados $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\overline{DA} = \overline{CD}$, mas $AB \neq AD$. Desenhe uma pandorga. 

P Veja comentário no Manual do Professor.

19 Desenhe um quadrilátero não convexo que tenha um ângulo reto. Sugestão de resposta: 

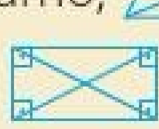
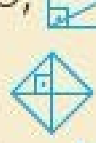
20 Em cada item, verifique as condições de existência de cada quadrilátero. Se você estiver convencido da existência, esboce-os. Caso contrário, justifique a não existência. P Leve os alunos a justificar o fato de que o losango que satisfaz tal condição é, necessariamente, um quadrado.

a) Quadrilátero com apenas um ângulo reto.
b) Quadrilátero com apenas dois ângulos retos.
c) Quadrilátero com apenas três ângulos retos.
d) Quadrilátero com quatro ângulos retos.

P Veja resolução no Manual do Professor.

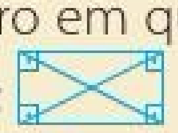
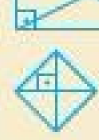
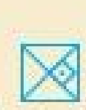
21 Tente desenhar um losango em que um dos ângulos é reto.

22 Trace as diagonais de: P Veja sugestões de resposta no Manual do Professor.

a) um paralelogramo; 
b) um retângulo; 
c) um losango; 
d) um quadrado. 

Não escreva no livro.

23 Desenhe um quadrilátero em que as diagonais:

a) têm mesma medida; 
b) são perpendiculares; 
c) têm mesma medida e são perpendiculares. 

Construção de paralelogramos em malha quadriculada

Como já estudamos no capítulo 3, a estrutura da malha quadriculada é ideal para a construção de paralelogramos, uma vez que, na malha, duas linhas quaisquer ou são paralelas ou são perpendiculares.

Acompanhe o passo a passo de duas maneiras para construir um paralelogramo:

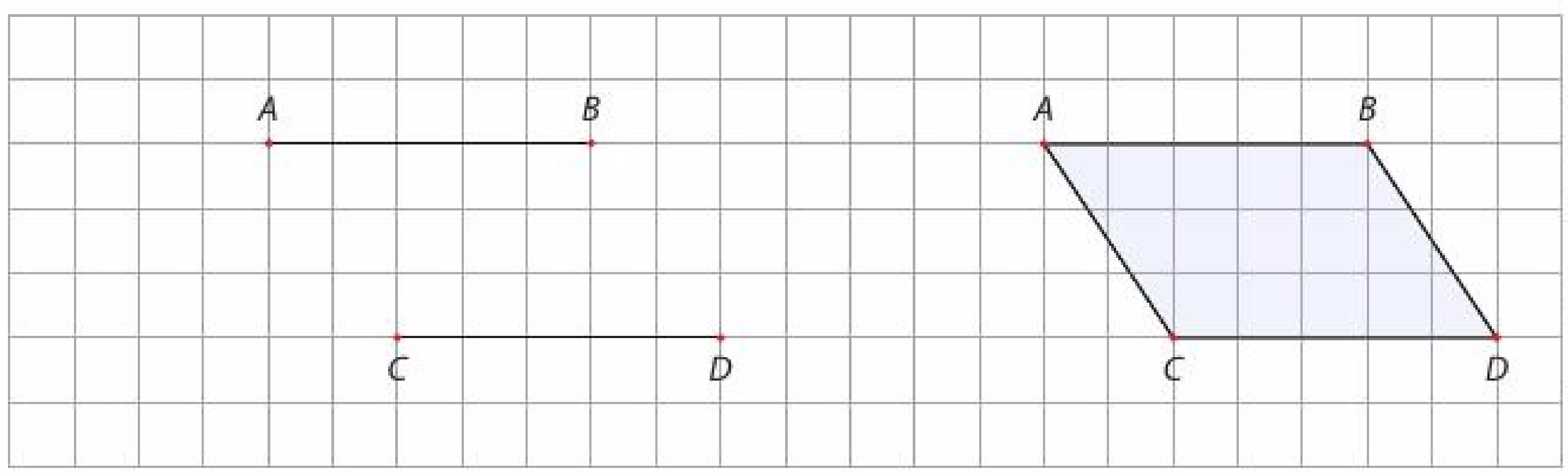
1ª Maneira

1º) Trace sobre uma linha horizontal um segmento $\overline{AB}$ de comprimento 5 unidades.

2º) Sobre outra linha horizontal (por exemplo, 3 linhas abaixo, duas colunas à direita) trace o segmento $\overline{CD}$ de 5 unidades.

3º) Trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

A figura obtida é um paralelogramo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Verifique que:

$$\text{med}(\overline{AC}) = \text{med}(\overline{BD}) \text{ e } \overline{AC} \,//\, \overline{BD}$$

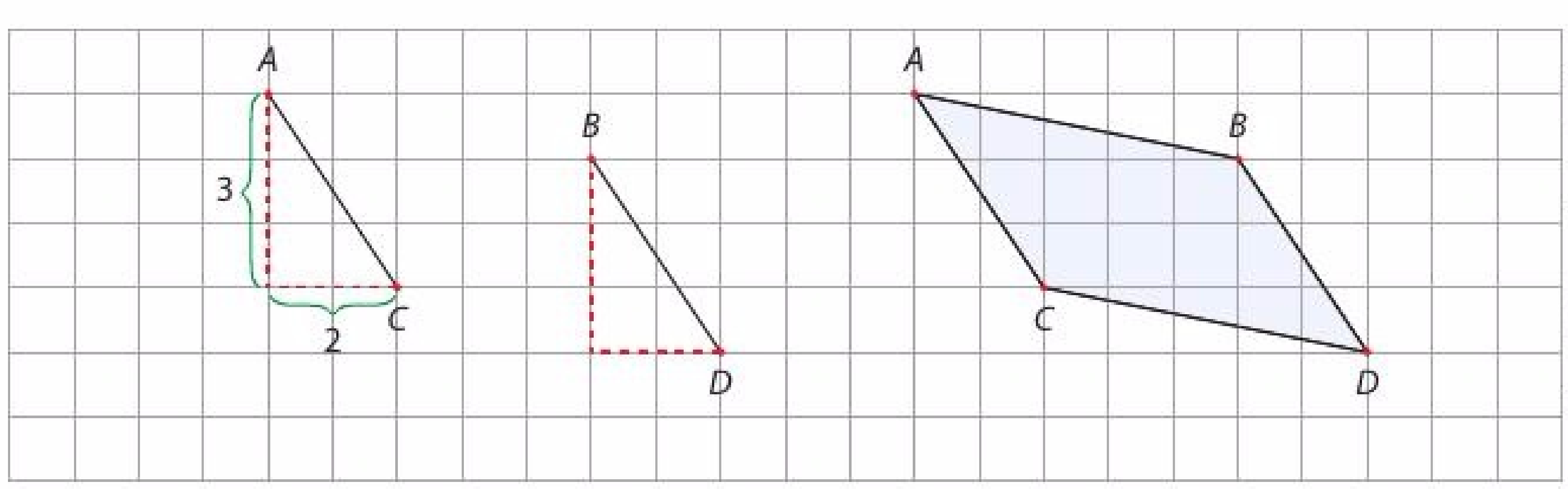
Repita esse procedimento, atribuindo outras medidas para o segmento $\overline{AB}$ ou traçando-o sobre uma linha vertical.

Você também pode proceder da seguinte forma para construir um paralelogramo:

2ª Maneira

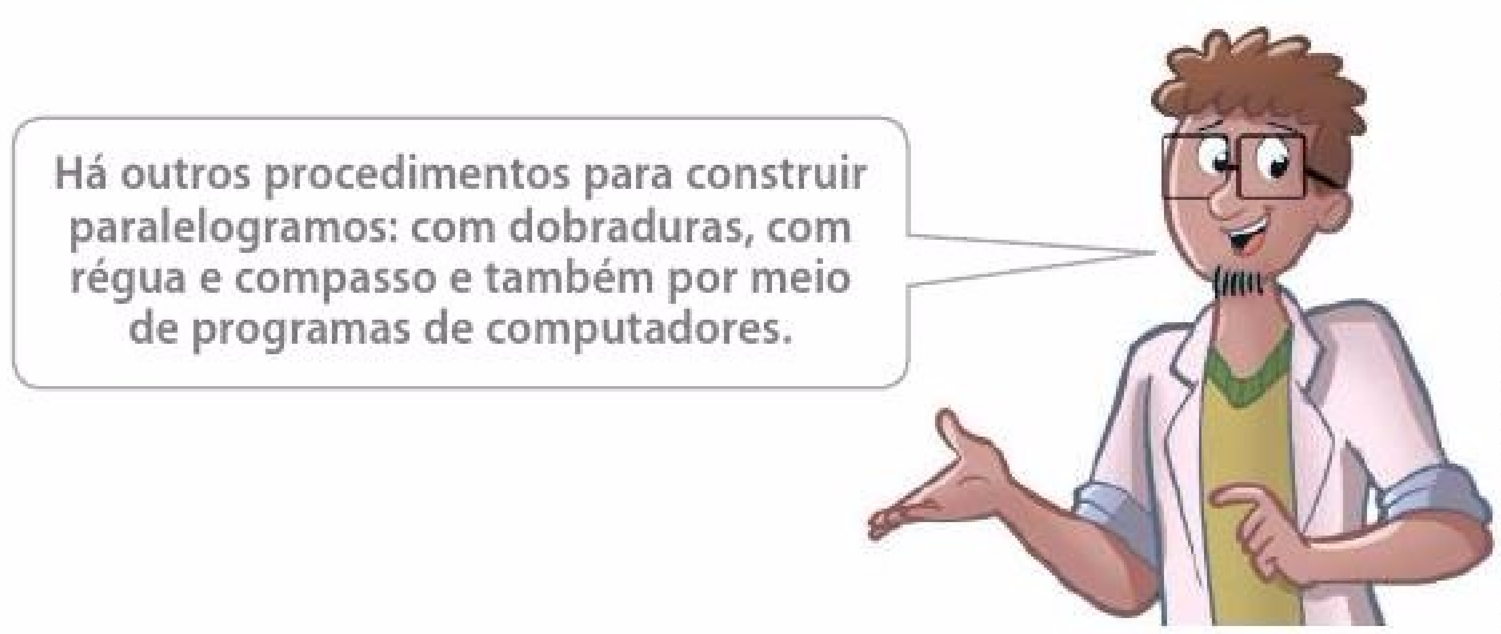
1º) Trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, paralelos, unindo, para cada um deles, dois "nós" da malha que distem, por exemplo, 2 unidades na horizontal e 3 unidades na vertical.

2º) Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

P O CABRI, o Geogebra e o LOGO são *softwares* que permitem fazer construções geométricas.



EstudioMil/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

Recado: Todo polígono que for proposto para ser construído sobre a malha quadriculada deve ter os vértices coincidindo com os "nós" da malha.

24 Construa, sobre uma malha quadriculada, um paralelogramo em que um dos lados mede 6 cm. Compare-o com o de seus colegas. O que você observou? P Veja comentário no Manual do Professor.

25 Construa, sobre a malha quadriculada, um paralelogramo qualquer.

Decomponha esse paralelogramo em dois triângulos. P Os alunos devem perceber que o paralelogramo foi decomposto em dois triângulos congruentes.

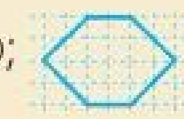
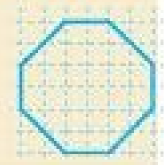
26 Construa, sobre a malha quadriculada, dois paralelogramos com as mesmas medidas. Decomponha cada paralelogramo em dois triângulos.

De quantas maneiras diferentes é possível decompor os paralelogramos? Duas

27 Esta atividade é para ser feita em grupo. Construam um paralelogramo em que a medida de um dos lados construídos sobre uma linha e a altura do paralelogramo relativa a esse lado foram definidas pelo grupo. P Os alunos devem perceber que, se todos seguirem com precisão as condições, os paralelogramos construídos serão congruentes.

28 Desenhe um triângulo *ABC* sobre a malha quadriculada. Desenhe um paralelogramo *MNOP* que possa ser decomposto em dois triângulos que tenham as mesmas medidas que o triângulo *ABC*. P Veja comentário no Manual do Professor.

29 Construa sobre a malha quadriculada: Respostas pessoais.

a) um hexágono;  b) um octógono. 

Sugestão de resposta:

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

1 Faça de conta que você precisa ajudar um primo que mora em outra cidade que não compreendeu a desigualdade triangular; escreva um texto explicando de modo simples e preciso o que é desigualdade triangular e como se usa. Resposta pessoal.

2 Construa com régua e compasso um triângulo: Respostas pessoais.

a) equilátero cujos lados medem 4 cm;

b) isósceles com o lado menor medindo 4 cm e os lados maiores, 6 cm;

c) isósceles com o lado maior medindo 6 cm e os lados menores, 4 cm;

d) escaleno com os lados medindo 4 cm, 5 cm e 6 cm;

e) retângulo com lados medindo 4 cm, 4 cm e 7 cm.

3 Desenhe as localizações de três cidades sabendo que a cidade *A* está a 4 km da cidade *B*, a cidade *B* está a 6 km da cidade *C*, e a cidade *C* está a 5 km da cidade *A*. Use a escala 1 : 100 000. P Veja representação da resposta no Manual do Professor.

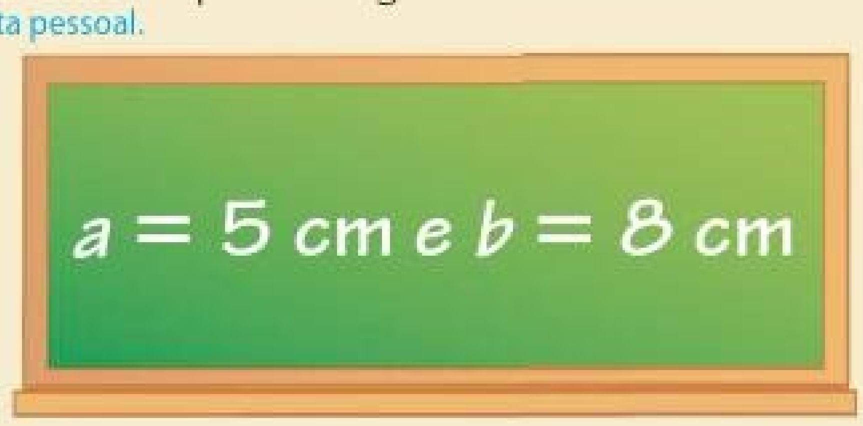
4 Construa quadriláteros satisfazendo, em cada caso, as seguintes condições: Sugestões de resposta:

a) apenas 1 eixo de simetria e 2 pares de lados iguais; 

b) com apenas 2 ângulos retos e um par de lados paralelos; 

c) não convexo e com apenas 1 ângulo reto. 

5 Construa um paralelogramo com lados medindo: Resposta pessoal.



EstudioMil/Arquivo da editora

6 Identifique, esboce e quando possível nomeie cada quadrilátero de acordo com as medidas ou as posições relativas de suas diagonais que:

a) se interceptam nos respectivos pontos médios; Paralelogramos

b) são perpendiculares; Há várias soluções possíveis.

c) são iguais; Há várias soluções possíveis.

d) são perpendiculares e iguais; Há várias soluções possíveis.

e) são perpendiculares e se cruzam nos pontos médios; Losangos

f) são iguais e se cruzam nos pontos médios; Retângulos

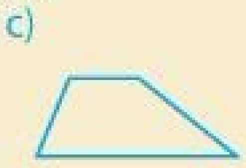
g) são iguais, perpendiculares e se cruzam nos pontos médios. Quadrados

7 Leia o texto da **Revista da Matemática** e utilize o código de Marina para esboçar quadriláteros quando forem possíveis. Sugestões de resposta:

a) (1, 1, 2, 2) Impossível

b) (0, 1, 0, 1)

c) (1, 0, 1, 0)

b)  c) 

O CÓDIGO DE MARINA

Há várias maneiras de se classificar uma figura geométrica, tudo vai depender de que atributos vamos considerar. Foi pensando nisso que Marina, uma aluna do 8º ano, criou um código para identificar um quadrilátero qualquer.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

O código de Marina é formado por uma quadra ordenada (C, R, P, S), em que cada informação numérica traduz uma característica do quadrilátero.

Veja como funciona:

1º) O código é formado por quatro componentes.

2º) A primeira componente da quadra, **C**, indica se o quadrilátero é ou não convexo (1 se for, 0 se não for).

3º) A segunda componente, **R**, indica quantos ângulos retos tem o quadrilátero.

4º) A terceira componente, **P**, indica quantos pares de lados paralelos tem o quadrilátero.

5º) Por fim, a quarta componente, **S**, indica quantos eixos de simetria tem o quadrilátero.

Veja os exemplos:

- quadrilátero (1, 0, 1, 1):
  1 ⟶ é convexo
  0 ⟶ não tem ângulos retos
  1 ⟶ tem um par de lados paralelos
  1 ⟶ tem um eixo de simetria

EstudioMil/Arquivo da editora

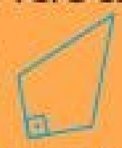
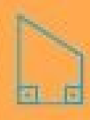
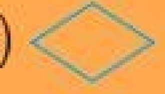
- quadrilátero (0, 0, 0, 1).
  0 ⟶ não é convexo
  0 ⟶ não tem ângulos retos
  0 ⟶ não tem lados paralelos
  1 ⟶ tem 1 eixo de simetria

P Os geômetras nomeiam este tipo de quadrilátero como "asa delta", "seta" ou "bumerangue".

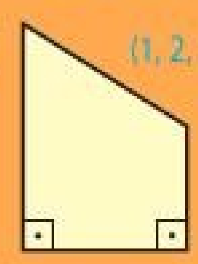
Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

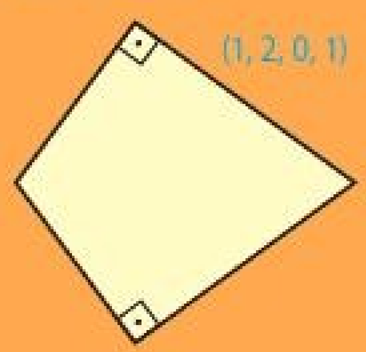
1. O que você achou desse novo sistema de classificar e identificar figuras geométricas?
Resposta pessoal.

2. Veja se entendeu, desenhando os quadriláteros que satisfazem os seguintes códigos:

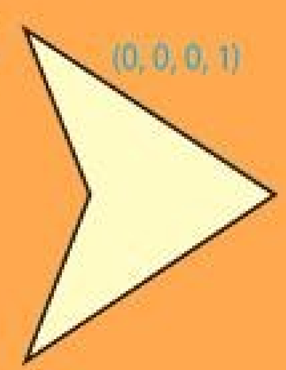
a) (1, 1, 0, 1)  b) (1, 2, 1, 0)  c) (1, 0, 2, 2)  d) (1, 0, 2, 0) 

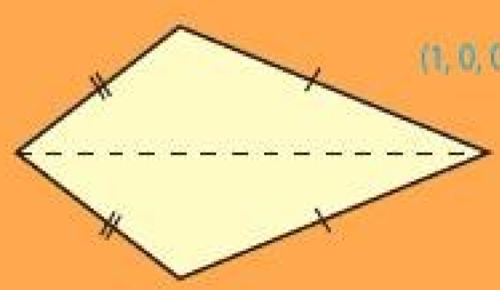
3. Dê os códigos dos quadriláteros a seguir.

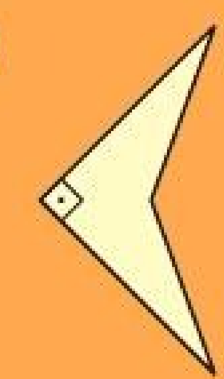
a)  (1, 2, 1, 0)

c)  (1, 2, 0, 1)

e)  (1, 1, 0, 0)

b)  (0, 0, 0, 1)

d)  (1, 0, 0, 1)

f)  (0, 1, 0, 1)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Pode existir um quadrilátero (0, 0, 0, 0)? Sim. Por exemplo: 

5. Explique por que não pode existir um quadrilátero com a segunda componente **R** igual a 3.
Não pode haver um quadrilátero com 3 ângulos retos.

UM QUADRILÁTERO MUITO ESPECIAL

O retângulo é o quadrilátero mais comum devido aos seus usos, o quadrado é considerado o mais popular pela sua simplicidade e beleza, mas o **paralelogramo** é interessante devido a suas aplicações práticas.

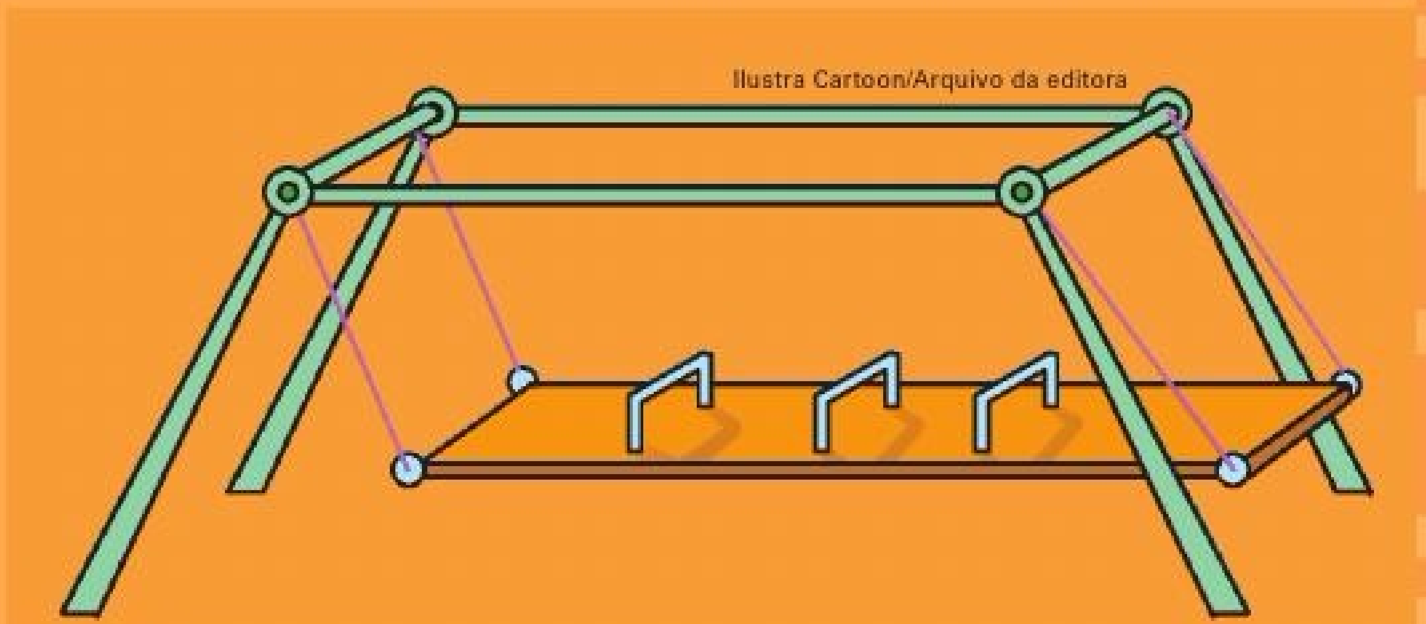
Para entender melhor esse valor prático, você pode construir um paralelogramo articulado como se observa ao lado.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Os paralelogramos têm uma propriedade que é fundamental para o funcionamento de diversos mecanismos em que é importante que uma parte se mova paralelamente à outra. Veja alguns exemplos:


Reprodução/Dynamic Graphics

Caixa de ferramentas


Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Balanço

Pesquise a presença da estrutura do paralelogramo em objetos ou mecanismos no dia a dia. Verifique como o paralelismo intervém no funcionamento dos mecanismos.
Por exemplo, pantógrafos, limpador de para-brisas, portas pantográficas, janelas, balança de pratos, réguas de mesas de arquitetura, etc.

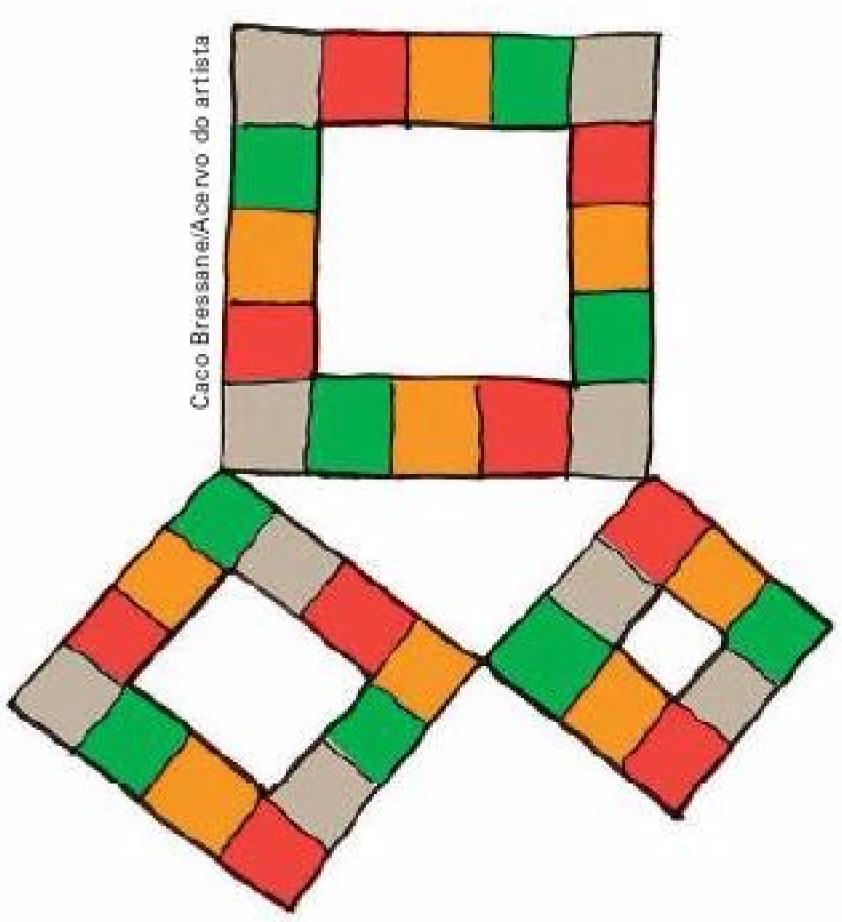
CAPÍTULO 9

ÁREAS E QUADRADOS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

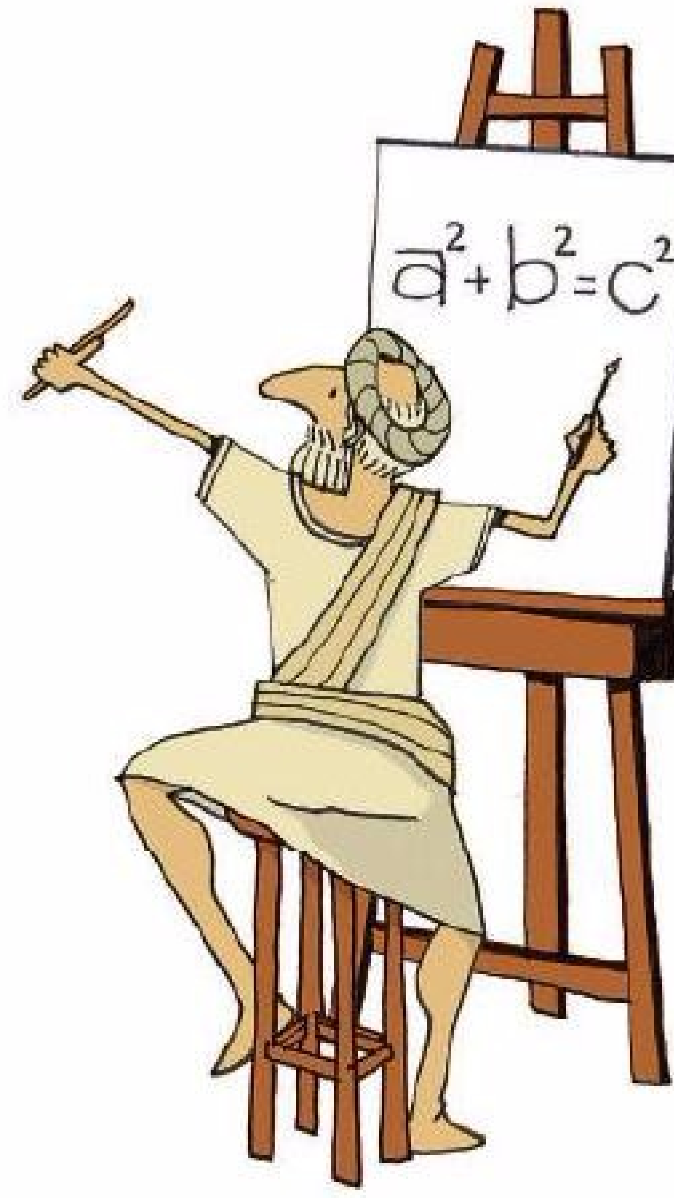
Relação de Pitágoras

Muitos fatos, propriedades e relações da Geometria têm inspirado artistas, de Leonardo da Vinci a M. C. Escher, passando por Max Bill e pelo brasileiro Antonio Peticov, além de muitos outros.

Observe a obra abaixo. Ela foi inspirada em um famoso teorema da Geometria. Tente relacionar o que o pintor vê e o que ele escreveu na tela.



Caco Bressane/Acervo do artista



Caco Bressane/Acervo do artista

P Ainda não nomeamos a relação do modo usual, ou seja, como "teorema de Pitágoras", pois os alunos ainda não têm familiaridade com demonstrações geométricas. Por outro lado, o teorema de Pitágoras é uma relação, e é um teorema porque essa relação foi demonstrada por argumentos lógicos aceitos pela comunidade de matemáticos. A formulação ao lado segue a adotada por Moise & Downs no livro *Geometria moderna* e é adotada por outros autores.

Veja que se trata de três quadrados: o menor é 3×3, o médio 4×4 e o maior 5×5.

A área desses quadrados é 9, 16 e 25, respectivamente, e: $9 + 16 = 25$.

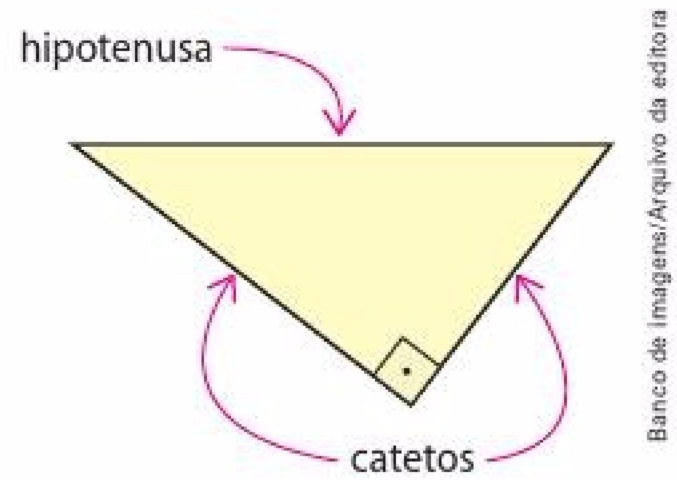
Observe que a relação escrita na tela é $a^2 + b^2 = c^2$ e, se trocarmos essas letras pelas medidas dos lados dos quadrados, do menor para o maior, teremos: $\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$, que satisfaz a igualdade.

A relação escrita na tela, em que as letras representam as medidas dos lados de um triângulo, é conhecida como relação de **Pitágoras**, que diz:

> Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Para melhor compreender essa relação é importante saber o significado de cada um dos termos.

- **Hipotenusa**: nome dado ao lado maior de um triângulo retângulo.
- **Cateto**: é o nome dado aos lados menores de um triângulo retângulo que são perpendiculares entre si.



Os dois termos **hipotenusa** e **cateto** vêm do grego. *Hipotenusa* significa 'contrário a', usado para designar o lado do triângulo oposto ao ângulo reto. *Cateto* significa 'que cai perpendicular', faz referência aos dois lados menores do triângulo retângulo que fazem 90º entre si.

A relação de Pitágoras, também chamada de relação pitagórica, já era conhecida muito antes do nascimento do próprio Pitágoras (século VI a.C.), mas recebeu o nome de **teorema de Pitágoras** porque ele teria sido o primeiro a apresentar uma prova dessa relação, que foi considerada na época engenhosa e bela.

Um **teorema matemático** é uma proposição matemática verdadeira, e que pode ser provada com argumentos lógicos.

MATEMÁTICA EM TODA PARTE

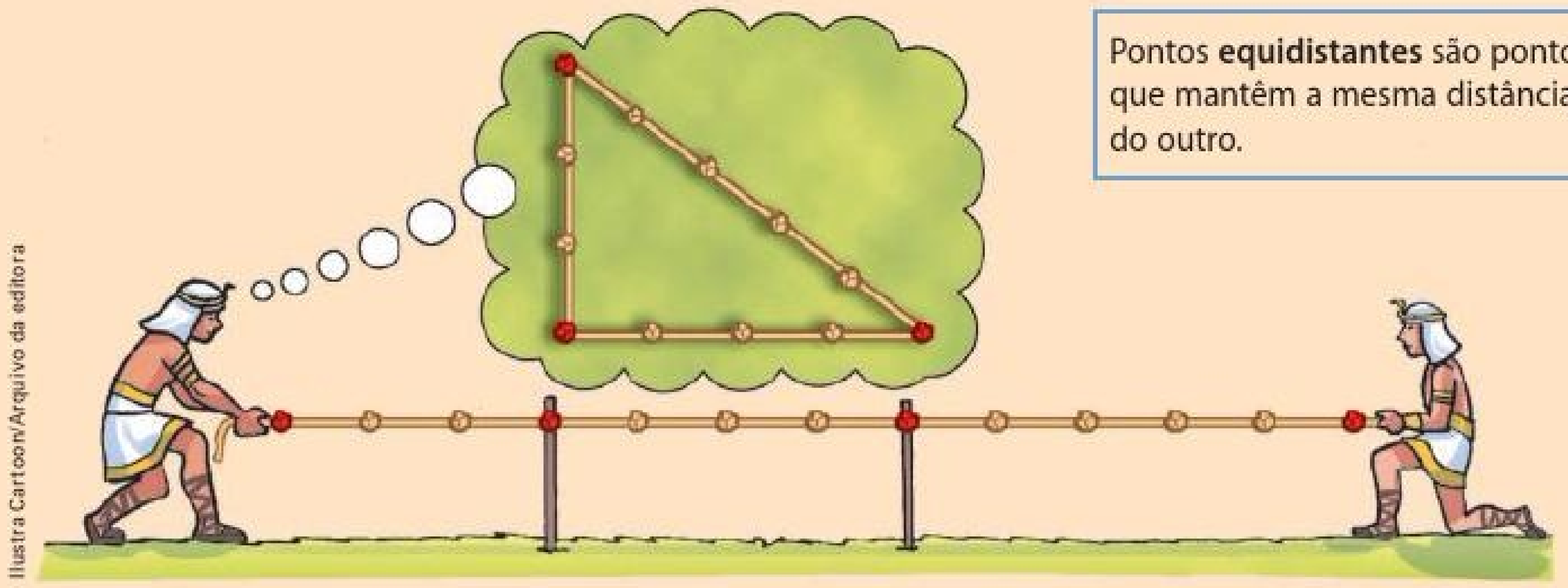
Dos egípcios aos gregos

No Egito antigo, os arquitetos que projetavam as famosas pirâmides tinham de determinar, com certa precisão, o ângulo reto; afinal, a base das pirâmides é um quadrado.

Para conseguir o ângulo reto, eles usavam um método curioso: faziam 13 nós **equidistantes** em uma corda, criando 12 intervalos de mesmo comprimento. Depois, juntavam o primeiro nó com o décimo terceiro, formando um triângulo como indicado na figura abaixo.

Pirâmide de Gizé, Cairo, Egito.

Pontos **equidistantes** são pontos que mantêm a mesma distância um do outro.



As estacas marcavam o quarto nó e o oitavo nó, determinando um triângulo *ABC* com lados medindo 3, 4 e 5.

Por experiência eles sabiam que um triângulo construído dessa forma produzia um ângulo reto em um de seus vértices.

Observe que construindo desse modo, com os lados do triângulo medindo 3, 4 e 5, a relação pitagórica para triângulos retângulos é satisfeita.

Ternos pitagóricos

Os números 3, 4 e 5 formam um terno ordenado de números naturais que será representado entre parênteses deste modo: (3, 4, 5).

Se os números de um terno ordenado de números naturais satisfazem a relação de Pitágoras, dizemos que o terno é pitagórico.

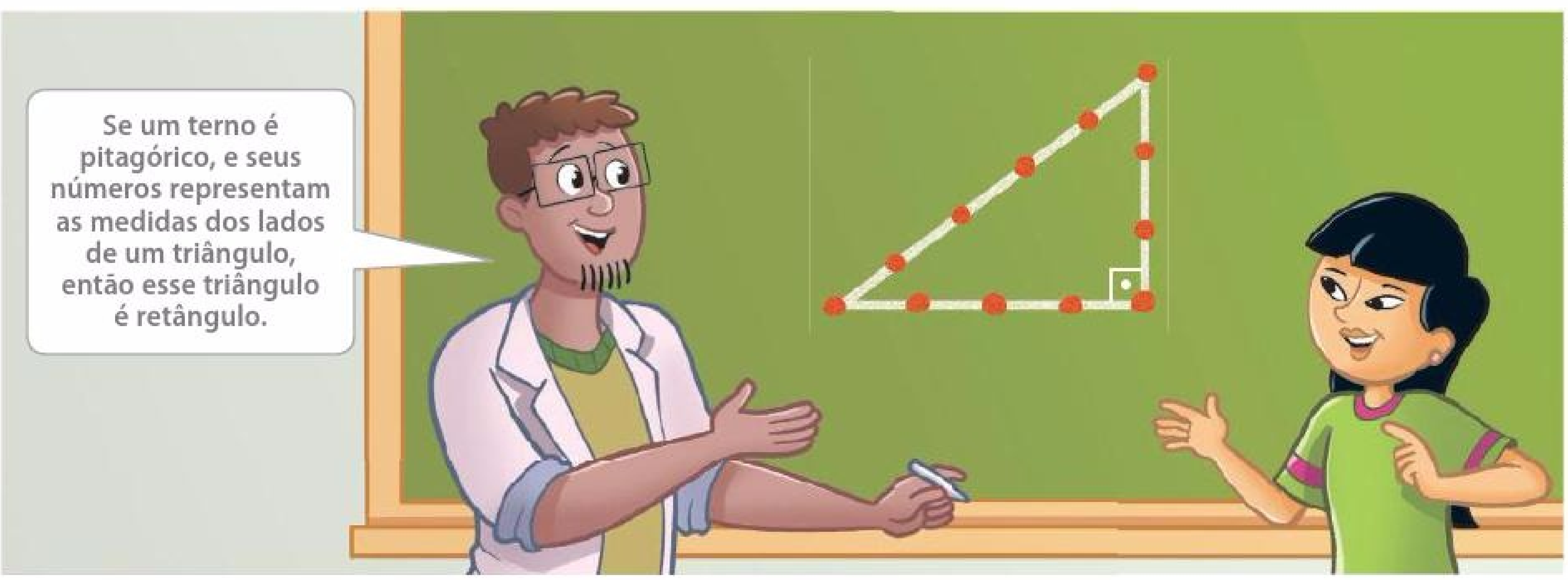
Então podemos concluir que:

- (3, 4, 5) é um terno pitagórico porque:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$

- (4, 5, 6) não é pitagórico porque:

$$4^2 + 5^2 = 6^2$$
$$\underbrace{16 + 25}_{41} \neq 36$$



EstudioMil/Arquivo da editora

ATIVIDADES faça no seu caderno

1 Use a relação de Pitágoras para verificar quais entre os ternos abaixo são pitagóricos: todos

a) (8, 15, 17) $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

b) (7, 24, 25) $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$

c) (9, 40, 41) $9^2 + 40^2 = 81 + 1\,600 = 1\,681 = 41^2$

d) (12, 35, 37) $12^2 + 35^2 = 144 + 1\,225 = 1\,369 = 37^2$

2 Quais dos seguintes conjuntos de números podem ser os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo? todos

a) 30, 40, 50 $30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500 = 50^2$

b) 16, 30, 34 $16^2 + 30^2 = 256 + 900 = 1\,156 = 34^2$

c) 10, 24, 26 $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$

3 Quais dos seguintes ternos de números representam medidas dos lados de um triângulo retângulo? c, e e f.

a) (10, 48, 52)

b) (15, 20, 30)

c) (18, 80, 82)

d) (7, 15, 17)

e) (10, 24, 26)

f) (85, 132, 157)

g) (57, 136, 158)

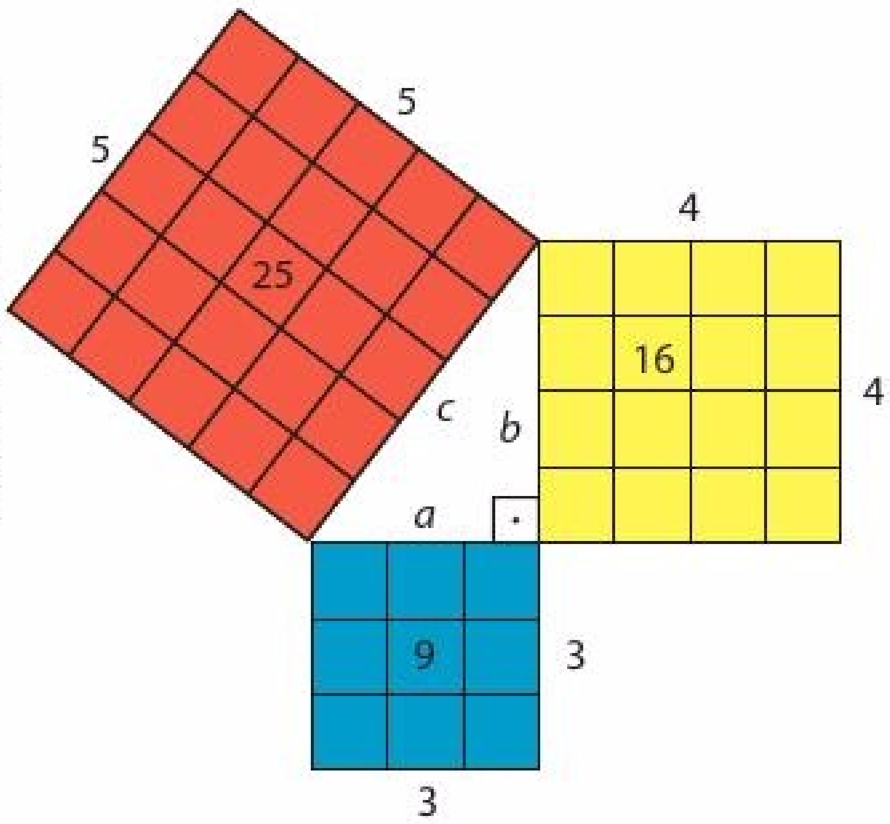
4 ***Desafio olímpico*** P Veja resolução no Manual do Professor.

O terno (6, 8, x) é pitagórico. Descubra o valor de x.

$x = 10$

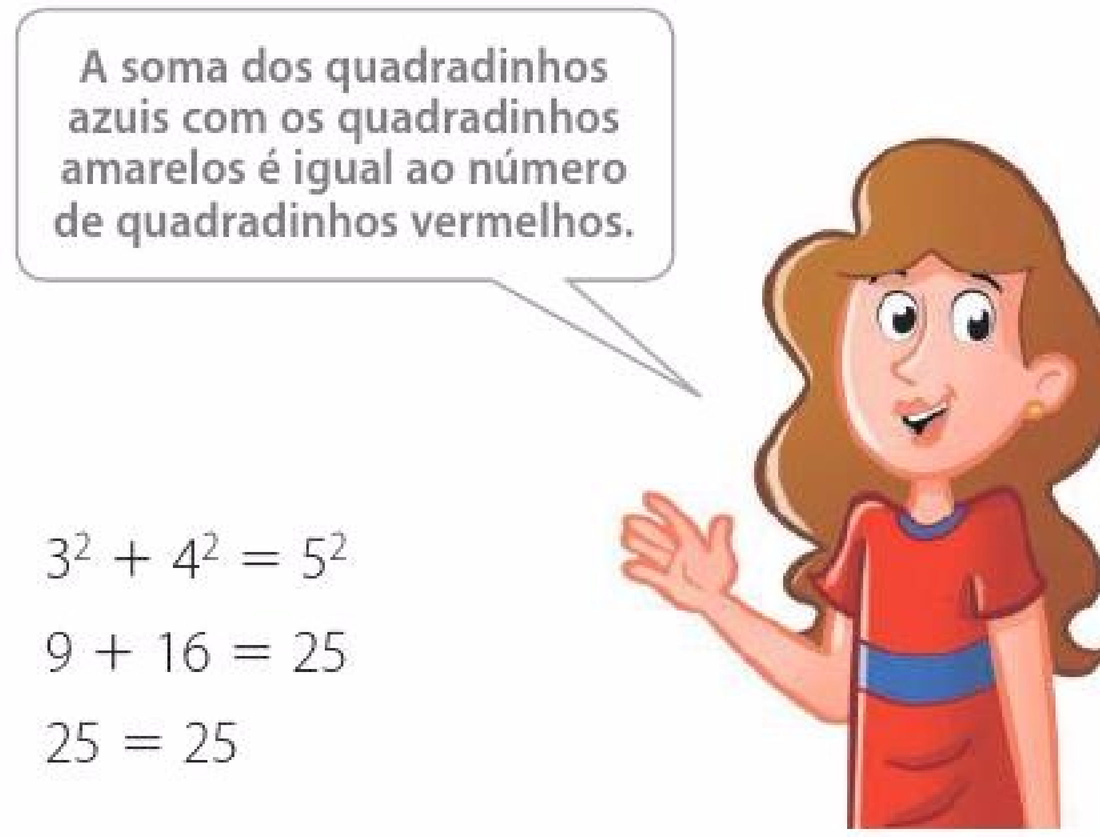
Relação entre áreas de quadrados

Uma interpretação da relação pitagórica é relacioná-la a áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Observe a figura:



Banco de imagens/Arquivo da editora

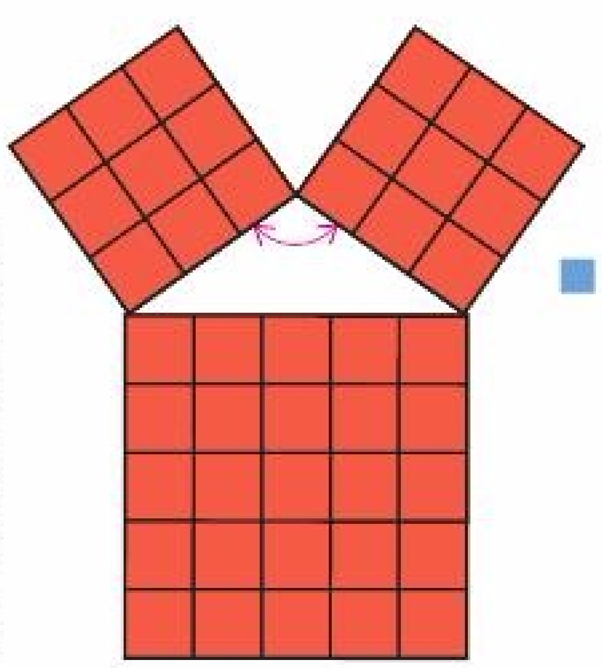
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$25 = 25$$



EstudioMil/Arquivo da editora

Em outras palavras, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa (lado maior) é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (lados menores).

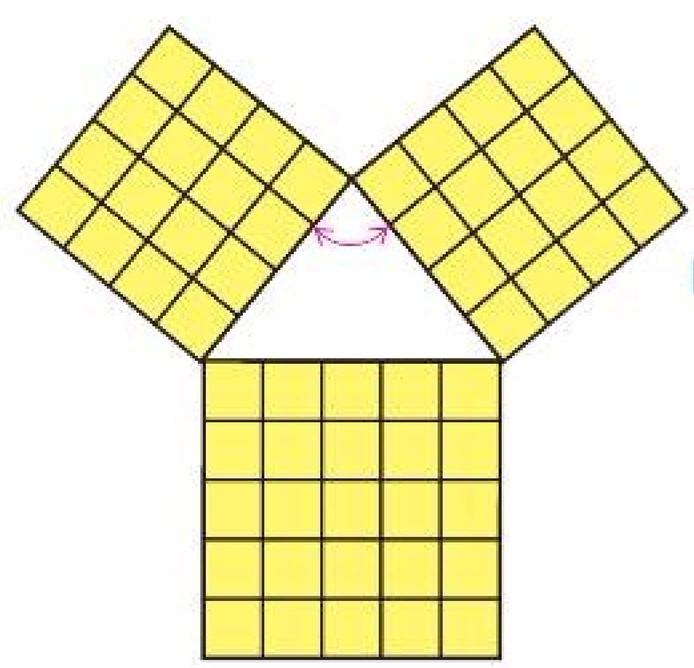
Veja que essa igualdade não é verificada quando a relação pitagórica não é satisfeita:



Banco de imagens/Arquivo da editora

- (3, 3, 5)

$$3^2 + 3^2 < 5^2$$
$$9 + 9 < 25$$
$$18 < 25$$



- (4, 4, 5)

$$4^2 + 4^2 > 5^2$$
$$16 + 16 > 25$$
$$32 > 25$$

P Os alunos podem reproduzir esta figura usando cubinhos de Material Dourado ou pastilhas quadradas.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Homenagem ao teorema de Pitágoras

A relação pitagórica foi demonstrada por muitos matemáticos, talvez até pelo próprio Pitágoras, que ficou com a fama.

Quando uma proposição matemática é demonstrada, recebe o nome de **teorema**. Portanto, daqui em diante, sempre que nos referirmos à relação entre os lados de um triângulo retângulo, usaremos a expressão **teorema de Pitágoras**.

De tempos em tempos o teorema de Pitágoras é homenageado. No ano de 1955 foi realizado na Grécia um congresso dedicado a Pitágoras e ao 2 500º aniversário da fundação de sua escola de filosofia. Em sua homenagem, o correio grego emitiu uma série de selos sobre Pitágoras e o teorema que leva seu nome.

O selo ao lado é um dos mais disputados por matemáticos e colecionadores.

Coleção particular/Arquivo da editora

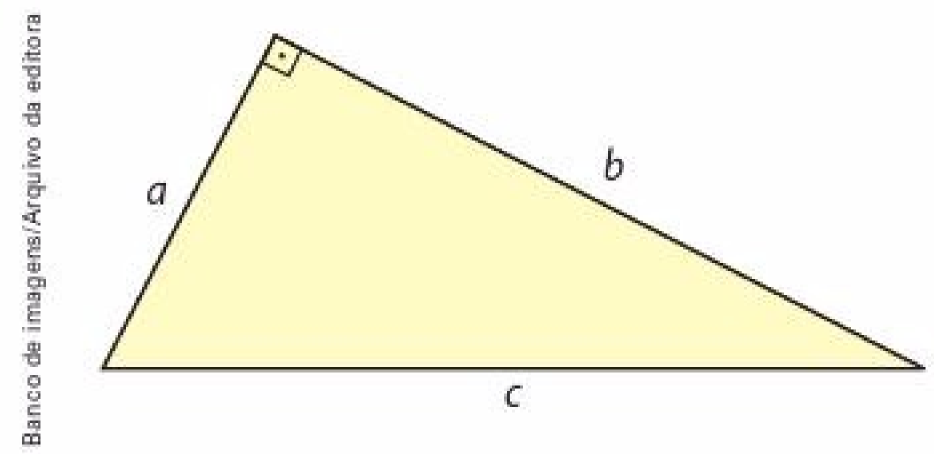
Selo em homenagem a Pitágoras e ao teorema que leva seu nome.

Decompondo quadrados

Agora vamos explorar uma prova do teorema de Pitágoras recortando quadrados e comparando as áreas de figuras planas.

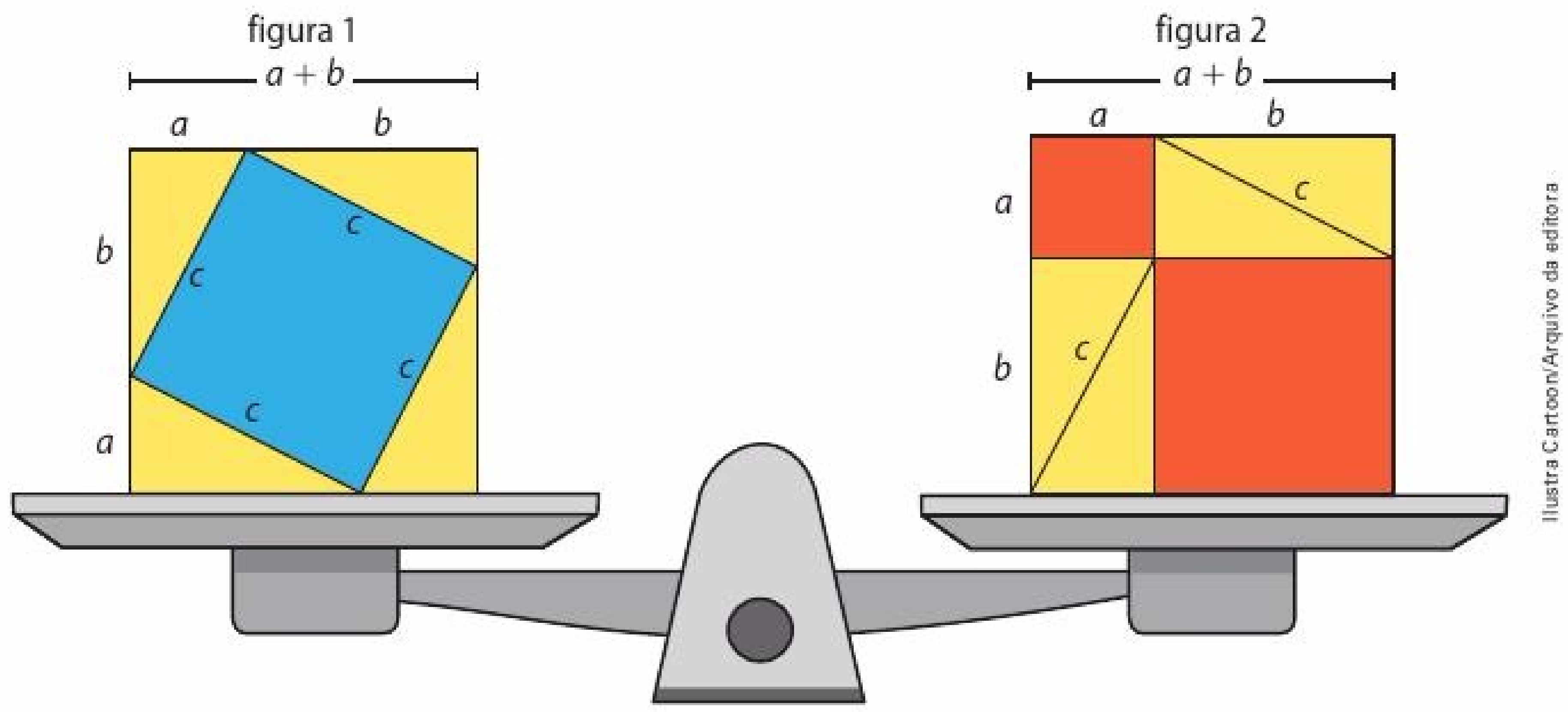
Considere um triângulo retângulo de catetos a, b e hipotenusa c.

P Essa prova já era conhecida pelos hindus e chineses há milhares de anos.



Desenhe dois quadrados de lados $a + b$ e divida-os como indicado na figura abaixo.

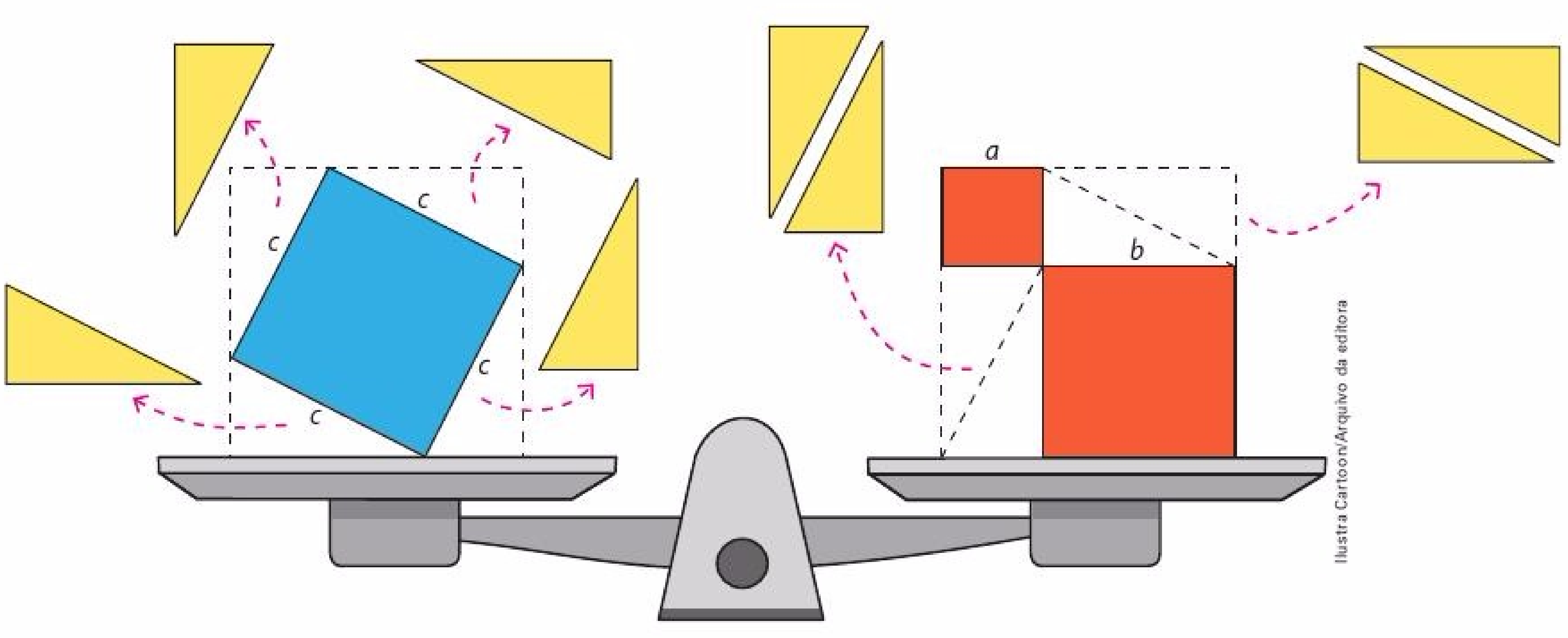
As imagens não estão representadas em proporção.



Na figura 1, o quadrado de lado $a + b$ foi decomposto em 4 triângulos iguais de lados a, b e c e um quadrado central de lado c.

Observe que na figura 2 o quadrado de lado $a + b$ foi decomposto em um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e 4 triângulos iguais de lados a, b e c.

Ao removermos os 4 triângulos na figura 1 restará o quadrado de lado c. E, ao removermos os 4 triângulos na figura 2, restarão os dois quadrados de lados a e b, respectivamente.



Desse fato, pode-se concluir que $a^2 + b^2 = c^2$.

Um Tangram pitagórico

Da época em que viveu Pitágoras, há mais de 2 500 anos, até os dias atuais, diversos matemáticos provaram o teorema de Pitágoras decompondo figuras. Vamos explorar algumas dessas demonstrações por meio de atividades experimentais, ou seja, por construção de modelos.

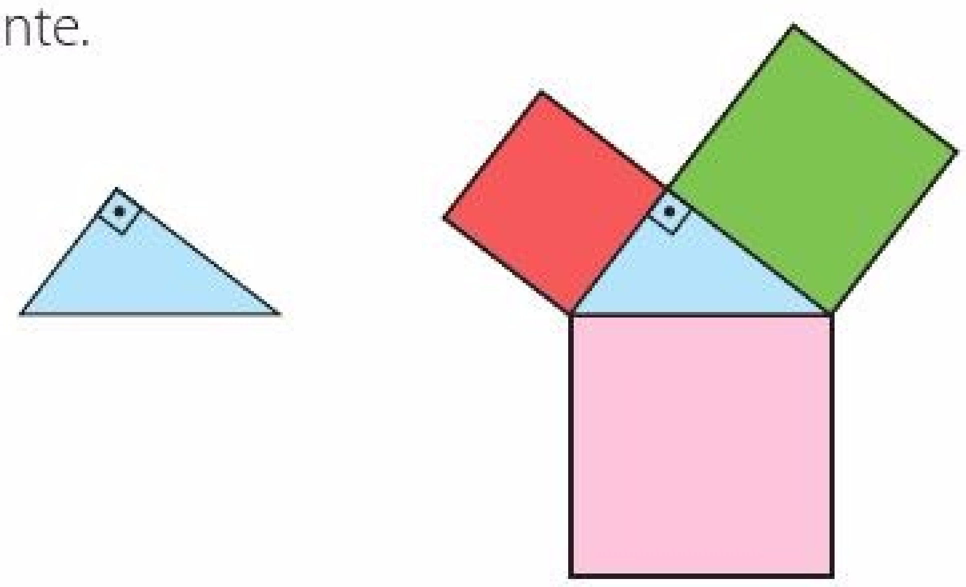
1ª construção:

Desenhe um triângulo retângulo com o auxílio de um esquadro, ou uma régua e um compasso.

Construa em uma folha de papel sulfite quadrados sobre os lados do triângulo conforme indicado na figura abaixo.

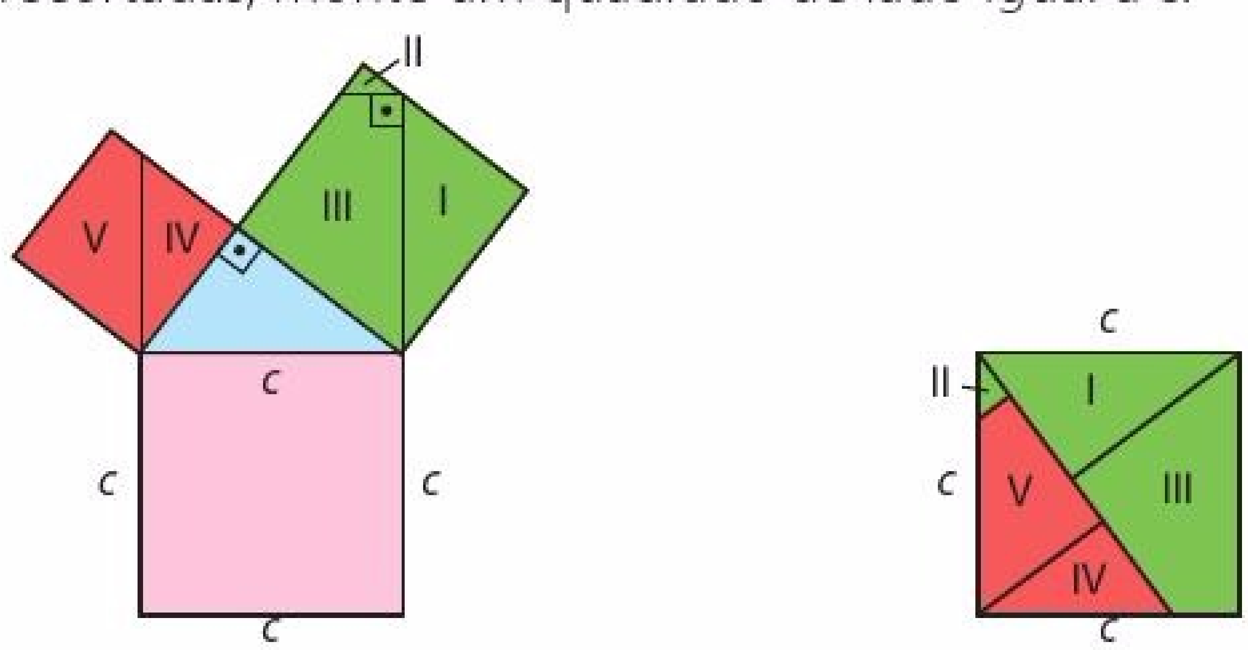
Recorte a figura resultante.

P Nos últimos anos o termo Tangram tem sido utilizado para se referir genericamente a jogos de quebra-cabeças formados por peças em formas geométricas planas.



Com o auxílio do esquadro, prolongue os lados do quadrado maior e trace os segmentos indicados na figura abaixo e recorte as peças I, II, III, IV e V.

Com as peças recortadas, monte um quadrado de lado igual a *c*.



<www.uff.br/cdme/tangrans_pitagoricos/jogo01/jogo01.html>

Acesso em: 17 nov. 2014

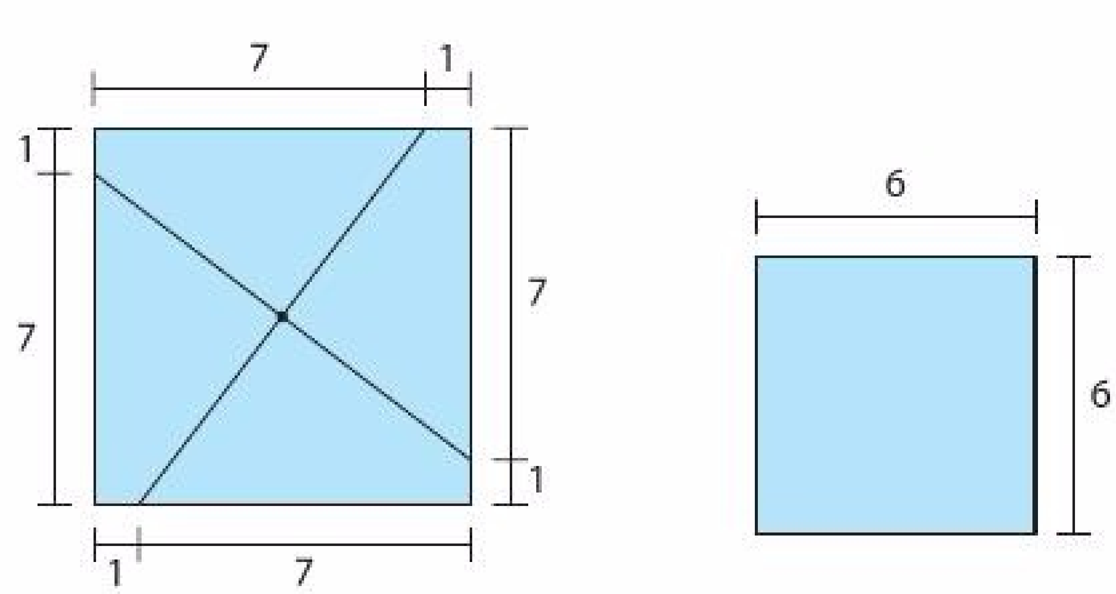
No *site* da Universidade Federal Fluminense, você encontra algumas atividades de quebra-cabeças relacionadas ao teorema de Pitágoras.

2ª construção:

Recorte dois quadrados de lados 8 cm e 6 cm, respectivamente.

Sobre o quadrado de lado 8 cm, trace dois segmentos de reta passando pelo centro do quadrado, conforme indicado na figura abaixo.

P Se possível, realize essa construção em sala de aula.



Recorte os 4 quadriláteros. Você vai observar que são congruentes.

Forme um quadrado com os 4 quadriláteros recortados e o quadrado de lado 6 cm.

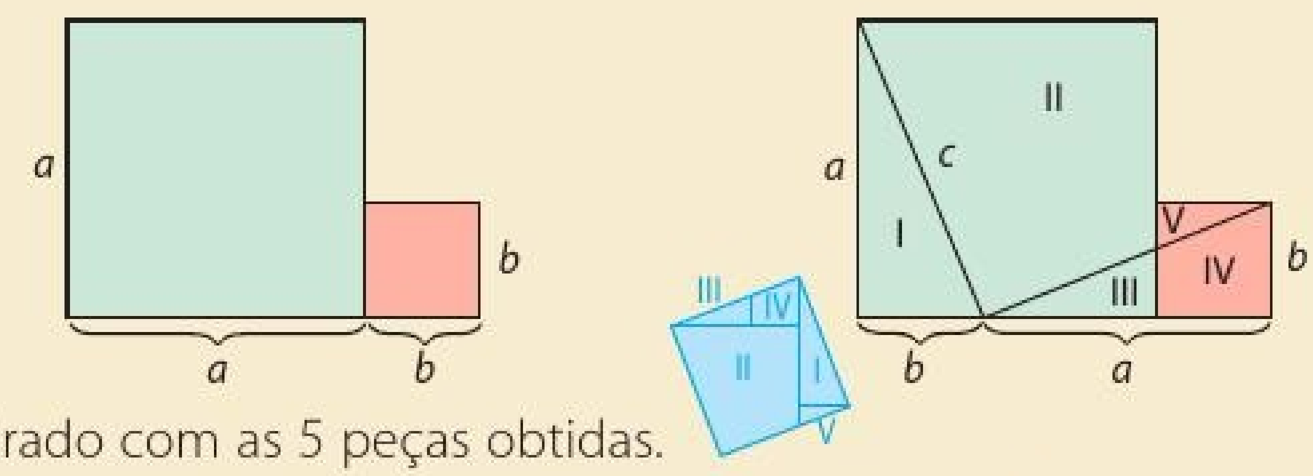
Qual é a medida do lado do quadrado formado por essas peças?

Aplicações do teorema de Pitágoras

Uma vez aceita a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, os matemáticos, engenheiros, arquitetos, astrônomos e inúmeros outros especialistas a utilizam para resolver problemas, em especial aqueles em que é necessário saber a medida de um lado do triângulo sendo conhecidas as outras duas medidas.

ATIVIDADES — faça no seu caderno

5 Desenhe, em uma folha de papel, dois quadrados "encostados", de modo que suas bases estejam apoiadas na mesma reta. Cole-os em uma cartolina e recorte, com uma tesoura, as 5 peças, de acordo com o indicado na figura.



a) Monte um quadrado com as 5 peças obtidas.

b) Qual é a medida dos lados desse novo quadrado? É a medida do maior lado da peça I, que é a hipotenusa do triângulo de lados *a* e *b*.

c) Verifique a relação de Pitágoras tomando como medidas os lados dos três quadrados. $a^2 + b^2 = c^2$

6 Construa, com régua e compasso, um triângulo de medidas 4 cm, 7,5 cm e 8,5 cm. Certifique-se de que se trata de um triângulo retângulo.

a) Construa um quadrado sobre cada um dos lados desse triângulo e recorte os quadrados construídos sobre os catetos conforme o esquema da 1ª construção (página anterior).

b) Com as partes obtidas tente compor o quadrado construído sobre a hipotenusa. Respostas pessoais.

7 Pegue um barbante e faça 13 nós de modo que a distância entre cada nó seja 5 cm.

- Junte as extremidades com um alfinete fincado em um apoio.
- Fixe o 5º e o 8º nós (usando alfinetes, por exemplo), de modo que sejam vértices de um triângulo.
- Junte os nós que estão nas extremidades formando um triângulo.
- Meça os ângulos do triângulo formado e verifique se algum ângulo é próximo de 90°.

Compare seu resultado com o de seus colegas. P Veja comentário no Manual do Professor.

8 Repita a atividade anterior escolhendo outra medida para a distância entre os nós. O que você concluiu? P Veja comentário no Manual do Professor.

9 Tereza é uma costureira de mão-cheia. De tempos em tempos ela aproveita retalhos de tecido e remenda-os para fazer vestidos, calças, camisas, toalhas e cortinas. Ela pegou dois retalhos quadrados, um medindo 39 cm de lado e outro 80 cm de lado. Com esses retalhos, que ela cortou como na 2ª construção da página anterior, costurou uma toalha quadrada. Determine a medida do lado da nova toalha.

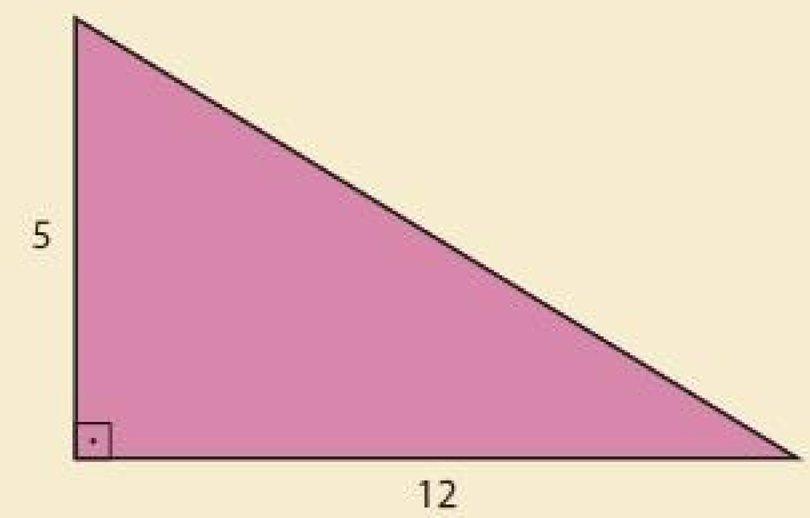
$39^2 + 80^2 = x^2 \Rightarrow 1\,521 + 6\,400 = 7\,921 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{7\,921} = 89$.
A nova toalha terá 89 cm de lado.

T-Design/Shutterstock/Glow Images

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

10 Sabendo que os lados perpendiculares de um triângulo medem 5 cm e 12 cm, respectivamente, responda:

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) Qual é a medida da hipotenusa? 13 cm

b) Qual é a área do quadrado construído sobre a hipotenusa? 13^2 cm² = 169 cm²

11 Qual é a área do quadrado construído sobre o cateto desconhecido de um triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 25 cm e um dos catetos mede 24 cm.
$25^2 = 24^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow x = \sqrt{49} = 7$. A área do quadrado mede 49 cm².

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

> Triângulo retângulo tem um ângulo reto (90°).
> Triângulo obtusângulo tem um ângulo obtuso (maior que 90°).
> Triângulo acutângulo tem todos os ângulos agudos (menores que 90°).

1 Desenhe um triângulo acutângulo e construa quadrados sobre seus lados. Adicione as áreas dos quadrados menores e compare com a área do quadrado maior. Compare seu resultado com o de seus colegas. O que você concluiu? P Veja comentário no Manual do Professor.

2 Repita a atividade anterior desenhando um triângulo acutângulo diferente do que você desenhou anteriormente. Mesma resposta da atividade anterior.

3 Desenhe um triângulo obtusângulo e construa quadrados sobre seus lados. Adicione as áreas dos quadrados menores e compare com a área do quadrado maior. Compare seu resultado com o de seus colegas. O que você concluiu? P Veja comentário no Manual do Professor.

4 Repita a atividade anterior desenhando um triângulo obtusângulo diferente daquele que você já desenhou. Mesma resposta da atividade anterior.

5 Desenhe um triângulo retângulo (a, b, c) e sobre seus lados construa triângulos retângulos isósceles, de modo que os catetos coincidam com os lados do triângulo (a, b, c).

a) Calcule a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos e compare com a área do triângulo construído sobre a hipotenusa.

b) O que você concluiu? P Veja comentário no Manual do Professor.

6 Desenhe um triângulo retângulo (a, b, c) e sobre seus lados construa triângulos equiláteros com lados que meçam, respectivamente, a, b e c.

a) Calcule a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos e compare com a área do triângulo construído sobre a hipotenusa.

b) O que você concluiu? P Veja comentário no Manual do Professor.

PITÁGORAS

Um teorema com mil histórias

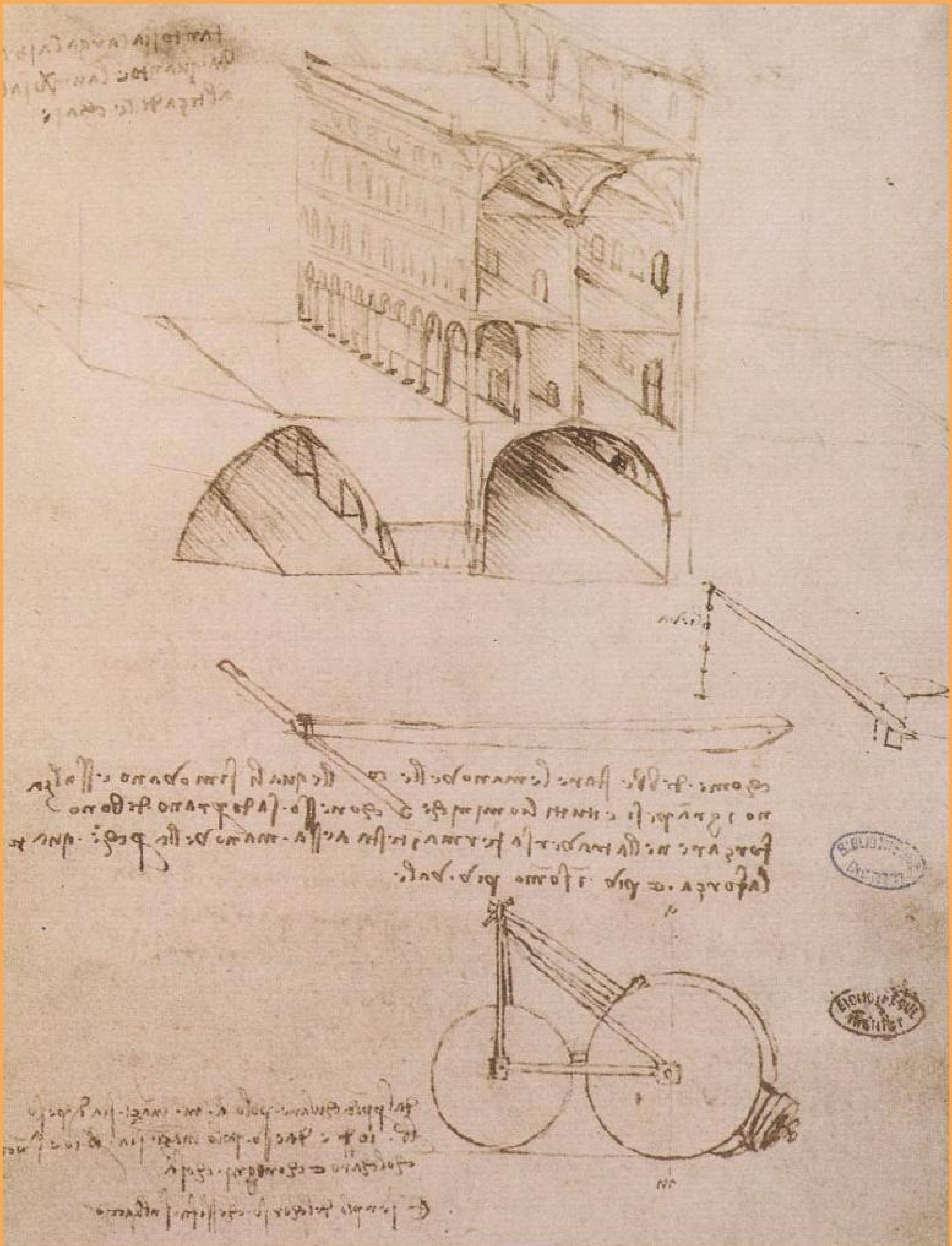
Pitágoras provavelmente nasceu em Samos, uma ilha no mar Egeu, no século VI a.C., e teria fundado uma escola em Crotona, cidade da Magna Grécia (hoje sul da Itália). Nessa escola se estudava Filosofia, Religião, Ciências, Música e Matemática. Ali, todas as descobertas eram assumidas coletivamente. Por isso não se sabe exatamente quem foi o autor da demonstração do teorema atribuído a Pitágoras.

Apesar de o teorema ser atribuído a Pitágoras, sabe-se que seu conteúdo era conhecido muitos séculos antes pelos babilônios, egípcios e chineses. É provável que Pitágoras tenha tido contato com esse fato geométrico em suas andanças pelo Egito.

Pitágoras representado no canto esquerdo inferior (circulado em azul), por Rafaello Sanzio (1483-1520) em sua obra *Escola de Atenas*, pintada entre 1509 e 1510.

O teorema de Pitágoras atraiu a atenção de matemáticos, filósofos e curiosos de todas as partes do planeta. Do árabe Abu-l-Wafa Buzjani (940-997) ao indiano Bhaskara (1114-1185), do célebre artista Leonardo da Vinci (1452-1519) ao presidente dos Estados Unidos da América James Abram Garfield (1831-1881).

O norte-americano Elisha Scott Loomis publicou, em 1940, uma coletânea com 370 demonstrações diferentes do teorema de Pitágoras. Mais recentemente, o educador matemático Paulus Gerdes, estudioso da Matemática produzida pelos povos da África, descobriu uma série infinita de demonstrações distintas do teorema.



Observe o triângulo retângulo presente na reprodução do desenho *Engenho de rodas*. Leonardo da Vinci. Biblioteca do Instituto da França, Paris.

UNIDADE

4

Aplicações algébricas e geométricas

Christian Bertrand/Shutterstock/Glow Images

Nesta Unidade, vamos explorar uma importante aplicação da Álgebra, os sistemas de equações, que resolveremos com base nos conhecimentos de equações já adquiridos. Saber resolver sistemas de equações é muito importante para resolver problemas práticos do dia a dia e também problemas que aparecem em outras áreas do conhecimento.

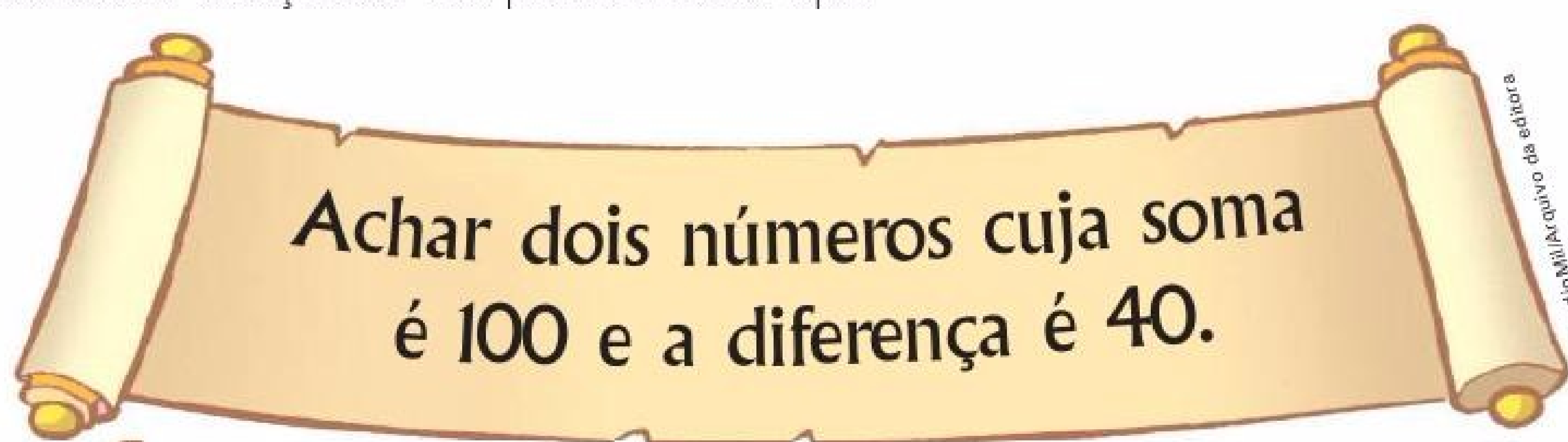
Abordaremos ainda temas importantes da Geometria, por suas aplicações práticas e por sua presença na natureza, nas artes e nos elementos do cotidiano. Trata-se de velhos conhecidos: a circunferência, o círculo e seus elementos, agora com enfoque nas suas propriedades e aplicações. Por fim, faremos uma viagem ao mundo das formas tridimensionais, hoje conhecidas como formas 3D.

CAPÍTULO 10 SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS

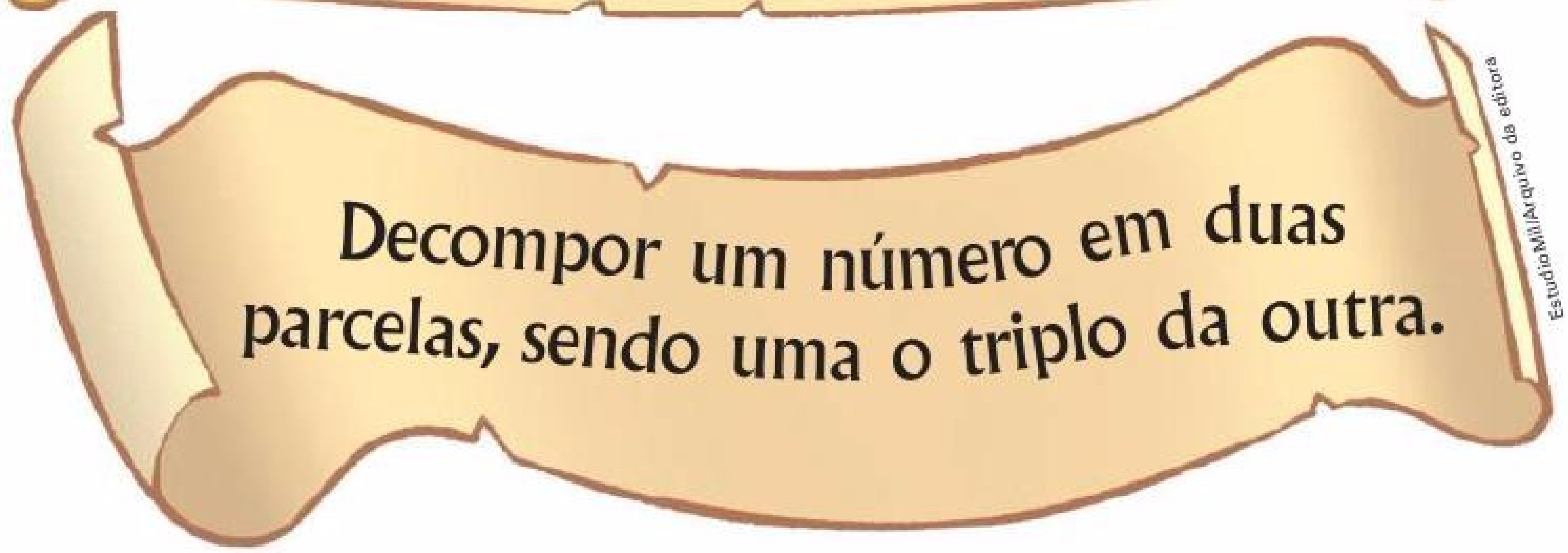
Equacionando situações-problema

A Matemática praticada pelos gregos, há mais de 2 mil anos, não se resumia apenas a teorias e métodos de resolução de problemas práticos. Eles também se dedicavam à recreação. Uma atividade muito comum era a formulação de desafios e jogos de adivinhação de números.

Diofante de Alexandria, em seu livro *Aritmética* – que é considerado o pioneiro no uso de letras para representar valores desconhecidos e um dos percussores da Álgebra – formulou uma coleção de 150 problemas do tipo:

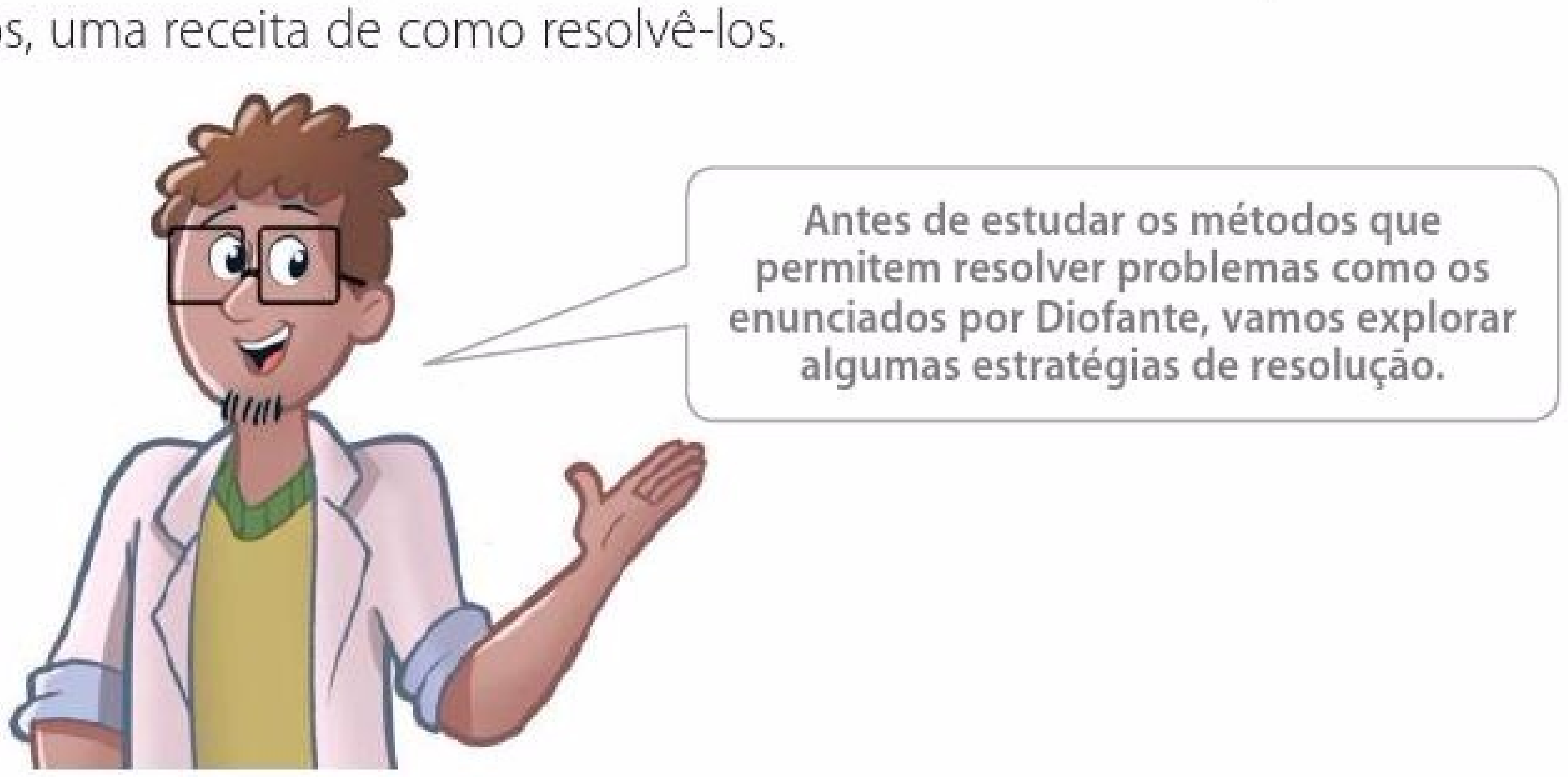


EstudioMil/Arquivo da editora



EstudioMil/Arquivo da editora

Em seus livros, Diofante apresenta os problemas, fornece uma resposta numérica e, em alguns casos, uma receita de como resolvê-los.



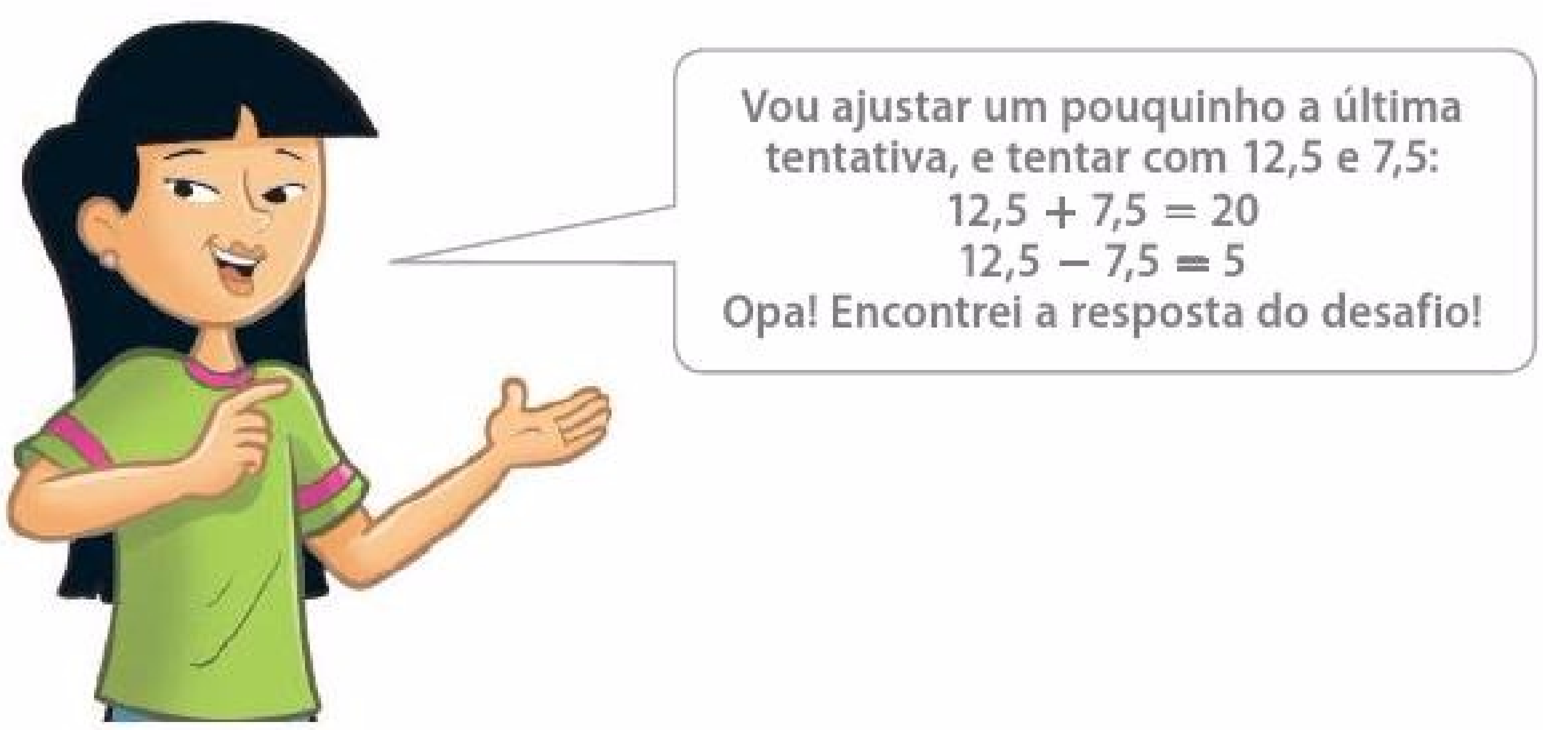
EstudioMil/Arquivo da editora

Jogos de adivinhação

Descubra dois números cuja soma é 20 e a diferença é 5.

Ilustrações: EstudioMil/Arquivo da editora

Essa maneira de resolver problemas consiste em fazer tentativas e ir ajustando os valores até chegar ao resultado esperado.



EstudioMil/Arquivo da editora

Assim, podemos concluir que os números que satisfazem as condições do problema são 12,5 e 7,5.

Vamos exercitar o procedimento adotado pela garota para resolver as atividades a seguir.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 Descubra dois números cuja soma é:

a) 10 e a diferença é 4; 7 e 3

b) 20 e a diferença é 6. 13 e 7

2 Somando dois números obtém-se 100, subtraindo o menor do maior o resultado é 40. Que números são esses? 70 e 30

3 Para cada coluna da tabela encontre dois números cuja soma e diferença são conhecidas. 23 e 12, 128 e 48, 3 e −1, $\frac{15}{2}$ e $\frac{5}{2}$

Soma	35	176	2	10
Diferença	11	80	4	5

4 Descreva um procedimento que explique como você resolveu cada item da atividade anterior. Compare sua resposta com a de seus colegas. Respostas pessoais.

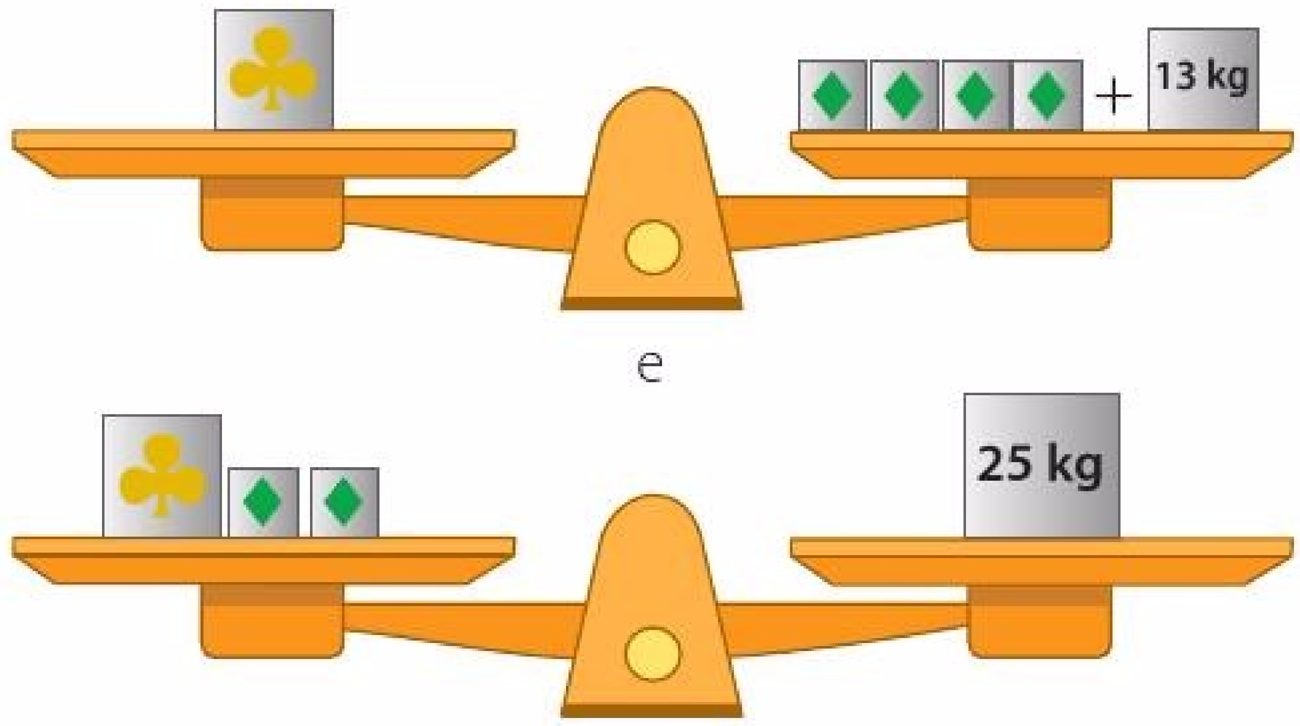
P Veja comentário no Manual do Professor.

Desafios com balanças

P O modelo das balanças é útil para que os alunos aprendam a fazer as operações algébricas em equações e sistemas, sem truques como "passa para lá com sinal trocado". É importante que compreendam que as operações entre os membros que usualmente se faz para resolver uma equação estão baseadas em propriedades como a operação inversa e operações de compensação. O objetivo das balanças é que os alunos aprendam com significado, sabendo o que fazem em cada etapa e não se fixando em "decorebas" e "macetes".

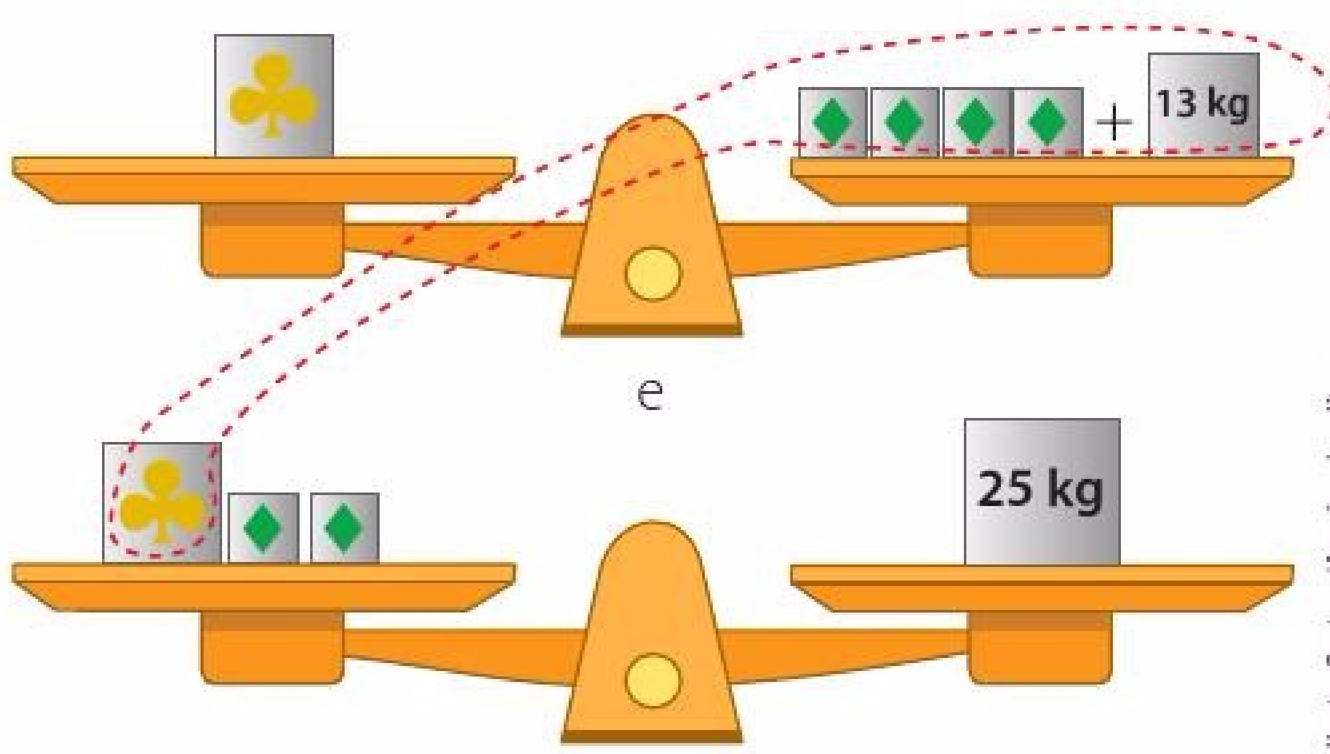
Os problemas com balanças são semelhantes aos de adivinhação.

Imagine que se queira descobrir o "peso" de cada caixa das ilustrações abaixo:



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

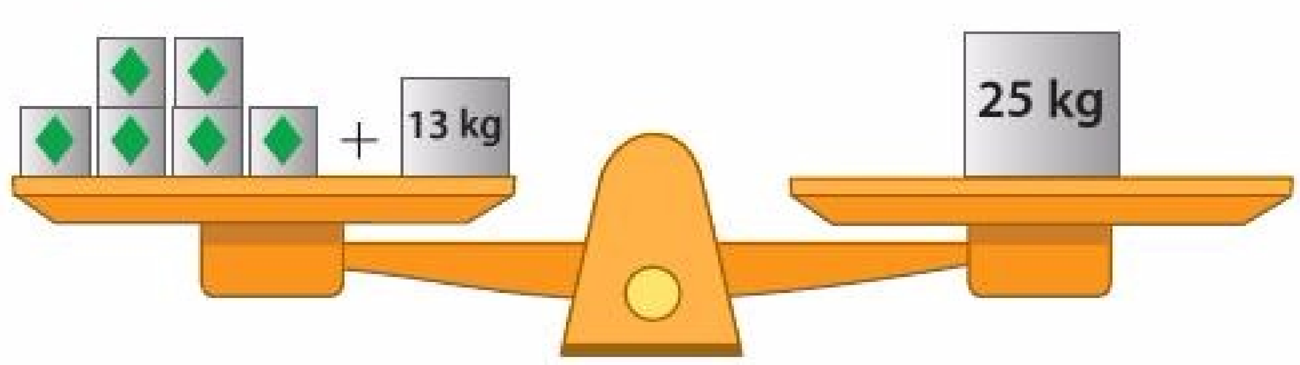
Para isso, podemos usar um artifício: substituímos a caixa com símbolo amarelo do primeiro prato da segunda balança pelo conteúdo do segundo prato da primeira balança.



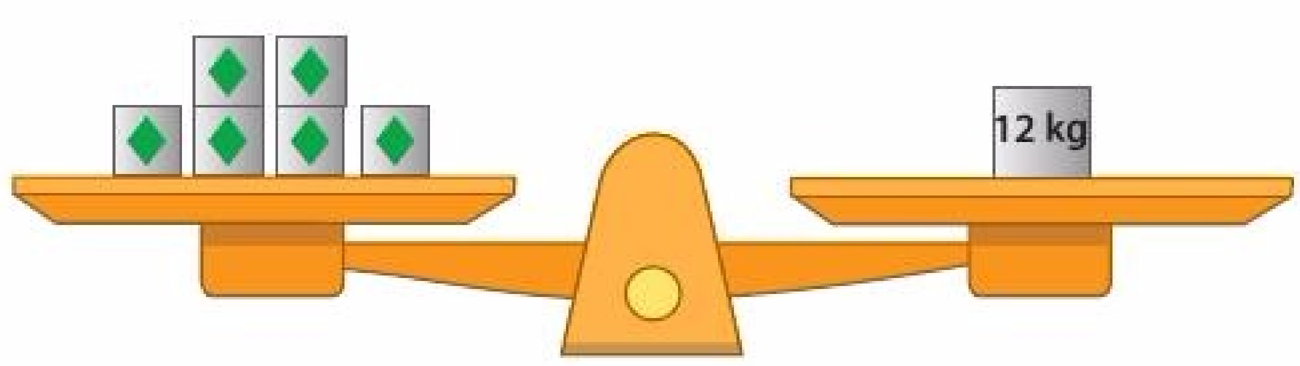
Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

P Ainda que peso e massa sejam grandezas diferentes, pois peso está associado a outras grandezas físicas, como a aceleração da gravidade, estamos usando o termo *peso* no sentido que tem no senso comum, a fim de evitar ruídos que possam interferir na interpretação do problema. Por esse motivo o termo *peso* aparece entre aspas.

A nova configuração da balança fica:



Subtraindo 13 kg de cada prato, concluímos que:



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Como 6 caixas com símbolo verde equivalem a 12 kg, então cada caixa com símbolo verde equivale a 2 kg.

Se a caixa com símbolo amarelo equivale a quatro caixas com símbolo verde mais 13 kg, concluímos que a caixa com símbolo amarelo equivale a $4 \cdot 2 + 13 = 21$, portanto, 21 kg.

Agora, vamos explorar um sistema com três balanças em equilíbrio.

Considerando que as caixas de mesma cor têm o mesmo "peso", quantos quilos têm cada caixa?

Figura 1

Figura 2

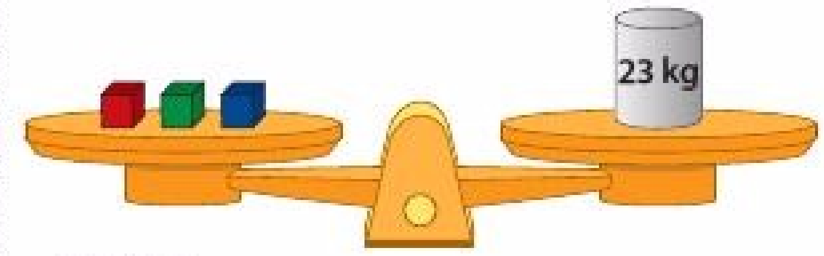


Figura 3

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Há um método bem engenhoso que permite resolver o problema, que vamos mostrar usando a linguagem algébrica.

Vamos chamar de *A*, *B* e *C* os pesos das caixas vermelha, verde e azul, respectivamente. As balanças e seus conteúdos podem ser representadas pelas equações:

$$2A + 2B = 22 \quad \text{(I)}$$
$$B + 2C = 28 \quad \text{(II)}$$
$$A + B + C = 23 \quad \text{(III)}$$

Adicionando os totais das duas primeiras balanças, temos:

$$(2A + 2B) + (B + 2C) = 22 + 28$$
$$2A + 3B + 2C = 50$$
$$2\,(\boldsymbol{A + B + C}) + B = 50 \quad \text{(IV)}$$

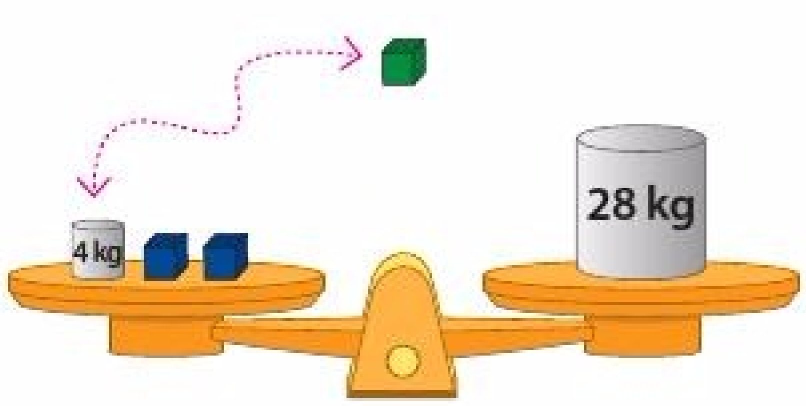
Observe que $(A + B + C)$ é o conteúdo do prato da direita da terceira balança, que equivale a 23 kg. Assim, podemos fazer uma substituição de (III) em (IV):

$$2 \cdot \mathbf{23} + B = 50$$
$$46 + B = 50$$
$$B = 50 - 46$$
$$B = 4$$

Dessa maneira, concluímos que a caixa ***B*** (verde) tem 4 kg.

Agora, para determinar o peso da caixa *C*, podemos substituir *B* por 4 kg na segunda balança. Acompanhe.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora



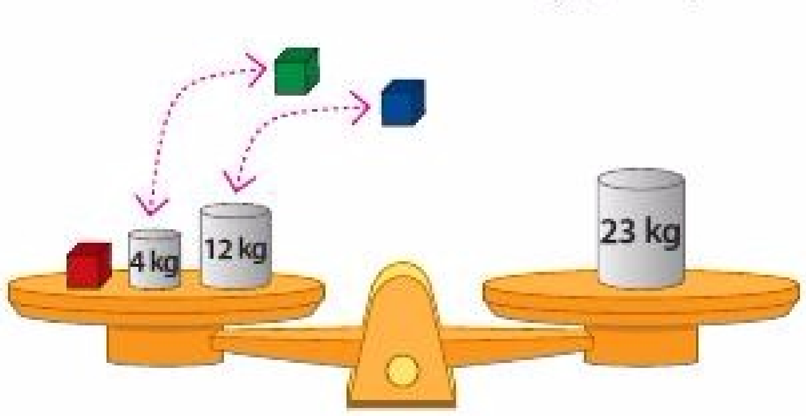
$$B + 2C = 28$$
$$\mathbf{4} + 2C = 28$$
$$2C = 28 - 4$$
$$2C = 24$$
$$C = 24 : 2$$
$$C = 12$$

Logo, a caixa ***C*** (azul) tem 12 kg.

Agora, só falta determinar o peso da caixa *A*.

Substituindo *B* e *C* na 3ª balança, respectivamente, por 4 kg e 12 kg, temos:

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora



$$A + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = 23$$
$$A + \mathbf{4} + \mathbf{12} = 23$$
$$A + 16 = 23$$
$$A = 23 - 16$$
$$A = 7$$

Assim, a caixa ***A*** (vermelha) tem 7 kg.

As estratégias de resolução, com os procedimentos de troca de conteúdos equivalentes a seguir, utilizadas na situação das balanças, também podem ser usadas para resolver outros problemas. Veja o caso da resolução do problema a seguir.

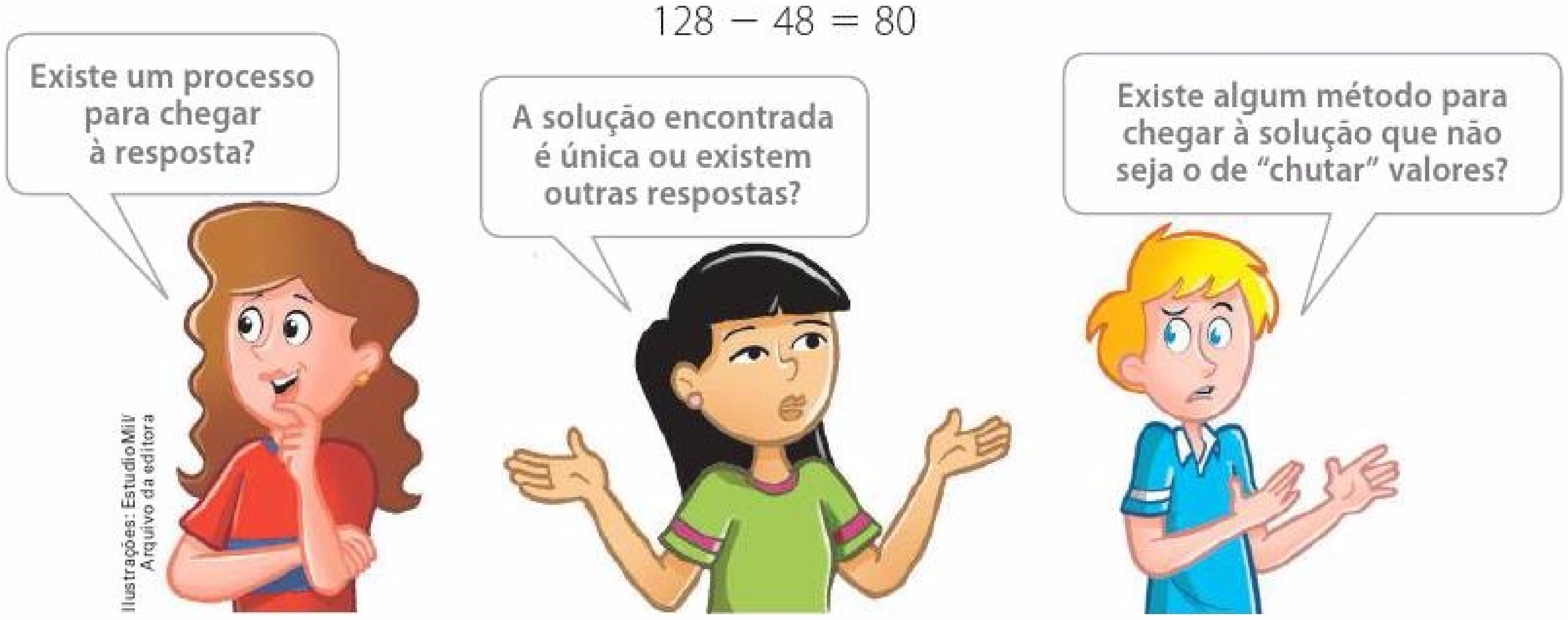
Descubra dois números cuja soma é 176 e a diferença é 80.

Os números que satisfazem as condições do enunciado são 128 e 48. Confira:

$$128 + 48 = 176$$

e

$$128 - 48 = 80$$



Ilustrações: EstudioMil/ Arquivo da editora

Responder a essas questões é o principal objetivo deste capítulo.

A maneira mais utilizada pelos matemáticos para chegar aos números que satisfazem as condições do problema é **equacionar o problema**.

Incógnito: não conhecido. Dizemos que uma pessoa está incógnita na multidão quando ela está disfarçada, escondida.

Ilustrações: EstudioMil/ Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

Veja como equacionar esse problema:

1º) Escolhemos letras para representar os números desconhecidos.

Nesse caso, vamos usar as letras ***a*** e ***b*** para representar os números a serem descobertos e vamos considerar que $a > b$.

2º) Escrevemos as equações que representam as relações entre as incógnitas e os dados do problema:

- dois números cuja soma é 176: $a + b = 176$ (I)
- e a diferença é 80: $a - b = 80$ (II)

Temos, então, um **sistema de duas equações e duas incógnitas**:

$$\begin{cases} a + b = 176 & \text{(I)} \\ a - b = 80 & \text{(II)} \end{cases}$$

P Comente com os alunos que é uma convenção a notação de chave vertical na lateral esquerda para expressar um sistema de duas equações e duas incógnitas em que a solução deve satisfazer às duas equações.

Podemos atribuir diversos valores para a e b em cada uma dessas equações.

Observe os quadros abaixo com alguns dos valores obtidos:

Equação (I)		
a	b	$a + b$
0	176	176
1	175	176
2	174	176
3	173	176
4	172	176
127	49	176
128	48	176
129	47	176
173	3	176
174	2	176
175	1	176
176	0	176

Equação (II)		
a	b	$a - b$
80	0	80
81	1	80
82	2	80
83	3	80
84	4	80
127	47	80
128	48	80
129	49	80
173	93	80
174	94	80
999	819	80

P Há infinitos pares (a, b) com a e b racionais que satisfazem a equação (I), e infinitos que satisfazem a equação (II). Na tabela aparecem alguns pares de números inteiros, para permitir uma rápida verificação pelos alunos.

Ilustrações: EstudioMil/Arquivo da editora

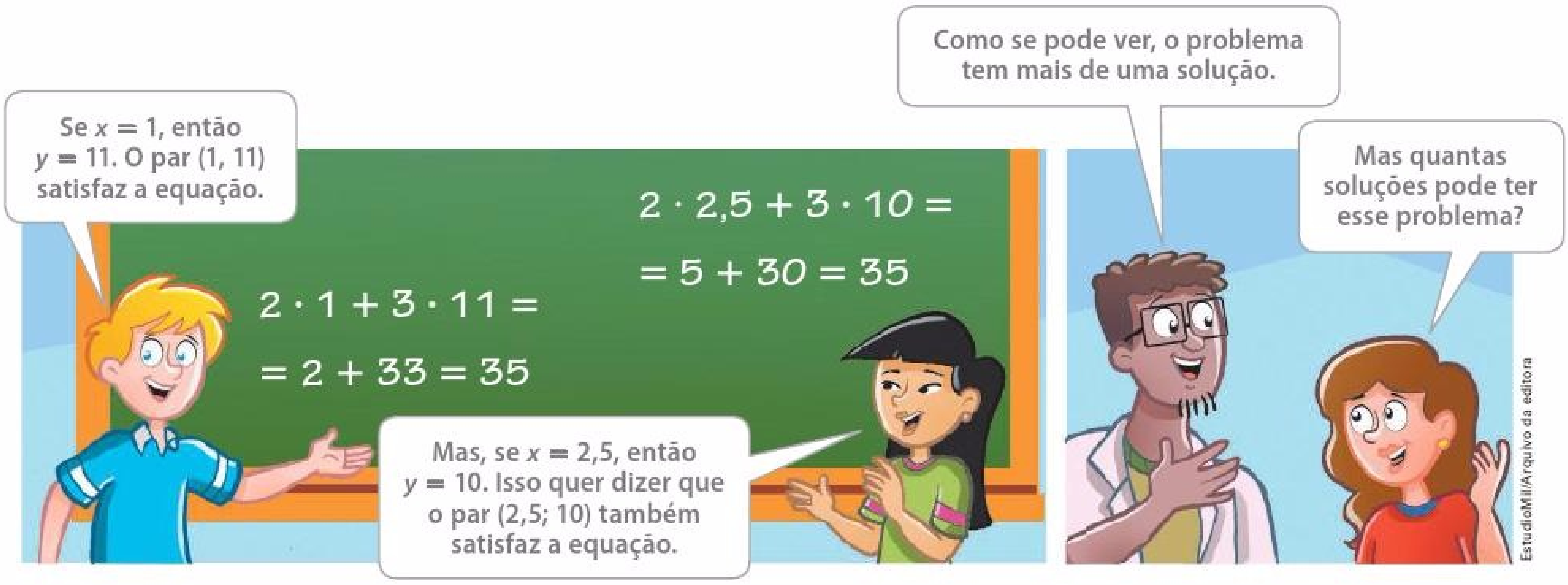
Podemos representar o par que satisfaz as duas equações assim: (128, 48), em que $a = 128$ e $b = 48$.

EstudioMil/Arquivo da editora

1º) Encontre dois números tais que, somando o dobro de um com o triplo do outro, o resultado seja 35.

Vamos escrever a equação correspondente ao enunciado do problema usando as letras x e y para representar as incógnitas: $2x + 3y = 35$.

Agora, acompanhe como encontrar os valores numéricos para o par (x, y).



EstudioMil/Arquivo da editora

Para responder a essa questão, vamos explorar a equação obtida.

Partindo da equação $2x + 3y = 35$ e efetuando as transformações algébricas permitidas, podemos escrever y em função de x. Veja:

$2x + 3y = 35$

$3y = 35 - 2x$ → Isolando o termo com y no primeiro membro.

$y = \dfrac{35 - 2x}{3}$ → Dividindo ambos os membros por 3.

A partir dessa última igualdade, podemos construir uma tabela. Atribuindo valores quaisquer para x, obtemos os valores de y correspondentes.

Alguns valores que satisfazem a equação $y = \dfrac{35 - 2x}{3}$

x	$y = \dfrac{35 - 2x}{3}$	(x, y)
1	$\dfrac{35 - 2 \cdot \mathbf{1}}{3} = \dfrac{33}{3} = 11$	(1, 11)
4	$\dfrac{35 - 2 \cdot \mathbf{4}}{3} = \dfrac{27}{3} = 9$	(4, 9)
7	$\dfrac{35 - 2 \cdot \mathbf{7}}{3} = \dfrac{21}{3} = 7$	(7, 7)

P Nesta tabela atribuímos os valores de 1, 4, 7 para x, para que os cálculos sejam simples e os alunos foquem a atenção ao significado de par ordenado.

Agora, vamos confirmar se os valores de x e y, presentes na tabela, satisfazem à equação do problema original, ou seja, $2x + 3y = 35$.

Alguns pares que satisfazem a equação $2x + 3y = 35$			
(x, y)	$2x$	$3y$	$2x + 3y$
(1, 11)	2	33	35
(4, 9)	8	27	35
(7, 7)	14	21	35

A tabela sugere que se podem obter tantos pares (x, y) quantos quisermos, satisfazendo tal equação, o que responde à questão sobre o número de soluções.

Em equações como essa as incógnitas têm valores variáveis, por isso elas também são chamadas de **variáveis**.

2º) Suponha que se queira encontrar um par (x, y) de números que satisfaz, simultaneamente, as duas equações:

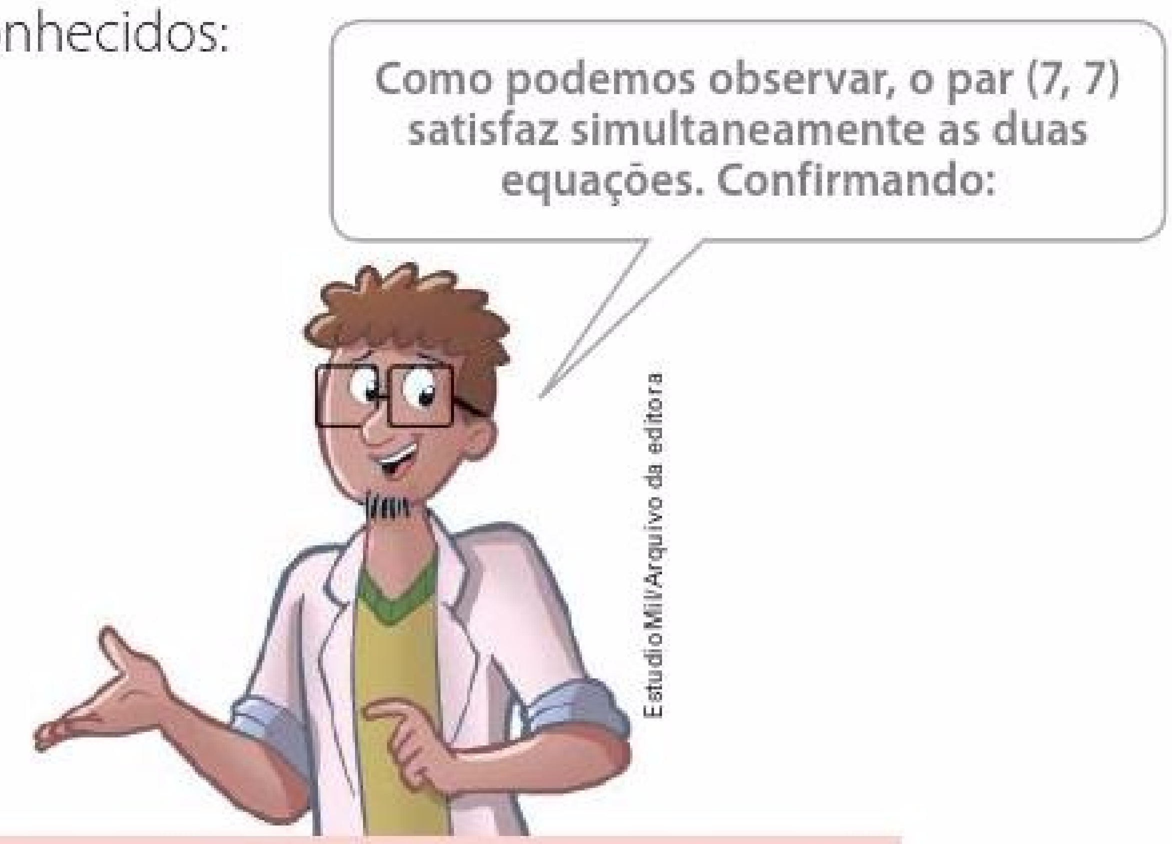
$$\begin{cases} 2x + 3y = 35 & \text{(I)} \\ 2x - y = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

Nesse caso, temos que encontrar entre as infinitas soluções da equação $2x + 3y = 35$ aquela que satisfaz também à equação $2x - y = 7$.

Vamos investigar alguns pares (x, y), sendo alguns já conhecidos:

x	y
0	$\frac{35}{3}$
1	11
4	9
10	5
-2	13
$\frac{35}{2}$	0
7	7
2,5	10

$2x + 3y$	$2x - y$
35	$-\frac{35}{3}$
35	-9
35	-1
35	15
35	-17
35	35
35	7
35	-5



Equação (I): $2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 14 + 21 = 35$

Equação (II): $2 \cdot 7 - 7 = 14 - 7 = 7$

ATIVIDADES

faça no seu caderno

5 Encontre os valores y dos pares abaixo que satisfazem a equação $3x + 4y = 36$.

a) $(0, y)$ 9
b) $(2, y)$ 7,5
c) $(4, y)$ 6
d) $(8, y)$ 3
e) $(12, y)$ 0
f) $(20, y)$ -6

6 O par ordenado $(a, 6)$ é solução da equação $3x + 2y = 15$. Substitua, na equação, x por a e y por 6 e calcule o valor de a.

$3a + 2 \cdot 6 = 15 \Rightarrow 3a = 15 - 12 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$

7 Quais dos pares ordenados **são** soluções da equação $3x - 2y = 24$?

Os pares ordenados dos itens **a**, **d**, **e** e **f** são soluções da equação. Basta substituir os números dos pares ordenados na equação.

Justifique sua resposta.

a) $(0, -12)$ $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-12) = 24$
b) $(4, 6)$ $3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0$
c) $(6, 4)$ $3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = 18 - 8 = 10$
d) $(12, 6)$ **7. d)** $3 \cdot 12 - 2 \cdot 6 = 36 - 12 = 24$
e) $(7; -1{,}5)$ **7. e)** $3 \cdot 7 - 2 \cdot (-1{,}5) = 21 + 3 = 24$
f) $(8, 0)$ $3 \cdot 8 - 2 \cdot 0 = 24$

Métodos de resolução de um sistema de equações

A seguir vamos estudar três métodos de resolução de sistemas de duas equações com duas variáveis.

Método da substituição

Imagine que a soma das idades de dois irmãos é 24 anos. Qual é a idade de cada irmão sabendo que o maior é 4 anos mais velho?

O primeiro passo é equacionar o problema: seja x a idade do irmão mais velho e y a idade do irmão mais novo, então:

$$\begin{cases} x + y = 24 & \text{(I)} \longrightarrow \text{A soma das idades é 24.} \\ x - y = 4 & \text{(II)} \longrightarrow \text{O maior é 4 anos mais velho, isto é, a diferença é 4.} \end{cases}$$

Da equação (II), temos:

$x = 4 + y$ (III)

Substituindo (III) em (I), ou seja, x por $(4 + y)$, temos:

$(4 + y) + y = 24$

$4 + 2y = 24$ ⟶ Eliminando os parênteses e reduzindo os termos semelhantes.

$2y = 24 - 4$ ⟶ Isolando a variável y.

$2y = 20$ ⟶ Dividindo ambos os membros por 2.

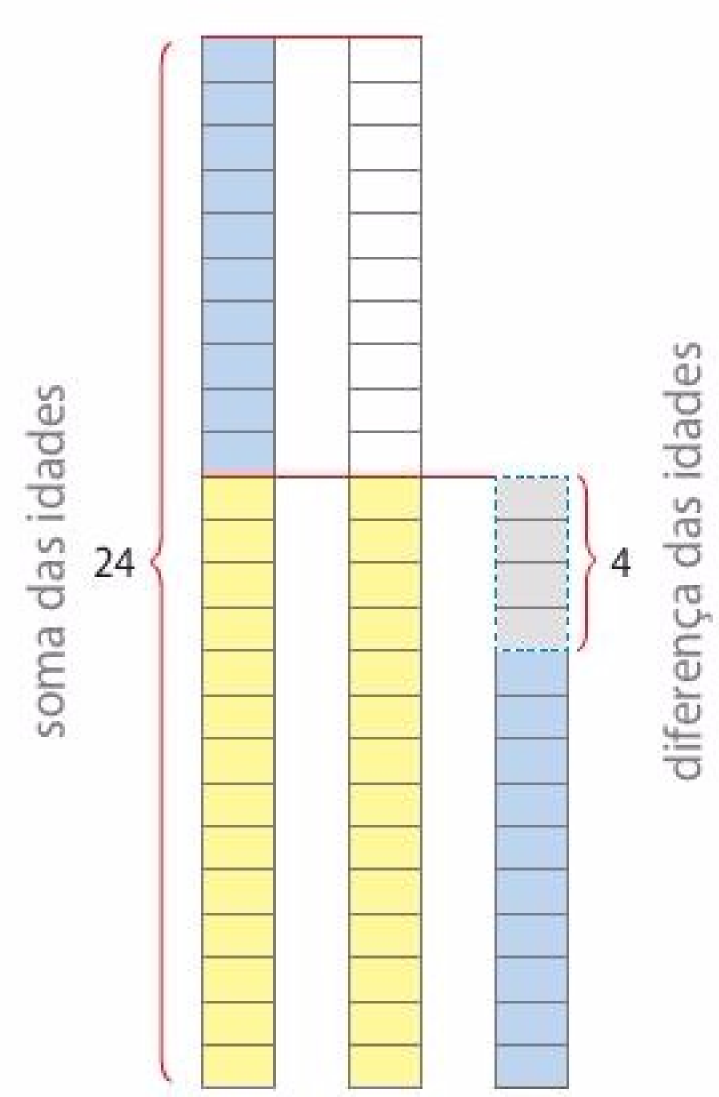
$y = 10$

Assim, concluímos que o irmão mais novo tem 10 anos.

Substituindo $y = 10$ em (III), temos: $x = 4 + 10 = 14$

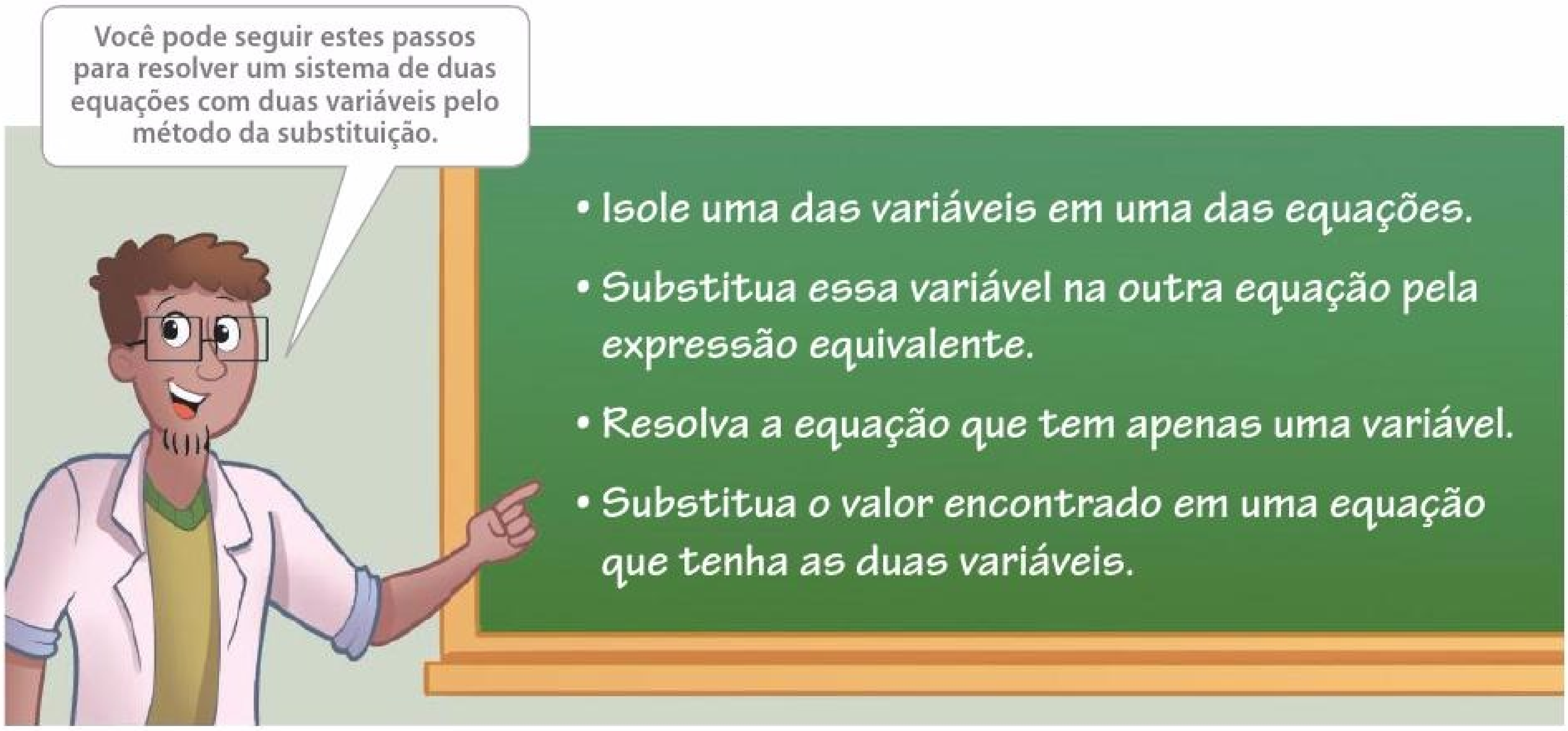
Então, podemos afirmar que o irmão mais velho tem 14 anos.

Veja um esquema representando essa situação:



Usando um sistema de equações é possível descobrir a idade dos irmãos.

Jorg Hackemann/Shutterstock/Glow Images



Acompanhe outra resolução de sistema de equações usando o método da substituição.

$$\text{Seja o sistema:}\begin{cases} x - 5y = 10 & \text{(I)} \\ 3x + y = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando x em (I), obtemos:

$x = 10 + 5y$

Substituindo x em (II), temos:

$3 \cdot (10 + 5y) + y = 14$ → Aplicando a propriedade distributiva.

$30 + 15y + y = 14$

$30 + 16y = 14$ → Reduzindo os termos semelhantes, obtemos uma equação do 1º grau com uma incógnita.

$16y = 14 - 30$ → Isolando o termo y.

$16y = -16$

$y = -\dfrac{16}{16}$ → Dividindo ambos os membros por 16.

$y = -1$

Substituindo y por (-1) em $x = 10 + 5y$, vamos obter o valor de x correspondente:

$$x = 10 + 5 \cdot (-1) = 10 - 5 = 5$$

Assim, o par $(5, -1)$ é solução do sistema.

No estudo do método da substituição, o importante é eliminar uma das variáveis em uma das equações para recair em uma equação do primeiro grau com apenas uma incógnita. Esse princípio vai ser utilizado em outros dois métodos que serão estudados: os métodos da adição e da subtração.

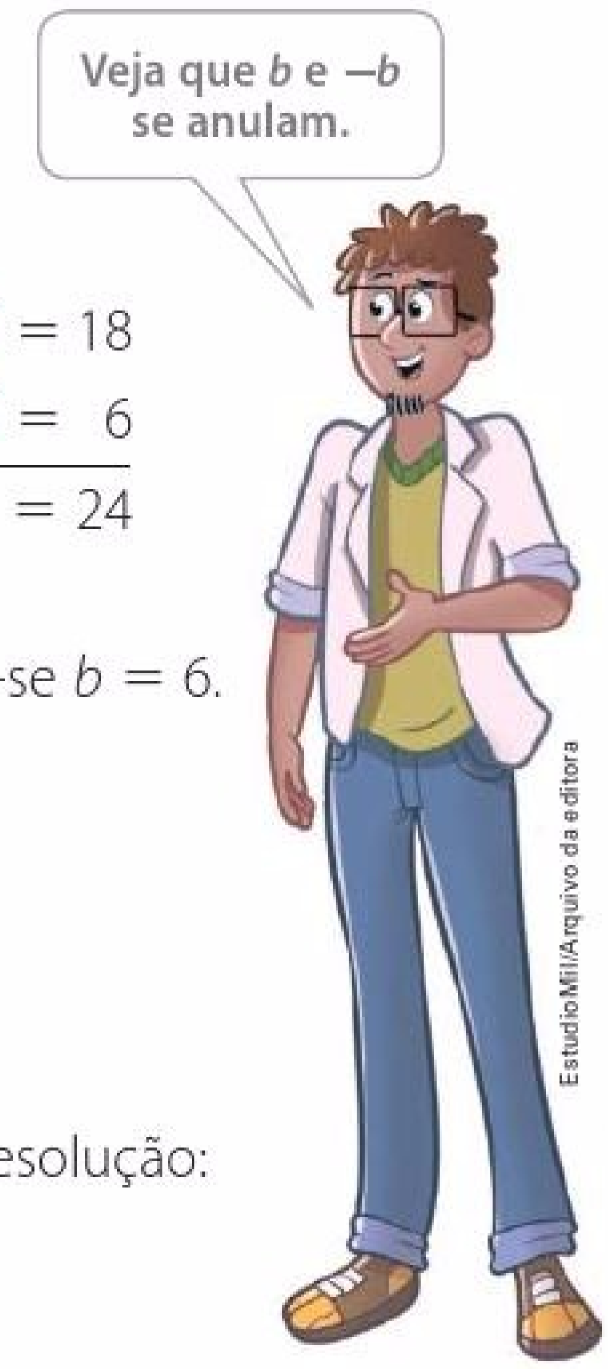
Método da adição

Considere o sistema: $\begin{cases} a + b = 18 & \text{(I)} \\ a - b = 6 & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando a equação (I) com a equação (II), temos: $\begin{cases} a + \cancel{b} = 18 \\ a - \cancel{b} = \ \ 6 \end{cases}$
$\overline{2a \qquad = 24}$

Logo, $a = \dfrac{24}{2} = 12$.

Substituindo a por 12 em qualquer uma das equações, obtém-se $b = 6$.



Verificando:

$$12 + b = 18 \Rightarrow b = 18 - 12 = 6$$
$$12 - b = 6 \Rightarrow b = 12 - 6 = 6$$

Assim, o par (12, 6) satisfaz as equações (I) e (II).

Acompanhe outros exemplos de aplicação desse método de resolução:

1º) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 & \text{(I)} \\ 2x - 3y = -19 & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando a equação (I) com a equação (II), temos: $\begin{cases} 2x \cancel{+3y} = 11 \\ 2x \cancel{-3y} = -19 \end{cases}$
$\overline{4x \qquad = -8}$

Assim, já eliminamos o termo cuja variável é y e conseguimos encontrar o valor de x:

$$4x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{4} = -2$$

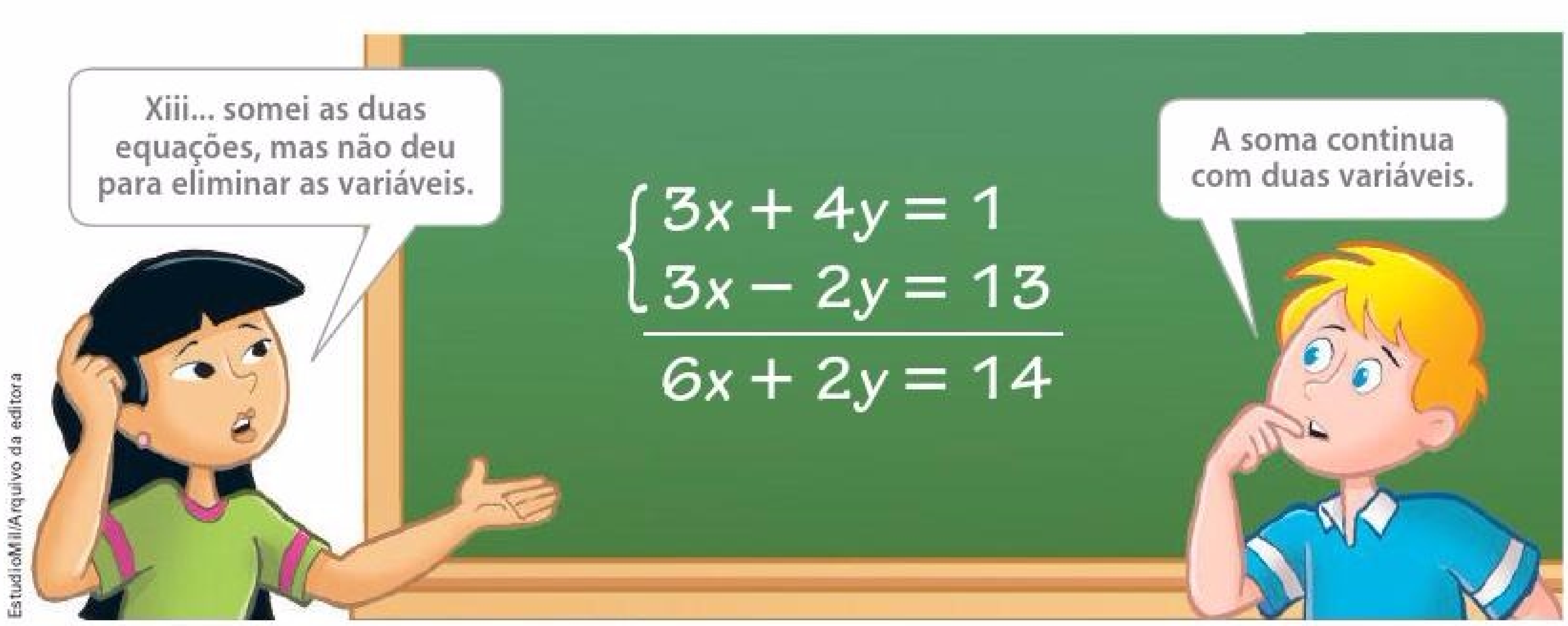
Substituindo x por -2 em uma das equações, obtém-se $y = 5$.

Verificando:

$$2 \cdot (-2) + 3y = 11 \quad \Rightarrow 3y = 11 + 4 \Rightarrow y = 5$$
$$2 \cdot (-2) - 3y = -19 \Rightarrow 3y = 19 - 4 - y = 5$$

Portanto, o par $(-2, 5)$ satisfaz as duas equações.

2º) $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$



Nesse caso, o método da adição não ajudou, não é?

Porém, observe que se em vez de adicionar as equações, tivéssemos subtraído a segunda equação da primeira, conseguiríamos eliminar a variável x.

Veja a seguir que essa estratégia também é um método para resolver sistemas de equações.

Método da subtração

EstudioMil/Arquivo da editora

Retomemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 & \text{(I)} \\ 3x - 2y = 13 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I), temos:

$$\begin{cases} \cancel{3x} + 4y = 1 \\ \cancel{-3x} + 2y = -\ 13 \end{cases}$$
$$6y = -\ 12$$

Resolvendo a equação do 1º grau obtida, temos:

$$6y = -12 \Rightarrow y = -\frac{12}{6} \Rightarrow y = -2$$

Substituindo y por -2 em uma das equações, obtém-se o valor de $x = 3$.

Verificando:

$$3x + 4 \cdot (-2) = 1 \Rightarrow 3x = 1 + 8 \Rightarrow x = 3$$
$$3x - 2 \cdot (-2) = 13 \Rightarrow 3x = 13 - 4 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, o par $(3, -2)$ é a solução do sistema.

Os métodos de adição e subtração são semelhantes: consistem em fazer transformações algébricas nas equações, de modo que eliminamos uma das variáveis, recaindo em uma equação do 1º grau com uma variável.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

8 Encontre a solução dos sistemas a seguir pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} -w + v = 5 \\ 2w - v = 2 \end{cases}$ $S = \{(7, 12)\}$

c) $\begin{cases} 2m + 3n = 4 \\ m + n = 2 \end{cases}$ $S = \{(2, 0)\}$

9 Use o método da adição ou da subtração para resolver os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$ $S = \{(6, -3)\}$

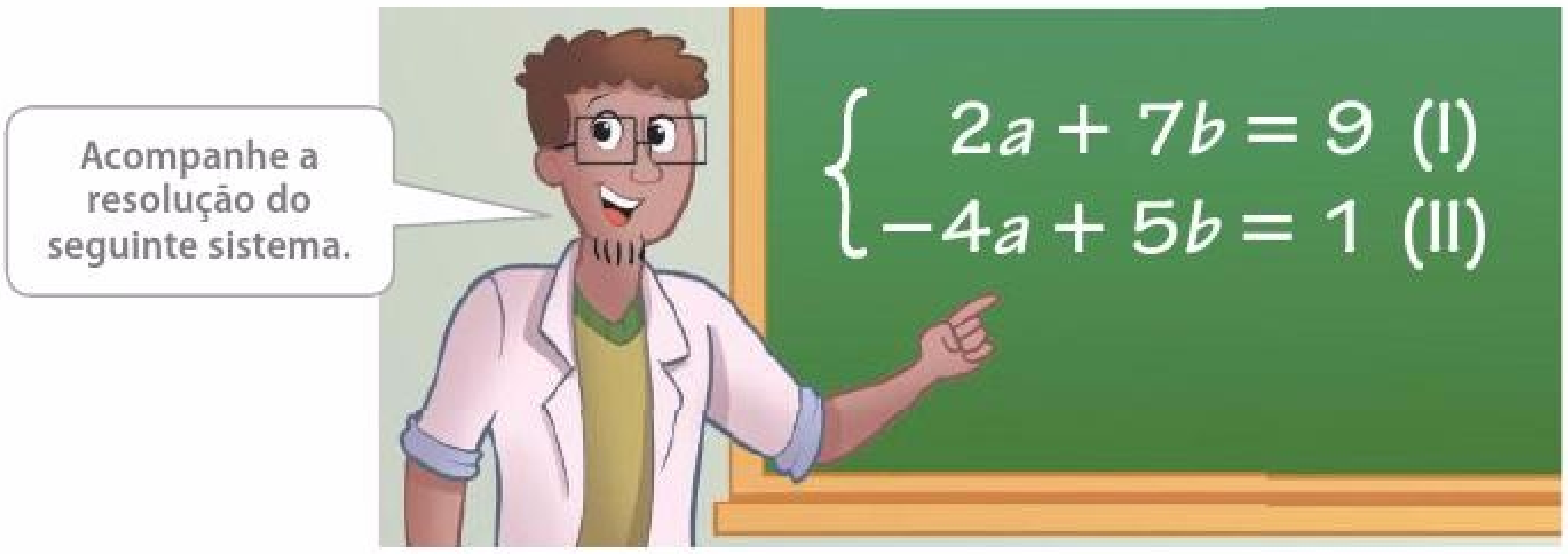
b) $\begin{cases} 2x - 2y = 12 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $S = \{(12, 6)\}$

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$ $S = \{(3, 4)\}$

10 Descubra dois números cuja soma é 70 e cuja diferença é 24. Use um dos métodos, adição ou subtração para encontrar a solução. $a = 47$ e $b = 23$

P Veja resolução no Manual do Professor.

Aprofundando os métodos de resolução de sistemas



EstudioMil/Arquivo da editora

Nesse caso os métodos da adição e da subtração não permitem eliminar as variáveis diretamente. Então, podemos recorrer ao princípio multiplicativo antes de aplicar o princípio aditivo.

Por exemplo, multiplicando por 2 a equação (I) e somando o produto à equação (II), eliminamos a variável a.

$$\begin{cases} 2a + 7b = 9 \quad \text{(I)} \\ -4a + 5b = 1 \quad \text{(II)} \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{2\times} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} 4a + 14b = 18 \quad \text{(III)} \\ -4a + 5b = 1 \end{array}$$

A solução do novo sistema é a mesma que a do sistema inicial, pois são equações equivalentes. Então, podemos fazer:

$$\begin{cases} \cancel{4a} + 14b = 18 \\ \cancel{-4a} + 5b = 1 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 19b = 19 \quad}$$

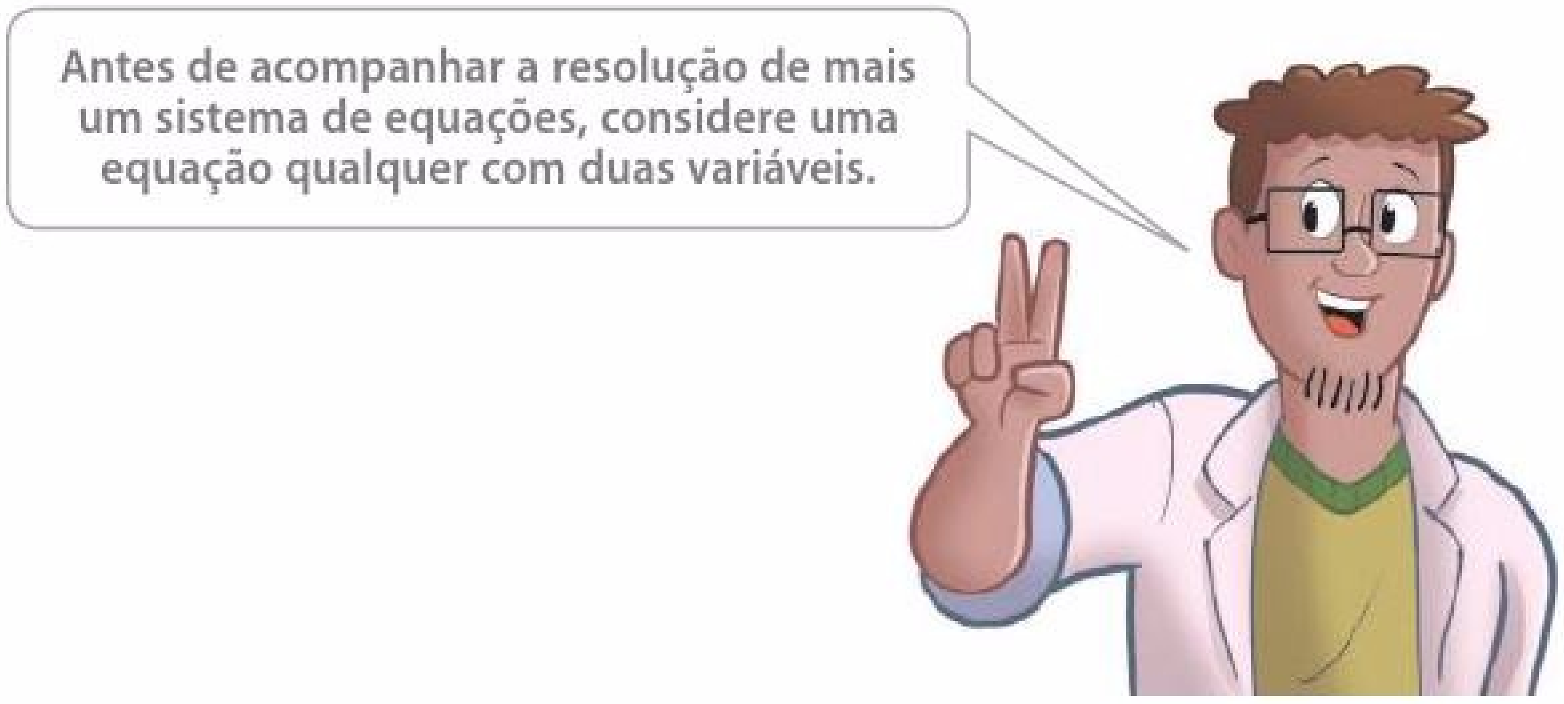
Assim, já eliminamos o termo cuja variável é a e conseguimos encontrar o valor de b:

$$b = \frac{19}{19} = 1$$

Agora, substituímos b por 1 em quaisquer das equações, para se obter o valor de $a = 1$.

EstudioMil/Arquivo da editora

Portanto, a solução desse sistema é (1, 1). Verifique que o par (1, 1) satisfaz as equações (I), (II) e (III).



EstudioMil/Arquivo da editora

Seja $3x + 5y = 11$. Observe que o par (2, 1) é solução dessa equação:

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$$
$$6 + 5 = 11$$

Multiplicando a equação por qualquer número diferente de zero, obtém-se uma nova equação em que o par (2, 1) também é solução. Veja:

$$3x + 5y = 11 \xrightarrow{2\times} 6x + 10y = 22$$
$$6 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 22$$
$$12 + 10 = 22$$

EstudioMil/Arquivo da editora

Agora, acompanhe a resolução de outro sistema de equações.

$$\begin{cases} -3m + 2t = 2 & \text{(I)} \\ 2m + 3t = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Novamente, não é possível usar os métodos da adição e subtração diretamente, pois não se eliminam as variáveis. A alternativa é efetuar **transformações algébricas**. Acompanhe:

Podemos eliminar a variável *m* multiplicando a equação (I) por 2, que é o coeficiente de *m* na equação (II), e multiplicando a equação (II) por 3, que é o oposto do coeficiente de *m* na equação (I).

$$\begin{cases} -3m + 2t = 2 \\ 2m + 3t = 3 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{2\times} \\ \xrightarrow{3\times} \end{array} \begin{array}{r} \cancel{-6m} + 4t = 4 \\ \cancel{6m} + 9t = 9 \\ \hline 13t = 13 \end{array}$$

Dessa forma, eliminamos o termo cuja variável é *m* e conseguimos encontrar o valor de *t*:

$$13t = 13 \Rightarrow t = \frac{13}{13} = 1$$

Substituindo *t* por 1 em quaisquer das equações, obtém-se $m = 0$. Portanto, a solução desse sistema é o par (0, 1).

Sistema impossível

Agora que você conhece alguns métodos de solução de sistemas de equações, tente encontrar os números que satisfaçam a equação:

$$1 + x = x$$

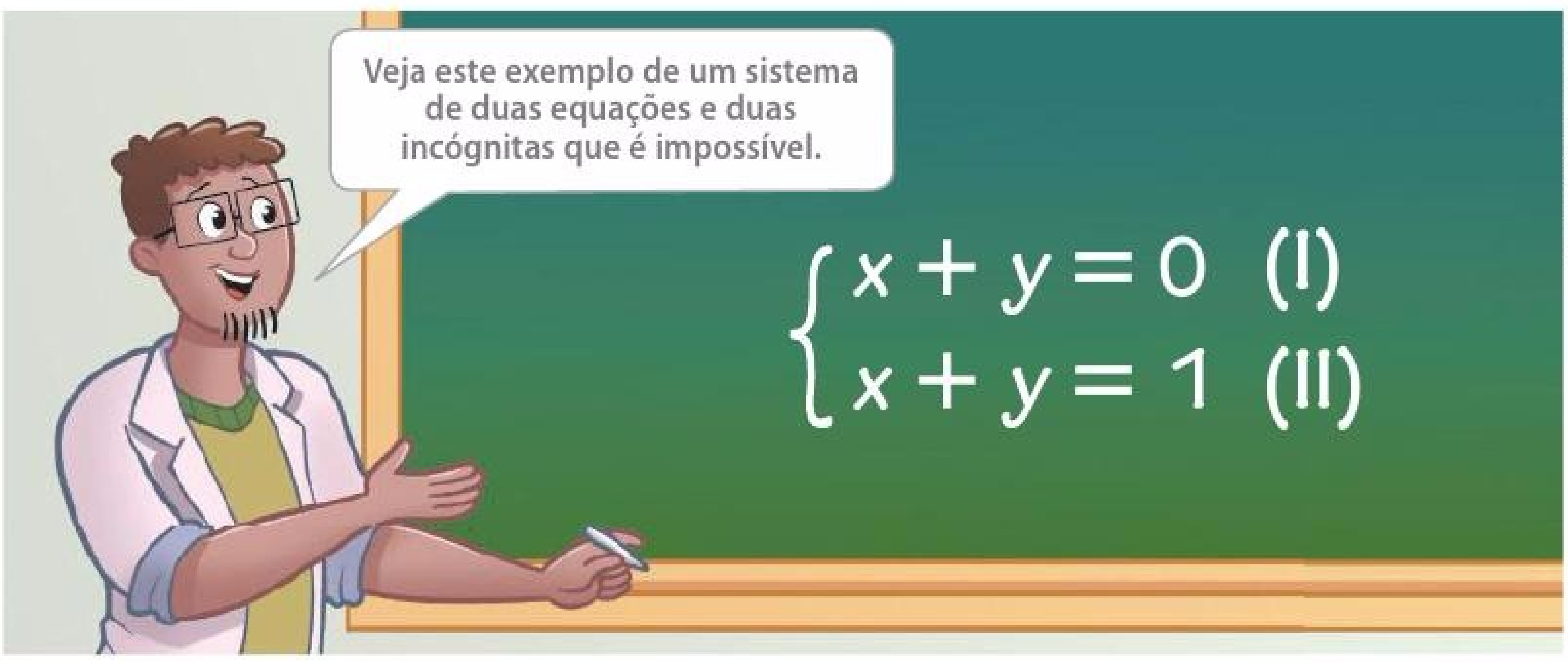
Observe que ao subtrair x dos dois membros dessa equação, obtemos:

$$1 = 0$$

Mas isso é considerado matematicamente absurdo.

Sendo assim, nem sempre as equações ou os sistemas têm solução. Quando isso ocorre trata-se de equações impossíveis ou sistema impossível.

Quando uma equação não tem solução, é chamada de **equação impossível**.



EstudioMil/Arquivo da editora

O curioso aqui é que individualmente cada uma das equações tem solução, por exemplo, o par ordenado $(3, -3)$ é solução da equação (I) e o par $(5, -4)$ é solução da equação (II). Mas não existe um par ordenado que seja solução, simultaneamente, das duas equações.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

11 Escreva uma equação equivalente a cada equação abaixo: Respostas pessoais.

a) $3x - 5z = 8$

b) $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{7y}{2} = 5$

c) $b - a = 25$

12 Se $x + y = 10$ e $x - y = 7$, então qual é o valor numérico de $(x + y)^2 + (x - y)^2$? 149

13 Se $x + y = 10$ e $x - y = 7$, dê o valor numérico das equações a seguir.

a) $2x + 3y$ $\frac{43}{2}$

b) $-2x + y$ $\frac{-31}{2}$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}$ $\frac{19}{4}$

14 Resolve o sistema fazendo transformações algébricas para eliminar uma das variáveis. $a = 2$ e $b = 1$.

P Veja resolução no Manual do Professor.

$$\begin{cases} 2a + 3b = 7 \\ -3a + 5b = -1 \end{cases}$$

15 Descubra qual(is) dos sistemas abaixo é(são) impossível(is). **a** é um sistema impossível; **b** tem solução (2, 3) e **c** tem solução (6, 4).

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Aplicações e problemas práticos

Um estacionamento cobra um preço fixo de R$ 2,00 por moto e R$ 3,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R$ 277,00 para um total de 100 veículos. Quantas motos e quantos carros usaram o estacionamento nesse dia?

Podemos representar o número de carros por c e o número de motos por m para equacionar o problema.

$$\begin{cases} 2m + 3c = 277 & \text{(I)} \\ m + c = 100 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando c na equação (II), obtemos: $c = 100 - m$

Substituindo c por $(100 - m)$ na equação (I), temos:

$$\begin{aligned} 2m + 3(100 - m) &= 277 \\ 2m + 300 - 3m &= 277 \\ -m &= 277 - 300 \\ -m &= -23 \\ m &= 23 \end{aligned}$$

Logo:

$$c = 100 - 23 = 77$$

Portanto, usaram o estacionamento nesse dia 23 motos e 77 carros.


wizdata/Shutterstock/Glow Images

Estacionamento

ATIVIDADES faça no seu caderno

Veja comentários e os sistemas das atividades desta seção no Manual do Professor.

16 ***Educação financeira***

Uma fábrica produz refrescos de guaraná, nas versões tradicional e *diet*, em garrafas de 300 mL (equivalentes a 0,3 L) ou em refil para máquinas.

a) Certa lanchonete vende esses refrescos a R$ 1,00 o tradicional e R$ 1,25 a versão *diet*. Ao final de um dia haviam sido vendidos 2 000 desses refrescos, com um faturamento de R$ 2 100,00. Calcule quantas garrafas de cada tipo desse refresco foram vendidas nessa lanchonete. *diet* = 400 e tradicional = 1 600

b) A cantina de uma escola vende esses refrescos em copos de 200 mL. O gerente dessa cantina resolveu fazer uma promoção. Veja a placa ao lado.

EstudioMil/Arquivo da editora

Sabendo que durante um dia dessa promoção foram vendidos 42 copos de refrescos, que equivale a uma entrada de R$ 41,80, qual foi o refresco mais vendido? Quanto foi vendido de cada tipo?

O mais vendido foi o refresco tradicional (22 copos); o *diet* vendeu 20 copos.

17 ***Educação financeira***

Observe a promoção de uma lanchonete:

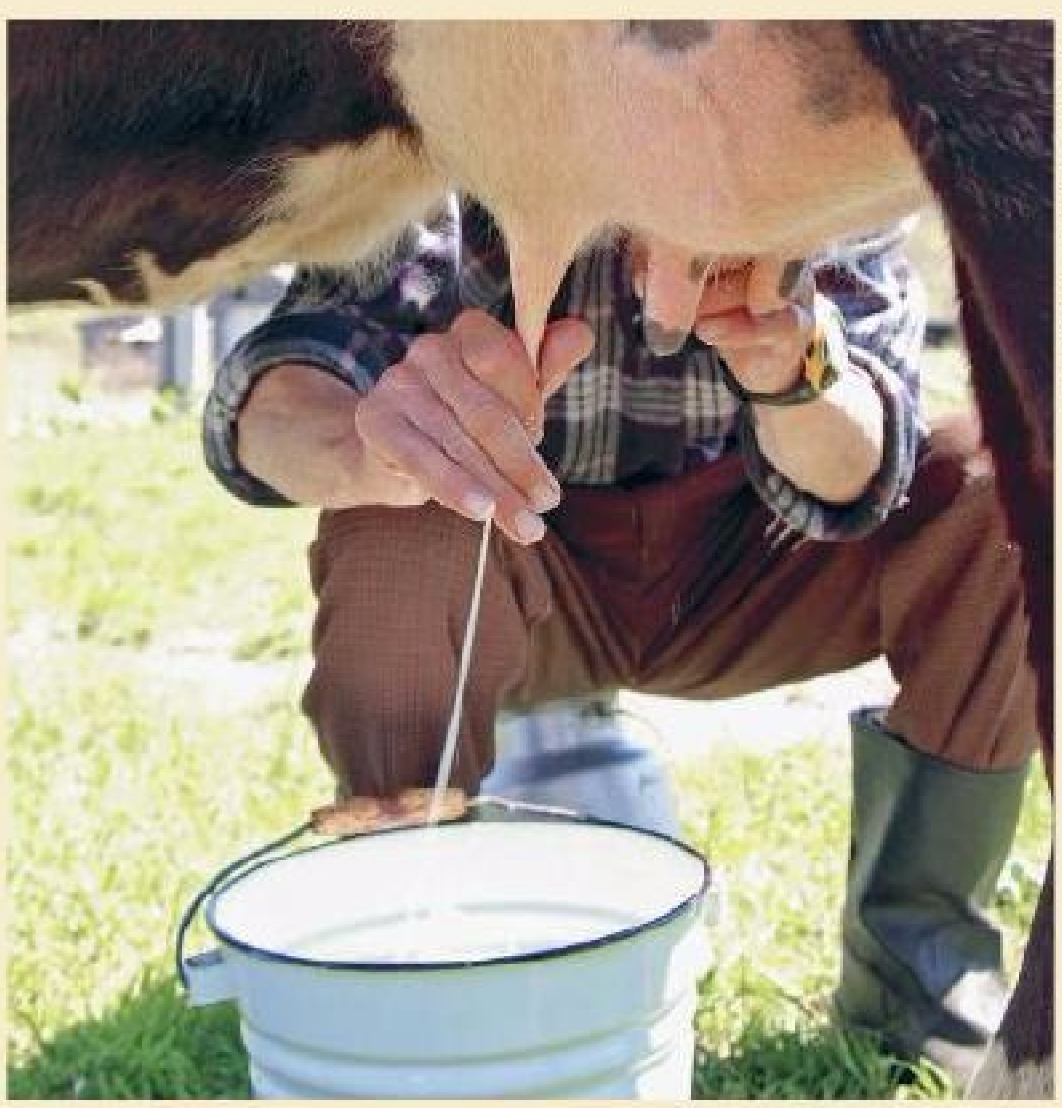
EstudioMil/Arquivo da editora

O dono da lanchonete sabe quantos sanduíches vendeu contando os pães. Com essa promoção, em um fim de semana ele faturou R$ 81,00. Quantas salsichas foram consumidas nos sanduíches sabendo que foram usados 46 pães? 86 salsichas

18 ***Educação financeira***

Depois de ter plantado milho e feijão, um agricultor colheu 6 600 sacas de grãos. Essas sacas foram vendidas por R$ 141 000,00, com o preço da saca de milho a R$ 9,00 e o da saca de feijão a R$ 60,00. Quantas sacas de milho foram vendidas? E quantas de feijão? milho: 5 000; feijão: 1 600.

19 Bernardino tem duas vacas que, juntas, produzem 44 litros de leite. A vaca Mimosa produz 20% a mais de leite que a vaca Teimosa. Quantos litros de leite cada animal produz? Teimosa: 24 L e Mimosa: 20 L.



RedTC/Shutterstock/Glow Images

Vaca sendo ordenhada.

Não escreva no livro.

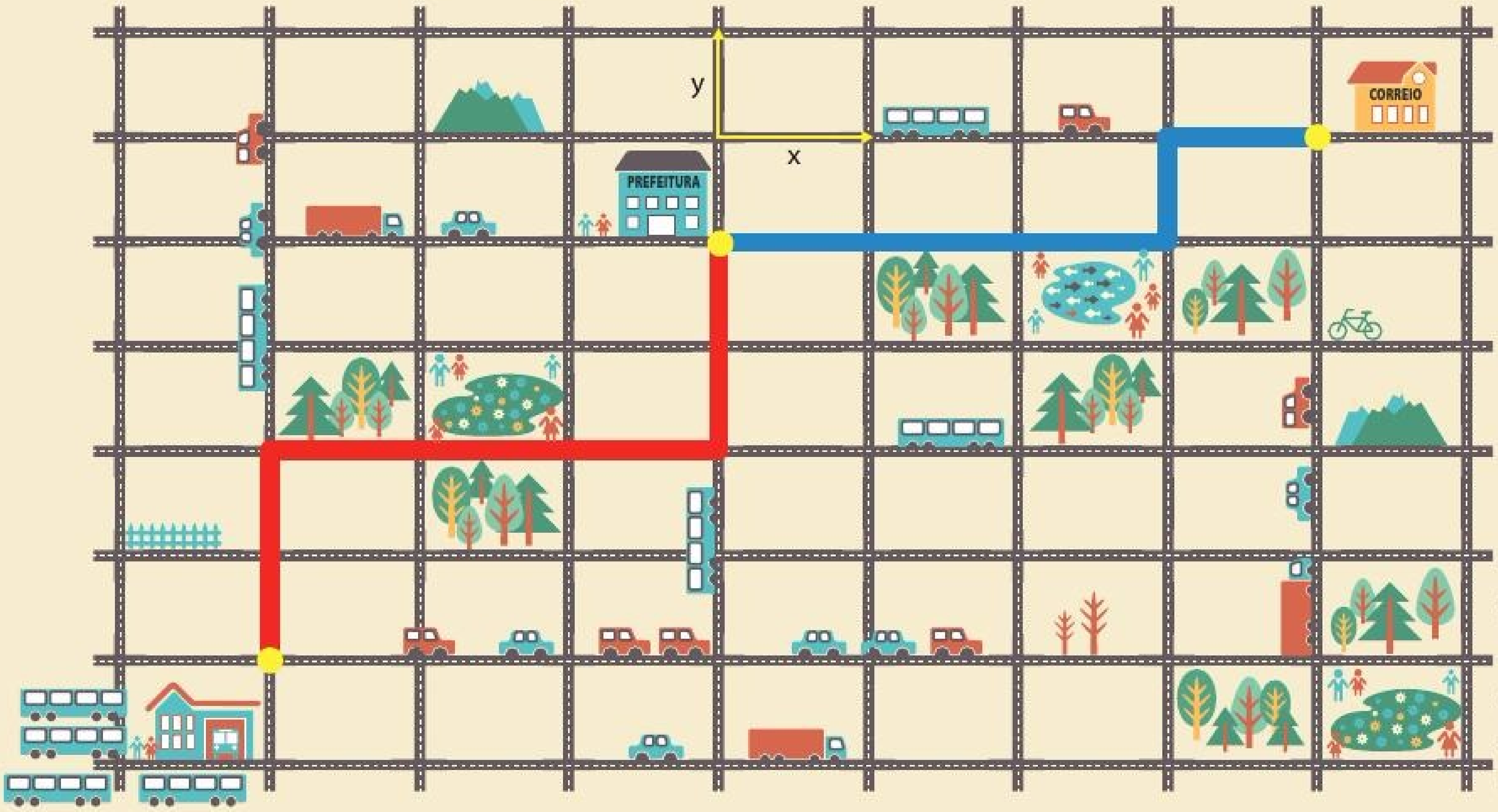
20 O Simplício, compadre do Bernardino, tem três vacas: a Melindrosa, a Cheiadeprosa e a Preguiçosa. Melindrosa produz o dobro de leite que Cheiadeprosa. Preguiçosa produz a terça parte do que produz Cheiadeprosa. As três juntas produziram 100 litros de leite. Quantos litros produziu cada uma?
Melindrosa: 60 L, Cheiadeprosa: 30 L e Preguiçosa: 10 L.

21 ***Educação financeira***

Um ônibus com 60 lugares vai de Santos a São Sebastião, passando por Bertioga. Considere que a passagem para Bertioga custa R$ 15,00 e para São Sebastião, R$ 18,00. Certo domingo, o cobrador arrecadou R$ 987,00 com todos os assentos do ônibus ocupados. Quantas pessoas desceram em Bertioga?
31 pessoas

22 Considere que no último Encontro Nacional de Educação Matemática a inscrição dos professores do Ensino Médio e do Ensino Fundamental custava R$ 50,00, e os professores do Ensino Superior pagavam R$ 75,00. Sabendo que a arrecadação total obtida com as inscrições foi de R$ 68 725,00, de um total de 1 208 professores inscritos, quantos eram os professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio presentes?
875 professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

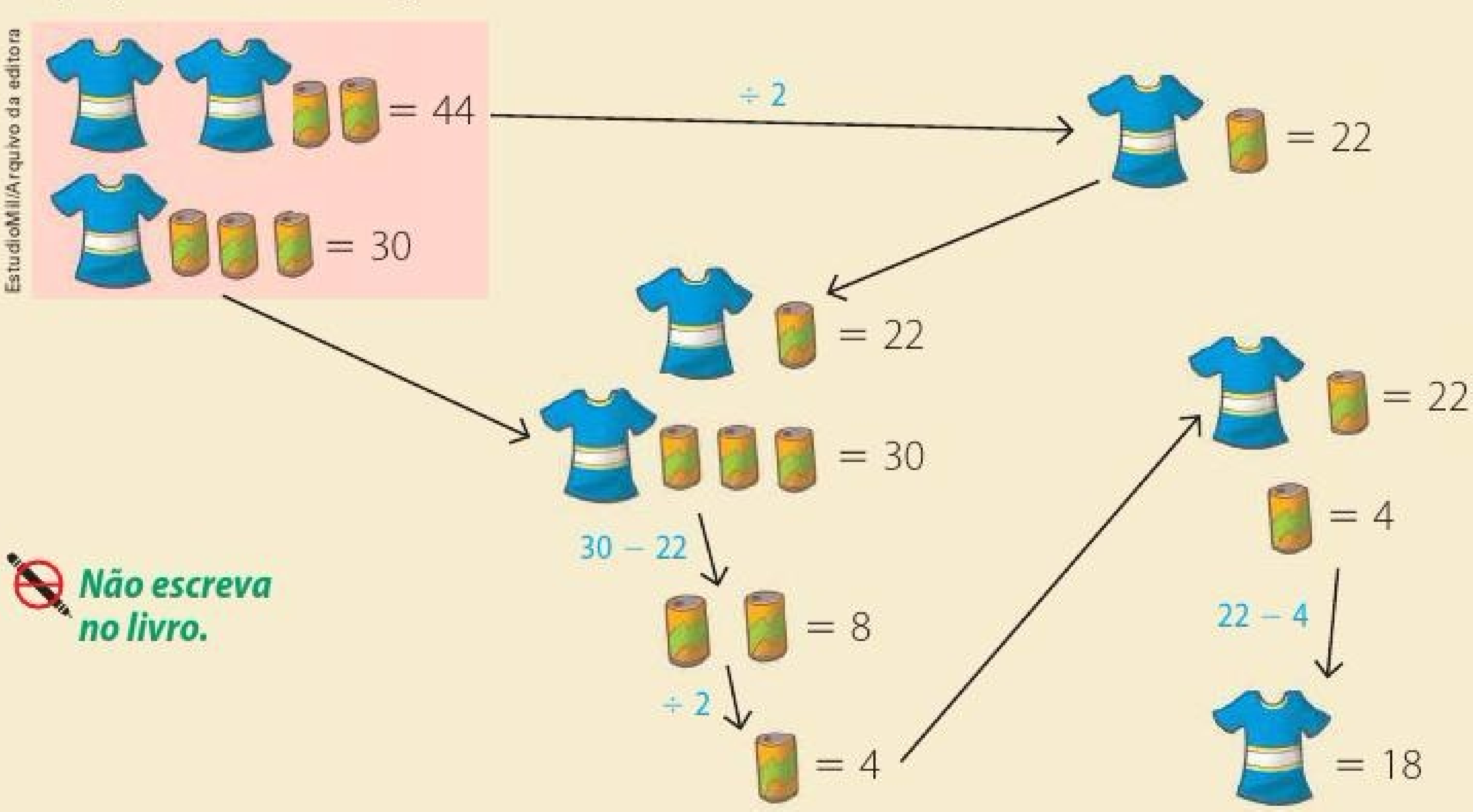
23 O traçado abaixo é muito comum nas cidades planejadas em que as ruas são paralelas ou perpendiculares. Nele, um caminho para ir da prefeitura ao correio está representado pela linha azul, e o caminho da prefeitura até a estação rodoviária está representado pela linha vermelha. Determine as medidas de x e y, sabendo que a distância da prefeitura até o correio é de 288 m e a distância até a estação rodoviária é de 346 m. Caminho até a rodoviária: $3x + 4y = 346$ e caminho até o correio: $4x + y = 288$. Resolvendo o sistema obtemos $x = 62$ m e $y = 40$ m.



Bum Katya/Shutterstock/Glow Images

24 ***Desafio olímpico***

O esquema abaixo representa a solução de um problema que pode ser resolvido por meio de um sistema de duas equações e duas incógnitas.



EstudioMil/Arquivo da editora

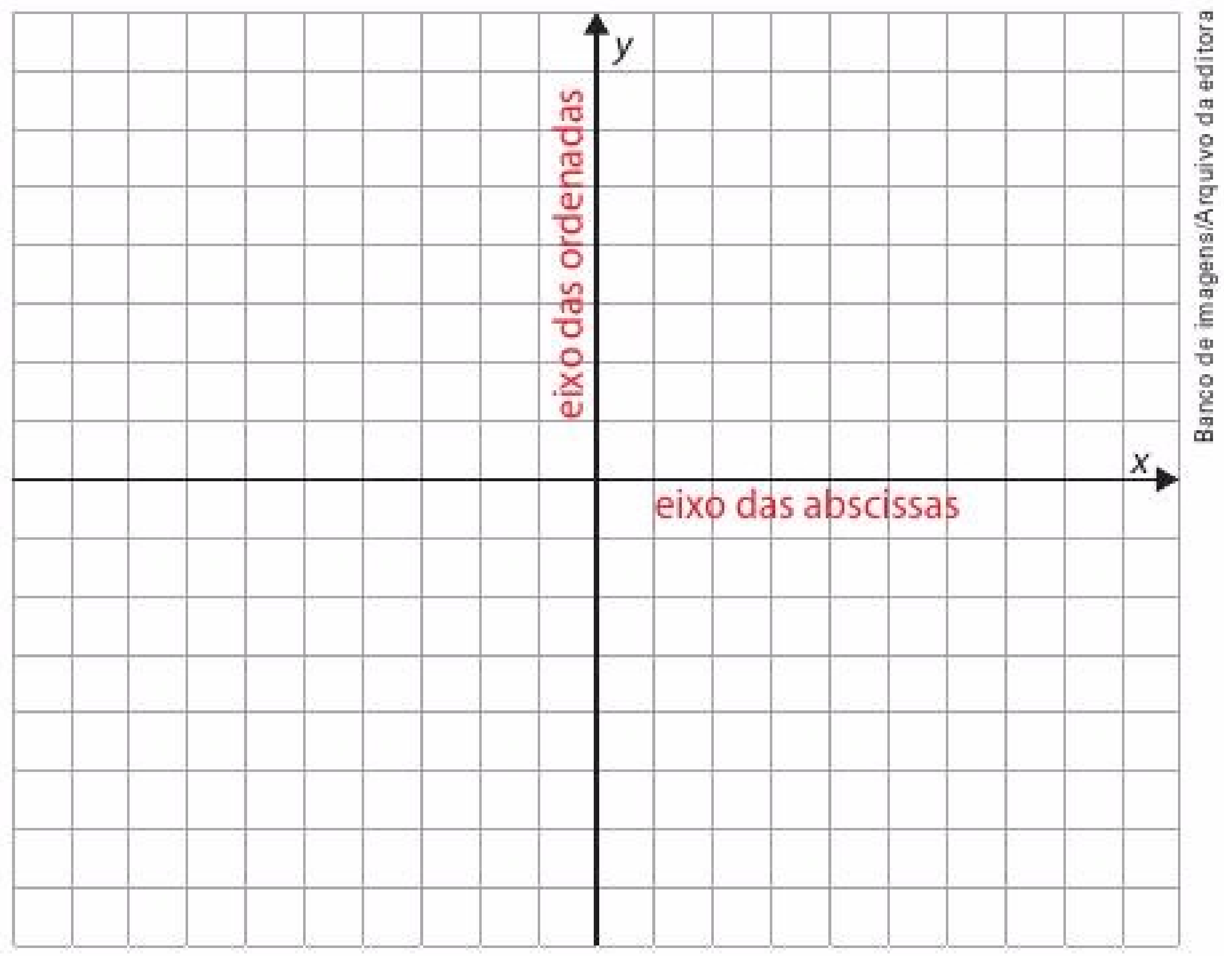
Não escreva no livro.

a) Formule o problema destacado no esquema acima. 2 camisas mais 2 latas custam 44; 1 camisa mais 3 latas custam 30. Quanto custa cada camisa e cada lata?

b) Escreva o sistema de equações correspondentes. $\begin{cases} 2x + 2y = 44 \\ x + 3y = 30 \end{cases}$

Das equações às tabelas e das tabelas aos gráficos

Equações com duas variáveis podem ser representadas graficamente. Tal representação se faz, em geral, sobre um sistema de duas retas graduadas e perpendiculares, como está representado abaixo, que é conhecido como **plano cartesiano**.



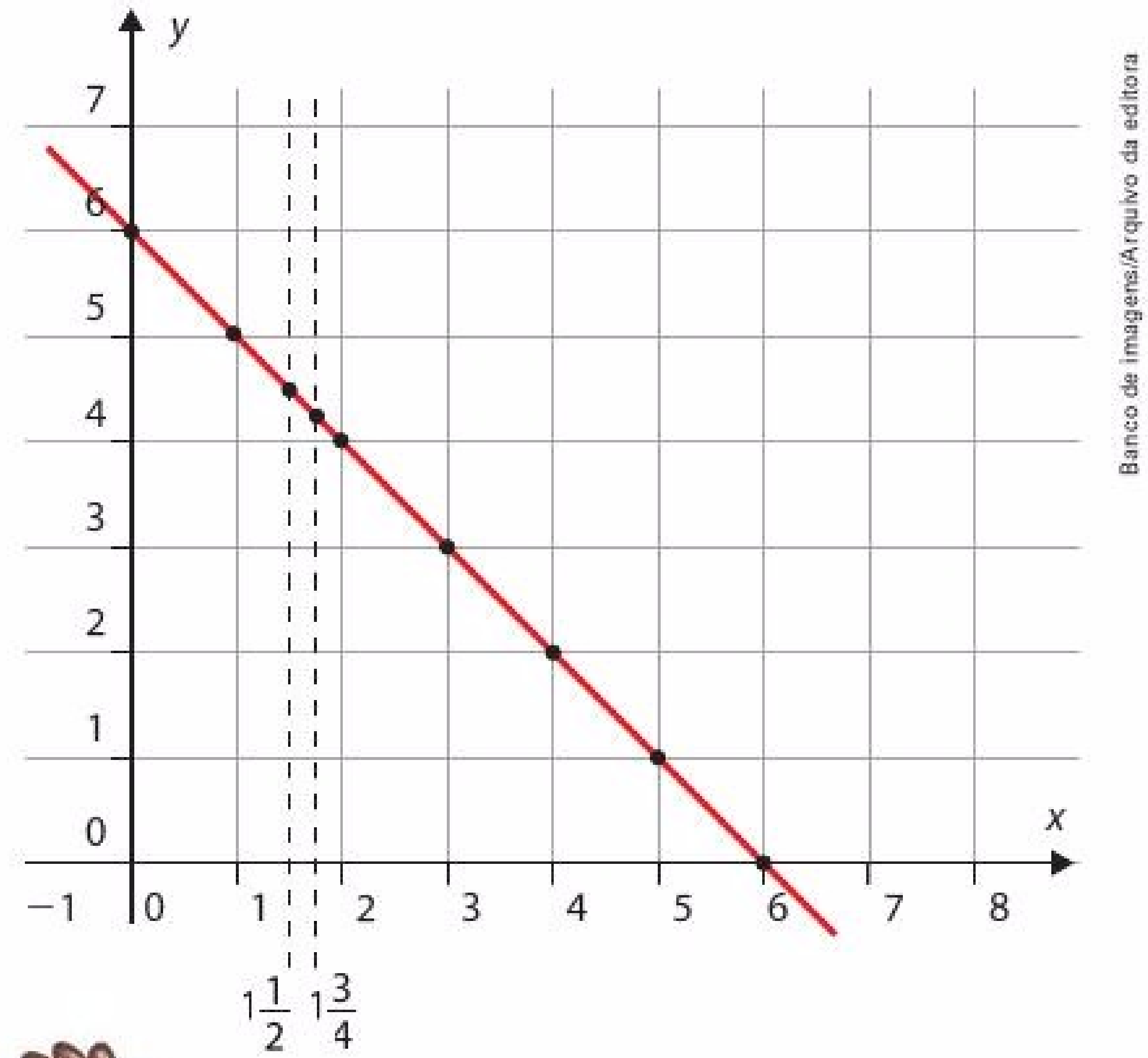
Por exemplo, para obter a representação gráfica da equação:

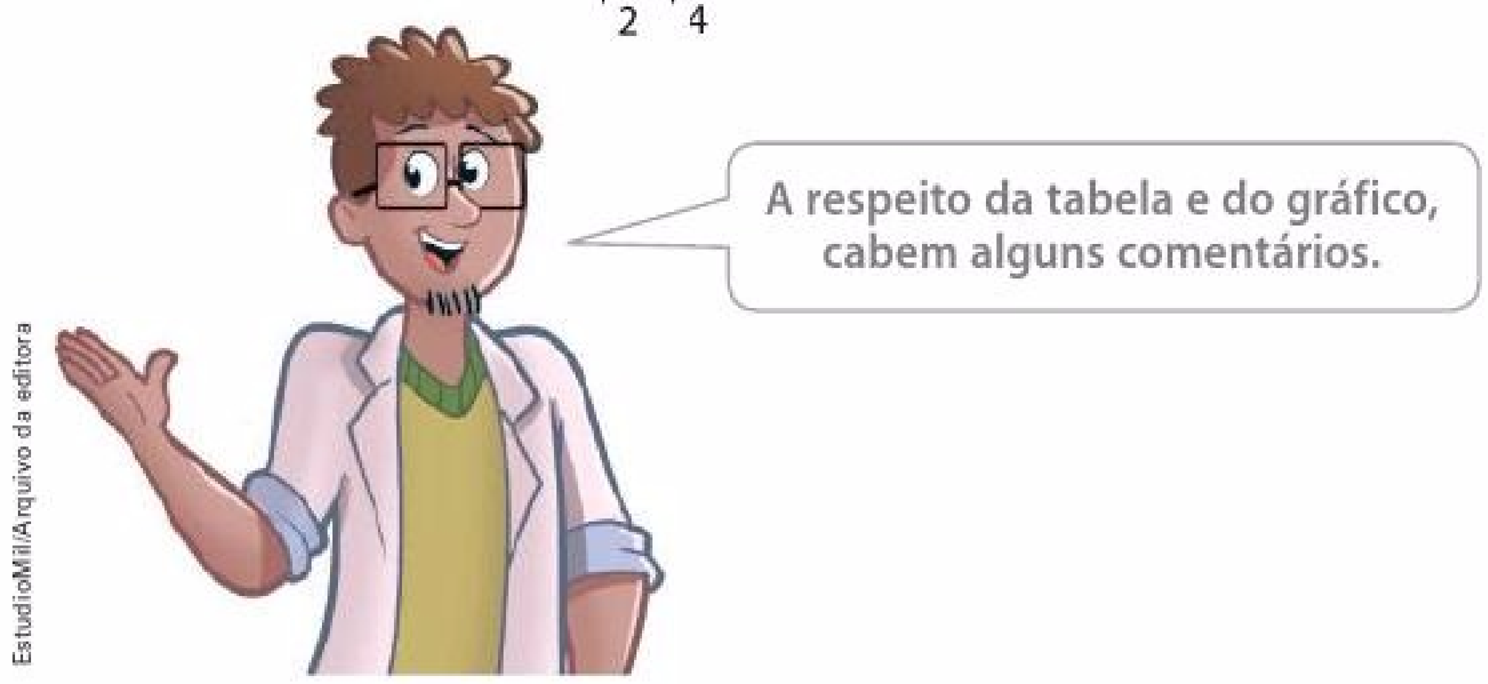
$$x + y = 6$$

Construímos uma tabela atribuindo valores para uma das variáveis e calculamos os valores correspondentes à outra variável. Assim obtemos vários pares ordenados. Cada um desses pares é uma solução da equação.

	Valores para variáveis								
x	0	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	3	4	5	6
$y = 6 - x$	6	5	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	4	3	2	1	0
(x, y)	(0, 6)	(1, 5)	$\left(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$	$\left(1\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4}\right)$	(2, 4)	(3, 3)	(4, 2)	(5, 1)	(6, 0)

Depois, marcamos os pontos obtidos na tabela e traçamos um gráfico que liga seus pontos. Veja:





- A cada par ordenado, obtido pelos dados da tabela, corresponde um ponto no gráfico.
- Há infinitos pares ordenados que satisfazem a equação.
- O gráfico da equação tem infinitos pontos.
- Neste caso, todos os pontos do gráfico estão alinhados.

O gráfico de uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a e b são diferentes de zero, é uma reta.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

25 Marque um ponto no seu caderno e trace várias retas passando por esse ponto. Quantas retas do plano da folha passam por esse ponto? Infinitas retas.

26 Marque dois pontos em seu caderno e trace uma reta.

a) É possível traçar outra reta por esses pontos? Não

b) Quantas retas podem passar por esses dois pontos? Por dois pontos distintos passa uma única reta.

27 No plano cartesiano marque o ponto (3, 4) e trace a reta: Veja o gráfico no Manual do Professor.

a) paralela ao eixo x (das abscissas);

b) paralela ao eixo y (das ordenadas);

c) que não seja paralela a nenhum dos eixos x e y. Há infinitas possibilidades de resposta.

28 Marque no plano cartesiano os pontos (2, 3) e (5, 7). Trace por esses pontos uma reta que os contenha. Veja o gráfico no Manual do Professor.

Gráficos de equações de duas variáveis

Já sabemos que para traçar uma reta bastam dois pontos. Então, para construir o gráfico de uma equação com duas variáveis, basta encontrar dois pontos deste gráfico. Para isso é suficiente fazer uma tabela com duas linhas, pois cada linha está relacionada a um par ordenado.

Veja no exemplo, como construir o gráfico da equação $2x - 3y = -6$.

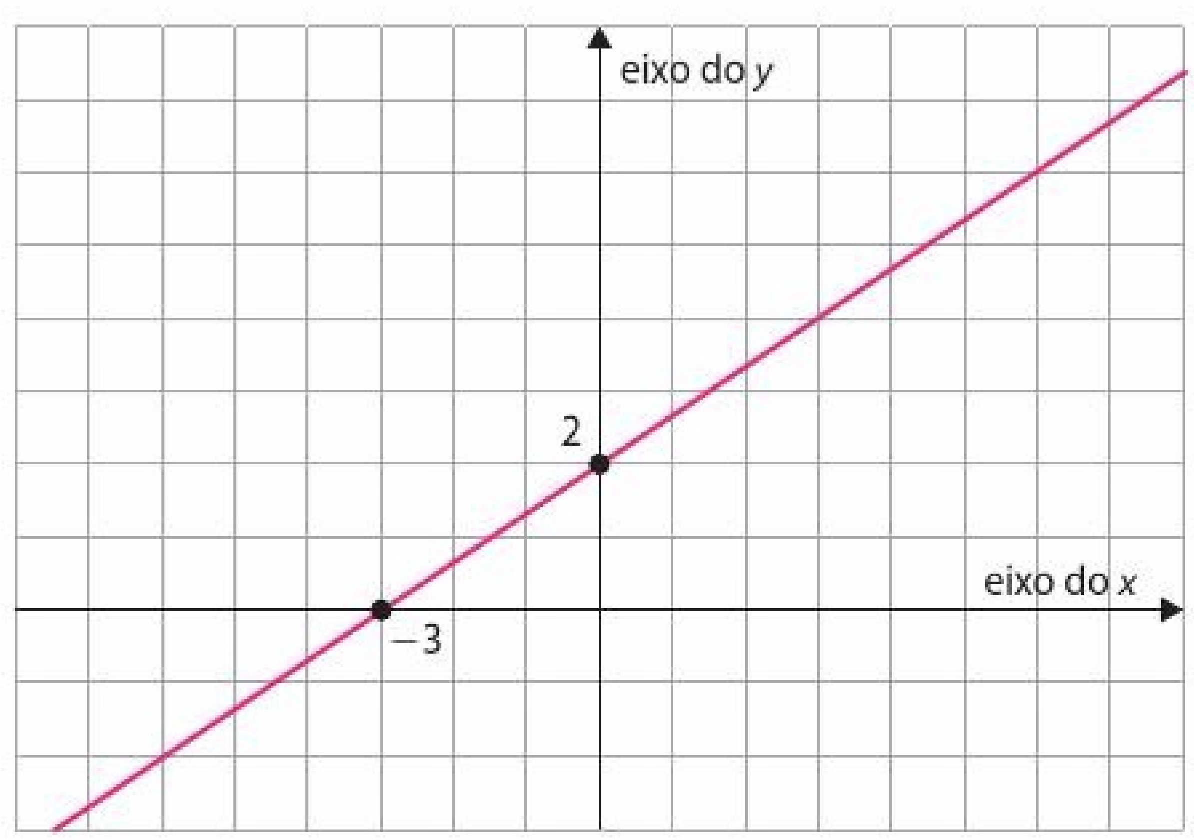
Vamos determinar o valor de $x = 0$ e $y = 0$ pela facilidade de cálculo:

- se $x = 0$, então $y = 2$ $\longrightarrow$ $(0, 2)$;
- se $y = 0$, então $x = -3$ $\longrightarrow$ $(-3, 0)$.

Assim, temos a tabela:

$2x - 3y = -6$		
x	y	
0	2	$\longrightarrow$ (0, 2)
-3	0	$\longrightarrow$ $(-3, 0)$

Agora, devemos marcar esses pontos no gráfico e traçar a reta que passa por eles. Veja:



Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES — faça no seu caderno

Nas atividades seguintes basta identificar dois pontos em cada gráfico. Use malha quadriculada para esboçar os gráficos.

29 Construa as tabelas e os respectivos gráficos das equações a seguir. Veja as respostas das atividades 29, 30 e 31 no Manual do Professor.

a) $x + y = 1$
b) $2x + y = 5$
c) $x + 2y = 8$
d) $3x + 2y = 10$
e) $x - y = 0$
f) $x - 2y = 9$
g) $y - 2x = 7$
h) $x + y = 0$

30 Construa sobre um mesmo plano cartesiano os gráficos das equações:

$3x - y = 0$, $4x - y = 0$ e $5x - y = 0$.

31 Construa sobre um mesmo plano cartesiano os gráficos das equações:

a) $2x - y = 0$;
b) $2x - y = 1$;
c) $2x - y = 2$;
d) $2x - y = 3$.

32 Observe o gráfico obtido na atividade anterior. Você observa alguma relação entre os pontos de intersecção com o eixo y e os coeficientes das equações? A ordenada do ponto de intersecção é número do 2º membro de cada equação.

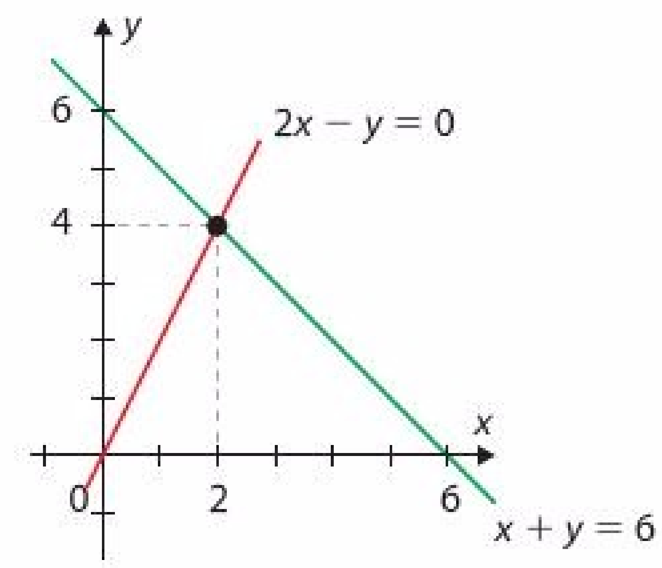
Representação gráfica de um sistema de duas equações e duas variáveis

Para representar graficamente um sistema de duas equações com duas variáveis, sobrepomos no mesmo plano cartesiano as retas correspondentes a cada equação do sistema. Veja:

Sistema

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Representação gráfica



Banco de imagens/Arquivo da editora

Verifique que o ponto de intersecção corresponde ao par ordenado (2, 4), que satisfaz as duas equações.

- $2 + 4 = 6$
- $2 \cdot 2 - 4 = 0$

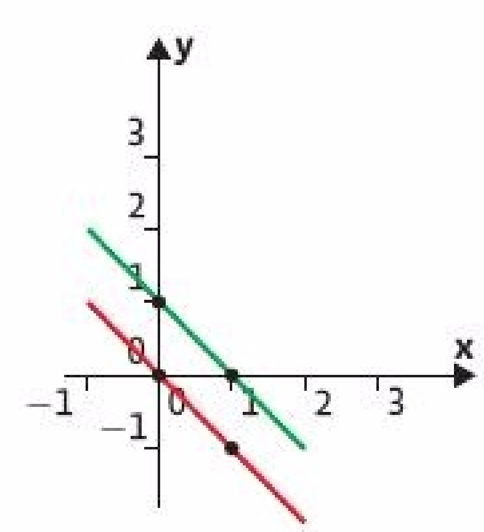
Isso sugere que, se um sistema de duas equações com duas variáveis tem uma única solução, então as retas correspondentes ao gráfico do sistema se interceptam em um ponto. Nesse caso, o sistema correspondente é **determinado**.

EstudioMil/Arquivo da editora

Se não houver ponto de intersecção, o sistema correspondente é **impossível**, ou seja, não tem solução.

EstudioMil/Arquivo da editora

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

EstudioMil/Arquivo da editora

Pratique inventando atividades

Veja como se faz para inventar um sistema com solução.

1º) Invente duas expressões quaisquer, por exemplo:

$$3x - 2y \text{ (I)} \quad \text{e} \quad 5x + 7y \text{ (II)}$$

2º) Decidimos a solução, por exemplo, o par $(-1, 3)$.

3º) Substituímos x e y pela solução escolhida nas duas expressões, nesse caso, x por -1 e y por 3. Assim, obtemos os segundos membros das equações. Veja:

$$\text{(I)}\ 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -3 - 6 = -9$$

$$\text{(II)}\ 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 = -5 + 21 = 16$$

EstudioMil/Arquivo da editora

Pronto, temos um sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ 5x + 7y = 16 \end{cases}$$

Que tem como solução o par $(-1, 3)$.

Essa é uma maneira interessante e simples para praticar os métodos de resolução de sistemas de equações que você aprendeu até aqui.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

33 Comente as seguintes proposições:

a) Se duas equações têm tabelas iguais par a par, então seus gráficos coincidem ponto a ponto.

b) Se um sistema de duas equações com duas variáveis não tem solução, então seu gráfico são duas retas paralelas. As duas sentenças são verdadeiras.

34 Construa o gráfico do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

O que acontece com as tabelas das duas equações? E com seus gráficos? São iguais.

35 Analise o gráfico do sistema $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$ para encontrar a solução.

Os gráficos de cada equação se interceptam? Se sim, quais são as coordenadas do ponto de intersecção? As equações são rigorosamente iguais, isso indica que as retas que representam cada equação coincidem, ou seja, há infinitas soluções.

36 Tente resolver pelo método da substituição ou da adição o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x - 5 = y \\ y + 5 = x \end{cases}$$

O que você concluiu? P Veja resposta no Manual do Professor.

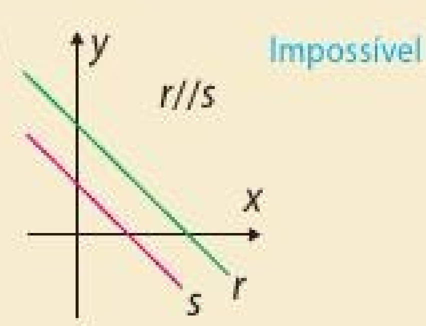
37 Represente graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x - 5 = y \\ y + 1 = x \end{cases}$$

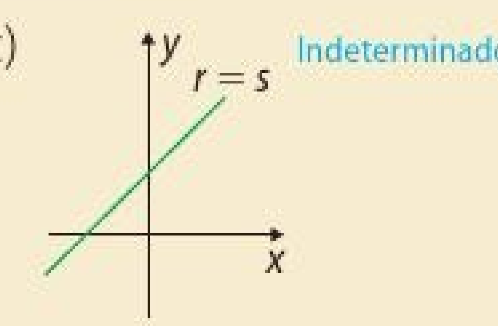
O que você concluiu? No gráfico teremos duas retas paralelas, portanto esse sistema não tem solução.

38 Considere os gráficos abaixo em que r e s são representações gráficas das equações de sistemas. Em cada caso diga se o sistema é determinado, impossível ou indeterminado.

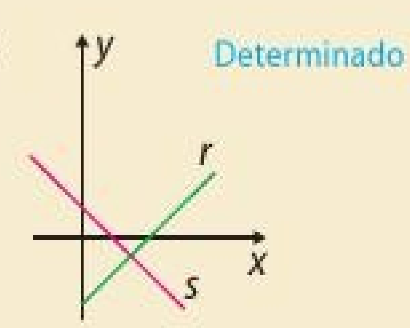
a)



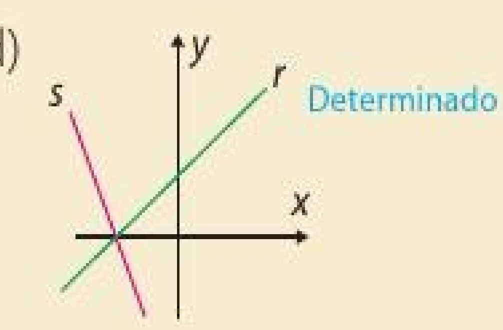
c)



b)



d)



39 Quais devem ser os valores dos segundos membros das equações (I) e (II) para que o sistema tenha como solução o par (1, 10)?

(I) $3x - 2y$ -17

(II) $5x + 7y$ 75

40 Para cada item, invente um sistema de duas equações com duas variáveis que tenha por solução: Respostas pessoais.

a) $(1, 1)$;

b) $\left(\frac{1}{2}, 7\right)$;

c) $(0, -3)$;

d) $\left(-5, \frac{3}{2}\right)$.

41 Construa os gráficos dos sistemas que você inventou na atividade anterior. Respostas pessoais.

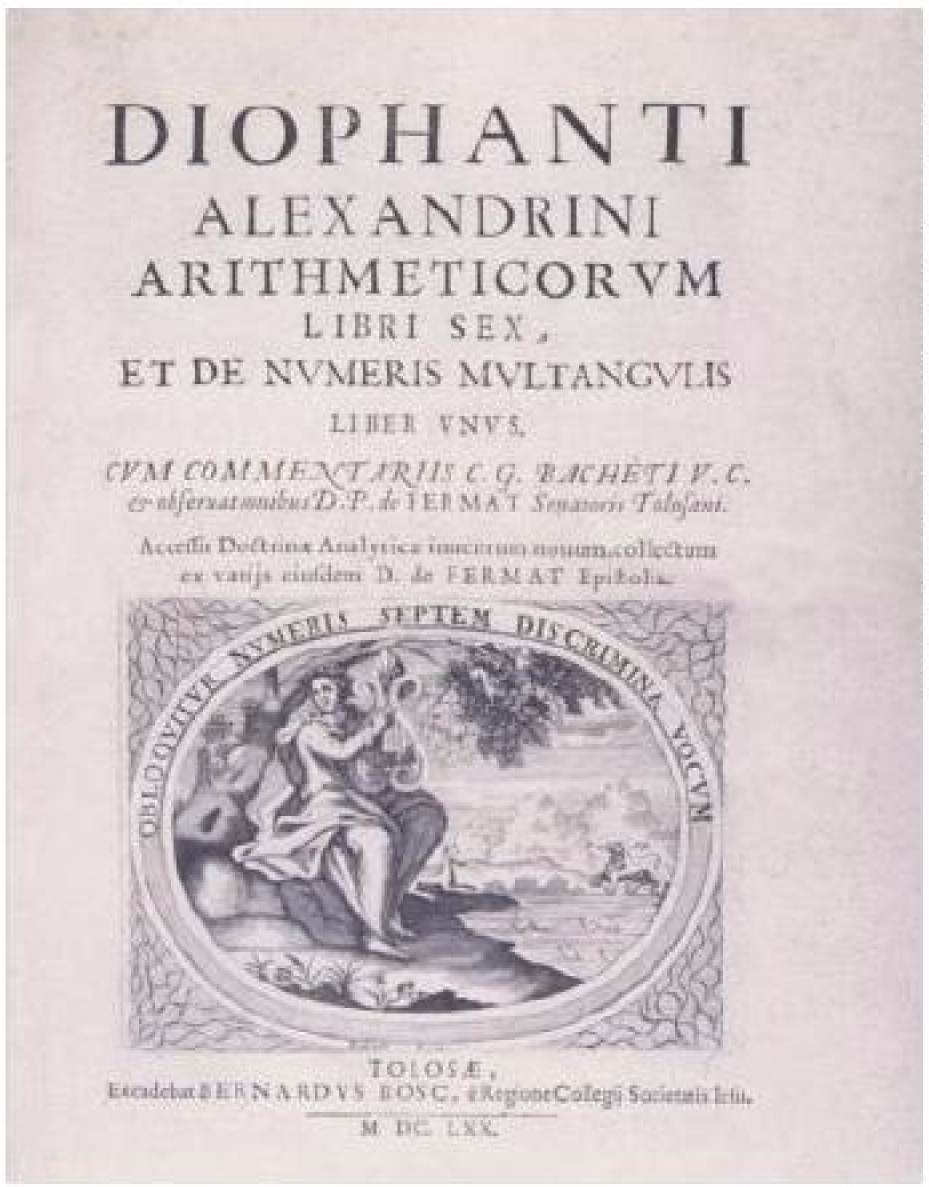
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

O epitáfio de Diofante

P A versão latina do nome de Diofante admite ainda a forma Diofanto.

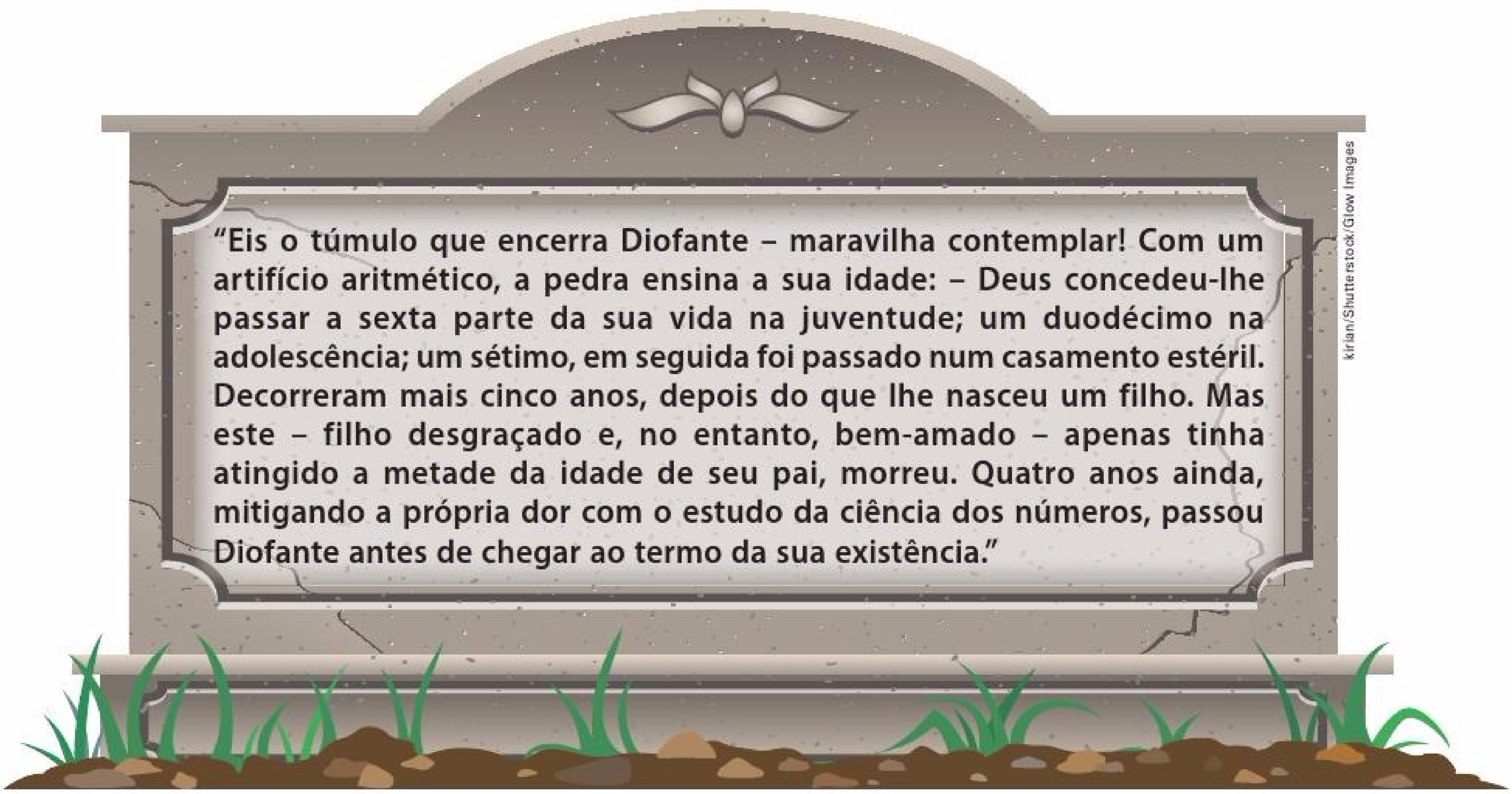
No estudo de sistemas, deparamo-nos com equações do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números, x e y são variáveis. Tais equações são conhecidas como equações **diofantinas**, em homenagem a Diofante, a quem se atribui os primeiros estudos sobre esse tipo de equação.

Diofante, nascido na cidade de Alexandria, onde existiu a principal biblioteca científica da Antiguidade, viveu no século III d.C. Muitos matemáticos o consideram o pai da Álgebra. Escreveu uma obra de aritmética com treze livros, em que introduz o uso de letras para resolver problemas. Pouco se sabe sobre sua vida, além do que ficou gravado em seu túmulo:


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
M. DC. LXX.

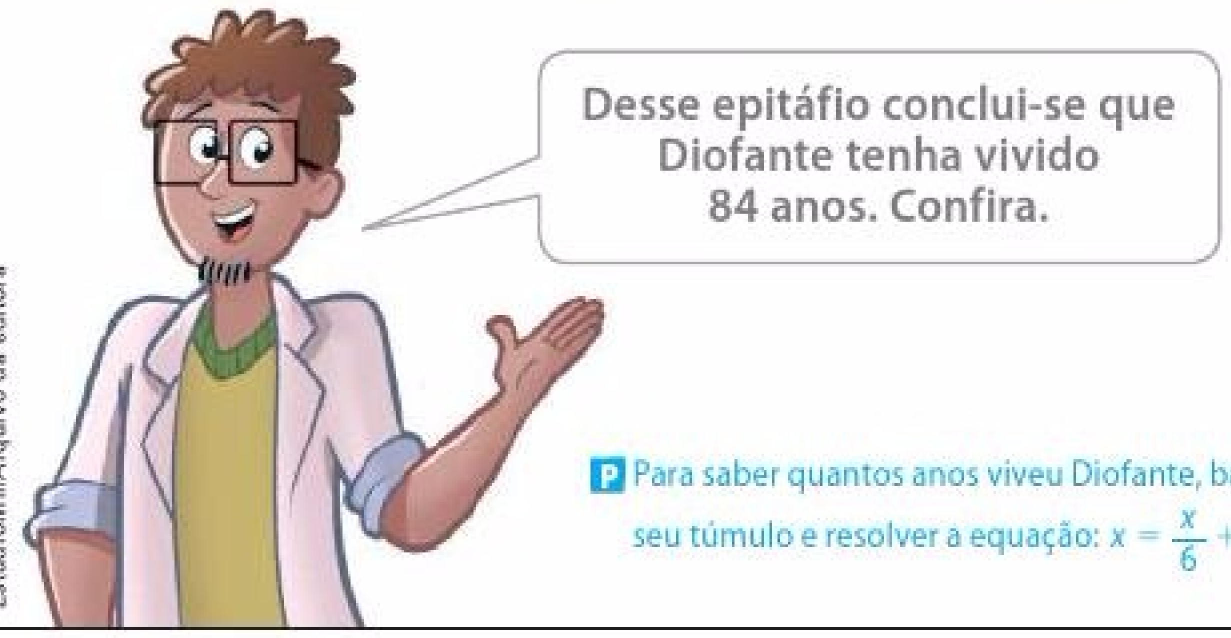
Universidade de Illinois, Estados Unidos/Arquivo da editora

Reprodução da folha de rosto de uma edição de 1670 do livro *Aritmética* de Diofante.



"Eis o túmulo que encerra Diofante – maravilha contemplar! Com um artifício aritmético, a pedra ensina a sua idade: – Deus concedeu-lhe passar a sexta parte da sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo, em seguida foi passado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho. Mas este – filho desgraçado e, no entanto, bem-amado – apenas tinha atingido a metade da idade de seu pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou Diofante antes de chegar ao termo da sua existência."

kirian/Shutterstock/Glow Images



EstudioMil/Arquivo da editora

P Para saber quantos anos viveu Diofante, basta equacionar o texto de seu túmulo e resolver a equação: $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$.

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

1 Resolva os sistemas, aplicando o método que achar conveniente.

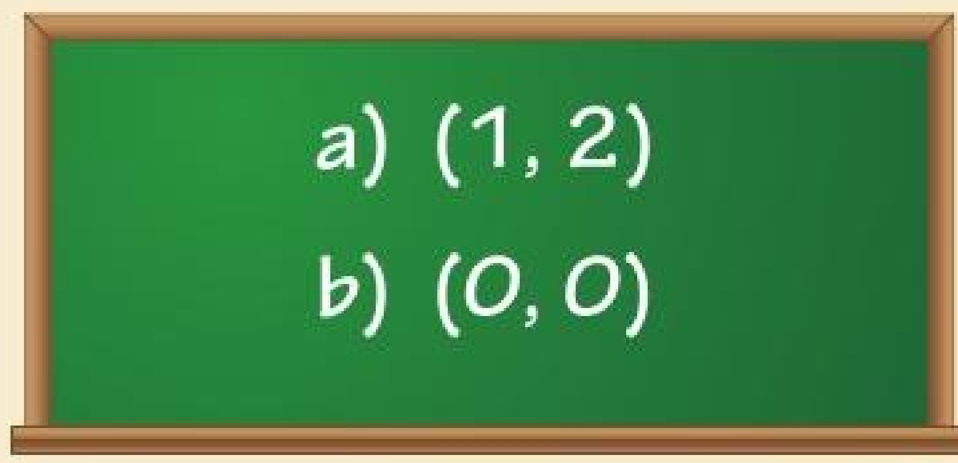
a) $\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (9, 8)

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -2x - 5y = 0 \end{cases}$ (0, 0)

c) $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ (1,1)

d) $\begin{cases} -3x + 5y = 6 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ (3,3)

2 Invente as equações para um sistema que tenha como solução: Respostas pessoais.



AVITS/Arquivo da editora

3 Um cavalo e um burro caminham juntos levando sobre seus lombos pesadas cargas. Lamentava-se o cavalo do peso de seu fardo, quando foi interrompido pelo burro: "De que te queixas? Se eu te tomasse um saco, minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um saco, tua carga igualaria a minha!". Quantos sacos levava o cavalo, e quantos sacos levava o burro? Burro: 7 sacos e cavalo: 5 sacos.

P Veja resolução no Manual do Professor.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

4 O professor Léo tem um sistema muito curioso para dar notas nas provas. O aluno ganha 5 pontos a cada resposta certa e perde 3 a cada resposta errada ou não feita. P Veja sistema no Manual do Professor.

a) Pedro obteve 52 pontos numa prova de 20 questões. Quantas questões ele acertou? 14 questões.

b) Quantos pontos fez Júnior, que acertou metade das questões de uma prova com 20 questões? (Não há "meio certo".) 20 pontos

5 O perímetro de um retângulo é 72 cm. Sabendo que o lado maior é o dobro do lado menor, encontre as medidas dos lados do retângulo. 24 cm e 12 cm. P Veja sistema no Manual do Professor.

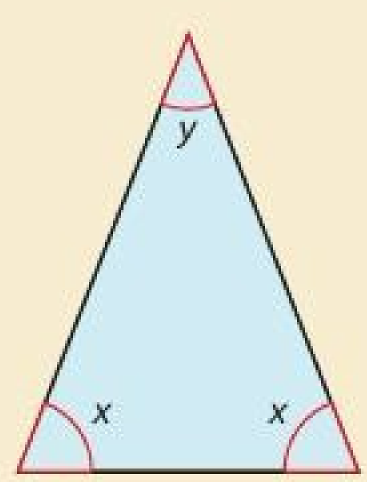
6 Para colaborar com uma campanha contra a fome, o Circo do Arrelia apresentou um espetáculo em que crianças até 6 anos não pagavam entrada. De 6 a 16 anos a entrada custava 2 kg de feijão. Acima de 16 anos cada pessoa pagava 3 kg de feijão. O espetáculo e a campanha foram um sucesso. Foram arrecadados 1 498 kg de feijão com as entradas dos 666 pagantes. Quantos foram os pagantes maiores de 16 anos? 166 pagantes

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

7 Dê as medidas dos lados de um triângulo isósceles, sabendo que o lado maior mede o triplo do lado menor e seu perímetro é de 84 cm. 12 cm, 36 cm e 36 cm. P Veja sistema no Manual do Professor.

8 Num triângulo isósceles acutângulo o ângulo diferente mede a metade de cada um dos ângulos iguais. Dê o valor de cada ângulo. $x = 72°$ e $y = 36°$.

P Veja sistema no Manual do Professor.



Não escreva no livro.

9 Determine o valor de m para que o sistema abaixo tenha como solução o par ordenado (1, 2). $m = 2$

$$\begin{cases} mx + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

10 Escreva um sistema de duas equações com duas incógnitas que tenha como solução o par (−2, 7).
Há infinitas soluções.

11 ***Desafio olímpico***

A soma das idades de duas pessoas é de m anos e a diferença é de n anos. Descreva um procedimento para determinar as idades de cada um. Respostas pessoais. Sugestão: chame de x e y as idades; suponha que $x > y$; $x + y = m$ e $x - y = n$. P Veja comentário no Manual do Professor.

Revista da

Matemática

UMA SOLUÇÃO ENGENHOSA

Em um quintal há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, ao todo, 112 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?

EstudioMil/Arquivo da editora

1º) x é o número de galinhas e y é o número de porcos.

2º) $2x$ representa o total de pés de galinha e $4y$, o total de pés de porco.

3º) Com esses dados, tem-se um sistema de duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 2x + 4y = 112 \end{cases}$$

4º) O sistema pode ser resolvido pelos métodos já estudados: substituição, adição ou subtração.

Entretanto, é pouco provável que em uma situação como essa alguém vá se preocupar em resolver um sistema de equações.

EstudioMil/Arquivo da editora

Fotos: Porco: Tsekhmister/Shutterstock/Glow Images. Galo: Kharkhan Oleg/Shutterstock/Glow Images

Tonico, que não é bobo nem nada e não acha agradável ficar contando pés de porcos e galinhas, apresentou o seguinte raciocínio.

"... faz de conta que todos os porcos levantam as duas pernas traseiras. Então, eu vou ter $2 \cdot 36 = 72$ pés no chão, pois todos os animais estarão apoiados sobre dois pés.

O número de pés que estão levantados é $112 - 72 = 40$ pés, sendo todos de porcos.

Dividindo por 2 a quantidade de pernas levantadas resulta em 20, que deve ser o total de porcos. Se temos 20 porcos, então temos 16 galinhas."

EstudioMil/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

1. O que você achou do método de Tonico? Resposta pessoal.

2. É sempre necessário usar algum método para resolver um sistema? Resposta pessoal.

3. Seria possível resolver o sistema mentalmente, sem fazer contas por escrito? Se a resposta for sim, tente resolver mudando os dados, considere, por exemplo, que são 12 cabeças e 34 pés. Quantos seriam os porcos e as galinhas? E se fossem 12 cabeças e 38 pés?

Nem sempre é necessário utilizar algum método. Quando o sistema é simples com equações do tipo $x + y = n$, por exemplo, e com soluções envolvendo números naturais pequenos até 10, é possível resolver mentalmente. No caso dos exemplos propostos as soluções podem ser (7, 5) ou (5, 7).

Fotos: Porco: Tsekhmister/Shutterstock/Glow Images. Galo: Kharkhan Oleg/Shutterstock/Glow Images

CAPÍTULO 11

CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E OUTRAS CURVAS

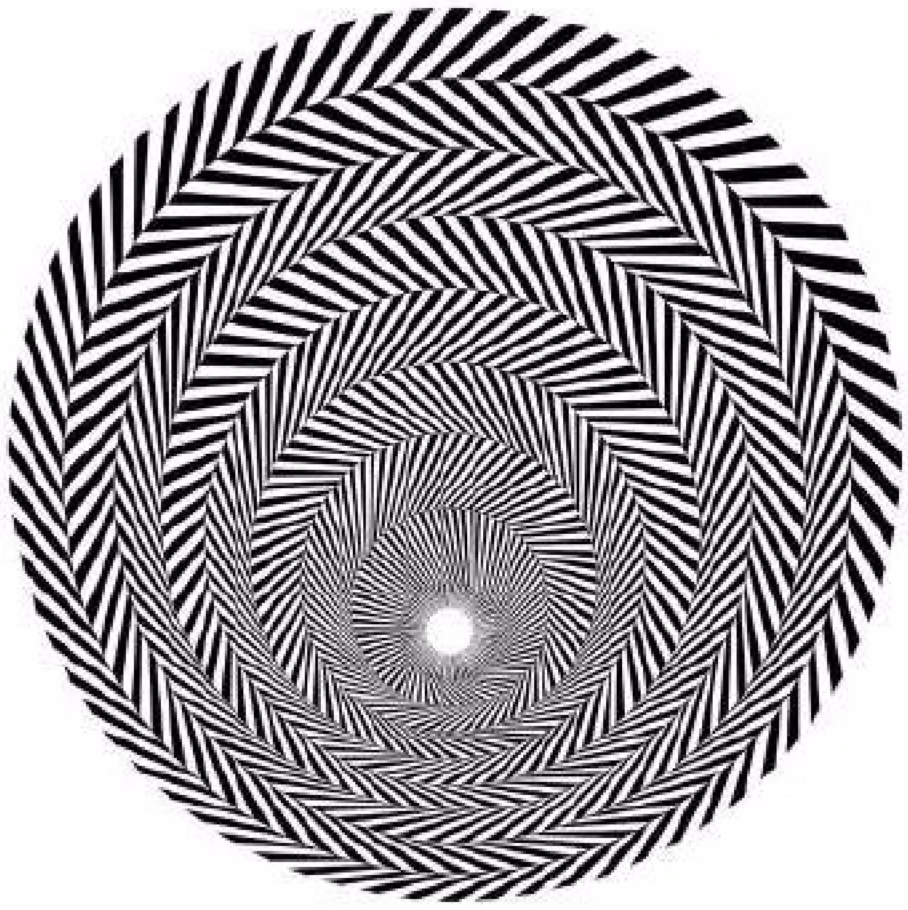
As imagens não estão representadas em proporção.

Círculo e circunferência

Não é possível determinar quando o ser humano começou a usar a forma redonda em suas construções, mas é certo que há milhares de anos já se construíam casas com a base circular, tal como são as habitações de alguns povos indígenas.

P Este capítulo tem como objetivo didático discutir e estudar as propriedades estritamente geométricas de círculos, circunferências e outras curvas. Os aspectos métricos, como perímetro e área, serão tratados no capítulo 10 do volume do 9º ano, quando os alunos aprenderão sobre números irracionais e π.

Diversos Círculos (1926), obra de Wassily Kandinsky (1866-1944).

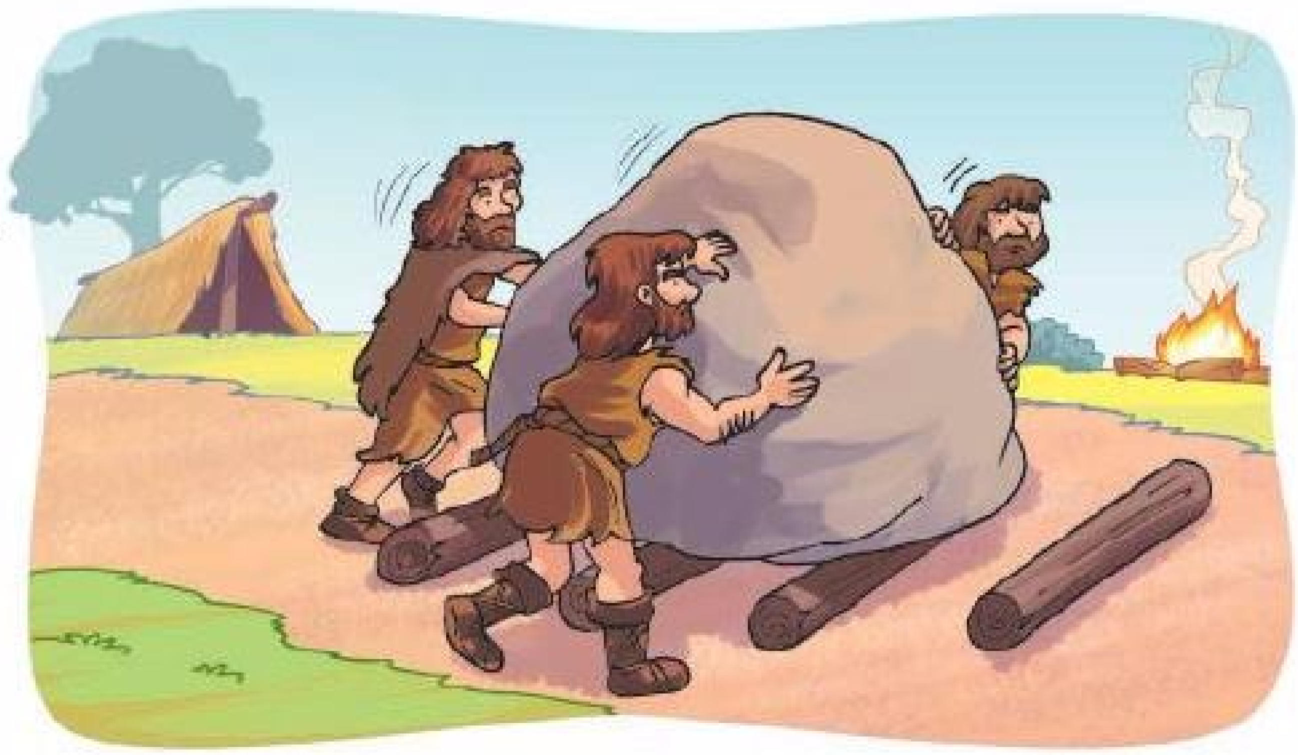


Blaze (1964), obra de Bridget Riley (1931).

Habitação indígena da aldeia Kamayurá, Parque do Xingu, Mato Grosso. 2014.

Foto aérea da aldeia indígena do alto do rio Demene, entre os estados de Roraima e Amazonas, Brasil, 2012.

A tomada de consciência das propriedades da circunferência parece ter surgido com a invenção da roda, quando foi observada uma característica importante: a roda tem **largura constante**. Essa propriedade tornou possível transportar pedras pesadas, deslizando-as sobre toras de madeira, que funcionavam como 'rodas'. Essa mesma ideia ainda é utilizada na retirada de jangadas do mar.


Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Utilização de toras de madeira para transportar uma pedra.


J. L. Bulcão/Pulsar Imagens

Jangadas apoiadas em toras de madeira.

Com o tempo o ser humano percebeu que, se cortasse fatias das toras, poderia construir rodas.

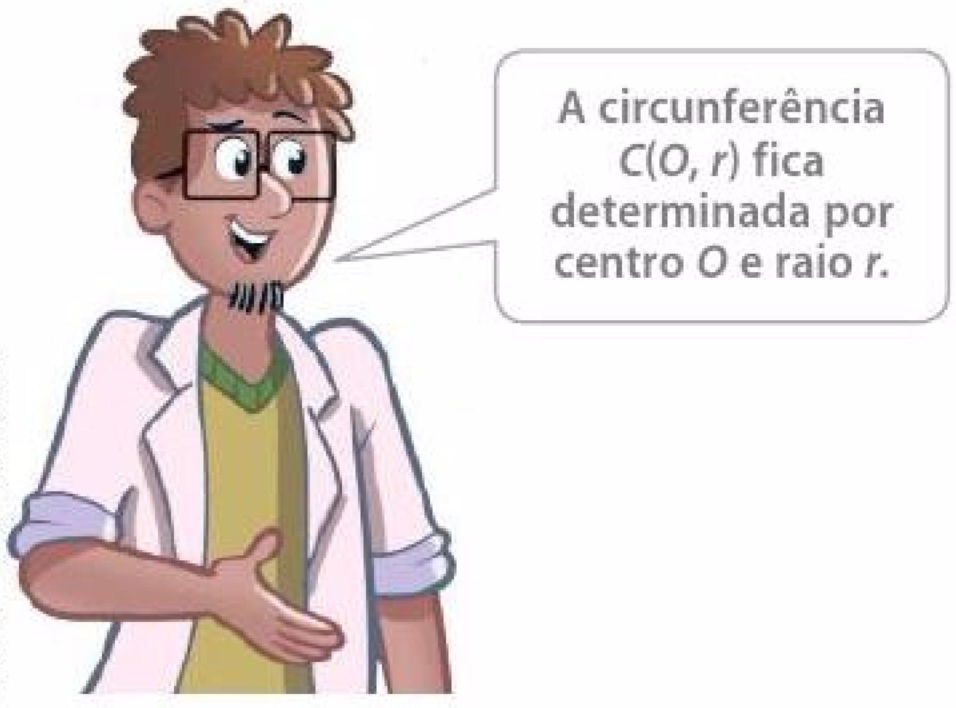
E uma circunferência é exatamente isto: um conjunto de pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo. O ponto fixo é o **centro** da circunferência e a distância constante é a medida do **raio**.

Qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra na circunferência é um raio da circunferência. Uma circunferência fica bem determinada a partir de seu centro e da medida de seu raio.

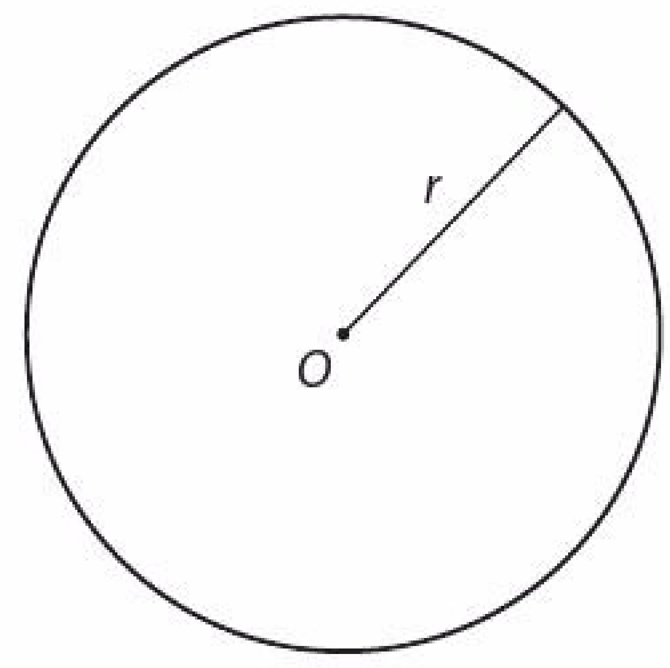
Usaremos a expressão raio *r* para indicar tanto o raio (segmento) quanto a medida do raio.


steamroller_blues/Shutterstock/Glow Images

O termo raio é utilizado para se referir às hastes de metal que dão estabilidade à roda da bicicleta.



EstudioMil/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

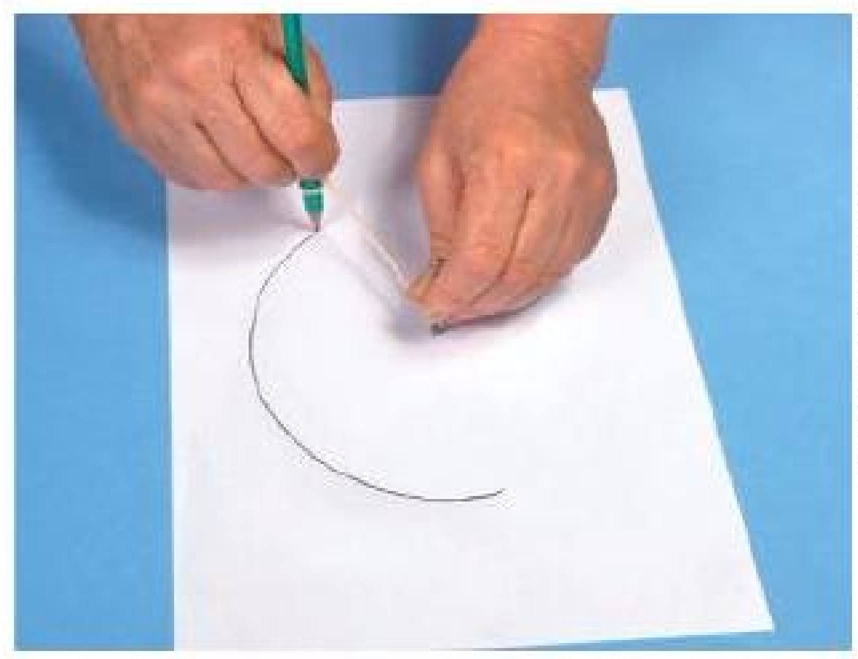
As imagens não estão representadas em proporção.

Tendo definido o raio e o centro, é possível construir a circunferência utilizando um compasso.

EstudioMil/Arquivo da editora

Lipsky/Shutterstock/Glow Images

Também é possível traçar uma circunferência com lápis e barbante.



Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Esse processo é utilizado em certas profissões, como a dos cavadores de poços de água.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Circunferências sendo construídas com o auxílio de barbante.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 Marque, no caderno, dois pontos, A e B. Desenhe, com o auxílio de um compasso, as seguintes circunferências:

a) com centro em A e raio medindo 3 cm;

b) com centro em B e raio medindo 4 cm.

2 As circunferências que você desenhou na atividade anterior se interceptam?
P Veja resposta no Manual do Professor.

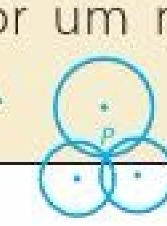
3 Meça a distância entre os centros das circunferências que você desenhou na atividade 1. Relacione a distância com o fato de existirem ou não intersecções. Há intersecção quando a distância entre os centros é menor ou igual à soma das medidas dos raios.

4 Quantas circunferências podem ser traçadas passando por um único ponto? Infinitas

5 Quantas circunferências podem ser traçadas passando por dois pontos? Infinitas

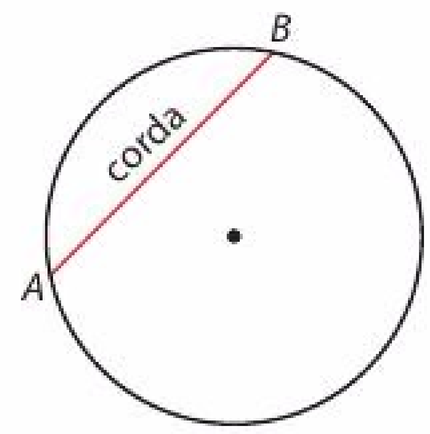
6 Trace três circunferências diferentes que tenham o mesmo centro. Há infinitas possibilidades de resposta.

7 Trace três circunferências cujos centros não coincidam, mas que passem por um mesmo ponto P. Há infinitas possibilidades de resposta.



Corda e diâmetro

Unindo dois pontos quaisquer da circunferência por uma linha reta, obtemos um segmento e duas curvas. Veja:



Num berimbau, instrumento musical de corda, a parte curva, de madeira, é chamada de arco, e a corda de metal, de corda.

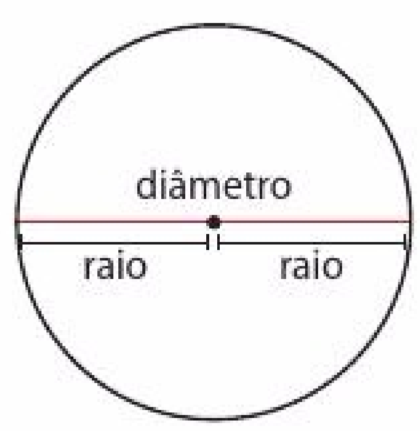
Na Geometria usamos os mesmos termos: a curva que liga dois pontos da circunferência é chamada de **arco**, e o segmento que liga dois pontos da circunferência é chamado de **corda**.

Em uma circunferência, a maior corda, aquela que passa pelo centro, é chamada **diâmetro** da circunferência.

Observe que a medida do diâmetro é duas vezes a medida do raio.

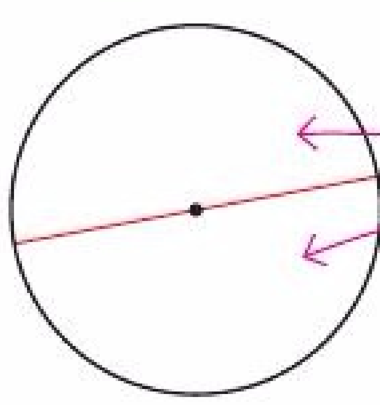
Fernando Favoretto/Acervo do fotógrafo

O berimbau é um instrumento musical de corda, de origem angolana, trazido ao Brasil pelos africanos escravizados, que se tornou muito popular na Bahia.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

medida do diâmetro $=$ 2 $\cdot$ medida do raio



Observe que as extremidades de todo diâmetro dividem a circunferência ou o círculo por ela determinado em duas partes iguais.

Esse é um fato geométrico que teria sido registrado pela primeira vez por Tales de Mileto.

Photo Researchers/Latinstock

Tales de Mileto

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Tales de Mileto

Tales de Mileto (século VI a.C.) é o primeiro matemático grego de que se tem notícia. Tales era o que se chamava um "filósofo da natureza". São atribuídas a ele várias observações e proposições sobre fenômenos físicos, meteorológicos e astronômicos. Sua produção em Matemática ficou marcada pelo teorema de Tales.

P Este tópico é tratado no volume do 9º ano.

faça no seu caderno

8 Desenhe uma circunferência e trace uma reta que passa por seu centro. Meça a distância entre os pontos de intersecção da reta com a circunferência e compare com a medida do raio. O que você descobriu?
P Veja comentário no Manual do Professor.

9 Considere uma circunferência de centro O e $r = 3$ cm.

a) Qual é a distância de um ponto da circunferência até o centro O? 3 cm

b) Marque três pontos A, B e C de modo que: A diste 5 cm do centro; B diste 3 cm do centro e C diste 2 cm do centro. Agora, responda: qual é a posição dos pontos A, B e C em relação à circunferência?

A é externo, *B* é um ponto da circunferência e *C* é interno.

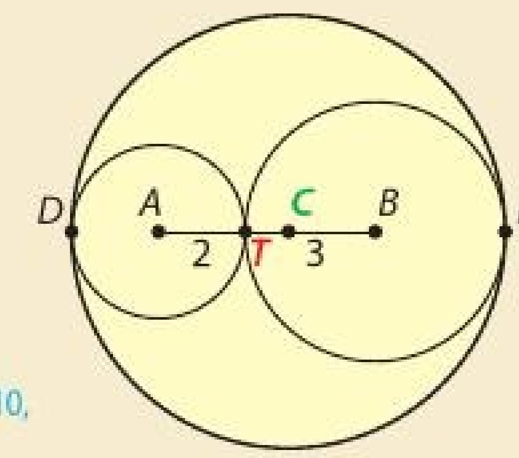
10 Qual é a medida do diâmetro de uma circunferência cujo raio mede:

a) 4,5 cm? $d = 9$ cm

b) 12,3 cm? $d = 24{,}6$ cm

11 O equador terrestre é uma linha imaginária que se aproxima de uma circunferência. Sabendo-se que seu diâmetro médio tem 12 756 km, qual é a medida do seu raio médio? 6378 km

12 No desenho ao lado vemos três circunferências: a primeira de centro em A e raio 2 cm; a segunda de centro B e raio 3 cm. As duas circunferências se tocam no ponto T, e dizemos que elas são tangentes. Uma terceira circunferência de centro C é externa às duas anteriores tangenciando as duas circunferências nos pontos D e E. Os pontos D, A, C, T, B e E estão alinhados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é o raio da circunferência de centro em C? O diâmetro é a distância $DE = 2 \cdot (2 \cdot 3) = 10$, então o raio = 5 cm.

b) Calcule o perímetro das três circunferências. $C_1 = 12{,}56$ cm; $C_2 = 18{,}84$ cm; $C_3 = 31{,}4$ cm; $12{,}56 + 18{,}84 = 31{,}40$.

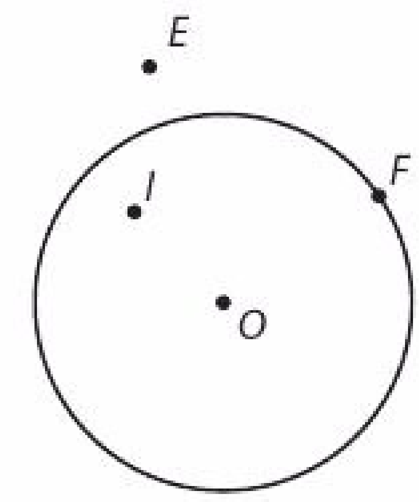
13 Preste atenção no bate-papo destes amigos. Com quem você concorda? Todas as proposições estão corretas.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Posições relativas entre ponto e circunferência

Considere quatro pontos:

- $O \longrightarrow$ centro da circunferência de raio r;
- $I \longrightarrow$ ponto interno a essa circunferência;
- $E \longrightarrow$ ponto externo a essa circunferência;
- $F \longrightarrow$ ponto da circunferência.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Comparando as distâncias IO, EO e FO com a medida do raio r, temos:

- $IO < r$
- $EO > r$
- $FO = r$

Neste livro vamos usar a notação d_{XO} para indicar a distância entre um ponto X e um ponto O.

Se $d_{XO} < r$, então o ponto é interior à circunferência $C(O, r)$.

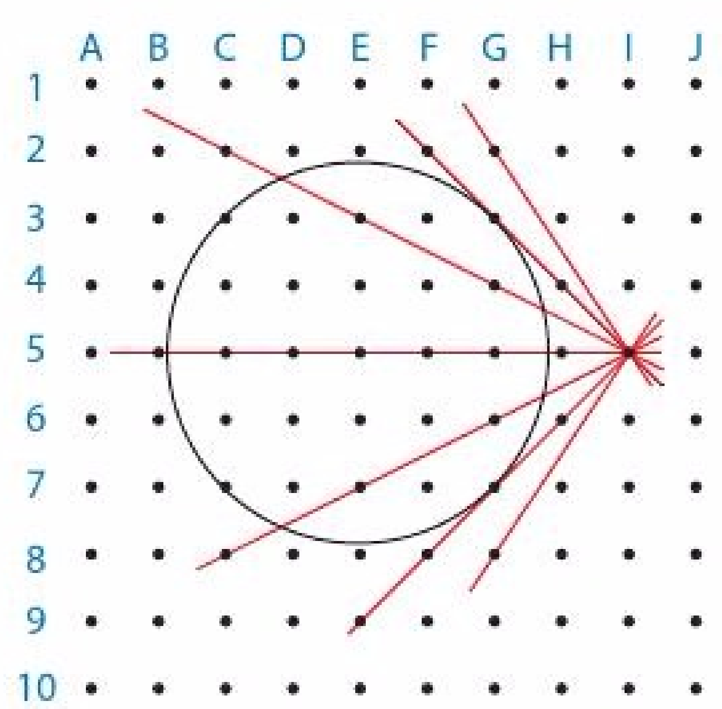
Se $d_{XO} = r$, então o ponto pertence à circunferência $C(O, r)$.

Se $d_{XO} > r$, então o ponto é exterior à circunferência $C(O, r)$.

Posições relativas entre reta e circunferência

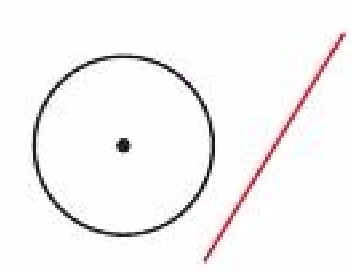
Observe a malha pontilhada a seguir. Nela, com um compasso, foi traçada uma circunferência com centro no ponto (E, 5) e passando pelo ponto (C, 3).

Com uma régua foram traçadas as retas que passam pelos pontos (I, 5) e (G, 2); (I, 5) e (G, 3); (I, 5) e (G, 4); (I, 5) e (G, 5); (I, 5) e (G, 6); (I, 5) e (G, 7); (I, 5) e (G, 8).

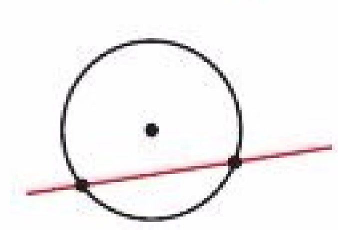


EstudioMil/Arquivo da editora

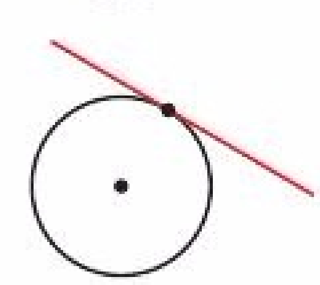
1ª) Uma reta não interceptar a circunferência.



2ª) Uma reta interceptar a circunferência em dois pontos. Nesse caso ela é chamada **reta secante**.



3ª) Uma reta encostar na circunferência em um ponto. Nesse caso ela é chamada **reta tangente**.



As palavras tangente e secante têm origem em ações:
tangente: de tocar; encostar.
secante: de cortar; seccionar.

P Observe que as circunferências C_2 e C_3, C_2 e C_1, C_4 e C_1, C_3 e C_4 não se interceptam; as circunferências C_4 e C_2 se interceptam em um ponto (são tangentes) e as circunferências C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos (são secantes).

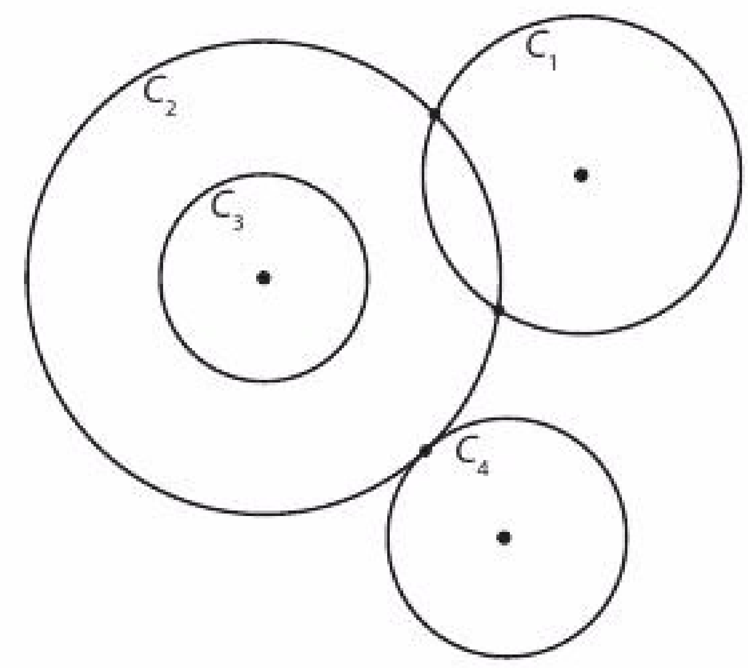
Posições relativas entre duas circunferências

Trace, em uma folha de papel, quatro circunferências e compare o seu desenho com os de seus colegas de classe.

Veja abaixo um exemplo de como quatro circunferências podem ser construídas.

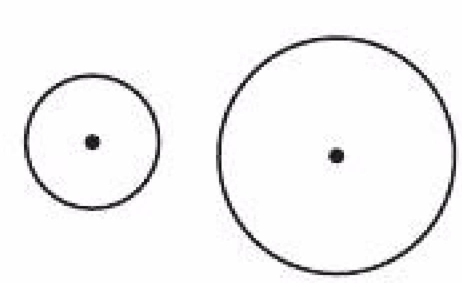
Observe que as circunferências podem se interceptar ou não.

EstudioMil/Arquivo da editora

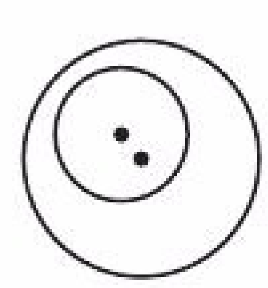


1ª) Quando as circunferências não se interceptam.

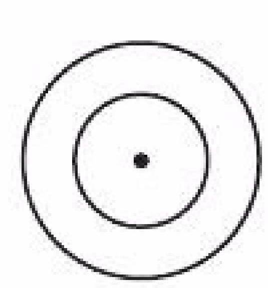
- O centro de uma está na região externa da outra, e vice-versa.



- O centro de uma está na região interna da outra.



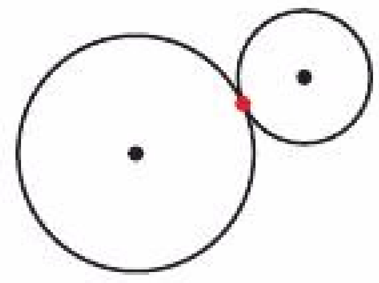
- Os centros coincidem. Nesse caso, dizemos que as circunferências são **concêntricas**.



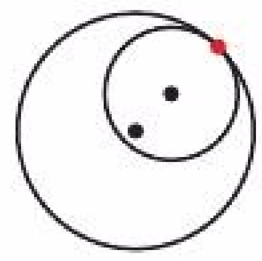
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

2ª) Quando as circunferências se tangenciam (possuem um ponto em comum).

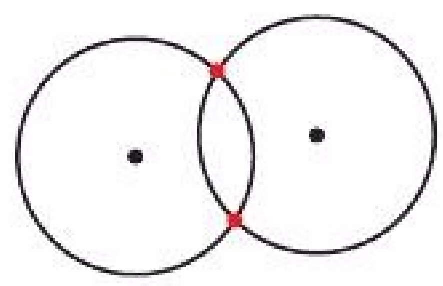
- O centro de uma está na região externa da outra, e vice-versa.



- O centro de uma está na região interna da outra.



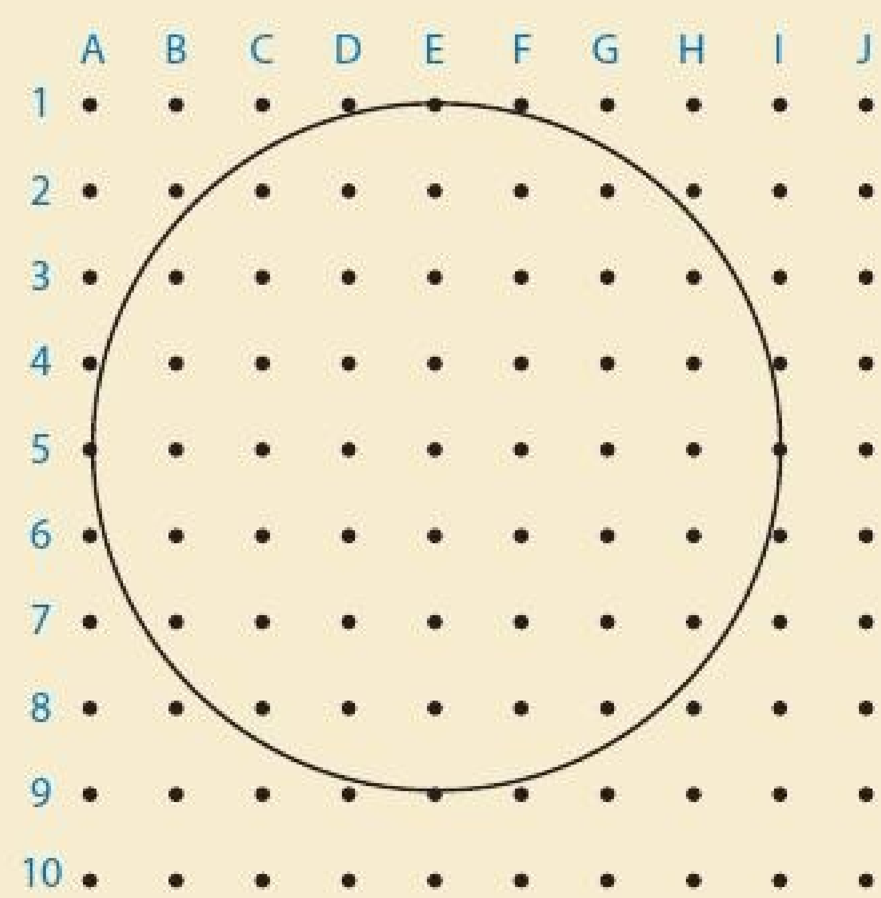
3ª) Quando as circunferências são secantes (possuem dois pontos em comum).



ATIVIDADES

faça no seu caderno

14 Observe a circunferência desenhada na rede pontilhada a seguir.



a) Dê as coordenadas do centro da circunferência. (E, 5)

b) Determine a medida do raio. Considere a distância entre os pontos (A, 1) e (B, 1) como 1 unidade. $r = 4$

c) Quais, entre os pontos seguintes, estão no interior da circunferência? (C, 3); (C, 4); e (G, 2)

(C,3)	(A,5)	(C,4)	(G,2)	(E,9)	(H,8)

d) Considere a distância entre os pontos (A, 1) e (B, 1) como unidade e estime a distância entre cada ponto do item **c** ao centro da circunferência. (C, 3) quase 3; (A, 5) 4; (C, 4) pouco mais de 2; (G, 2) pouco mais de 3,5; (E, 9) 4; (H, 8) pouco mais de 4.

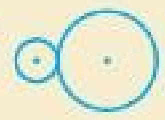
15 Quantos pontos de intersecção existem entre:

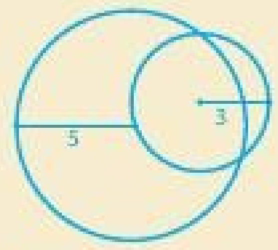
a) uma circunferência e uma reta que não a intercepta? Nenhum ponto.

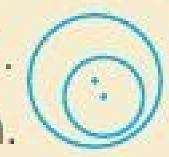
b) uma circunferência e uma reta secante? 2 pontos

c) uma circunferência e uma reta tangente? 1 ponto

16 Trace circunferências de acordo com as condições dadas.
Em cada caso, determine quantos são os pontos de intersecção.

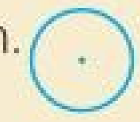
a) C_1 e C_2 são tangentes. 1 ponto
Centro de C_1 é externo a C_2.
C_1: raio $r = 3$ cm e C_2: raio $r = 1$ cm.


b) C_1 e C_2 são secantes. 2 pontos
Centro de C_2 é interno a C_1.
C_1: $r = 5$ cm e C_2: $r = 3$ cm.


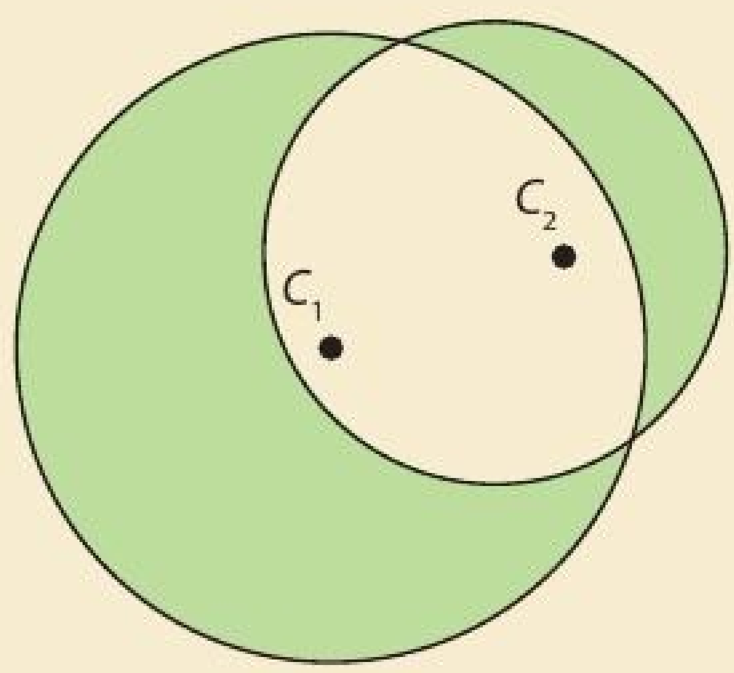
c) C_1 e C_2 não se interceptam. Nenhum ponto.
Centro de C_2 é interno a C_1.
C_1: $r = 5$ cm e C_2: $r = 3$ cm.


d) C_1 e C_2 não se interceptam. Nenhum ponto
Centro de C_2 não é interno a C_1.
C_1: $r = 4$ cm e C_2: $r = 5$ cm.


e) C_1 e C_2 têm centros coincidentes. Nenhum ponto
C_1: $r = 4$ cm e C_2: $r = 5$ cm.


f) C_1 e C_2 são concêntricas. Infinitos pontos
C_1: $r = 4$ cm e C_2: r = 4 cm.


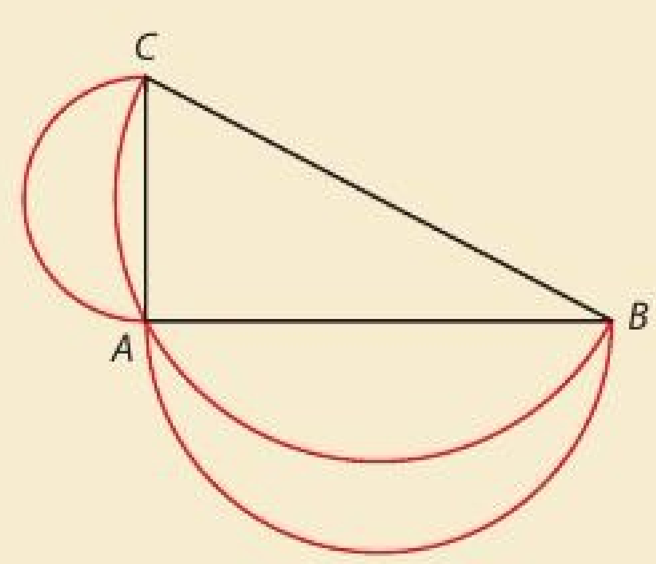
17 Quando duas circunferências se interceptam em dois pontos, ficam definidas figuras geométricas chamadas "luas" (a parte pintada de verde em cada figura a seguir).



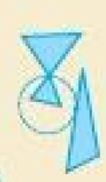
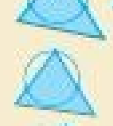
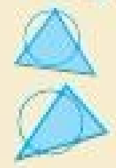
Não escreva no livro.

Desenhe luas no seu caderno.

18 Desenhe um triângulo retângulo qualquer. Sobre cada lado construa semicircunferências cujo centro é o ponto médio de cada lado. Veja o modelo ao lado.
Curiosidade: a soma das áreas das duas luas que aparecem no desenho é igual à área do triângulo. Esse fato está demonstrado no capítulo 10 do livro do 9º ano.

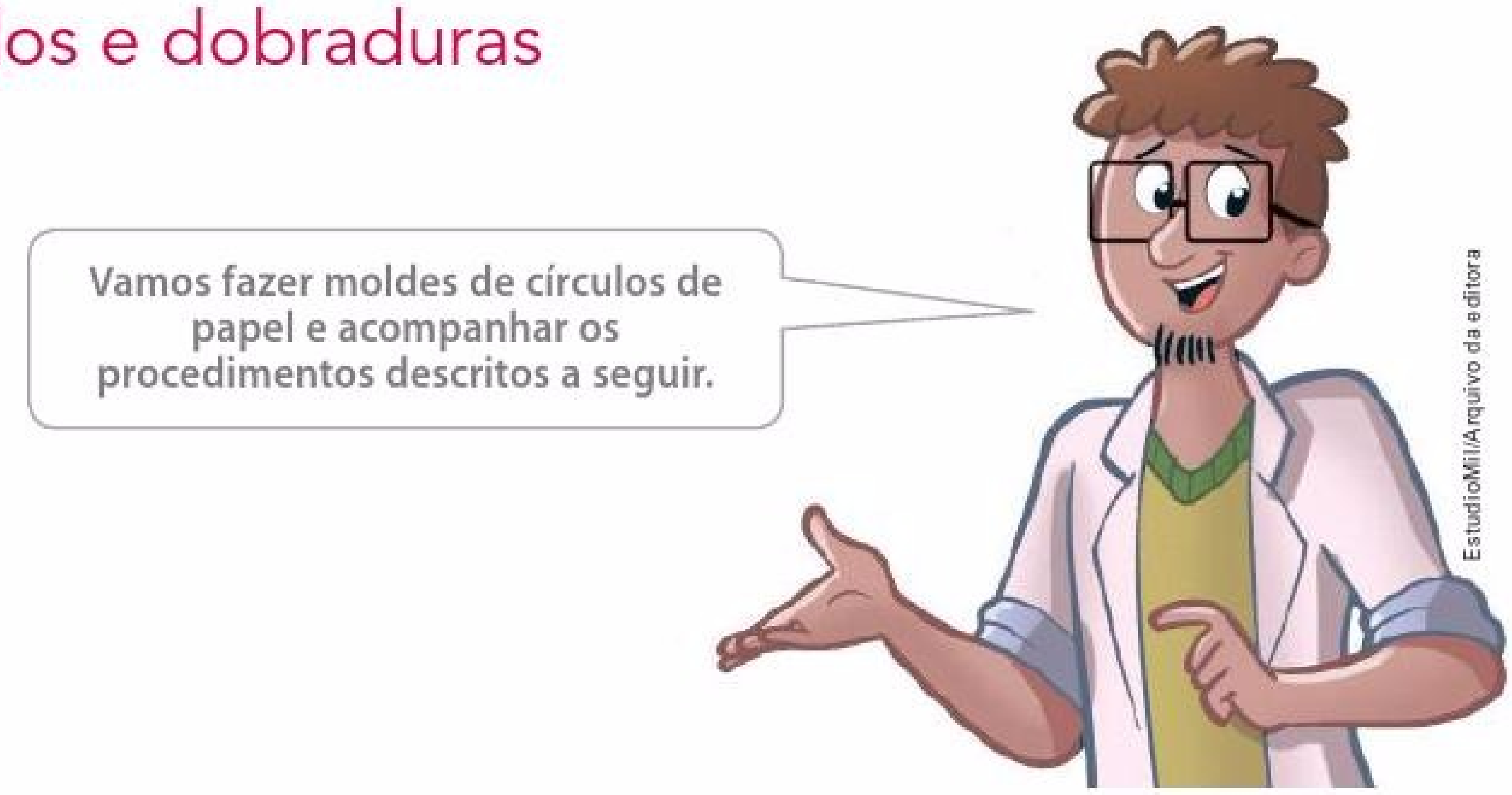


19 Desenhe uma circunferência e um triângulo quaisquer. Descubra quantos pontos de intersecção são possíveis entre um triângulo e uma circunferência.
Desenhe situações em que a circunferência e o triângulo: Sugestões de resposta:

a) não têm pontos de intersecção; 
b) têm apenas 1 ponto de intersecção; 
c) têm 2 pontos de intersecção; 
d) têm 3 pontos de intersecção; 
e) têm 4 pontos de intersecção; 
f) têm mais do que 4 pontos de intersecção. 

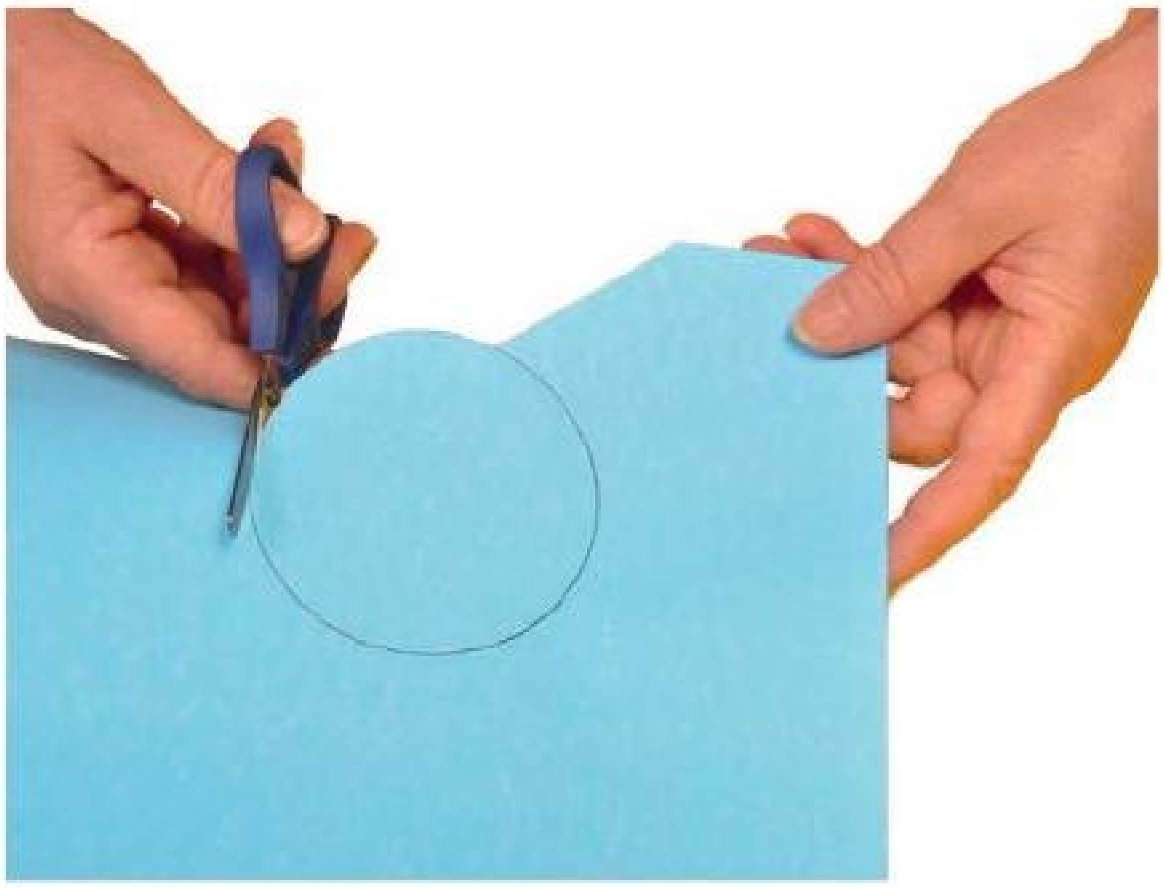
Compare seus desenhos com os de seus colegas. O que você observou?
Entre um triângulo e uma circunferência pode haver de 0 a 6 pontos de intersecção.

Círculos e dobraduras



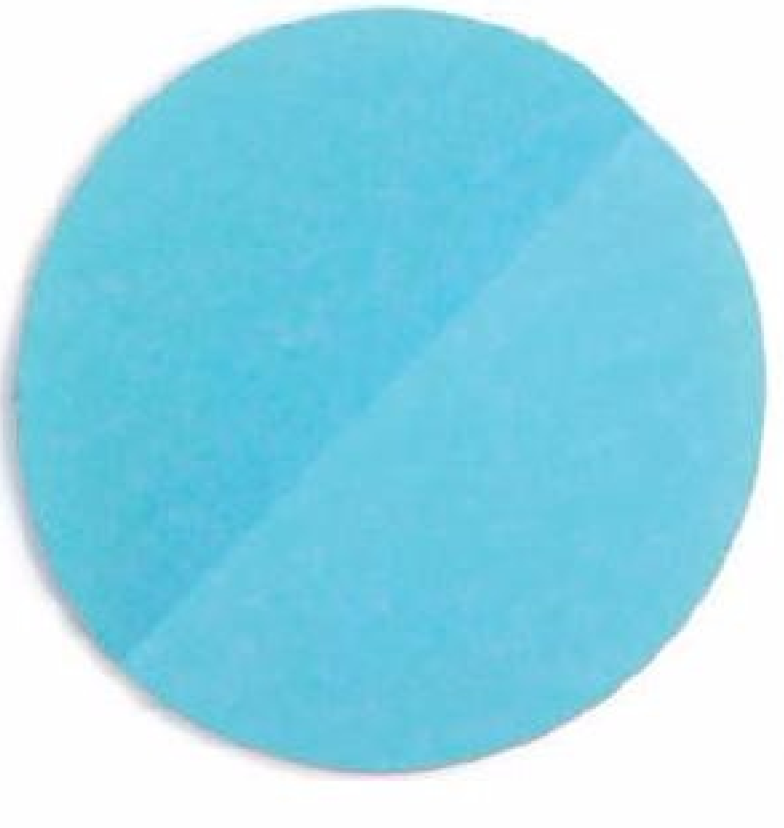
EstudioMil/Arquivo da editora

Para construir um disco circular, use um copo ou objeto de borda cilíndrica e trace em um papel seu contorno com o lápis, obtendo, assim, uma circunferência. Recorte os discos de papel.



Fotos: Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

A seguir, dobre o disco de papel de modo que as bordas coincidam. A dobra dividiu o disco em duas partes iguais.



Essa dobradura ilustra uma das proposições de Tales de Mileto de que o "diâmetro provoca a bissecção na circunferência".

Os geômetras usam os termos **círculo** ou **disco** para se referir à reunião dos pontos do interior da circunferência com os pontos de seu contorno.

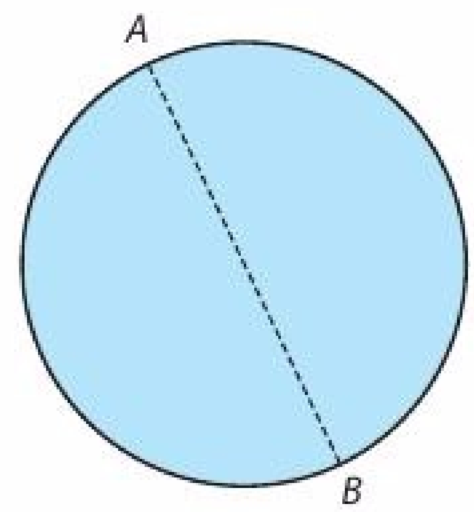
P Embora exista esta distinção, não é recomendável excesso de formalismo no uso da terminologia, ou seja, é comum que os alunos usem frases como a "área da circunferência". A correção em certos casos pode deixá-los confusos sobre o que é o essencial da atividade.

Como determinar o centro de um círculo

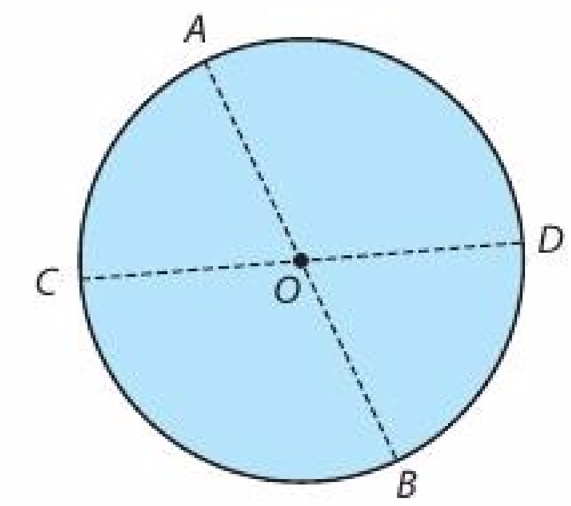
Quando temos um disco de papel, como o que foi obtido do contorno de um copo, não temos a localização do centro.

Porém, é possível descobrir o centro desse disco seguindo os passos:

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

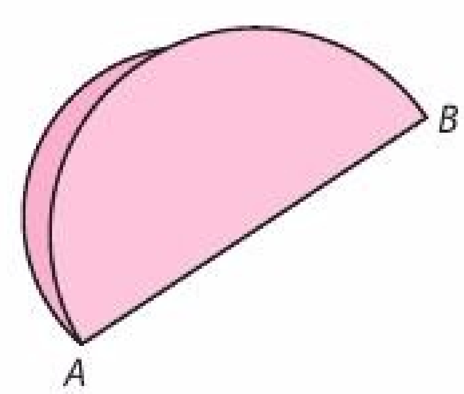


1º) Faça uma dobra no disco de papel, ao meio, fazendo coincidir as bordas, obtendo, assim, um diâmetro $\overline{AB}$.

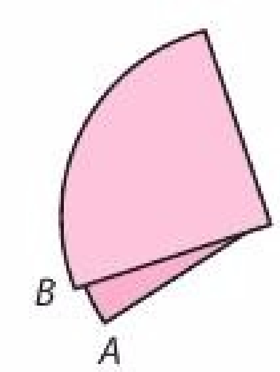


2º) Faça uma nova dobra ao meio do disco de modo a obter um diâmetro $\overline{CD}$. O ponto *O* de intersecção entre os diâmetros obtidos é o centro da circunferência que contorna o disco.

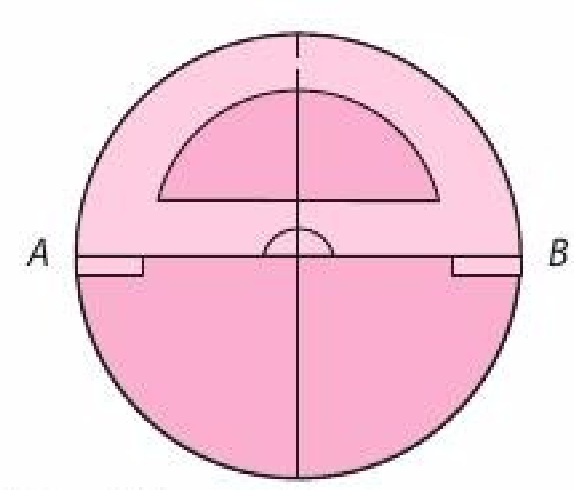
Agora, siga estes passos:



1º) Pegue um disco de papel e dobre-o, fazendo coincidir as bordas. O que você obteve? Chame de *A* e *B* as extremidades do diâmetro obtido.

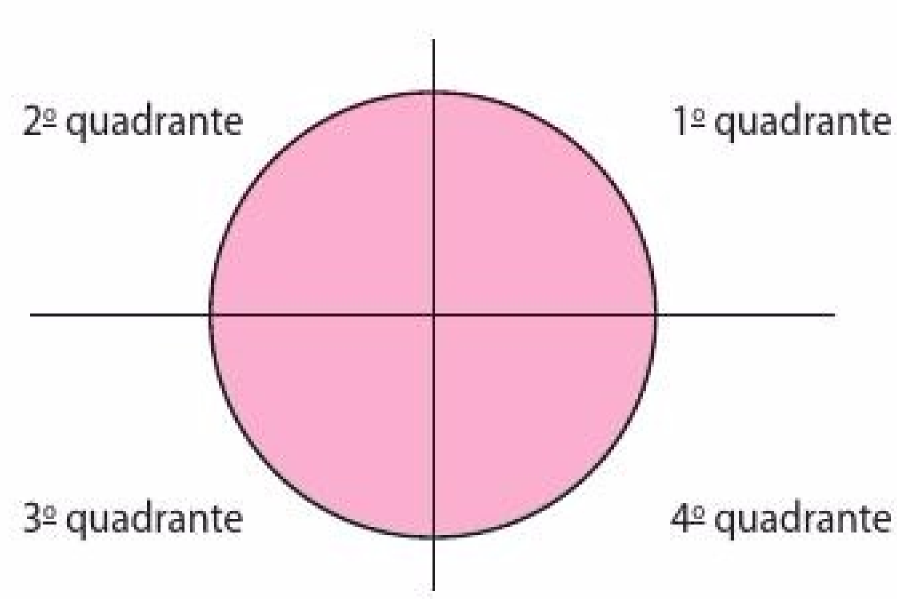


2º) Dobre novamente os semidiscos para fazer *A* coincidir com *B*.



3º) Desdobre tudo e trace com a régua os vincos. Meça com o transferidor os ângulos entre dois diâmetros.

EstudioMil/Arquivo da editora



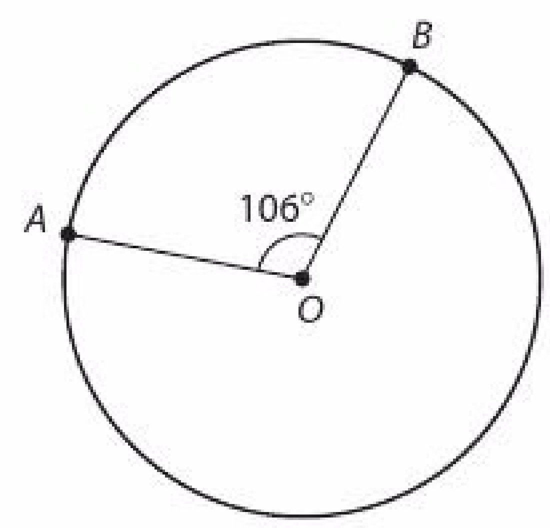
Ângulos na circunferência

Agora, vamos explorar ângulos em uma circunferência.

1º) Trace uma circunferência de centro ***O*** e raio ***r***.

2º) Marque dois pontos, ***A*** e ***B***, na circunferência.

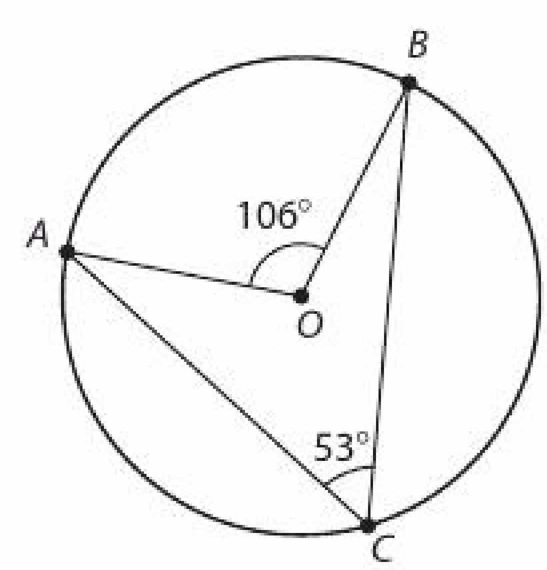
3º) Determine dois segmentos, $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, unindo os pontos da borda ao centro da circunferência.



O ângulo $A\hat{O}B$ formado nesse exemplo mede 106° e é denominado **ângulo central**.

4º) Marque um terceiro ponto, ***C***, na circunferência.

5º) Determine os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, unindo os pontos ***A*** e ***B*** ao ponto ***C***.



O ângulo $A\hat{C}B$ formado nesse exemplo mede 53° e é denominado **ângulo inscrito**.

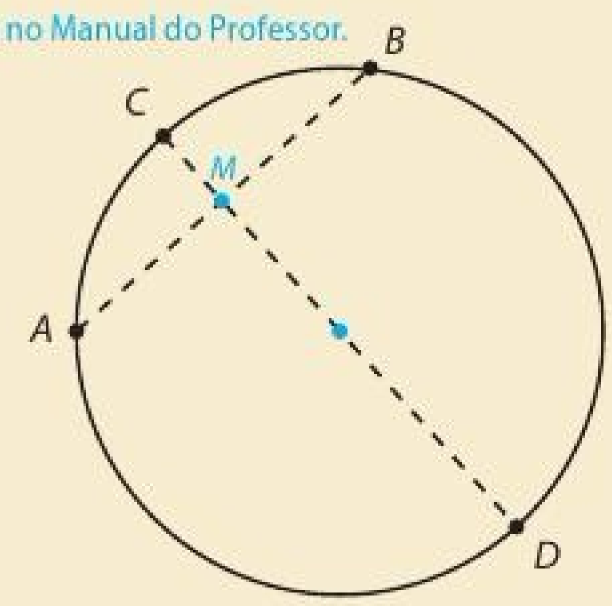
Vamos explorar, agora, algumas relações entre o ângulo inscrito e o ângulo central, fazendo as atividades a seguir.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

20 Dobre um disco de papel de modo que se obtenha uma corda $\overline{AB}$. A seguir, com uma nova dobra, faça coincidir *A* com *B*, obtendo um diâmetro $\overline{CD}$.

P Veja comentários no Manual do Professor.



a) Meça os ângulos formados pelo diâmetro e pela corda. O que você observou? Compare seus resultados com os de seus colegas.

b) Marque um ponto *M* sobre a dobra correspondente ao diâmetro. Meça a distância do ponto *M* a cada uma das extremidades da corda. O que você observou? Compare seus resultados com os de seus colegas.

c) Marque um ponto *P* qualquer sobre o diâmetro $\overline{CD}$, determine as distâncias *AP* e *BP* e compare. O que você descobriu? Qualquer que seja *P* escolhido ele será equidistante dos pontos *A* e *B*; observe que o triângulo *APB* é isósceles.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

21 A palavra "circo" é usada para designar o espaço em que acontecem espetáculos circences com palhaços, trapezistas e outras atrações. Que relação existe entre as palavras circo, círculo e circunferência? O termo circo está associado à forma da base da tenda, que em geral é circular.

Lars Christensen/Shutterstock/Glow Images

22 Liste objetos ou ações em que aparecem circunferências e círculos. Resposta pessoal.

23 Trace uma circunferência.

a) Determine três pontos, A, B e C, sobre a circunferência e, com uma régua, marque os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$. Meça o ângulo central $B\hat{O}C$ e o ângulo inscrito $B\hat{A}C$. Sendo O o centro da circunferência, qual é o ângulo de menor medida? $B\hat{A}C$

b) Quantas vezes o ângulo menor cabe no ângulo maior? 2 vezes

c) Compare seus resultados com os de seus colegas. Registre as conclusões a que vocês chegaram. O ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

24 ***Laboratório de geometria***

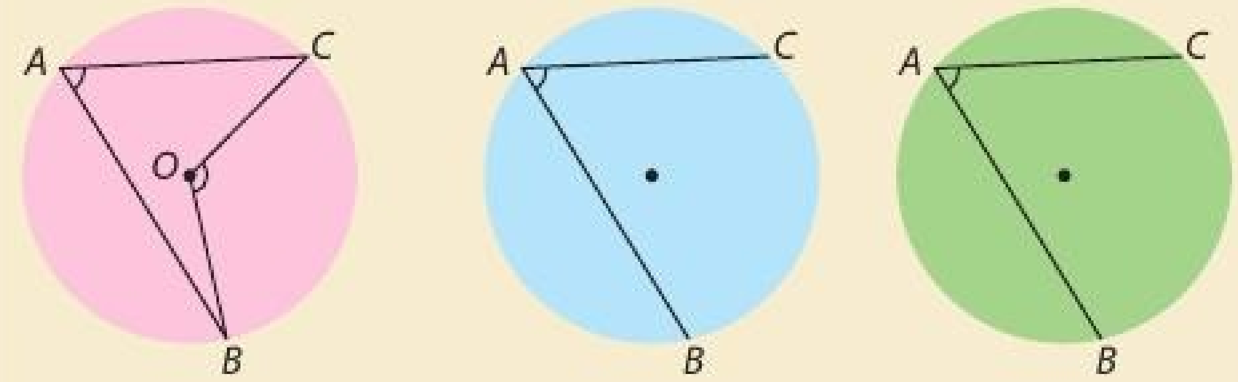
Vamos comprovar experimentalmente o que concluímos na atividade anterior.

a) Construa três discos de papel de mesmo tamanho, usando o compasso. Não se esqueça de assinalar o centro de cada um deles.

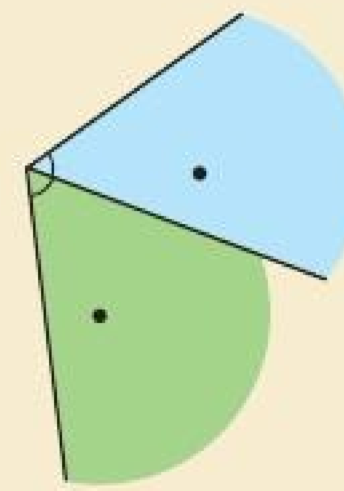
b) Marque em cada disco três pontos, A, B e C, de modo que coincida sua posição quando sobrepostos.

c) No primeiro disco, trace com a régua os ângulos central e inscrito.

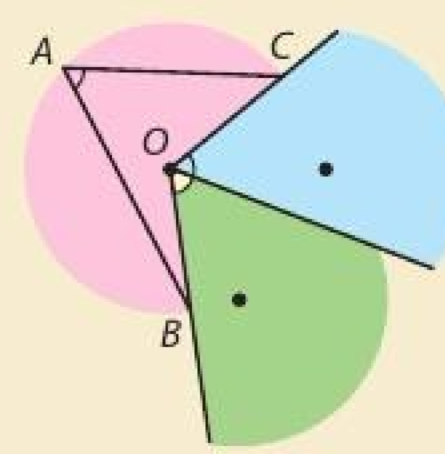
d) No segundo e terceiro discos, recorte o ângulo inscrito.



e) Com o auxílio de uma fita adesiva, junte esses dois ângulos, unindo os vértices e um dos lados, como mostra a figura a seguir.



f) Sobreponha esse novo ângulo ao primeiro disco, de modo que seu vértice coincida com o vértice do ângulo central, como indicado na figura a seguir.



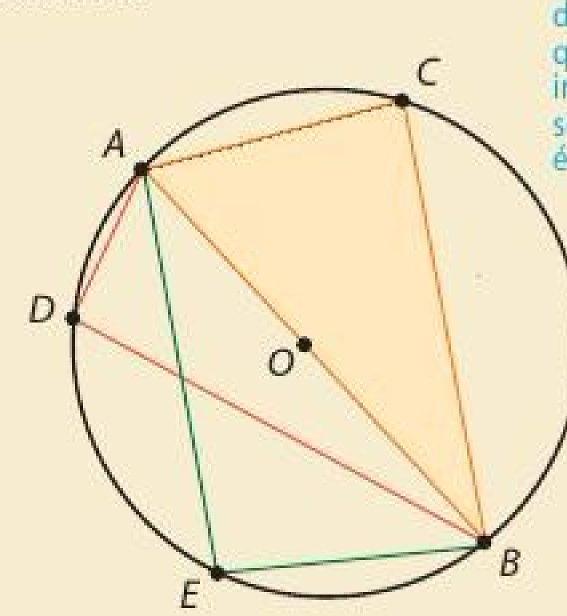
g) O que você pode concluir? O ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

25 Trace uma circunferência de centro O e raio qualquer.

a) Trace um diâmetro de extremidades A e B.

b) Marque sobre uma mesma semicircunferência os pontos C, D e E, que não coincidam com A e B.

c) Meça os ângulos: $A\hat{C}B$, $A\hat{D}B$ e $A\hat{E}B$. O que você descobriu? Os alunos devem descobrir que qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

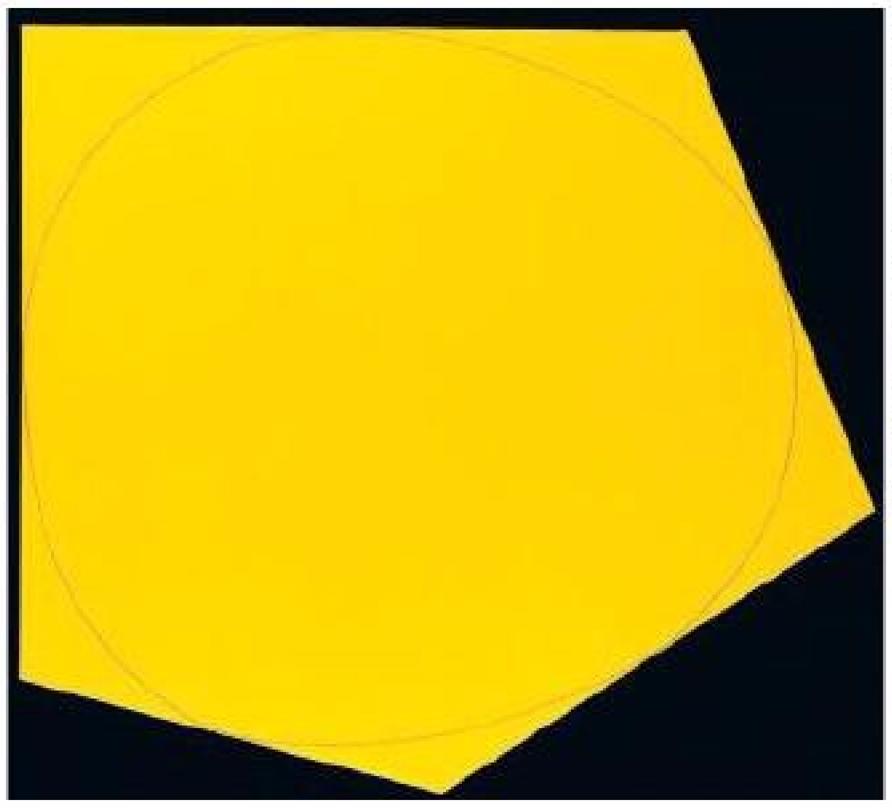


Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Polígonos inscritos e circunscritos

Observe o quadro abaixo pintado pelo artista Robert Mangold. Ele mostra uma curva disforme que tangencia, ou seja, encosta em todos os lados de um polígono.

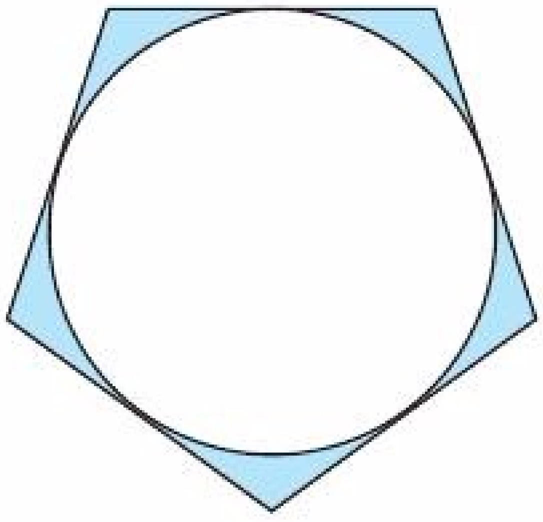
Quando isso acontece, dizemos que o polígono está **circunscrito** à curva.



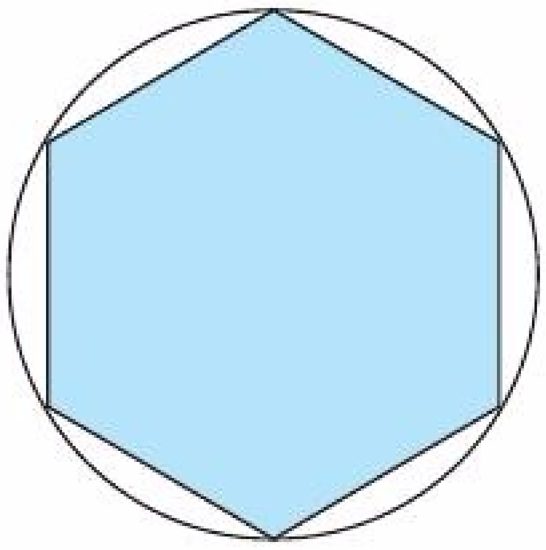
Pintura sobre tela, 202,8 × 225,6 cm, Museu de Arte Moderna de Nova York (MOMA)

Círculo distorcido dentro de um polígono, 1972, obra de Robert Mangold.

Por outro lado, quando um polígono tem todos os seus vértices sobre a curva, dizemos que o polígono está **inscrito** na curva.



polígono circunscrito



polígono inscrito

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

faça no seu caderno

26 Trace uma circunferência. Em seguida, desenhe um triângulo cujos vértices estão todos sobre a circunferência. Você vai obter um triângulo inscrito na circunferência.

27 Trace uma circunferência. Em seguida, desenhe um retângulo cujos vértices estão todos sobre a circunferência. Você vai obter um retângulo inscrito na circunferência.

28 Construa um quadrado circunscrito numa circunferência, da seguinte maneira:

- Construa com régua e compasso, por dobradura ou sobre uma malha quadriculada, um quadrado de lado 6 cm.
- Encontre o centro *O* do quadrado no encontro das duas diagonais, por meio de dobras ou traçado;
- Com centro em *O* e raio igual à metade da medida do lado (3 cm), trace uma circunferência. Observe que os lados do quadrado tangenciam a circunferência.

O quadrado é circunscrito à circunferência. Verifique experimentalmente que não é possível circunscrever um retângulo qualquer numa circunferência, pois se dois pares de lados tangenciam a circunferência, os outros dois não tangenciam.

A divisão da circunferência e a construção do hexágono regular

P Estamos usando "iguais" para nos referirmos a "mesma medida".

O hexágono regular é um polígono convexo e simétrico que tem os 6 lados e os 6 ângulos internos iguais entre si.

Para construir um hexágono regular, acompanhe os passos a seguir:

1º) Desenhe uma circunferência com raio $r = 5$ cm.

2º) Marque sobre a circunferência um ponto A.

3º) Com a ponta do compasso em A e abertura igual ao raio, marque sobre a circunferência o ponto B.

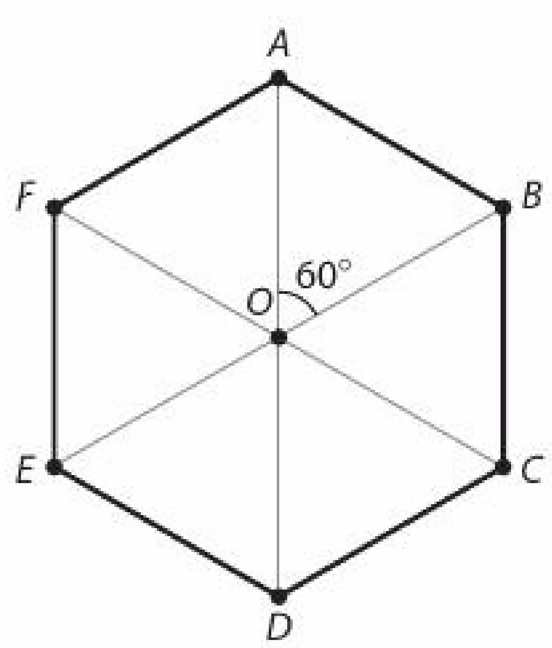
4º) Com a ponta do compasso em B e abertura igual ao raio, marque sobre a circunferência o ponto C diferente do ponto já marcado.

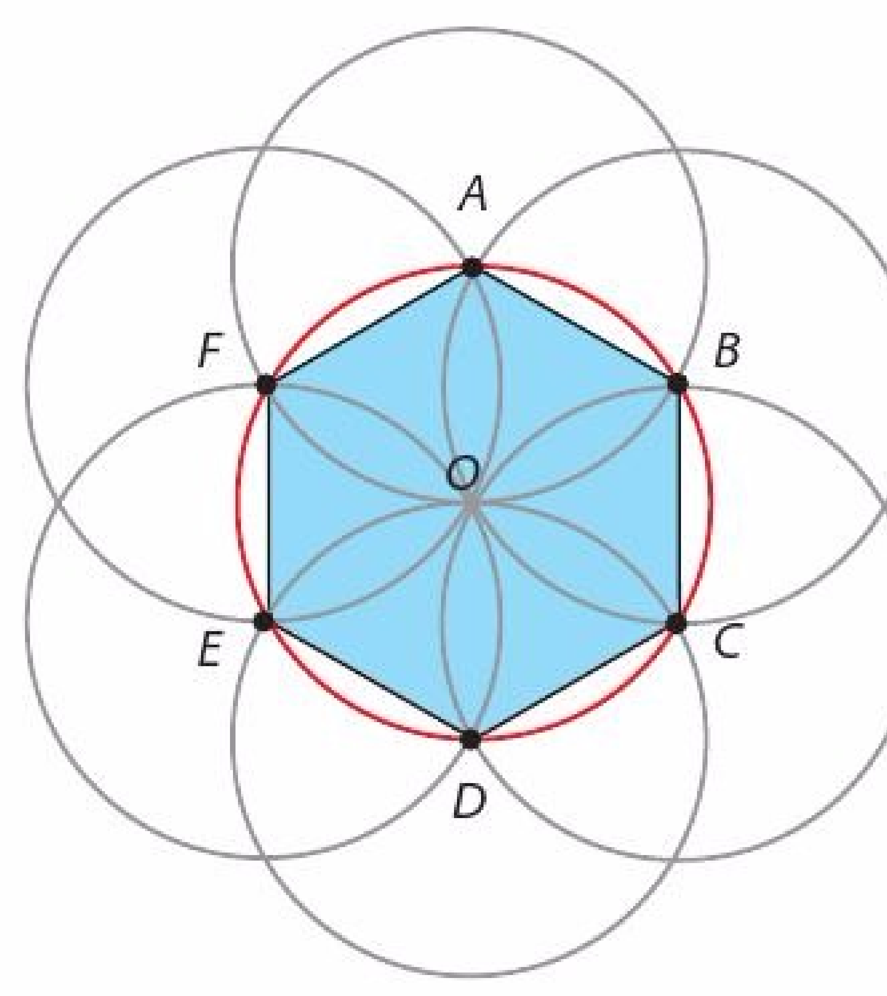
5º) Repita esse procedimento obtendo os pontos D, E e F.

6º) Certifique-se de que o segmento $\overline{FA}$ tem medida igual ao raio.

7º) Una os pontos de modo a obter os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.
O hexágono regular está inscrito na circunferência.

8º) Meça os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$ e $F\hat{O}A$.





ATIVIDADES

faça no seu caderno

29 Construa hexágonos regulares com lado medindo:
a) 4 cm;
b) 6 cm;
c) 8 cm.

30 Construa um hexágono regular com 10 cm de lado. Recorte-o. Obtenha um triângulo equilátero fazendo 3 dobras. P Veja resposta no Manual do Professor.

31 Inscreva um quadrado em uma circunferência de raio 5 cm. P Veja resposta no Manual do Professor.

32 Como você faria para inscrever um retângulo em uma circunferência de raio 5 cm?
P Veja resposta no Manual do Professor.

33 Trace as diagonais do retângulo que você construiu na atividade anterior. O que você observou? Elas se interceptam no centro da circunferência.

Elipse

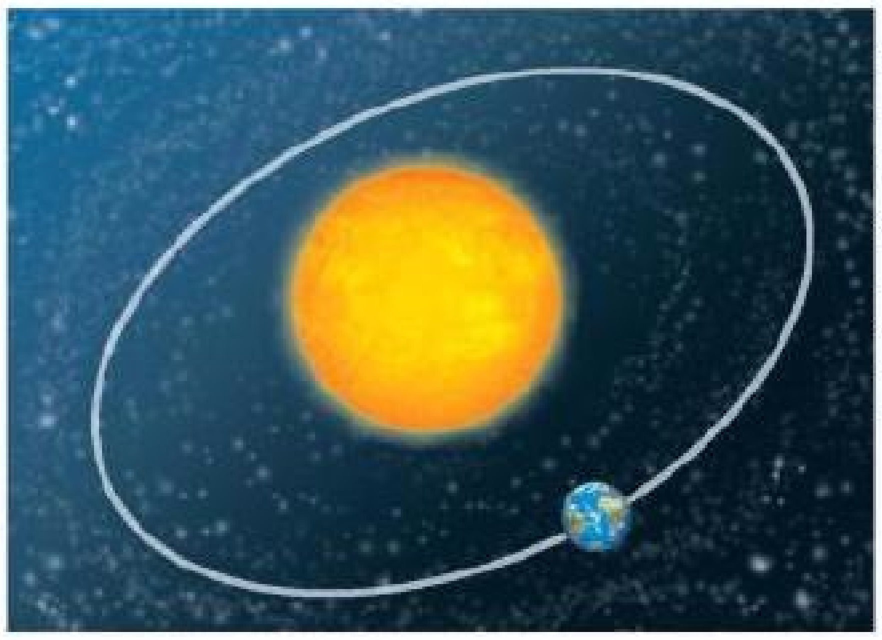
A elipse é uma curva que tem propriedades importantes.

EstudioMil/Arquivo da editora

Magone/Shutterstock/Glow Images

EstudioMil/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Vamos explorar dois métodos simples de desenhar elipses.

1º método: Construção da elipse com alfinetes e barbante

1) Prenda uma folha de papel em uma superfície que permita a fixação de dois alfinetes nos pontos *A* e *B* (que serão os focos da elipse) distantes entre si 8 cm (Figura 1).

2) Amarre às pontas dos alfinetes um barbante deixando-o com, aproximadamente, 12 cm de comprimento. Estique o barbante com o auxílio de um lápis (Figura 2).

3) Movimente o lápis ao longo do barbante mantendo-o esticado e faça a curva de um lado (Figura 3). Passe para o outro lado e complete a curva.

A figura obtida é uma elipse.

P Este método pode ser feito em sala com os alunos.

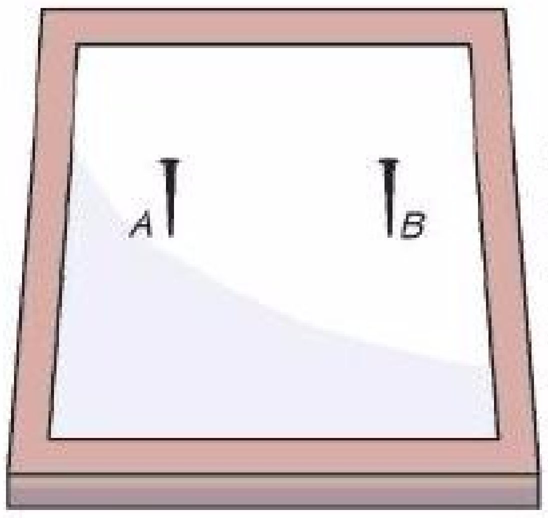


Figura 1

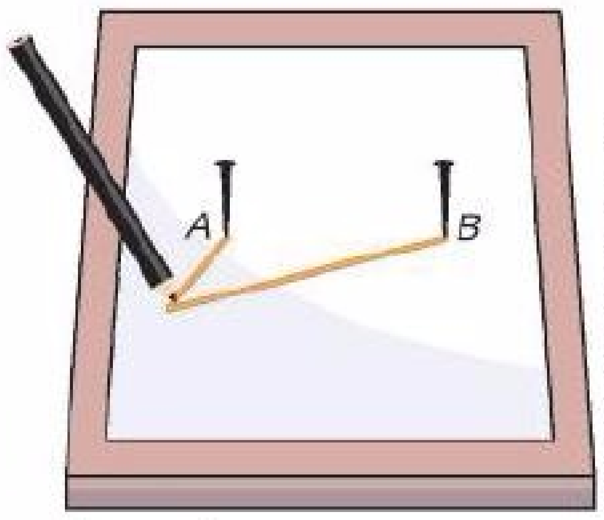


Figura 2

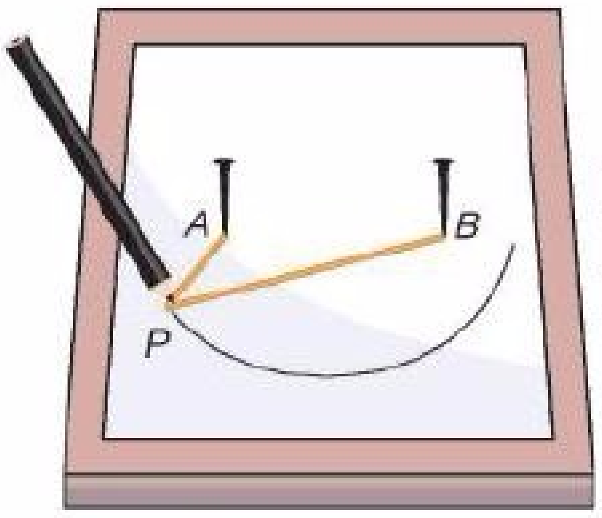


Figura 3

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Propriedade principal das elipses

Você deve ter observado que a distância entre os alfinetes e o tamanho do barbante é fixa. Esse fato chama a atenção para uma das principais propriedades da elipse.

Vamos conferir.

- Depois de traçada a elipse, marque um ponto P sobre ela.
- Meça a distância de P até A (1º foco) e depois de P até B (2º foco).
- Adicione as medidas obtidas.

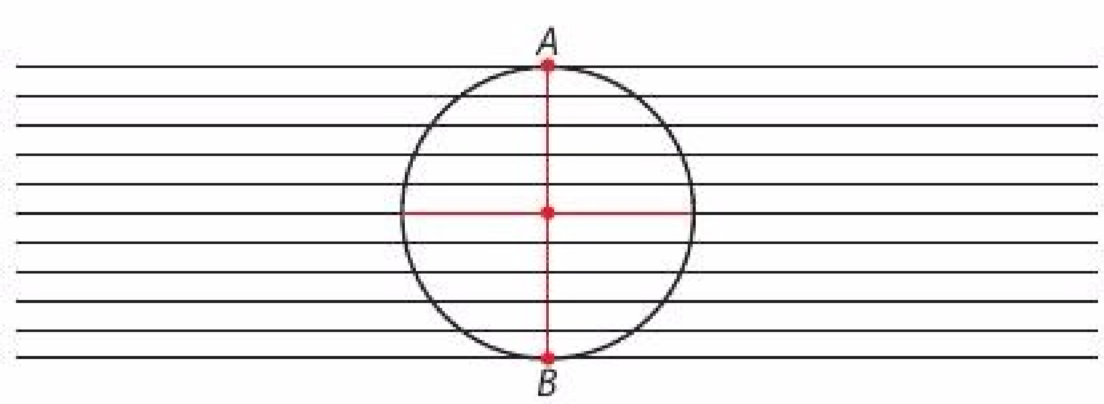
EstudioMil/Arquivo da editora

$PA + PB$ é constante. O valor dessa soma é o mesmo para qualquer ponto que se escolha sobre a curva.

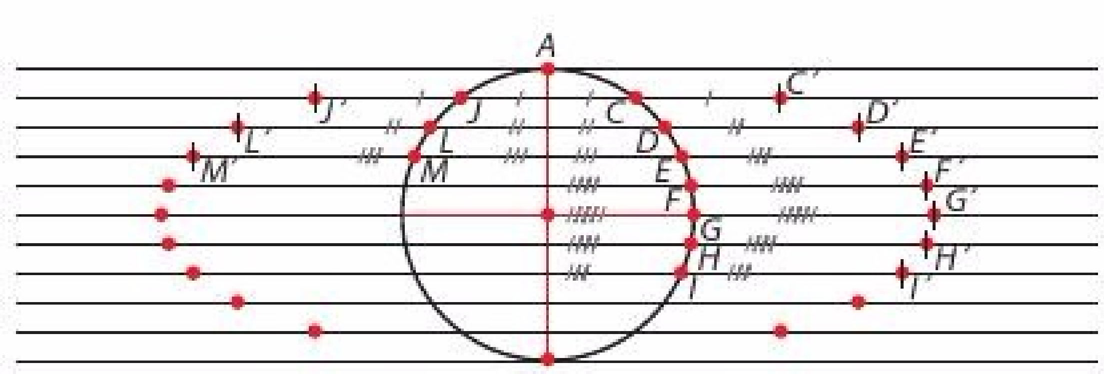
2º método: Construção da elipse por estiramento de uma circunferência

1) Trace uma circunferência com 4 cm de raio em uma folha de papel pautado, de modo que o centro esteja sobre uma linha da pauta. Trace o diâmetro $\overline{AB}$ perpendicular às linhas de pauta, como indica a figura.

As imagens não estão representadas em proporção.

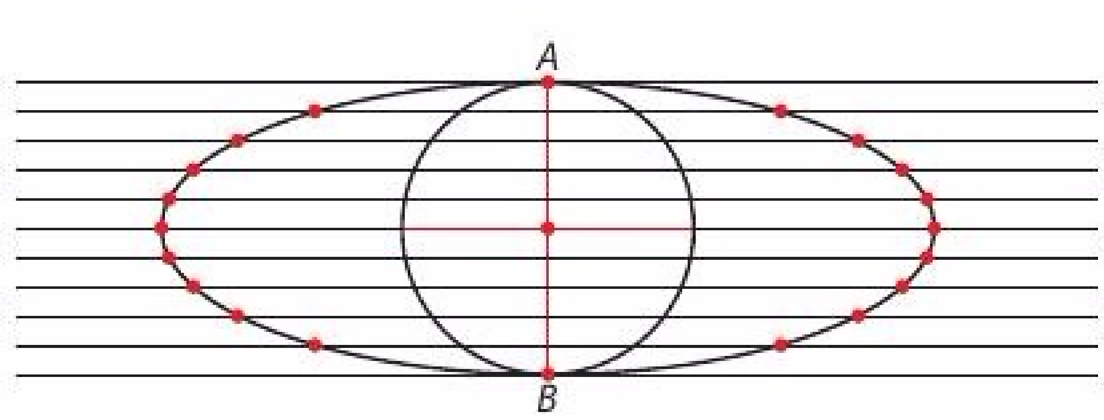


2) Determine pontos na intersecção da circunferência com as linhas de pauta. Em seguida meça a distância entre cada ponto e o diâmetro $\overline{AB}$ traçado. Depois meça o dobro da distância a partir de cada ponto e determine um novo ponto, conforme indicado na figura abaixo.



EstudioMil/Arquivo da editora

3) Unindo os pontos "estirados", obtém-se uma curva que se aproxima de uma elipse. Quanto mais linhas paralelas de pauta houver, mais perfeita ficará a elipse.



P Solicite aos alunos que construam uma elipse por estiramento a partir de uma circunferência de: 3 cm de raio ou 5 cm de raio.

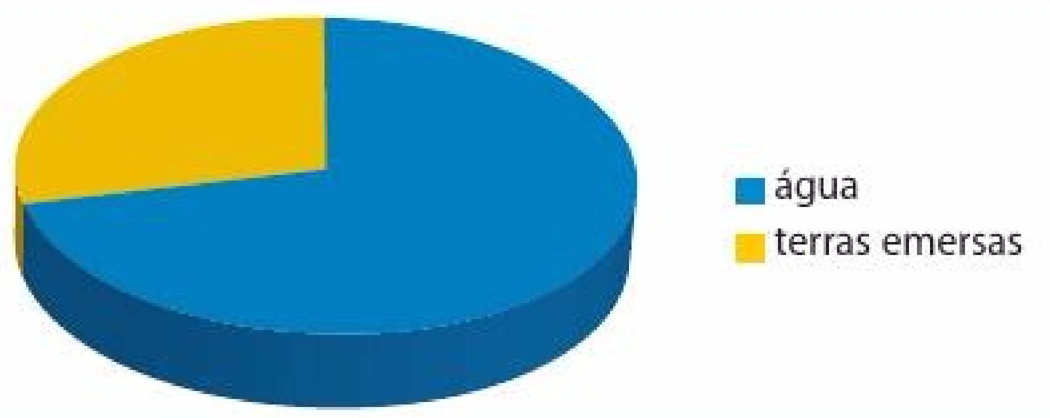
Círculos em gráficos estatísticos

As formas circulares também são utilizadas para representar dados estatísticos. Um dos gráficos mais utilizados nos meios de comunicação é o gráfico de setores, que faz uso das formas circulares e é popularmente conhecido como gráfico de *pizza*. Nos países de língua inglesa esse tipo de gráfico é chamado de gráfico de torta (*pie chart*).

O gráfico de setores é composto por um diagrama circular, no qual cada categoria é representada por uma "fatia" e as medidas dos ângulos formados por cada fatia no vértice são proporcionais às frequências representadas.

Esses gráficos são utilizados, em geral, para avaliar visualmente um conjunto de dados, como mostrado a seguir. O gráfico da esquerda representa a superfície do planeta Terra e o da direita, a água disponível no planeta.

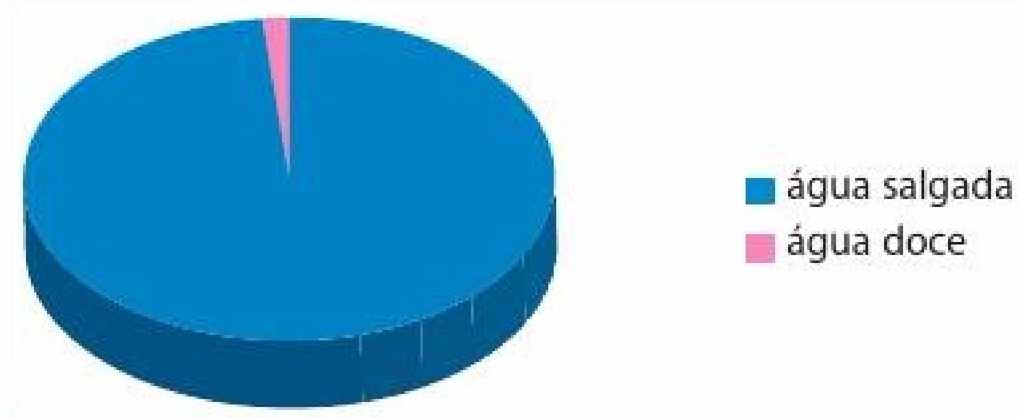
Quantidade de água e terras emersas



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta: Central Intelligence Agency. The World FactBook. Disponível em: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/xx.html>. Acesso em: 23 de mar. de 2015.

Quantidade de água doce e salgada



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta: Serviço geológico dos Estados Unidos (United States Geological Survey – USGS). Disponível em: <http://water.usgs.gov/edu/gallery/global-water-volume.html> Acesso em: 23 de mar. de 2015.

Não é preciso fazer cálculos para notar que aproximadamente $\frac{3}{4}$ da superfície do planeta Terra é coberta de água e que apenas uma pequena parte desta água é doce.

Gráficos de setores também são utilizados para comunicar rapidamente alguma informação relativa a um conjunto de dados. Veja, por exemplo, o caso de um professor que propôs aos alunos que representassem por meio de um gráfico de setores suas preferências sobre prática de esportes coletivos.

Esportes preferidos

Esporte	Alunos
Basquete	80
Futebol	180
Handebol	40
Vôlei	100

Dados fictícios.

O primeiro passo dos alunos é reunir os dados da pesquisa em uma tabela, como mostrado ao lado.

Em seguida, eles podem utilizar uma técnica para representar os dados da pesquisa num gráfico de setores que consiste em calcular a porcentagem de cada esporte e calcular o ângulo da "fatia" correspondente ao setor circular como mostrado na tabela abaixo.

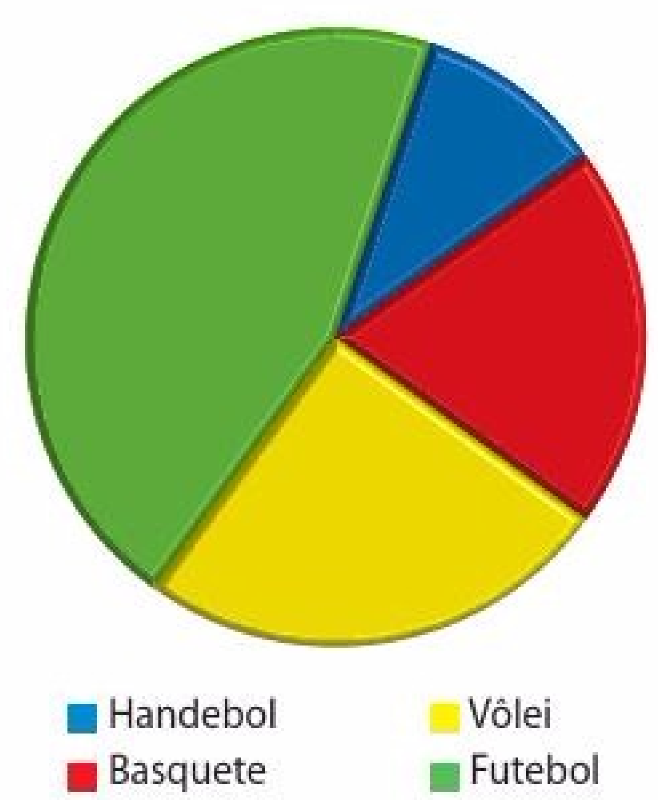
Porcentagem de esportes preferidos

Esporte	Porcentagem da fatia	Ângulo da fatia
Basquete	20%	72°
Futebol	45%	162°
Handebol	10%	36°
Vôlei	25%	90°

Dados fictícios.

Veja ao lado o gráfico de setores apresentados pelos alunos para o professor.

Esportes preferidos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados fictícios.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

b) O círculo completo corresponde a 100%.
100% − (25% + 30% + 10% + 20%) = 100% − 85% = 15%
15% de 600 = 90 livros

34 O gráfico de setores representa as retiradas de livros da biblioteca, por gênero, durante o mês de abril. No total 600 livros foram emprestados.

Baseado na interpretação do gráfico, responda:

a) Quantos livros de poesia foram emprestados?

b) Qual é a porcentagem de livros de quadrinhos retirados? Quantos?

c) Sem usar instrumentos, determine a medida do ângulo da fatia correspondente aos livros de ficção científica. A volta completa corresponde a um ângulo de 360°, 10% de 360° = 36°.

a) Basta calcular 20% de 600 (total de livros emprestados) $5 \Rightarrow 100x = 20 \cdot 600 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 12\,000 : 100 = 120$ livros de poesia.

Não escreva no livro.

Livros emprestados por gênero

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados fictícios.

35 Outro tipo de gráfico derivado do gráfico de setores bastante utilizado é o gráfico de rosca ou meia rosca. Jornais e revistas o utilizam para representar a composição dos parlamentos, uma vez que em muitos casos eles se assemelham à arquitetura do espaço em que os deputados votam as leis.

O parlamento de um determinado país é composto por deputados de cinco partidos, como representado no gráfico abaixo. b) O mais votado foi o partido A (verde) com 90 deputados. $\frac{x}{10} = \frac{90}{300} \Rightarrow 100 \cdot 90 = 300 \cdot x \Rightarrow 9\,000 = 300x \Rightarrow x = 9\,000 : 300 = 30$
O partido A elegeu 30% dos deputados.

Quantidade de deputados no parlamento por partido

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados fictícios.

a) Determine o total de deputados.
a) O total é 90 + 60 + 75 + 45 + 30 = 300 deputados.

b) Determine a porcentagem de deputados do partido mais votado.

c) Determine a porcentagem de deputados do partido C. c) O partido C tem 75 deputados, então: $\frac{75}{300} = \frac{x}{100} \Rightarrow$
$x = 7\,500 : 300 = 25$, que corresponde a 25% do parlamento.

d) Para uma lei ser aprovada é necessário 50% dos votos + 1 voto. Se os partidos C, D e E se aliarem, eles conseguirão aprovar leis?

e) Quais sãos as composições que permitem que 3 partidos aprovem leis?

e) Para aprovar uma lei a soma dos votos dos deputados deve ser maior que 50% isto é possível nas seguintes alianças: A + B somam 150 deputados (50%), portanto qualquer combinação com A e B consegue aprovar leis (A + B + C, A + B + D, A + B + E); B + C + D, B + D + E.

d) Não, somando todos (60 + 45 + + 30 = 135) obtém-se 135 deputados, que é menor que a metade (150) do total de deputados.

36 Veja no gráfico abaixo, de acordo com o IBGE, a população brasileira nas cinco regiões geográficas no ano de 2014.

Porcentagem da população brasileira por região geográfica

		População	Porcentagem da população	Porcentagem arredondada
REGIÕES	Sudeste	85.115.623	41,98%	42,00%
	Nordeste	56.186.190	27,71%	28,00%
	Norte	17.231.027	8,50%	8,50%
	Centro-Oeste	15.219.608	7,51%	7,50%
	Sul	29.016.114	14,31%	14,00%
	Brasil	202.768.562	100,00%	100,00%

Fonte de consulta: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/>. Acesso em: 23 mar. 2015.

Use o transferidor e construa um gráfico de setores para representar a distribuição da população brasileira por regiões.

Lembre-se de que 1% no gráfico equivale a um ângulo de 3,6°.

REVISE O QUE ESTUDOU

1 Escreva com suas palavras o que é o diâmetro e o raio de uma circunferência. Respostas pessoais.

2 Observe um globo terrestre, como os usados nas aulas de Geografia. Veja a linha do equador, os meridianos e os paralelos. Neste globo, quais entre essas linhas geográficas são circunferências?
Todas são circunferências.

Sergii Figurnyi/Shutterstock/Glow Images

3 Supondo que a Terra é uma esfera perfeita, quais entre as linhas geográficas têm o maior raio?
O equador e os meridianos têm raio máximo. O raio médio da Terra no equador é de, aproximadamente, 6 400 km.

4 Recorte, de revistas e jornais, logotipos que tenham motivos circulares ou em forma de elipse.
Resposta pessoal.

5 Escolha um logotipo que possa ser reproduzido com régua e compasso. Resposta pessoal.

6 É possível que um quadrado e uma circunferência tenham: P Veja figura no Manual do Professor.

a) apenas 2 pontos de intersecção? Sim

b) exatamente 8 pontos de intersecção? Sim

7 Trace dois diâmetros $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ perpendiculares em um círculo delimitado por uma circunferência. Esse círculo ficou dividido em 4 regiões iguais. Determine a medida do ângulo central $A\widehat{O}B$.
Se os diâmetros são perpendiculares e suas extremidades estão sobre a circunferência, o ângulo central é reto, e mede 90°.

8 Considere uma circunferência de centro (E, 5) e raio 3. Qual é a posição relativa dos pontos:
P Veja figura no Manual do Professor.

a) (E, 8) Fronteira

b) (B, 5) Fronteira

c) (A, 1) Externo

d) (F, 6) Interno

9 Construa quatro circunferências com as seguintes condições: P Veja figura no Manual do Professor.

C_1: centro (4, 2) e $r = 2$; C_2: centro (3, 6) e $r = 1$; C_3: centro (3, 6) e $r = 3$; C_4: centro (8, 6) e $r = 2$. Decida se são verdadeiras ou falsas as sentenças a seguir.

I) C_2 e C_3 são concêntricas. Verdadeira

II) C_3 e C_4 são tangentes. Verdadeira

III) C_1 e C_4 são secantes. Falsa

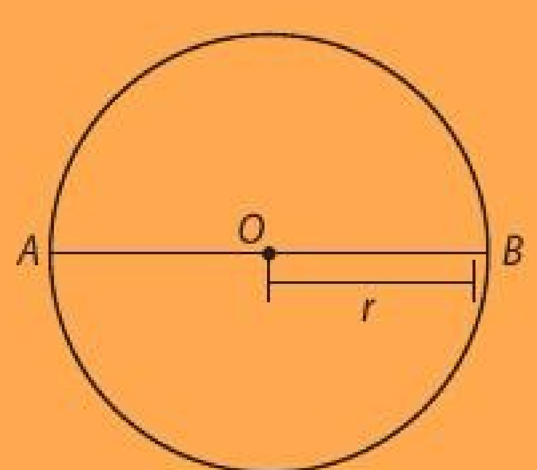
IV) C_2 e C_3 não se interceptam. Verdadeira

OVO MÁGICO: O TANGRAM OVAL

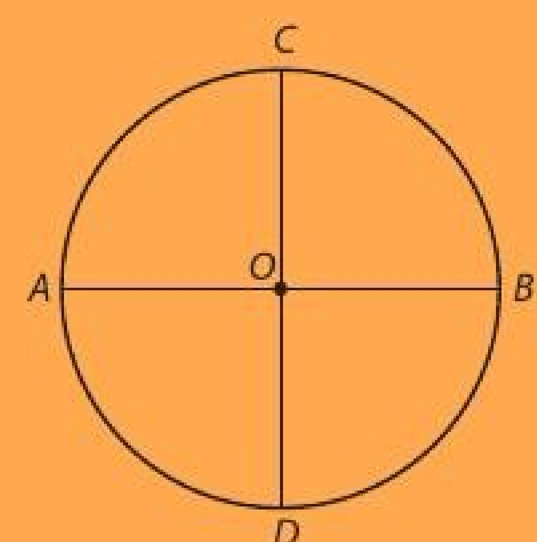
O ovo mágico é um quebra-cabeça semelhante ao popular Tangram, composto por 10 peças planas. A primeira referência ao jogo surgiu na Alemanha no ano de 1879.

A forma clássica que dá o nome ao jogo é a de um ovo. Curiosamente com as 10 peças do ovo é possível compor a silhueta de aves variadas.

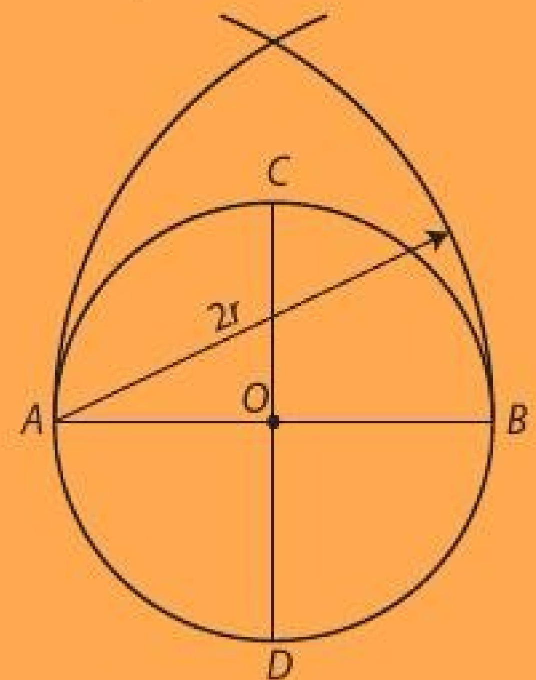
Veja os passos para a construção do Tangram oval com régua e compasso.



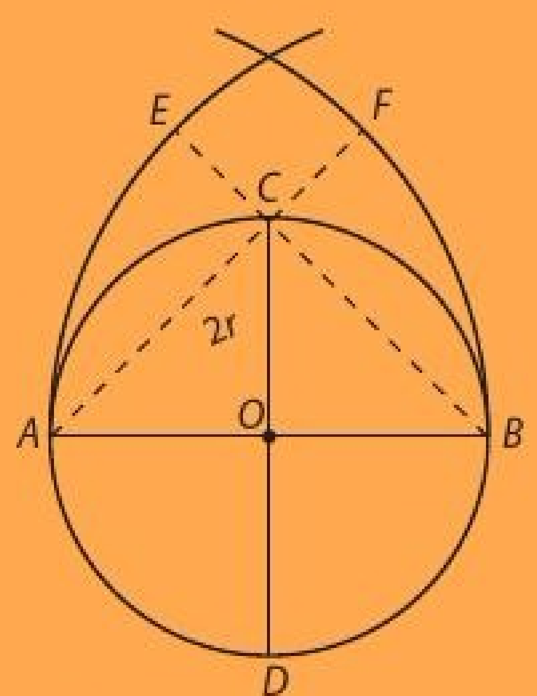
1) Trace uma circunferência de raio r qualquer.



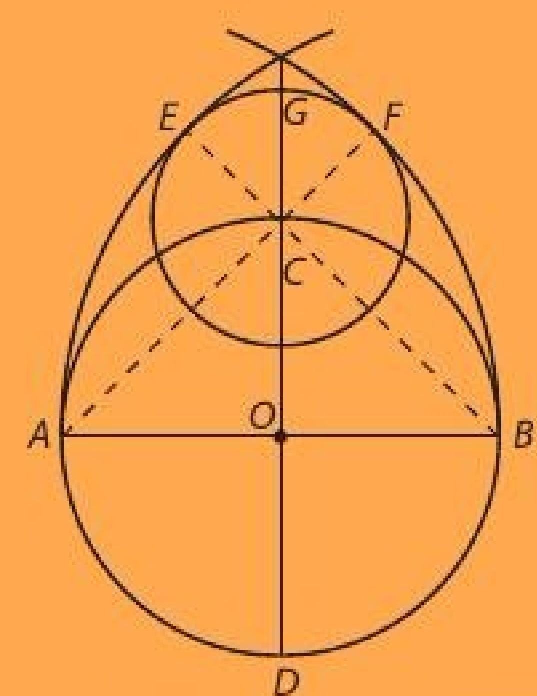
2) Divida a circunferência em quatro partes.



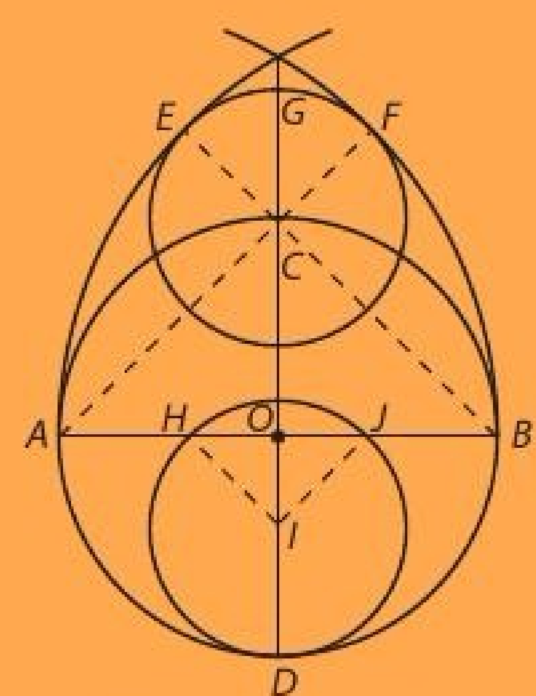
3) Com a ponta-seca do compasso em A, e abertura $\overline{AB}$, trace um arco de circunferência. Repita o procedimento com a ponta-seca em B.



4) Trace os dois segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{BE}$, passando por C.



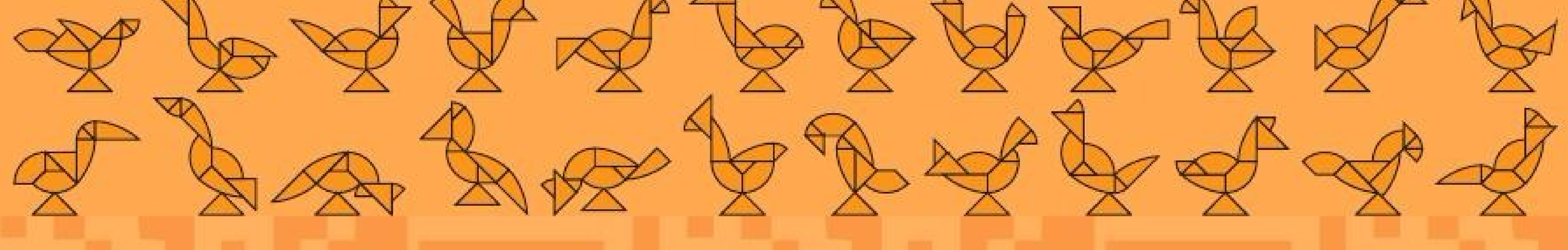
5) Desenhe a circunferência de centro em C e raio $\overline{CE}$.



6) Desenhe a circunferência com raio igual ao anterior, que passe por D e com centro em I.

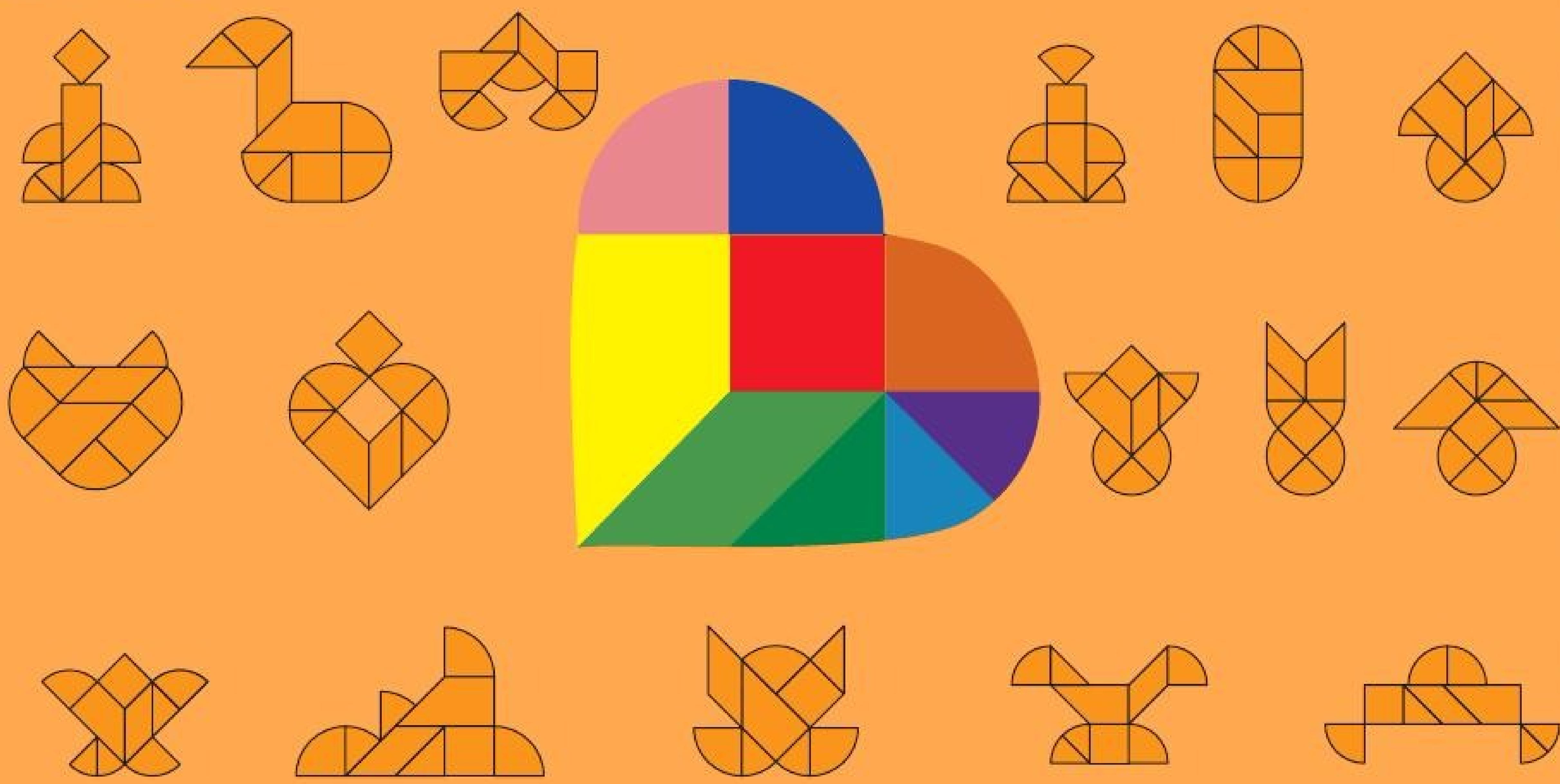
Ilustrações desta página: Contexto Digital e Artes Gráficas/Arquivo da editora

Veja algumas figuras que é possível formar com esse Tangram:



O TANGRAM "CORAÇÃO PARTIDO"

Esse é um tipo de Tangram curioso, de fácil construção, e seu molde pode ser feito a partir de uma malha quadriculada. Veja algumas figuras que podem ser compostas com as peças desse Tangram.



Ilustrações: Contexto Digital e Artes Gráficas/Arquivo da editora

A CIRCUNFERÊNCIA NOS OBJETOS DO COTIDIANO

As imagens não estão representadas em proporção.

Observe que as circunferências estão presentes na natureza e nos objetos do cotidiano.

Ian 2010/Shutterstock/Glow Images

Girassol

Maks Narodenko/Shutterstock/Glow Images

Laranjas

Tatiana Popova/Shutterstock/Glow Images

Compact Disc (CD)

1. Faça um levantamento sobre palavras que estão de alguma forma associadas à circunferência. Resposta pessoal.

2. Pesquise, recorte e monte um painel com 5 exemplos de círculos, circunferências e outras curvas presentes nas artes, no esporte, na natureza, em outras disciplinas e na tecnologia (use recortes de revistas, jornais ou desenhos). Resposta pessoal.

CAPÍTULO 12

GEOMETRIA 3-D: POLIEDROS E OUTROS SÓLIDOS

As imagens não estão representadas em proporção.

P O estudo das formas tridimensionais (3-D), que contempla identificação, análise, classificação, descrição, construção e problematização com base em suas propriedades geométricas, faz parte dos objetivos e critérios de avaliação dos PCN de Matemática. Além disso, o tema ganha importância cada vez maior, ante a suas aplicações em várias atividades profissionais, em especial na computação gráfica. Este Capítulo foca as atividades de visualização e construção. Espera-se que ao final do estudo dos objetos, conceitos e procedimentos deste Capítulo os alunos estejam aptos a produzir maquetes, modelos, móbiles e outras construções, discutindo propriedades e processos de construção.

As formas estão por todos os lados: na natureza, na arquitetura dos edifícios, nas imagens bidimensionais estampadas nos livros, nas revistas, nos *outdoors*, nos computadores e na TV, mas principalmente nos objetos que nos cercam.

Desde os primeiros anos escolares estudamos as formas planas, em especial as geométricas, seus elementos, suas propriedades e suas relações. Porém, no espaço em que vivemos tudo o que é material é tridimensional (3-D), começando por nosso próprio corpo e os objetos a nossa volta, que têm massa, volume e profundidade. Assim, podemos pegá-los com as mãos, senti-los e reconhecer algumas de suas propriedades físicas do tipo "leve" ou "pesado", "liso" ou "áspero", "com pontas" ou "sem pontas", "curvo" ou "plano", etc.

Pela importância das formas tridimensionais na nossa cultura e para a própria Matemática, neste último Capítulo do 8º ano vamos estudar as formas 3-D.

As formas 3-D nas artes, na natureza e no cotidiano

As formas 3-D que estudamos na escola – poliedros, prismas e pirâmides – podem ser apreciadas na natureza, na arquitetura e nas artes plásticas.

Natureza

Nos cristais e em algumas formações rochosas aparecem formas geométricas curiosas, limitadas por faces planas retangulares ou triangulares, como os prismas que serão aprofundados neste Capítulo.

Veja exemplos:

Pecold/Shutterstock/Glow Images

Formação rochosa na Irlanda

Serggod/Shutterstock/Glow Images

Cristal de ametista

Os favos de mel das colmeias também apresentam estruturas geométricas tridimensionais relacionadas com formas hexagonais.

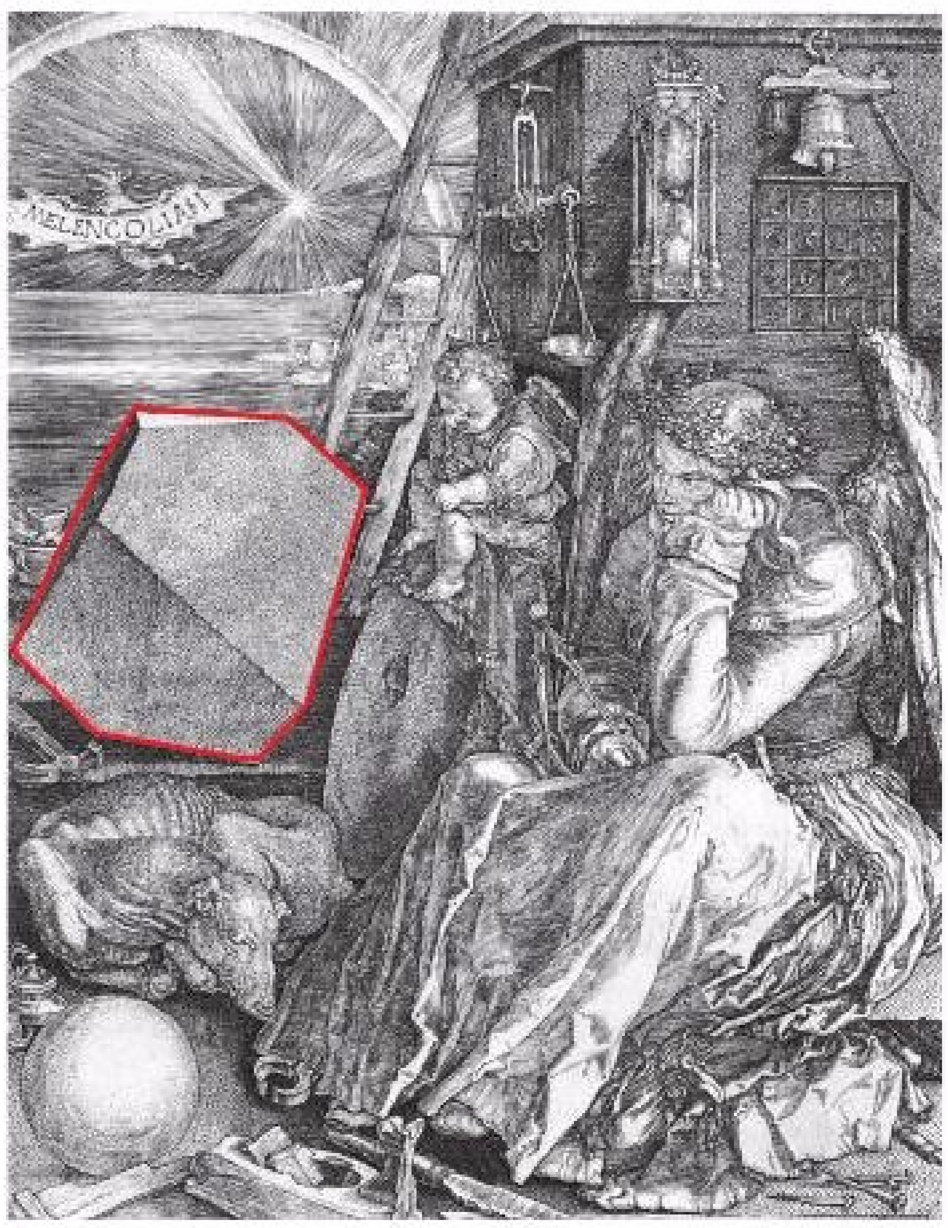

4Max/Shutterstock/Glow Images

Abelha em colmeia

Artes plásticas

Em algumas obras clássicas da arte universal é possível ver representações de sólidos geométricos, como na gravura *Melancolia I* (1514), do artista alemão Albrecht Dürer.

Esculturas e instalações artísticas são objetos tridimensionais.


Albrecht Dürer/Anhaltische Gemäldegalerie

Nesse detalhe da obra de Albrecht Dürer, vemos a representação de um cubo que foi truncado, ou seja, cortado na parte superior e inferior.


Alexandre Campbell/Folhapress

Os bichos (1960), de Lygia Clark.


Maria Lopes/D.A Press

Meteoro (1967), de Bruno Giorgi.


Patricia Stavis/Folhapress

Cubo vazado (1951), de Franz Weissmann.

As imagens não estão representadas em proporção.

A artista brasileira Lygia Clark produziu uma série de obras, com base em superfícies planas articuladas de metal, que ocupam o espaço nas três dimensões. Bruno Giorgi e Franz Weissmann são alguns dos representantes da escultura brasileira que trabalhavam formas geométricas em suas esculturas de mármore, ferro e outros materiais.

Arquitetura

As formas tridimensionais são a base de praticamente todas as construções. Os arquitetos apreciam explorar a Geometria nas construções modernas.


© Peter Horree/Alamy

Museu Guggenheim de Bilbao, Espanha.


Eastimages/Shutterstock/Glow Images

Centro Aquático Nacional de Pequim

Poliedros

P Não é objetivo neste livro dar um tratamento formal às figuras tridimensionais e aos poliedros em especial, e sim propiciar uma aproximação à ideia de poliedros, prismas e pirâmides por meio de atividades experimentais de construção e observação de sua presença no mundo que nos rodeia e em suas regularidades.

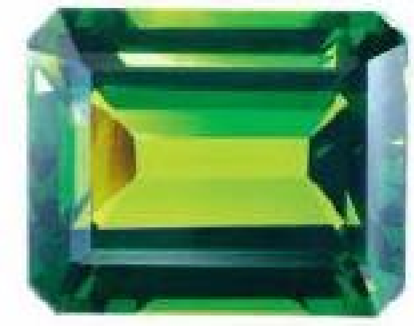
Poli vem do grego e significa 'muitos', e ***edro***, também do grego, significa 'base de apoio'.

Um poliedro é um **sólido geométrico** delimitado por faces planas poligonais.

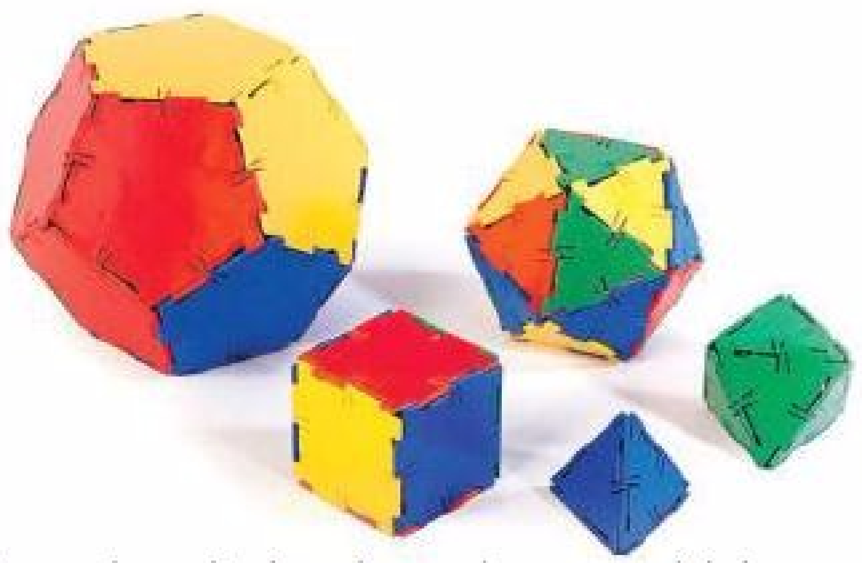
Podemos pensar num poliedro como uma forma compacta ou uma superfície oca delimitada por polígonos.


Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

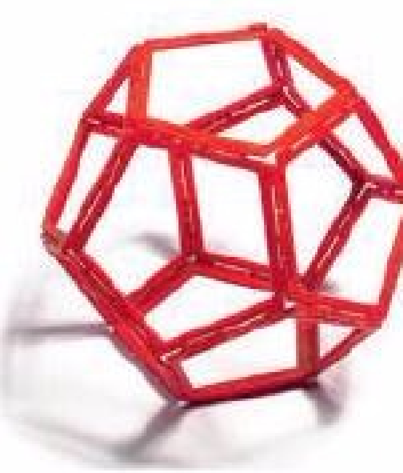
Poliedro esculpido em um pedaço de queijo.


Albrecht Dürer/Anhaltische Gemäldegalerie

Pedras preciosas são lapidadas, de modo que suas faces sejam planas e polidas, formando um poliedro reluzente e translúcido.


Reprodução/<http://www.polydron.co.uk/>

Jogo de poliedros formados por módulos (faces) poligonais de plástico.


Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Estrutura de um poliedro em que se destacam as arestas e os vértices.

As imagens não estão representadas em proporção.

Características geométricas de um poliedro:

- é delimitado por faces planas;
- as faces são polígonos;
- a intersecção de duas faces determina uma aresta, que é uma espécie de quina;
- a intersecção de duas arestas determina um vértice, que são os "bicos" do poliedro.

Como toda figura de três dimensões que é fechada e delimitada por faces planas pode ser considerada um poliedro, prismas e pirâmides devem ser considerados casos particulares de poliedros, mas neste Capítulo serão estudados separadamente.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

1 Qual dos objetos tem forma de poliedro? b, c e d

a)


Marisa Martin/Arquivo da editora

c)

design56/Shutterstock/Glow Images

b)


Kolonko/Shutterstock/Glow Images

d)

Fabio Colombini/Acervo do fotógrafo

2 Observe um cubo e determine a quantidade de:

a) faces; 6

b) arestas; 12

c) vértices. 8

3 Uma pirâmide, como a de Quéops, no Egito, é um poliedro.

a) Determine quantas são as faces, as arestas e os vértices. 5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

b) Descreva como são as faces. 4 triangulares e 1 quadrada

4 Explore uma caixa, como as de sapatos, ou uma embalagem de creme dental.

a) Quantas são as faces, as arestas e os vértices? 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

b) Descreva como são as faces. Geralmente são 2 quadradas e 4 retangulares.

Prisma

Prismas são formas tridimensionais muito utilizadas na confecção de caixas e embalagens.

P Os prismas são casos particulares de poliedros, porém, para tornar a comunicação mais ágil, evitaremos um formalismo desnecessário.

bagwold/Shutterstock/Glow Images

Fedorov Oleksiy/Shutterstock/Glow Images

elisekurenbina/Shutterstock/Glow Images

Embalagens com a forma de prismas

Os prismas podem ser classificados em dois tipos: **oblíquos** e **retos**.

Nas embalagens acima temos exemplos de prismas retos, que são mais comuns, e na imagem abaixo, temos um exemplo de prismas oblíquos.

Media Minds/Alamy/Other Images

As torres gêmeas Kio, em Madri, Espanha, são exemplos de prismas oblíquos presentes na arquitetura.

As imagens não estão representadas em proporção.

Nos prismas retos as faces laterais são perpendiculares à base. Em um prisma oblíquo algumas faces laterais não são perpendiculares ao plano da base.

Observe que, no prisma oblíquo, algumas faces laterais são paralelogramos, e no prisma reto, todas são retângulos.

Neste capítulo focaremos nosso estudo no prisma reto.

As características geométricas de um prisma reto são:

- a base é um polígono;
- a base superior e a base inferior são iguais;
- se a base é um polígono regular, dizemos que o prisma é regular;
- as faces laterais são retangulares.

Prisma reto

Prisma oblíquo

Fotos: Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Paralelepípedo

As imagens não estão representadas em proporção.

Entre os prismas, o mais comum e utilizado na indústria de embalagens é o **paralelepípedo,** também conhecido como bloco retangular.

Thomas M Perkins/Shutterstock/Glow Images

Embalagens com a forma de paralelepípedos

Igor Plotnikov/Shutterstock/Glow Images

Contêineres na forma de paralelepípedos

Pirâmides

P As pirâmides são casos particulares de poliedros, porém, para tornar a comunicação mais ágil, evitaremos um formalismo desnecessário.

Pirâmides são formas tridimensionais bastante conhecidas e apreciadas por arquitetos. Podem ser encontradas em construções antigas no Egito, na América Central (México e Guatemala) e no Oriente. Essa forma continua atraindo o gosto de arquitetos e engenheiros no mundo contemporâneo.

Características geométricas de uma pirâmide:

- a base é um polígono;
- as faces laterais são triangulares.

cescassawin/Shutterstock/Glow Images

Pirâmides no Egito

sculpies/Shutterstock/Glow Images

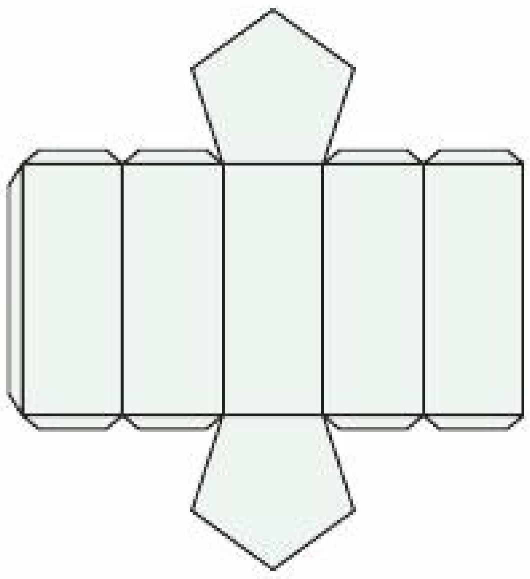
Museu do Louvre, Paris.

Construção de figuras tridimensionais

Há várias maneiras de construir sólidos geométricos, como poliedros, prismas e pirâmides. Nessas construções podemos usar diversos tipos de material.

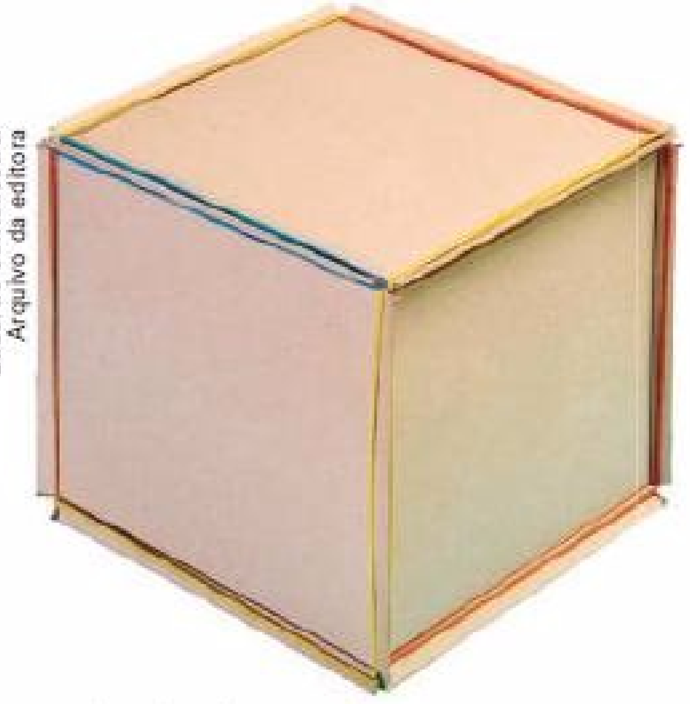
A **planificação**, que é a maneira mais conhecida de construir sólidos geométricos, é feita, em geral, com papel ou cartolina, tesoura, cola e um pouco de paciência, pois o trabalho é delicado.

Outro recurso é a construção de **módulos** de cartolina com abas, que permitem ligar uma face a outra com elásticos, formando uma aresta. Mas também é possível construir **estruturas poliédricas** usando varetas, canudos e outros materiais.



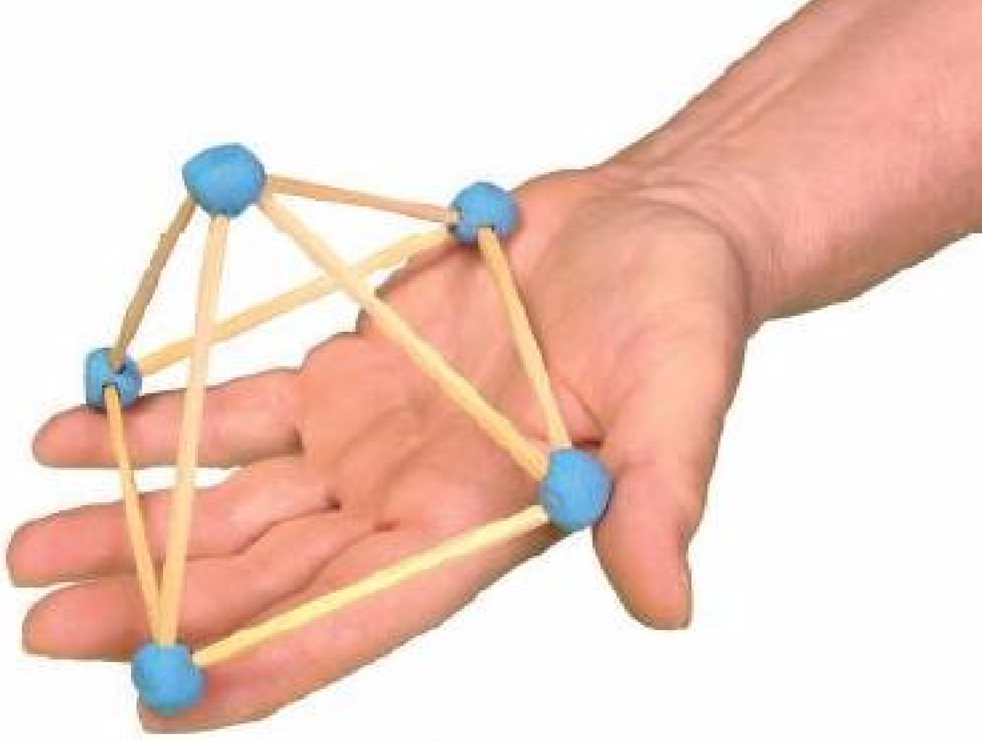
Banco de imagens/Arquivo da editora

Planificação de um prisma de base pentagonal



Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Poliedro formado com os módulos ligados com elásticos.



Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Estrutura de uma pirâmide feita com palitos e massinha.

ATIVIDADES faça no seu caderno

P Veja comentário no Manual do Professor.

5 Um prisma cuja base é um pentágono tem:

a) quantos vértices? 10 vértices

b) quantas arestas? 15 arestas

6 Uma pirâmide cuja base é um polígono de 8 lados tem: P Veja comentário no Manual do Professor.

a) quantos vértices? 9 vértices

b) quantas arestas? 16 arestas

7 Imagine uma pirâmide cujo polígono da base é um icoságono, ou seja, tem 20 lados. Quantos vértices tem essa pirâmide? $20 + 1 = 21$ vértices

8 Se uma pirâmide tem 11 vértices, quantos lados tem a base dessa pirâmide? 10 lados P Veja comentário no Manual do Professor.

9 Daniela vai construir uma pirâmide de base quadrada usando palitos de 8 cm e bolinhas de isopor para fazer as junções das arestas. P Veja comentário no Manual do Professor.

a) Quantos palitos ela vai usar? 8 palitos

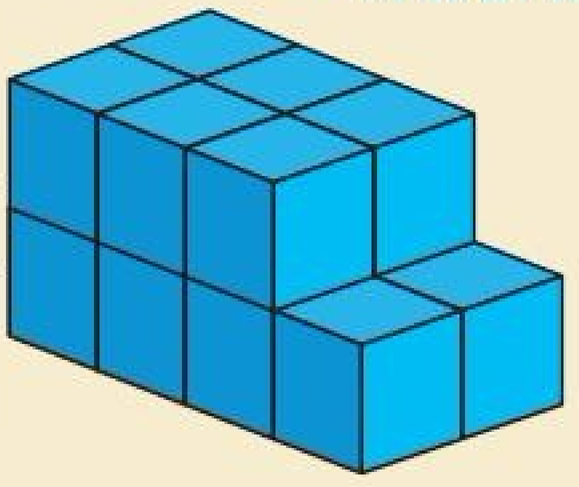
b) Quantas bolinhas de isopor? 5 bolinhas de isopor

10 Construa uma pirâmide a partir de uma planificação cuja base seja um hexágono de lado 8 cm e altura 10 cm.

11 A pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide, foi construída para ser a tumba do faraó de mesmo nome. Durante muitos séculos foi a maior construção já feita pelo homem, com seus 146,60 m de altura e uma base quadrada de 230 m de lado. Construa a maquete de uma pirâmide nas mesmas proporções da pirâmide de Quéops. P Veja comentário no Manual do Professor.

12 ***Desafio olímpico***

Leonardo juntou 14 cubos e fez uma construção que aparenta um veículo. Depois, ele resolveu planificar a figura construindo uma caixa em que seu "veículo" cabe direitinho, sem deixar espaços. Use uma folha de papel quadriculado e esboce a planificação deste sólido. P Veja comentário no Manual do Professor.

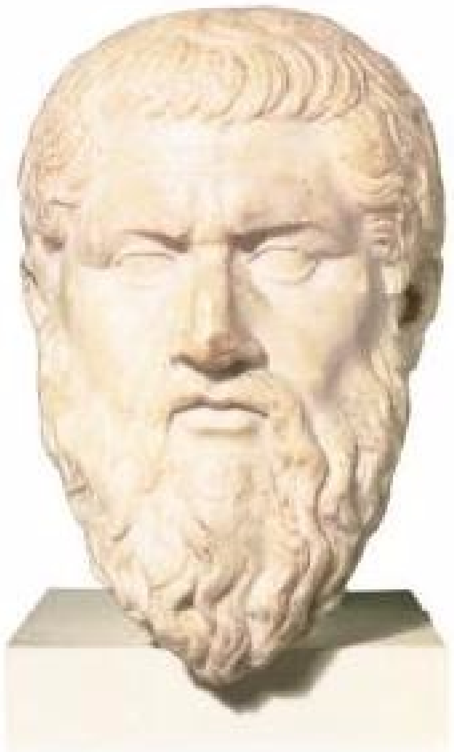


Banco de imagens/Arquivo da editora

Poliedros de Platão

Os matemáticos sempre se interessaram por poliedros que apresentam alguma regularidade, como aqueles em que as faces são todas do mesmo tipo.

De todos esses poliedros, destacam-se aqueles cujas faces são todas iguais e formadas por polígonos regulares. Esses **sólidos regulares** passaram a ser conhecidos como **poliedros de Platão** ou **sólidos platônicos** e receberam esse nome em homenagem ao grande filósofo grego que os estudou há cerca de 2 400 anos, provando que só existiam cinco poliedros com essas características.

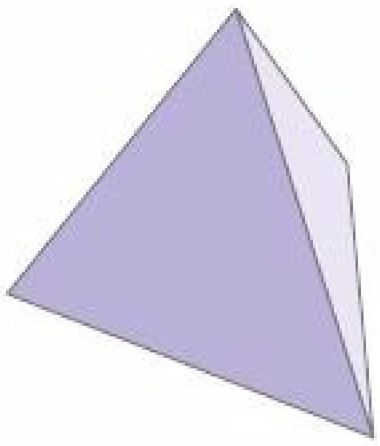


Reprodução/Museu Fitzwilliam, Universidade de Cambridge, Cambridge, Inglaterra.

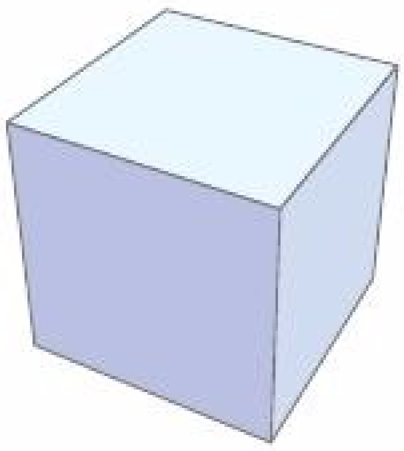
Platão (século IV a.C.), filósofo grego que viveu em Atenas.

Muitos matemáticos e outros cientistas se interessaram pelos poliedros de Platão, em especial Johannes Kepler, um dos principais astrônomos da história, que usou os poliedros para explicar a posição dos planetas no Sistema Solar.

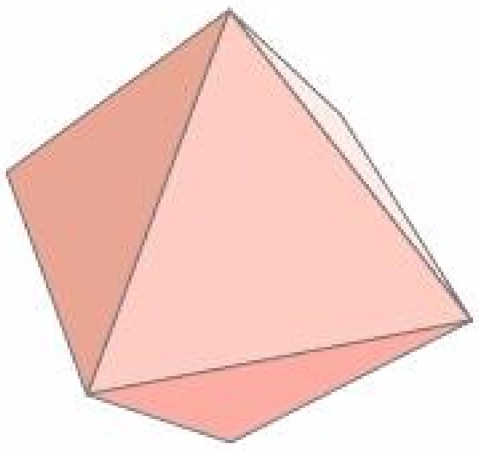
Existem apenas cinco poliedros de Platão:



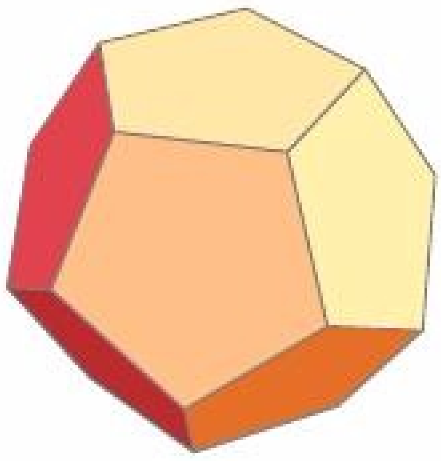
Tetraedro



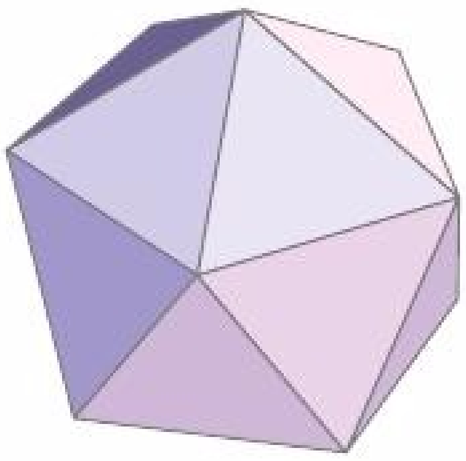
Cubo



Octaedro

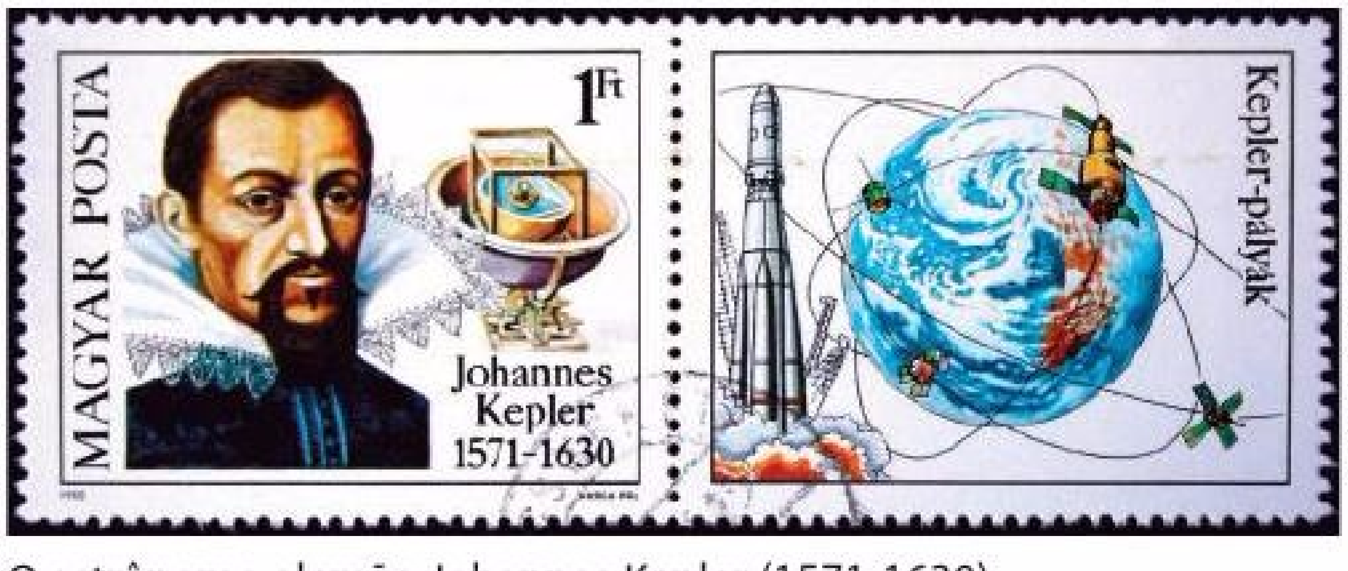


Dodecaedro



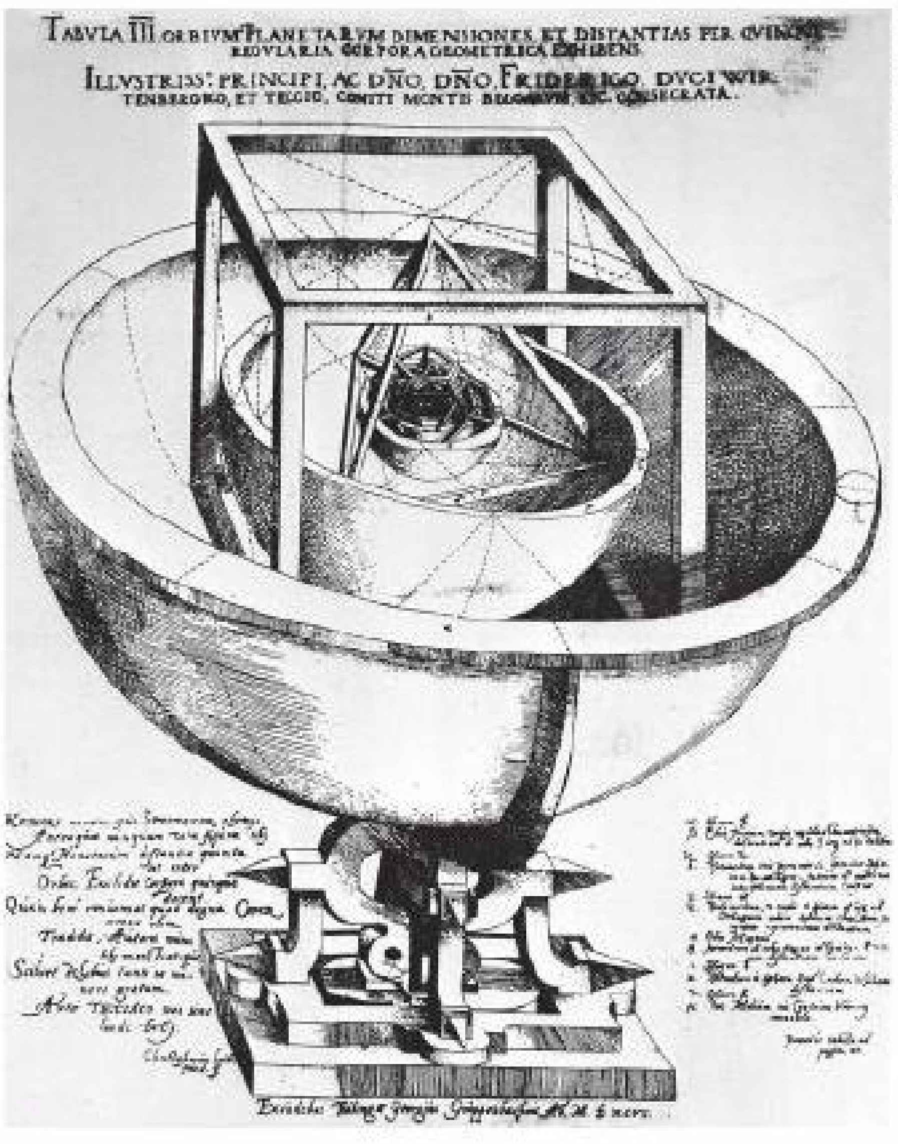
Icosaedro

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora



IgorGolovniov/Shutterstock/Glow Images

O astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) homenageado em um selo histórico.



Corbis/Latinstock

Sistema dos mundos, modelo formado com poliedros regulares que Kepler usou para tentar explicar distâncias entre os planetas.

Veja abaixo as características geométricas dos poliedros de Platão:

Poliedro	Faces	Formato das faces
tetraedro	4	triângulo equilátero
cubo	6	quadrado
octaedro	8	triângulo equilátero
dodecaedro	12	pentágono regular
icosaedro	20	triângulo equilátero

P Há muitas propriedades importantes dos poliedros de Platão, como os planos e eixos de simetria, ou relações de inscrição (duais) entre dois poliedros, cujo tratamento é mais apropriado no Ensino Médio.

<www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>.

Acesso em: 19 nov. 2014.

Há vários *sites* que permitem desenhar e manipular representações de poliedros. Na página acima você pode ver as produções do Laboratório de Geometria da Universidade Federal Fluminense e conhecer trabalhos e explorações com figuras tridimensionais feitas com variados materiais.
Veja mais sobre poliedros em:

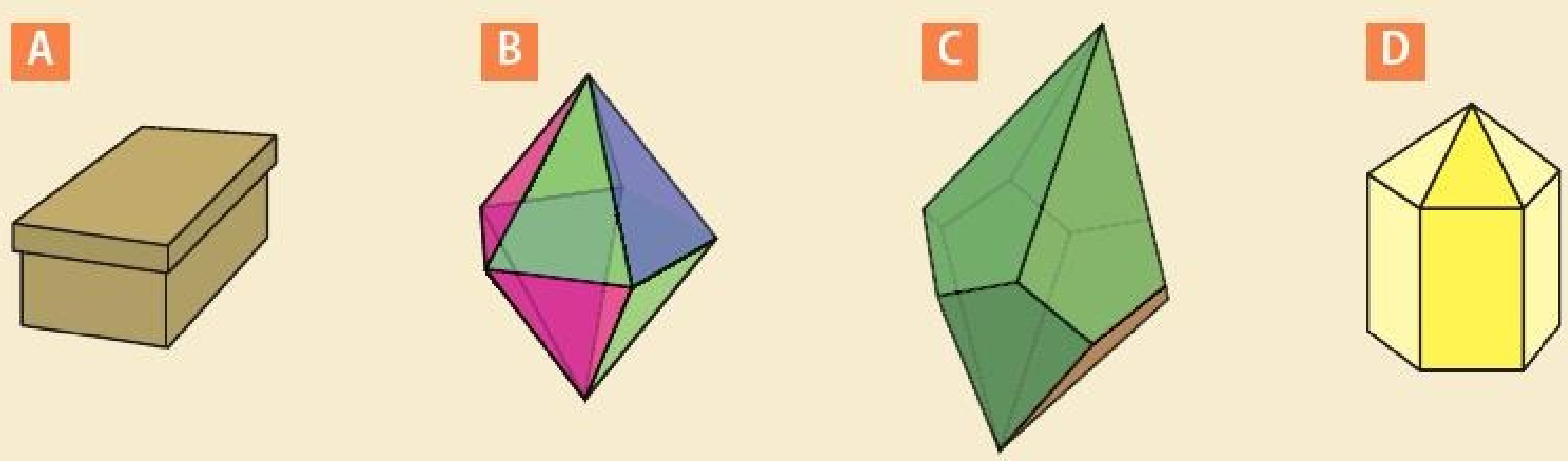
<www.atractor.pt/mat/fr-in.htm>.

Acesso em: 19 nov. 2014.

ATIVIDADES

faça no seu caderno

13 Considere as formas tridimensionais a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Em quais formas as faces são do mesmo tipo de polígono? A, B e C.

b) Em quais as faces são todas iguais? B e C.

c) Descreva as faces de cada poliedro. P Veja resposta no Manual do Professor.

14 Quantos vértices tem o:

a) tetraedro? 4 vértices   b) cubo? 8 vértices   c) octaedro? 6 vértices

15 Quantas arestas tem o:

a) tetraedro? 6 arestas   b) cubo? 12 arestas   c) octaedro? 12 arestas

16 Observe os poliedros de Platão e responda quantas arestas saem do mesmo vértice no:

a) tetraedro; 3 arestas

b) cubo; 3 arestas

c) octaedro; 4 arestas

d) dodecaedro; 3 arestas

e) icosaedro. 5 arestas

P Nesta e na próxima atividade propusemos a contagem apenas do tetraedro, do cubo e do octaedro, pois são sólidos mais simples de serem visualizados e fáceis de serem construídos.

17 Um matemático observou que, em um poliedro, a soma do número de faces com o número de vértices é igual ao número de arestas mais 2. Confira a validade dessa proposição para o:

a) tetraedro; Verdadeira: $4 + 4 = 6 + 2$.

b) cubo; Verdadeira: $6 + 8 = 12 + 2$.

c) octaedro. Verdadeira: $8 + 6 = 12 + 2$.

P Nesta atividade os alunos verificam experimentalmente a relação de Euler, $V + F = A + 2$.

Construção dos poliedros de Platão

Há várias maneiras de construir poliedros, dependendo do material que se tem disponível. Já conhecemos as planificações, mas, como vimos, também podemos construir estruturas poliédricas usando varetas, canudos e outros materiais.

Tetraedro

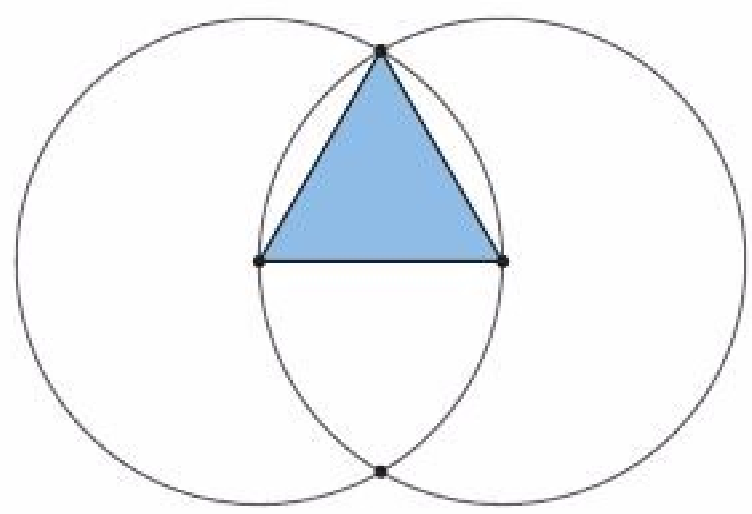

MilanB/Shutterstock/Glow Images

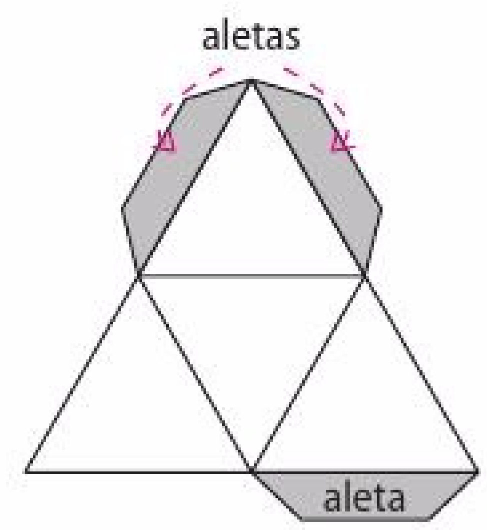
Dado com formato de tetraedro

O tetraedro é um poliedro em forma de pirâmide com base triangular, em que todas suas faces são triângulos equiláteros.

A base para sua construção são os triângulos equiláteros.

Veja abaixo uma maneira de construir a planificação deste poliedro:


Construção do triângulo com régua e compasso

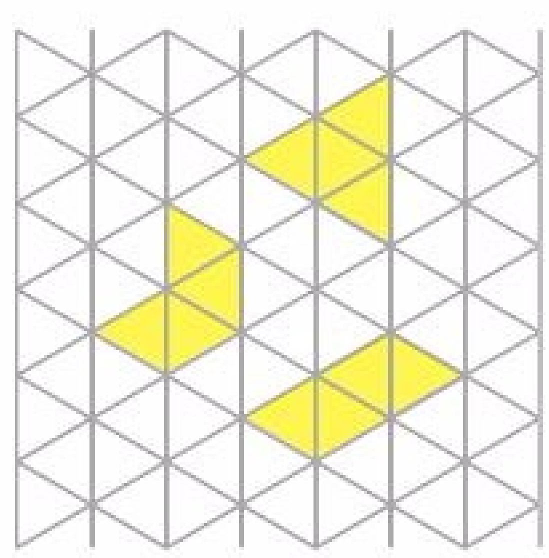


Planificação do tetraedro com aletas

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe que, para garantir firmeza, costuma-se agregar aletas aos 4 triângulos equiláteros, que são pequenas abas que servem para colar uma face na outra.

Outra maneira de construir a planificação de um tetraedro regular e de outros poliedros de Platão cujas bases são triângulos equiláteros é utilizar o papel isométrico, que é uma malha formada por triângulos equiláteros.


Três planificações do tetraedro regular no papel isométrico

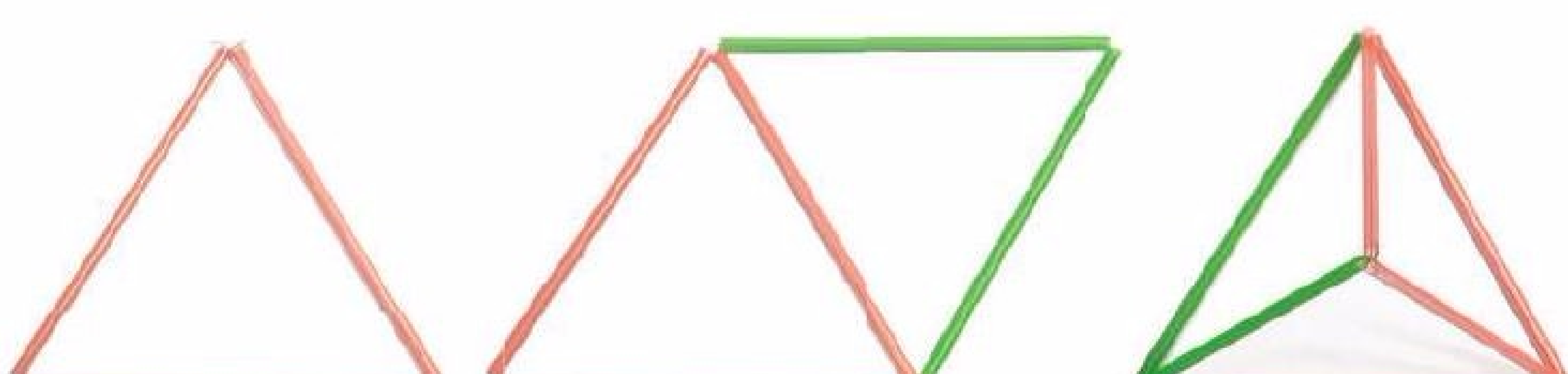

Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Tetraedro formado por módulos encaixáveis.

P É possível usar outros materiais, como varetas de pipa (papagaio) e bolas de isopor ou um elástico cirúrgico do tipo tubo, também conhecido por tripa de mico, para as junções. Os alunos devem discutir quantas são as arestas e quantos são os vértices para preparar o material.

Alguns jogos formados por módulos permitem montar poliedros como o tetraedro, mostrado ao lado.

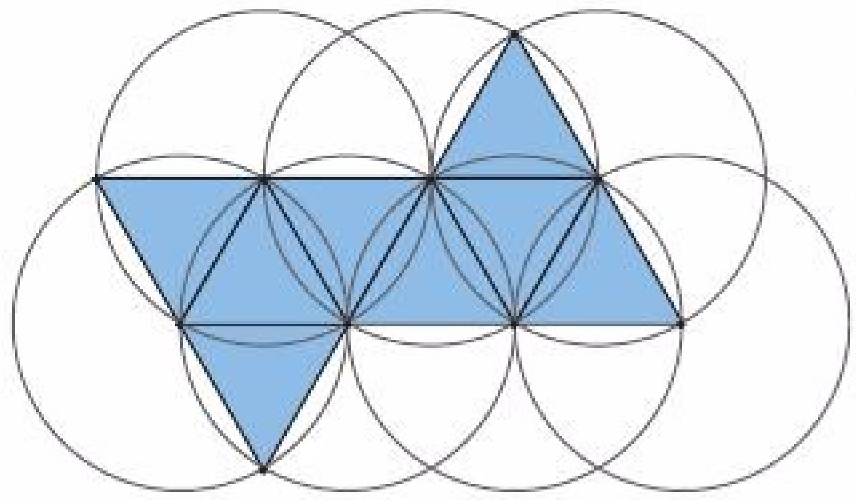
A estrutura ou "esqueleto" do tetraedro pode ser construída com materiais como canudos e barbante. O esquema abaixo mostra como construir um tetraedro: sabendo que tem 6 arestas, basta recortar 6 canudos de mesmo tamanho e usar um barbante, por dentro dos canudos, para dar estabilidade.


Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Estrutura de um tetraedro feito com canudos e barbante

Octaedro

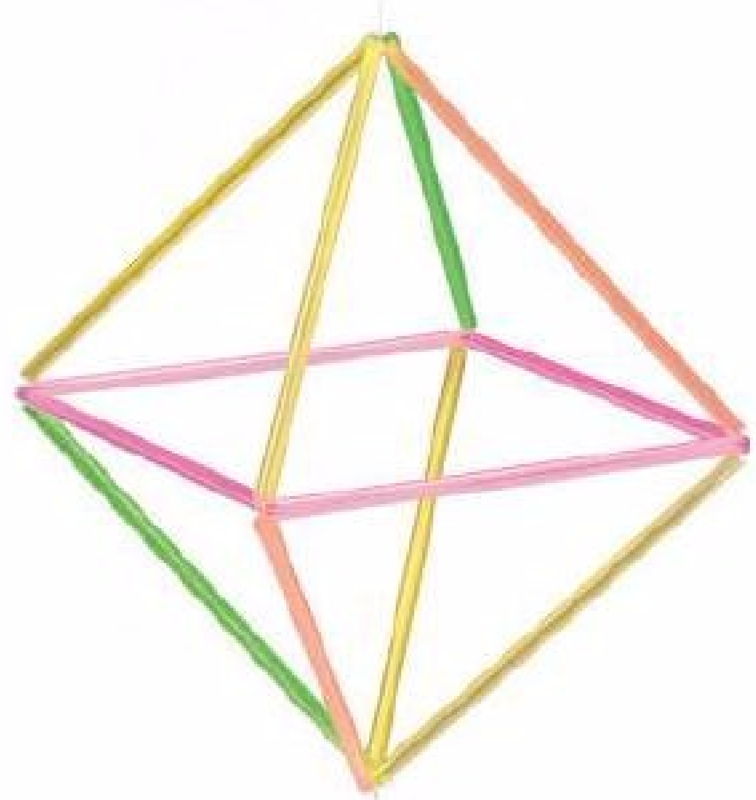
O octaedro regular também é um poliedro cujas faces são triangulares e sua planificação é feita pela construção, com régua e compasso, de 8 triângulos equiláteros.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Processo de construção das 8 faces planificadas do octaedro

Também é possível fazer a estrutura do octaedro com canudos.

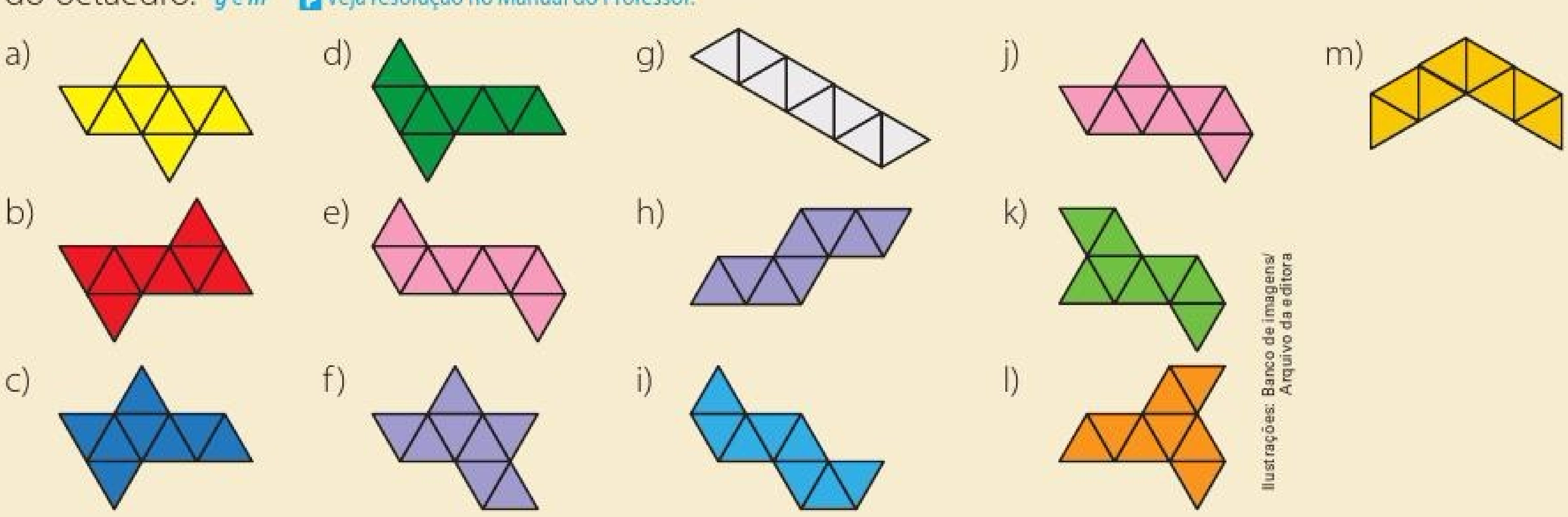


Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Estrutura do octaedro feita com canudos e barbante.

ATIVIDADES — faça no seu caderno

18 Abaixo temos 13 figuras formadas com 8 triângulos equiláteros, ligados lado a lado, e 11 delas são as planificações de um octaedro regular. Descubra quais são as duas figuras que não são planificações do octaedro. *gem* P Veja resolução no Manual do Professor.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

19 Marta vai construir um octaedro passando um barbante por dentro de canudos de 8 cm de comprimento.

a) De quantos canudos ela vai precisar? O número de canudos é o número de arestas do octaedro; portanto, 12 canudos.

b) Qual é o comprimento mínimo de barbante de que ela precisa para atravessar os canudos? $12 \cdot 8$ cm = 96 cm. Ela vai precisar de mais do que 1 m, porque, para garantir firmeza, alguns canudos são atravessados mais de uma vez pelos barbantes.

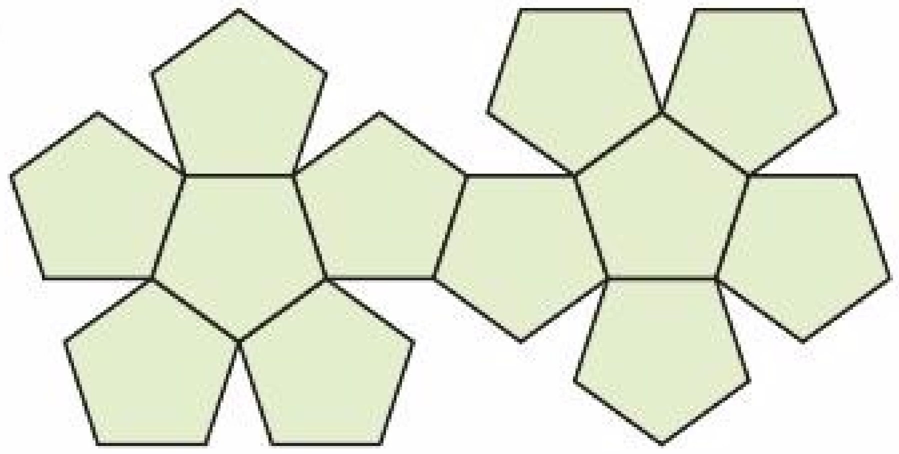
As imagens não estão representadas em proporção.

Neste *site*, é possível explorar um dodecaedro de várias maneiras, visualizando, girando, planificando, cortando, etc. <www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/dodecaedro-br.html>. Acesso em: 19 mar. 2015.

Dodecaedro

O dodecaedro regular é um poliedro limitado por 12 faces pentagonais regulares.

Há várias maneiras de construir um dodecaedro regular por meio de planificação. Eis ao lado um exemplo de molde.

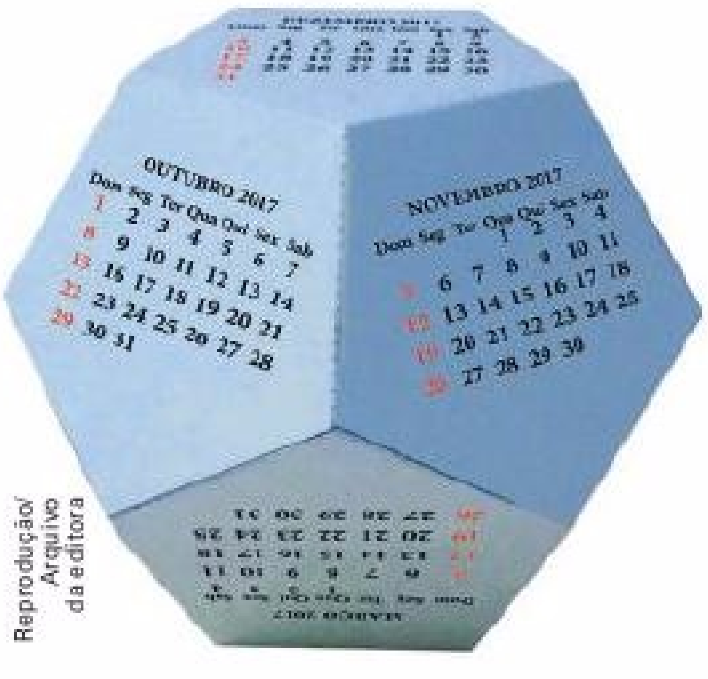


Banco de imagens/Arquivo da editora

Molde para a planificação de um dodecaedro

M. C. Escher/The M.C. Escher Foundation

Répteis (1943), obra de M. C. Escher, na qual aparece um dodecaedro.



Reprodução/Arquivo da editora

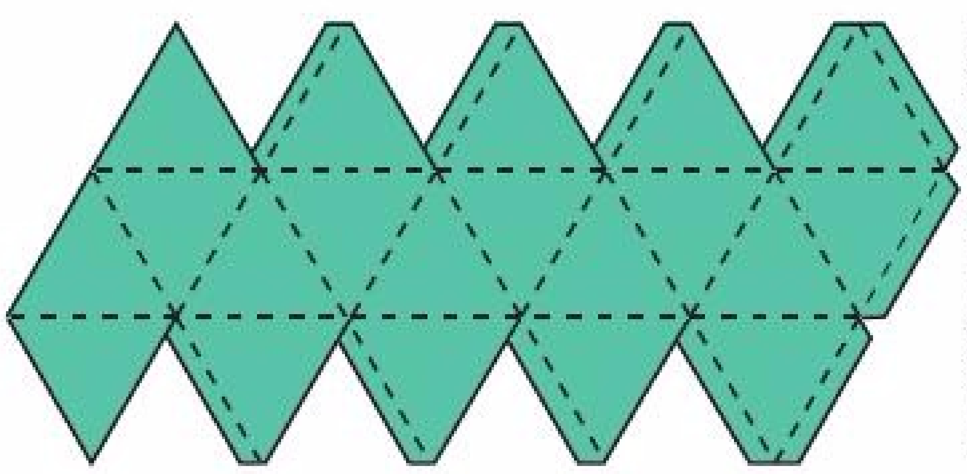
O fato de ter 12 faces, que é o mesmo número de meses do ano, faz com que o dodecaedro seja utilizado como calendário de mesa.

Neste *site*, é possível explorar um icosaedro de várias maneiras, visualizando, girando, planificando, cortando, etc. <www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/icosaedro-br.html>. Acesso em: 19 nov. 2014.

Icosaedro

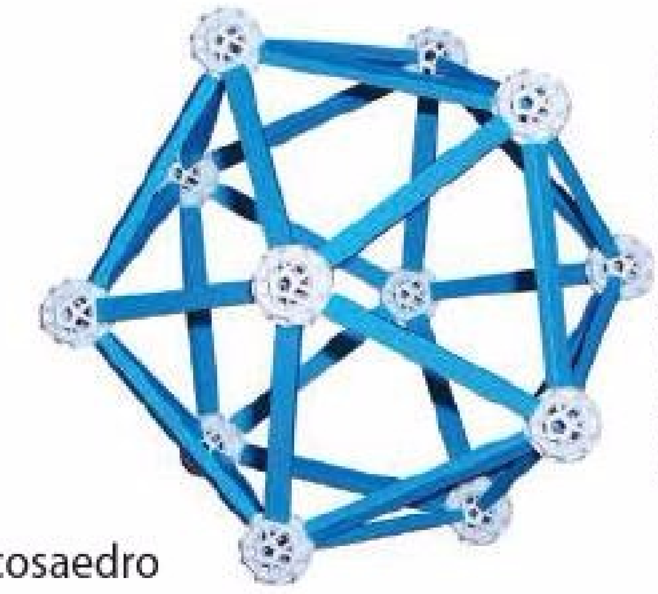
O icosaedro regular é o poliedro de Platão mais complexo, que tem 20 faces, 12 vértices e 30 arestas. Pitágoras conhecia o tetraedro regular, o cubo e o octaedro regular, mas não conhecia o icosaedro nem o dodecaedro.

Não é difícil construir um icosaedro por planificação ou sua estrutura de arestas, mas é mais trabalhoso que os outros poliedros mais simples.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Planificação do icosaedro



Reprodução:<http://shermanscrossing.spacebison.com/>

Estrutura do icosaedro

Icosaedro esquadros de acrílico e cola, 2002, 45 cm × 45 cm, Felipe Barbosa/Cosmocopa Arte Contemporânea

O artista plástico Felipe Barbosa transformou um icosaedro feito com 40 esquadros em uma obra de arte.

Aleksander Krsmanovic/Shutterstock

Justapondo dois esquadros com ângulos de 30°, 60° e 90° obtém-se um triângulo equilátero.

Cubo

O cubo é um paralelepípedo especial em que todas as arestas são iguais; em consequência, todas as faces também são iguais e quadradas.

É o poliedro de Platão mais conhecido, utilizável e presente em grande número de situações e objetos do cotidiano.

São inúmeros os usos e as referências ao cubo em nossa cultura. O cubo pode ser facilmente encontrado na arquitetura, no desenho dos objetos do cotidiano, nas artes e até na natureza.


Alexander Mui/Shutterstock/Glow Images

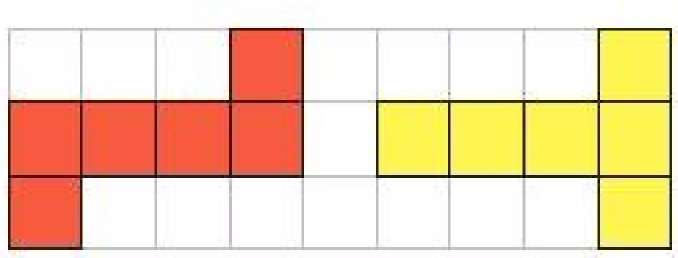
Grande Arco de la Défense, Paris.


CW Images/Alamy/Other Images

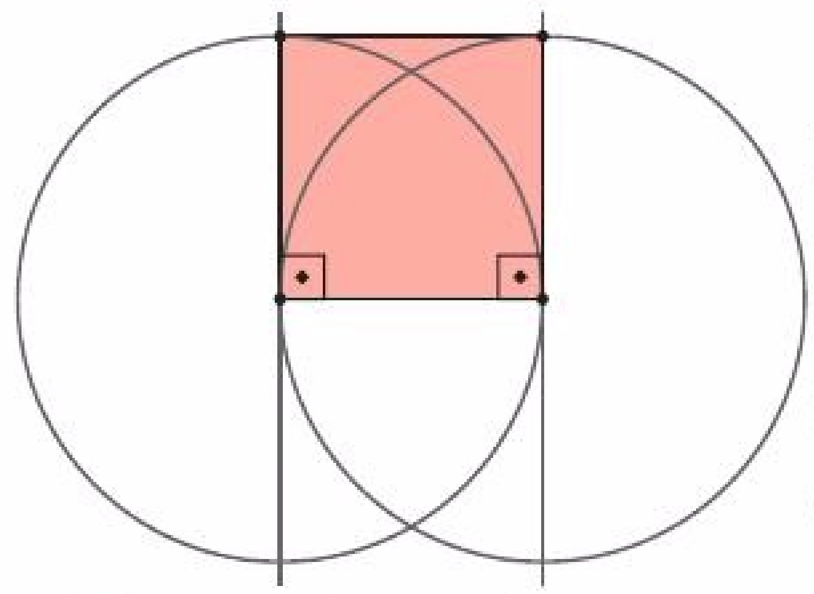
O *Atomium* é uma estrutura cúbica que está em Bruxelas, capital da Bélgica, construída por ocasião da Exposição Universal de 1958.

As imagens não estão representadas em proporção.

Há várias maneiras de construir cubos, sendo a planificação a mais conhecida. Podemos partir de uma malha quadriculada ou construir os quadrados com régua e compasso.


Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplos de planificação do cubo usando malha quadriculada.

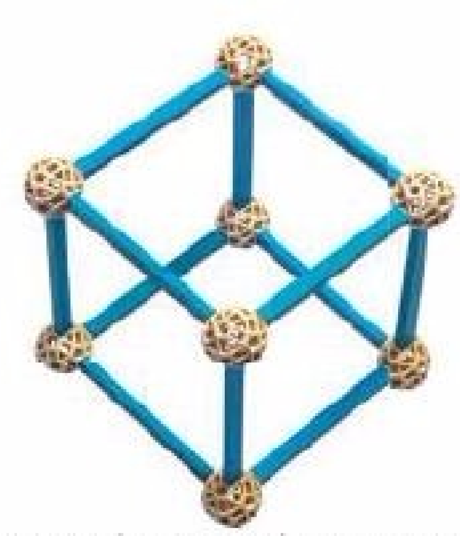

Banco de imagens/Arquivo da editora

Quadrado construído com régua e compasso.

EstudioMil/Arquivo da editora

Pode-se ainda construir cubos com módulos quadrados, ligados com elásticos para dar estabilidade. A estrutura do cubo pode ser construída com canudos ou varetas e junções.

Cubo sendo montado com módulos quadrados e elásticos.


Fotos: Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora

Estrutura de um cubo construído com material plástico.

Esta ideia pode ser explorada cortando uma pedra de sabão previamente esculpida na forma cúbica, frutas com polpa consistente, bolo, etc.

Simetrias do cubo

Os cubos e os demais poliedros de Platão são simétricos. Esse fato levou os geômetras a estudar as várias simetrias do cubo e outras figuras tridimensionais.

Imagine um bolo em formato cúbico; há várias maneiras de, com um único corte, decompor esse bolo em dois pedaços iguais.

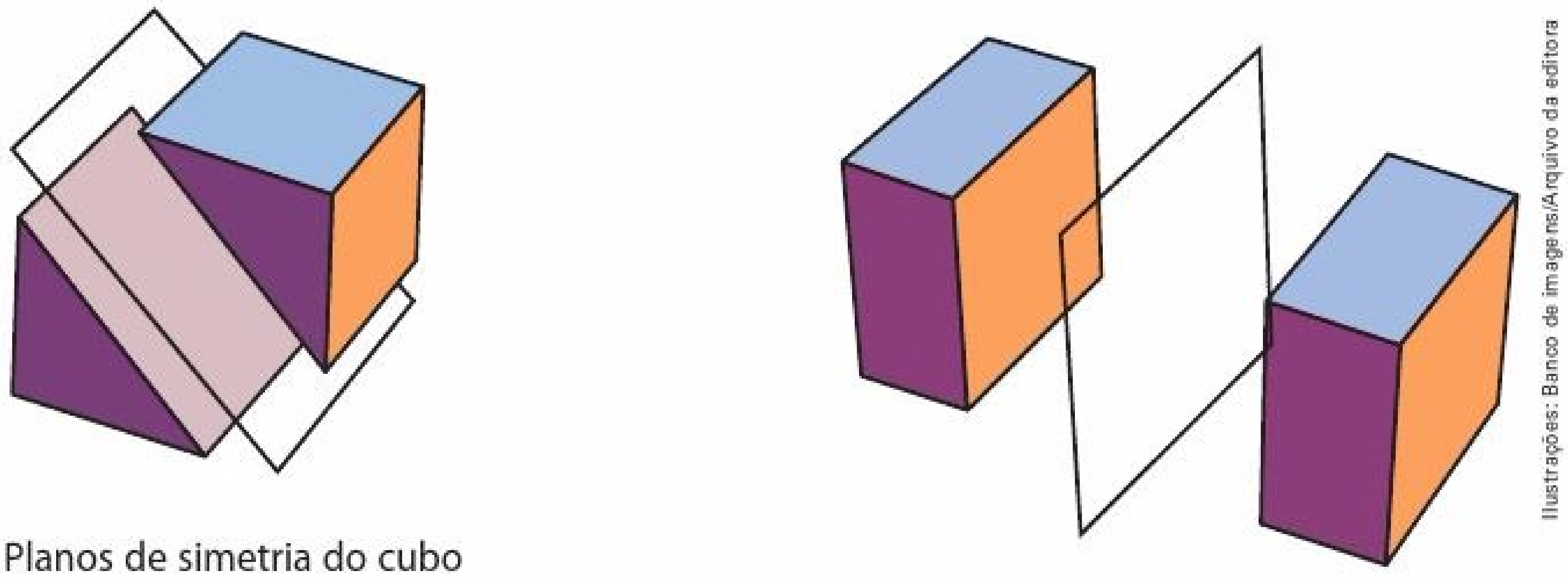
Para saber onde e como fazer o corte, podemos imaginar um plano, que funciona como um espelho que permite visualizar o cubo espelhando apenas uma de suas metades.

Na figura abaixo podemos ver como um prisma de base triangular é espelhado, formando a imagem de um cubo que foi dividido ao meio, pelo plano de simetria.

Como o quadrado tem 4 eixos de simetria e todas as faces do cubo são quadrados, podemos imaginar muitos **planos de simetria** do cubo.

O cubo tem 9 planos de simetria. Veja uma animação destes planos no *site*:
<www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/SimCubo.html>.
Acesso em: 19 nov. 2014.

Cubo formado por um prisma de base triangular e um espelho.



Planos de simetria do cubo

Descubra, desenhe e, se possível, construa modelos que mostrem todos os modos de dividir um cubo em duas partes iguais, seccionando-o com um plano de simetria.

1. Que outras simetrias você consegue imaginar no cubo? Descubra-as.

1. Qualquer eixo perpendicular a uma face e que passe pelo centro do quadrado; eixos perpendiculares a duas arestas paralelas e opostas (que não pertençam à mesma face); eixos que passem por dois vértices que não pertençam à mesma face.

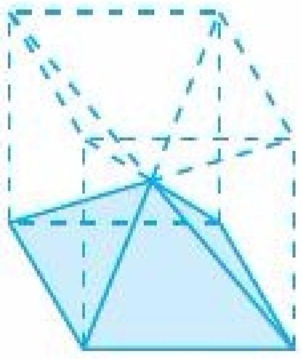
2. Tente imaginar seis pirâmides de base quadrada, cada uma coincidindo com uma face do cubo e com o quinto vértice coincidindo no centro do cubo.

   Se o cubo tem 20 cm de lado:

   a) qual é a altura de cada pirâmide? A metade da aresta do cubo, 10 cm.

   b) qual é o volume do cubo? $20^3 = 8\,000$ cm³

   c) qual é o volume de cada pirâmide?
   É possível responder a essa questão se considerarmos as simetrias do cubo. O volume de cada pirâmide é a sexta parte do volume do cubo ou $\frac{1}{6} \cdot 8\,000 = \frac{8\,000}{6} \simeq 1333{,}33$ cm³.



Poliedros e as probabilidades

Provavelmente, o primeiro contato que as pessoas tiveram com algum poliedro foi por meio de um cubo, quando crianças, pois muitos jogos utilizam dados cúbicos.

Entretanto, há outros tipos de dados. Uma das principais características que um dado precisa ter é a simetria, para garantir uma distribuição equilibrada do material utilizado na construção, de modo que qualquer face do dado, não importa o seu formato, tenha a mesma chance de sair quando jogado.

P Em lojas especializadas em jogos podem-se obter dados poliédricos, como os aqui ilustrados.

Alguns jogos utilizam dados em formatos poliédricos.

Vamos lembrar algumas ideias sobre probabilidade calculando as chances de ocorrência das seguintes faces no lançamento de um dado cúbico:

- Número 3

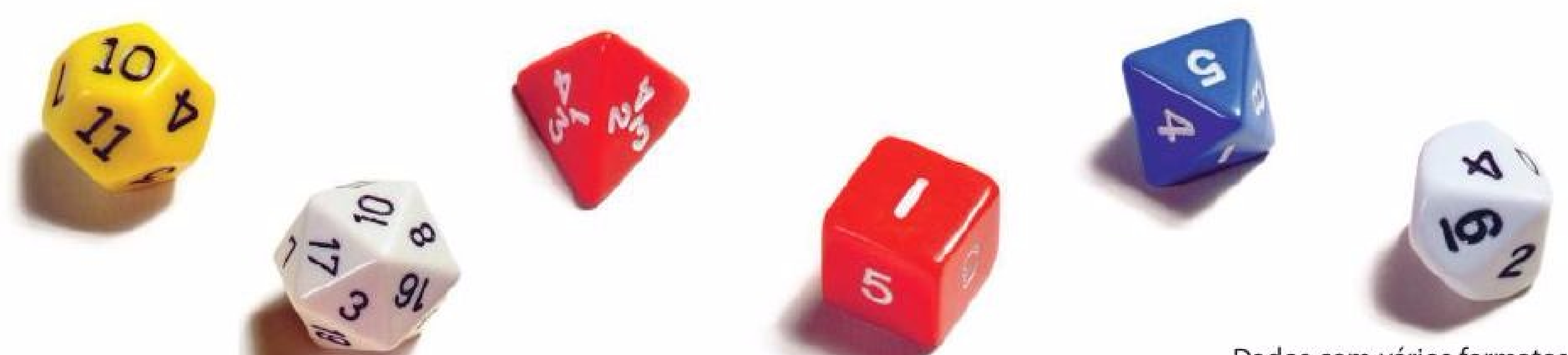
  O dado cúbico tem 6 faces, e só existe uma face 3 nas 6 possíveis. Dizemos que a probabilidade de ocorrência do 3 é "1 em 6" e expressamos a probabilidade por meio de uma razão escrita na forma fracionária: $P(3) = \frac{1}{6}$.

- Um número primo

  Os números primos de 1 a 6 são o 2, o 3 e o 5; portanto, há 3 chances em 6 possíveis.

  Dizemos que a probabilidade de ocorrência de um número primo é: $P(\text{primo}) = \frac{3}{6}$, mas $\frac{3}{6}$ equivale a $\frac{1}{2}$, a metade, ou seja, há 50% de chance de sair um número primo.

Eduardo Santaliestra/Arquivo da editora



Dados com vários formatos

ATIVIDADES

faça no seu caderno

20 No lançamento de um dado em forma de tetraedro, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) o número 3? $\frac{1}{4}$

b) um número par? $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou 50%

c) um número primo? $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d) um número maior do que 5? 0 ou 0%, evento impossível

21 No lançamento de um dado na forma de octaedro, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) o número 3? $\frac{1}{8}$

b) o número 2 ou o número 4? $\frac{1}{4}$

c) um número primo? 2, 3, 5 ou 7; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) um número menor do que 5? 1, 2, 3 ou 4; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

22 No lançamento de um dado na forma de dodecaedro, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) o número 5? $\frac{1}{12}$

b) o número 2 ou o número 4? $\frac{1}{6}$

c) um número primo? $\frac{5}{12}$

d) um número maior do que 5 e primo?

22. d) Os primos maiores que 5 e menores que 12 são o 7 e o 11; 2 possibilidades em 12 ou $\frac{1}{6}$.

23 No lançamento de um dado na forma de icosaedro, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) o número 5? $\frac{1}{20}$

b) um número primo?

c) um número maior do que 5? $\frac{3}{4}$

d) um múltiplo de 2 e múltiplo de 3?

23. b) As faces com números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19, ou seja, 8 em 20; $\frac{2}{5}$.

Os múltiplos de 2 e de 3 são os múltiplos de 6 e as faces que satisfazem são 6, 12 e 18; logo, $\frac{3}{20}$.

REVISE O QUE ESTUDOU

faça no seu caderno

P Atividade de produção pessoal, com finalidade expositiva a ser avaliada pelo professor.

1 Faça um levantamento de situações e objetos tridimensionais no cotidiano, na natureza e nas artes. Classifique-os montando um painel com fotos, desenhos, estruturas e maquetes.

2 Descreva as semelhanças e as diferenças entre prismas e pirâmides. P Veja sugestão de respostas no Manual do Professor.

3 Se a base de uma pirâmide e de um prisma são iguais, qual sólido tem:

a) mais faces? O prisma.　　b) mais vértices? O prisma.　　c) mais arestas? O prisma.

4 Qual é o polígono da base de um prisma que tem: Se a base de um prisma tem n lados, esta pirâmide vai ter: $n + 2$ faces; $3n$ arestas, $2n$ vértices.

a) 8 faces? Hexágono　　b) 15 arestas? Pentágono　　c) 14 vértices? Heptágono

5 Qual é o polígono da base de uma pirâmide que tem: Se a base de uma pirâmide tem n lados, esta pirâmide vai ter: $n + 1$ faces; $2n$ arestas, $n + 1$ vértices.

a) 11 faces? Decágono　　b) 12 arestas? Hexágono　　c) 5 vértices? Quadrilátero

6 Lançando um dado em forma de icosaedro com suas 20 faces numeradas de 1 a 20 e observando a face da base (em que o "dado" fica apoiado), qual é a probabilidade de que o número seja:

a) ímpar? $\frac{1}{2}$
b) composto? $\frac{3}{5}$
c) menor do que 20? $\frac{19}{20}$
d) maior do que 20? 0
e) maior do que 21? 0
f) múltiplo de 5? $\frac{1}{5}$
g) primo e par? $\frac{1}{20}$
h) primo ou par? $\frac{17}{20}$
i) primo e maior do que 10? $\frac{4}{10}$
j) primo e menor do que 10? $\frac{1}{5}$


Arena Photo UK/Shutterstock/Glow Images

7 Construa uma pirâmide de base hexagonal por planificação a partir das seguintes condições: a base deve ser um hexágono regular de lado 10 cm, e as faces laterais, triângulos isósceles de lados medindo 10 cm, 12 cm e 12 cm.

8 Lançando um dado em forma de dodecaedro com suas 12 faces numeradas de 1 a 12 e observando a face voltada para cima, qual é a probabilidade de que o número seja:

a) menor do que 10? $\frac{3}{4}$
b) maior do que 12? 0
c) múltiplo de 5? $\frac{1}{6}$
d) primo e maior do que 10? $\frac{1}{12}$
e) ímpar? $\frac{1}{2}$
f) composto? $\frac{1}{2}$
g) maior do que 10? $\frac{1}{6}$
h) múltiplo de 3? $\frac{1}{4}$
i) primo e par? $\frac{1}{12}$
j) primo ou par? $\frac{5}{6}$


Sonia Sorbi/Shutterstock/Glow Images

9 Pedro resolveu construir um prisma de base hexagonal de 10 cm de altura. Para isso, ele vai construir hexágonos regulares e retângulos com régua e compasso e vai usar fita adesiva para produzir o prisma, que é tridimensional.

P Veja resolução no Manual do Professor.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

a) Que tipo de prisma ele vai construir: reto ou oblíquo? Reto, pois todas as faces laterais são retângulos.

b) Quantos hexágonos ele terá de construir? 2 hexágonos: a base inferior e a base superior.

c) Quantos retângulos são necessários para construir as faces laterais? 6 retângulos: o mesmo número de lados do polígono da base.

d) Se o lado do hexágono tiver 5 cm, quais são as medidas dos retângulos das faces laterais? 5 cm e 10 cm

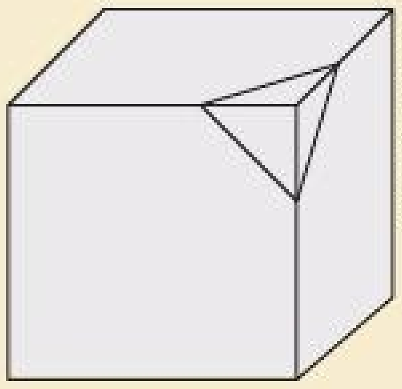
e) Quantas faces no total tem esse prisma? 2 bases + 6 faces laterais = 8 faces

f) Quantos vértices? Todos os vértices do prisma também são vértices dos polígonos das bases; então, $2 \cdot 6 = 12$ vértices.

g) E quantas arestas? 18 arestas

10 ***Desafio olímpico***

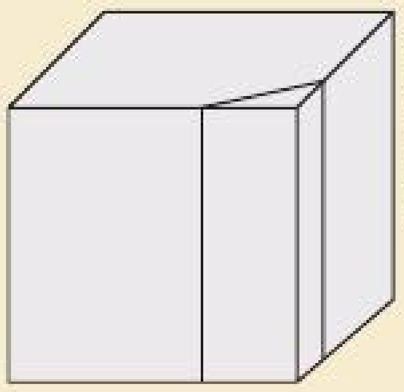
I. Imagine um cubo sólido construído com sabão. Desse cubo foi cortada uma pirâmide de base triangular, de tal modo que um dos vértices dessa pirâmide era o vértice do cubo original.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Descreva o sólido que não é a pirâmide quanto ao número de faces, de arestas e de vértices.
7 faces, 10 vértices, 15 arestas. Veja comentário no Manual do Professor.

II. Novamente, de um cubo foi cortado um prisma de base triangular, de tal modo que uma das arestas do cubo original também é uma aresta do prisma.



Banco de imagens/Arquivo da editora

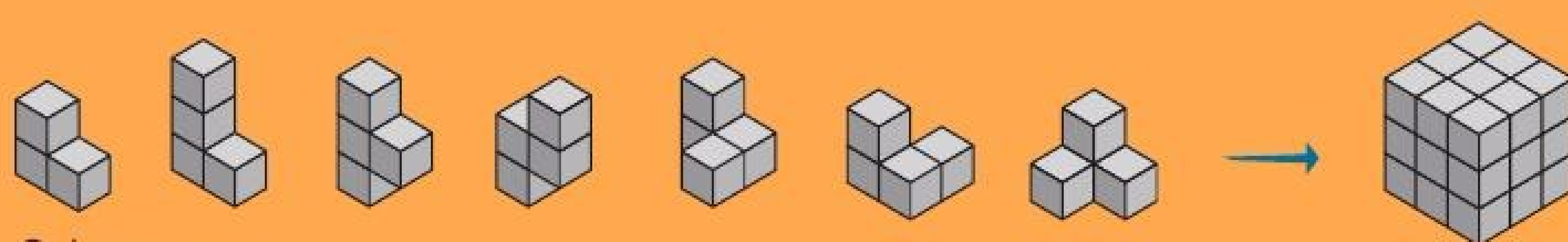
Descreva o sólido que não é o prisma quanto ao número de faces, de arestas e de vértices.
7 faces, 10 vértices, 15 arestas. Veja comentário no Manual do Professor.

Revista da Matemática

POLICUBOS

Policubos são construções formadas por cubos ligados face a face. Alguns conjuntos são usados e comercializados como jogos.

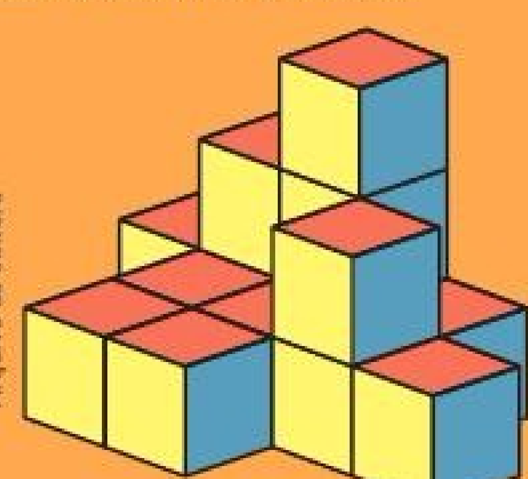
O conjunto de sete peças abaixo é conhecido como Cubo Soma, e foi inventado pelo *designer* e poeta dinamarquês Piet Hein. Observe que o conjunto é formado por 1 tricubo e 6 tetracubos. Com essas peças, pode-se formar um cubo $3 \cdot 3 \cdot 3$.



Cubo soma

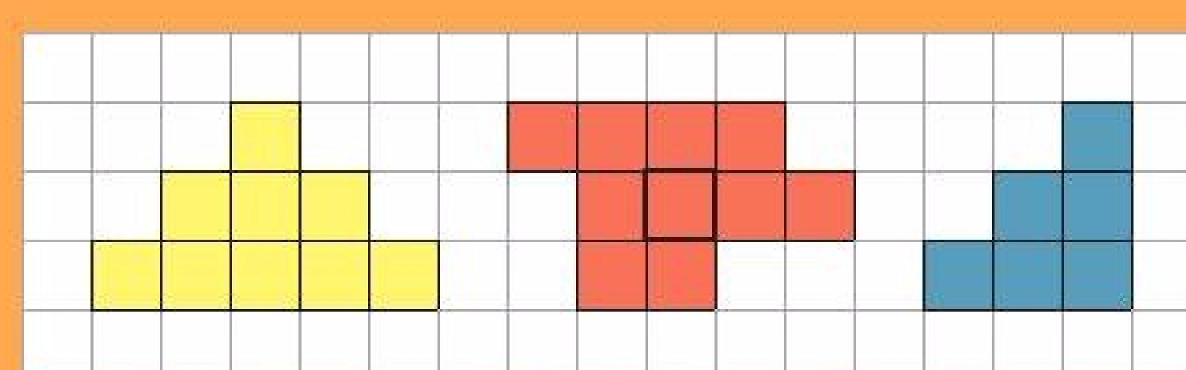
Banco de imagens/Arquivo da editora

Construções com policubos são interessantes para estudar vistas de objetos. Veja esta construção e suas vistas.



Policubo

Banco de imagens/Arquivo da editora



Vista frontal | Vista de elevação (de cima) | Vista lateral (pela direita)

Banco de imagens/Arquivo da editora

CUBO IMPOSSÍVEL

Um exemplo é o cubo impossível, muito apreciado por artistas como Escher e aficionados por Matemática recreativa e ilusão de ótica.

Observe bem o "cubo" da figura ao lado. Ele não pode existir na sua versão 3-D, somente em representações planas por meio de truques fotográficos ou recursos de computação gráfica.

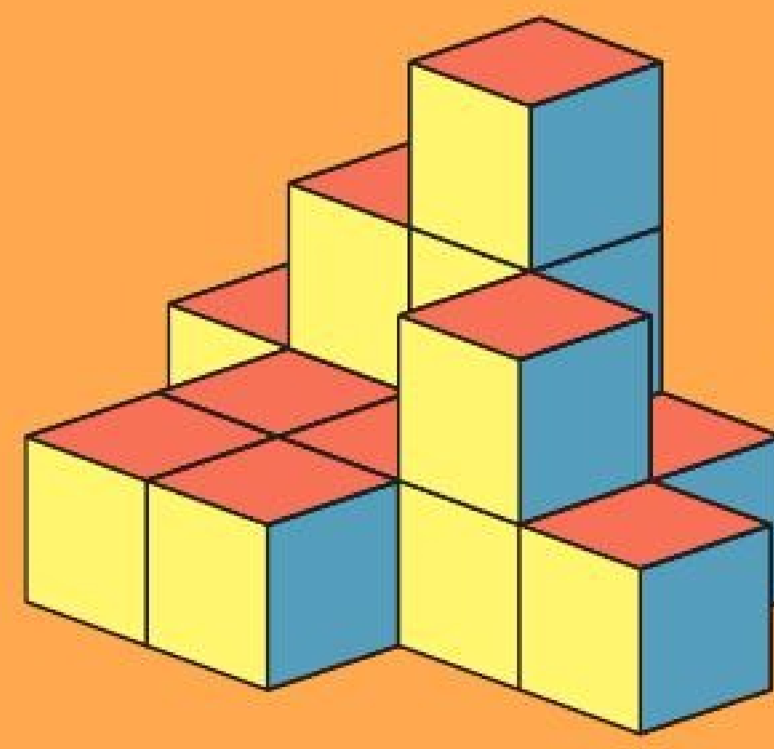
Você consegue perceber o motivo?

Fedorov Oleksiy/Shutterstock/Glow Images

EstudioMil/Arquivo da editora

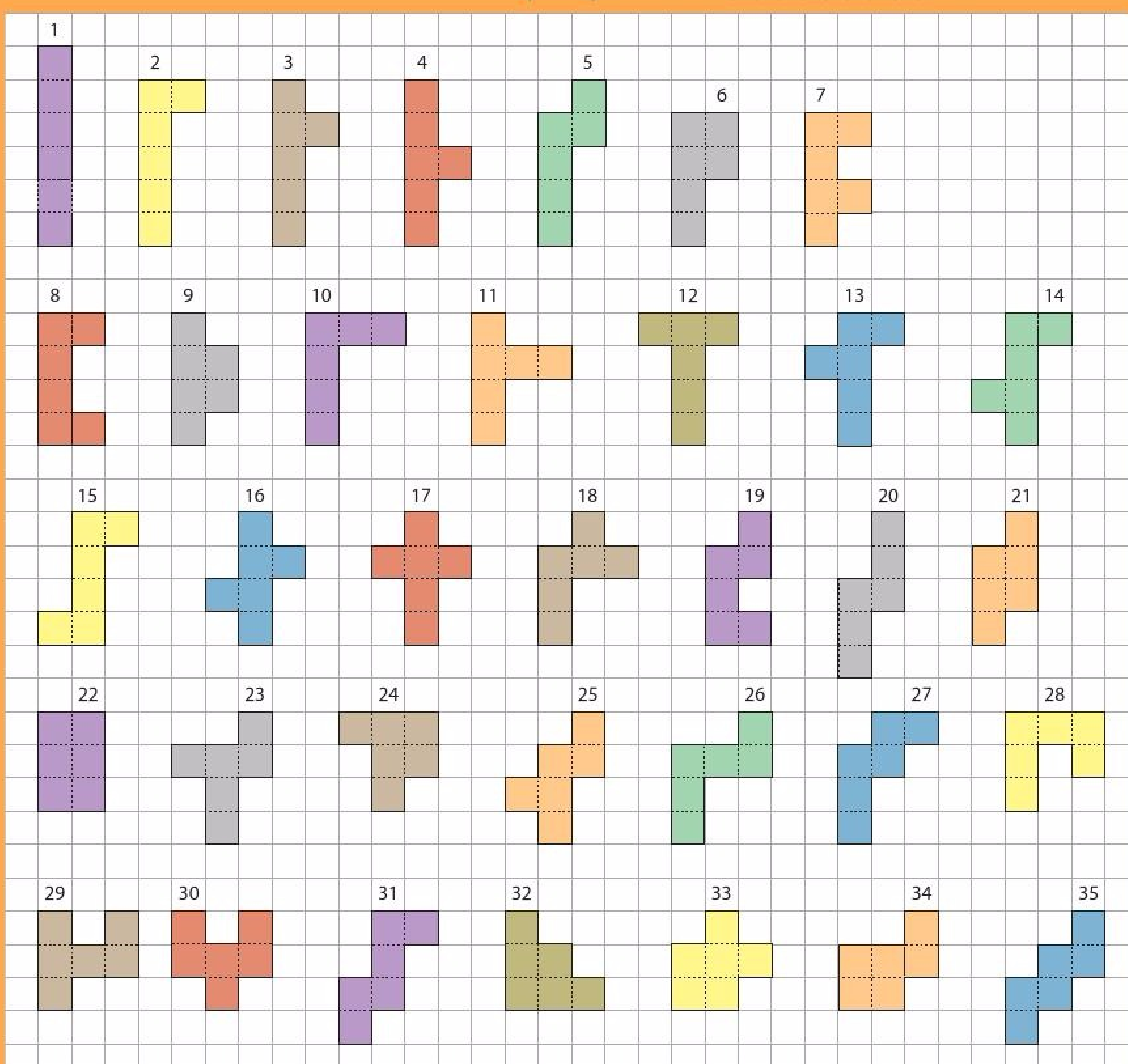
Atividades

1. Qual é o menor número de cubos que foi necessário para construir a figura representada a seguir? Foram necessários 10 cubos na camada inferior, 3 cubos na camada intermediária e 1 cubo no topo. Total: 14 cubos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Todas as planificações de um cubo são hexaminós, mas nem todos os hexaminós são planificações do cubo. Existem 35 hexaminós, e 11 deles são planificações de um cubo. Descubra as 11 planificações do cubo. Os alunos podem tentar resolver imaginando a dobra mentalmente, o que ajuda na visualização, ou recortando moldes e tentando montar o cubo. Os 11 hexaminós que são planificações do cubo são: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 23, 25, 31 e 35.



Banco de imagens/Arquivo da editora

SUGESTÕES DE LEITURA

LIVROS

Equação: o idioma da álgebra.
Oscar Guelli. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática).
Neste livro, o professor Oscar Guelli destaca as principais passagens da história da Álgebra, em especial da história das equações. Ele conta como na Antiguidade os gregos resolviam equações com régua e compasso e também comenta as estratégias utilizadas pelos egípcios, como a Regra da Falsa Posição.
Merece atenção o capítulo que mostra a origem dos símbolos e como isso contribuiu para desenvolver a Matemática e facilitar a resolução de problemas.

Editora Ática/Arquivo da editora

SITES

<www.atractor.pt/mat/sem_palavras>. Acesso em: 6 maio 2015.

Atractor é um *site* português cujo objetivo é atrair o interesse das pessoas para a Matemática. É uma espécie de museu virtual, com curiosidades, explorações *on-line*, história da Matemática e relações da Matemática com outras áreas do conhecimento.
Entre as várias seções da exposição virtual, destaca-se "Matemática sem palavras", que, aproveitando o dito popular de que "uma imagem vale mais do que mil palavras", mostra por meio de ferramentas interativas fatos como os produtos notáveis. O usuário pode modificar as figuras e visualizar as relações discutidas neste volume.

<www.uff.br/cdme/>. Acesso em: 6 maio 2015.

No *site* do departamento de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF) há um conjunto de objetos digitais interativos em que você pode explorar e resolver problemas sobre triângulos e quadriculados com base em suas propriedades.
Visite-o e verifique o que você já sabe sobre essas figuras geométricas.

<www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 6 maio 2015.

Neste *site* é possível visualizar e explorar, por meio de interação virtual, deslocando, girando, planificando, cortando, etc., os sólidos e, em especial, os poliedros. Nele pode-se manipular e explorar vários aspectos dos poliedros de Platão.
Ele é mantido pela Universidade Federal Fluminense (UFF).

RESPOSTAS

Unidade 1

Capítulo 1

Atividades

1. **I.** $x = 17$

II. $x = 8$

III.

2	7	33	5
55	9	49	4
27	8	65	77
91	25	16	3

2.

F	S	C	V
V	C	S	F
C	F	V	S
S	V	F	C

3. $D = 7$; $E = 5$; $F = 7$; $B = 12$; $C = 12$; $A = 24$

4. $A = 7$; $B = 4$; $C = 2$; $D = 11$; $E = 6$; $F = 17$

5. $A = 24$; $B = 7$; $C = 5$; $D = 2$; $E = 9$

6.

101
49 | 52
27 | 22 | 30
17 | 10 | 12 | 18
15 | 2 | 8 | 4 | 14

7. a) $y = 7$; $A = 9$ e $B = 11$
b) $x = 13$; $C = 16$ e $D = 16$

8. 25

9. 17

10. 9

11. 14

12. a) $x = 26°$
b) $x = 35°$
c) $x = 26°$
d) $x = 45°$
e) $x = 41°$
f) $x = 27°$
g) $x = 56°$ e $y = 87°$

13. a) $\alpha = \gamma = 35°$
b) $\alpha = \gamma = 72°$

14. a) 360°
b) 130°

15. $y = 90°$ e $x = 45°$

16. a) 50 c) 5
b) 60 d) 25

17. O primeiro sócio ficou com R$ 14 400,00 e o segundo, com R$ 21 600,00.

18. 96 alunos

19. a) 1 600 peças
b) 900 peças
c) 8 máquinas

20. 720 km

Revise o que estudou

1. $x = 9$

2. $A = 70$; $B = 30$; $C = 13$; $D = 23$ e $E = 50$

3. a) $x = 15$; $y = 22$ e $z = 28$
b) $x = 20$; $y = 30$ e $z = 30$

4. 11

5. 12

6. a) $x = 65°$ b) $x = 32°$

7. a) $x = \dfrac{5}{3}$ c) $x = 90$
b) $x = 24$ d) $x = 7{,}5$

8. a) 480 peças c) 24 máquinas
b) 1 080 peças

9. O primeiro sócio fica com R$ 2 400,00 e o segundo, com R$ 3 600,00.

10. 400 km

11. 30 km/h

12. 40 cm/h

13. a) 16 voltas no sentido anti-horário
b) 3 voltas no sentido horário

Capítulo 2

Atividades

1. **II.** 5 bolas

2. a) 6 meias c) 22 meias
b) 30 meias d) 15 meias

10. a) 7 d) 6
b) 7 e) 2
c) 20 f) 8

11. a) 5
b) 5
c) 7

13. a) Horizontais
1) 31
3) 20
Verticais
1) 36
2) 10
b) Horizontais
1) 42 3) 51
5) 618 7) 219
9) 57 11) 46
Verticais
1) 4 685 2) 21
4) 1 396 6) 82
8) 14

14. João: 7,7; José: 7,2 e Maria: 7,8.

15. a) 4,5 cm^2
b) 8,75 cm^2
c) 6,6 cm^2

16. 1 350 cm^3

17. b) 97,2 kg

18. a) 0 °C b) 20 °C

19. a) 37 b) 28 cm

20. $x = -1$ e $x = -3$, respectivamente.

21. a) 21 c) -3
b) 7 d) 3

22. **c** e **d**

24.

25. 32 ônibus

26. Branco

28. 20 garrafas

30. 35 moedas

31. 14 e 8 anos de idade

32. 30 quadrados

33. 22, 24, 26, 28 e 30.

34. 5

35. 76

36. 24, 26 e 28.

37. 18, 20, 22 e 24 anos.

39. 6

40. 362

41. 33, 35 e 37.

42. 30, 32, 34, 36, 38 e 40.

43. 45, 47 e 49.

Revise o que estudou

1. a) $x(x + 1)(x + 2)$
   b) $4(x + 1)$

2. $x + 5$ e $x + 10$

3. a) $x + 8$ d) $t + 3$
   b) $n + 21$ e) n
   c) $a - 4$ f) $n + 2$

4. a) O número 9
   b) Um número b
   c) O quádruplo do número n
   d) O cubo do número p

5. Maior: **b** e menor: **e**.

6. $n + 9$

7. a) $3a + 5b$
   b) $8n + 2m - 2x$

8. **c**

9. $t = 15$

10. $4 + 3n$

11. $5A + 6V = 90$

12. a) $3x$ reais
    b) $\frac{x}{12}$ reais

13. $T = 1\,200h + 15\,000$

14. $P + C$

15. $5x + 25y$

16. a) -5 c) $8\,000$
    b) 0 d) $-1\,000$

17. 15

18. 13

19. 70 e 39

20. 15, 20 e 25.

21. 21, 28 e 35.

22. 20

23. 25

25. 6

26. 12, 15, 18 e 21.

Capítulo 3

Atividades

1. a) 15 cm^2 d) 96
   b) 77 e) 200
   c) 35 cm^2

2. 33 m^2

3. 37,21 m^2

4. a) 8 250 m^2
   b) 6 400 m^2

5. a) Aproximadamente 101,4 cm.
   b) Aproximadamente 623,7 cm^2.

7. 5,5 cm

8. 4,83 cm^2

12. a) 180°

15. a) 180°
    b) 60°
    c) 120°

16. $AC = BD = 9$ cm
    $AB = CD = 27$ cm

17. a) 35 cm^2 c) 28 cm^2
    b) 90 cm^2 d) 44 cm^2

18. 20 cm^2

20. $A = \frac{b \times c}{2}$

21. a) 3,15 c) 1,86
    b) 16,25 d) 10

22. a) $A = \frac{5h}{2}$
    b) $A = \frac{3b}{2}$
    c) $A = 4h$

23. $A = 7{,}5$ cm^2

25. a) Sim

26. $\frac{D \cdot d}{2}$

27. 15 m^2

28. a) 22
    b) 37,5
    c) 22,5
    d) 13,5
    e) 11,25

29. 25

30. a) $A = \frac{(B + 3) \cdot 2}{2}$
    b) $A = \frac{(2x + x) \cdot 4}{2}$
    c) $A = \frac{(7 + 3) \cdot h}{2}$

31. $A = 3{,}5h$

32. 11 cm^2

33. a) $A = 11$
    b) $A = 16$

34. 640 torcedores

35. $3bh$

36. 63

37. a) 16
    b) 16

38. a) 4
    b) 4

Revise o que estudou

1. 20,709 m^2

2. 2 cm^2

3. 10 cm^2

4. 9 cm

5. 19,5

6. 49 cm^2

7. 20 cm^2

8. 40

Unidade 2

Capítulo 4

Atividades

1. a) $a + 3 = 7$, em que $a = 4$.
   b) $b + 2 = 7$, em que $b = 5$.
   c) $m = n + 6$, em que $m - n = 6$.

2. Igualdades: $A + 4 = 3 + C = 10$;
   $C = 7$ e $A = 6$.
   Desigualdades: $A < 10$, $A > 3$;
   $C < 10$ e $C > 4$.

3. $m = 4$

4. a) $A = by + 3b$ e $P = 2y + 2b + 6$
   b) $A = 7y + 21$ e $P = 2y + 20$
   c) $A = bx + 2x$ e $P = 2x + 2b + 4$
   d) $A = 9b + 18$ e $P = 2b + 22$
   e) $A = by + bz + y + z$ e
   $P = 2b + 2y + 2z + 2$
   f) $A = by + 3b + y + 3$ e
   $P = 2b + 2y + 8$
   g) $A = tm + 5t + m + 5$ e
   $P = 2m + 2t + 12$
   h) $A = 3b + bx + by + 9 + 3x + 3y$ e
   $P = 2b + 2x + 2y + 12$

5. a) A menina
b) $x > 2$ e $y < 5$

7. a) $A = bm + 5b + 2m - 16$
b) $A = yb + 3b + 2y - 20$
c) $A = xm + 4m + 5x - 6$

8. a) 37
b) 30
c) 37

9. a) $A = y^2 - 1$ e $P = 4y$
b) $A = 49 - y^2$ e $P = 28$
c) $A = 3m + 3t$ e $P = 2t + 20$
d) $A = 3m + 3(y - 3)$ e $P = 2m + 2y$

Revise o que estudou

1. a) $P = 2x + 2y + 2t$
b) $A = xy - t(y - 14)$

2. a) $P = t + x + 3 + (x - 2) + (t - 3) + 2$; $P = 2(x + t)$; $P = 2t + 2x$.
b) $A = tx - (t - 3)(x - 2)$; $A = 2t + 3(x - 2)$; $A = 3x + 2(t - 3)$

4. $A = 6x^2$

Capítulo 5

Atividades

1. $-\frac{3}{4}$

2. 0

3. $\frac{5}{3}$

4. $\frac{9}{10}$

5. a) $\frac{31}{35}$
b) $\frac{13}{12}$
c) $\frac{2b + 3a}{3b}$ $(b \neq 0)$
d) $\frac{4x + 3y}{4y}$ $(y \neq 0)$

6. a) $\frac{6}{35}$
b) $\frac{1}{24}$
c) $\frac{2a}{3b}$ $(b \neq 0)$
d) $\frac{3x}{4y}$ $(y \neq 0)$

7. a) $\frac{39}{80}$
b) $\frac{12x + 15y}{80}$
c) $\frac{13a}{60}$
d) $\frac{4a^2 + 5ab}{60}$

8. a) $\frac{1}{1994}$
b) 13
c) $\frac{7}{2}$
d) $\frac{2}{7}$
e) t
f) $\frac{b}{3}$
g) $\frac{10}{a}$
h) $\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$

9. a) $-\frac{2}{5}$
b) $\frac{3}{7}$
c) $-\frac{a}{8}$
d) $-\frac{10}{b}$

10. a) $\frac{3}{5}$
b) $-\frac{2}{7}$
c) $\frac{20}{17}$
d) $-\frac{a}{b}$

11. a) $-\frac{5}{3}$
b) $\frac{7}{2}$
c) $\frac{5}{a}$
d) $\frac{b}{2}$

12. a) $\frac{19}{24}$
b) $\frac{19}{6}$
c) $\frac{3x + 1}{6}$
d) $\frac{2b + 3a}{6b}$

13. Comutativa

14. II. $\frac{3b + 4a}{8b}$

15. a) 2^8
b) 11^9
c) 5^{10}
d) 5
e) 2 000
f) 3^3
g) 2^8
h) 2^8
i) 1

16. a) a^6b^6
b) $2x^7$
c) x^8
d) $9a^2b^2$
e) $4x^2y^4$
f) $\frac{27}{125}$
g) $\frac{a^5}{b^5}$
h) $3ax^4$

17. a) 1
b) 1
c) 1
d) 0
e) 0
f) 0

18. a) 1
b) $13a^2b^3$
c) 1

19. a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{25}$
c) 2
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{25}{4}$
f) $\frac{1}{x}$
g) $\frac{a^2}{4}$
h) $\frac{27}{t^3}$
i) $\frac{b^2}{4a^2}$

20. a) x
b) 4
c) 9

21. a) 4
b) 5
c) $\frac{6}{7}$
d) 2

22. a) 7
b) 64
c) a^2
d) 2

24. a) $2x^2 + 2y^2$
b) $x^2 - y^2$

25. a) $5x^3 - 2x^2$
b) $x^2 - 2x + 3$

26. $6a^2bx - 4ab^2x + 5abx^2 + 5a^2b^2x$

27. a) $3x^3 + 2x^2 + 2x$
b) $2x^3 + 5x^2 - 5$
c) $x^3 + 3x^2 + 2x - 5$
d) $3x^3 + 5x^2 + 2x - 5$
e) $x^3 + 2x^2 - 2x$
f) $-x^3 - 2x^2 + 2x$
g) $3x^3 + 2x^2 + 2x$
h) $-x^3 + 3x^2 - 2x - 5$
i) $x^3 + 5x^2 - 2x - 5$

28. a) Não pode ser reduzido.
b) Pode ser reduzido.

29. a) $7x^3 + x^2 + 5x + 3$
b) $4x^2y^2 - 4xy^2$
c) $2x^2 + 2y^2$
d) 0
e) $-4xy$

30. a) $3x + 2$
b) $2x^2y + 1$
c) $x + 2x^2 + 3x^3$
d) $1 + 2x + 3x^2$

31. a) $a^2 + ax + x^2$
b) $3b^2y - 5b^2y^2 - 2by^2$
c) $-10x^5 + x^4 - 2x^3 + 7x^2$
d) $-70x^3 + 7x^2 - 14x + 49$

32. $ax^4 - a^3x^2 + a^2bx^3 + a^2x^2$

33. a) $2x^2 + 4x$
b) $6y^2 - 15y$
c) $6a^2 + 2ab$
d) $5ab - 10b^2$
e) $6xy + 21y$

34. a) $4ax + 6x + 2a + 3$
b) $3ay + 15y - 2a - 10$
c) $6xy + 2x + 3y + 1$
d) $4xy + 6x - 6y - 9$
e) $6ax - 3a + 10x - 5$
f) $x^2 + 2x + 1$

35. a) $x^2 + 1$
b) $x^3 + x$

36. a) $a^2 + 2ab + b^2$
b) $4x^2 + 12x + 9^2$
c) $x^2 - 2xy + y^2$
d) $9x^2 - 12x + 4$
e) $x^2 - 1$
f) $4a^2 - 9b^2$

37. a) $2x^3 + 7x^2 + 16x + 15$
b) $3y^3 - 8y^2 + 9y + 4$

Revise o que estudou

1. a) $5x^4 + 3x^3 - 2x$
b) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
c) $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1$
d) $5x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$
e) $x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 5x - 1$
f) $5x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

2. a) $6x^2 + 7x + 2$
b) $6x^2 + 7x + 2$
c) $10x^2 - x - 3$
d) $7x + 4$
e) $11x + 7$
f) $16x^2 + 6x - 1$

3. a) $5 + 3xy$
b) $2x^2 + x + 3$

4. a) $5xy^2 - 3x^2y + 6$
b) $-4x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$
c) $2ab - 4b + 5a^2b^3$

5. a) $4x + 6y$
b) $4x - 6y$
c) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
e) $4x^2 - 9y^2$

9. a) y^{24}
b) $4a^3b^3$
c) $125x^3y^6$

10. **b** e **c** são verdadeiras.

11. a) 3
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{16}{9}$

Capítulo 6

Atividades

1. a) $6x^2y^2 + 4xy^3$
b) $6x^2y^2 + 4xy^3$
c) $10x - 15y$
d) $-x^3 + x^4$
e) $-10x^5 - x^4 - x^3 + 7x^2$
f) $-a^4x^3 - a^3x^4 - a^3x^5$

2. a) $4a^2 + 4ab + b^2$
b) $a^2 + 4ab + 4b^2$
c) $4a^2 + 12ab + 9b^2$
d) $9a^2 + 12ab + 4b^2$
e) $4a^2 - 4ab + b^2$
f) $a^2 - 4ab + 4b^2$

3. a) $4xy^2$
b) $-6x^3y^3$
c) $-12x^3y^3$
d) $-9x^2y$
e) $-15x^3y^2$
f) $-3x^4y^3$
g) $-20x^2y^3$
h) $4xy^2 - 9x^2y$
i) $4xy^2 - 6x^2y$

4. a) 5
b) ax

5. x^2

6. a) $(a + b)(a + b)$
b) $(x + y)(x + y)$
c) $(x + 3)(x + 3)$
d) $(a + b)(x + y)$

7. a) $Q_{maior} = 64$ cm²; $Q_{menor} = 25$ cm²; $R_{(cada)} = 40$ cm²
b) 169 cm²

8. a) Lado maior = 10 cm; lado menor = 4 cm.
b) $Q_{maior} = 49$ cm²; $Q_{menor} = 9$ cm²; $\text{Área}_{retângulo} = 40$ cm².

9. a) 324
b) 841
c) 961
d) 5 625
e) 6 889
f) 8 464

10. a) 899
b) 896
c) 399
d) 2 491
e) 2 475
f) 3 599
g) 4 896
h) 8 096
i) 39 996
j) 89 991

11. a) $3x^3(x^2 + 7x + 9)$
b) $2xa(3x - 4a^2 + 5xa)$
c) $12xyz(x^2y^4 - 3xz + 4y^3z^2)$
d) $(b + c)(a + x)$
e) $(a + 3b)(3x + 2y)$
f) $(a + x)(a + 2b)$
g) $(2a + 5b)(x + y + c)$
h) $(x + 3a)^2$
i) $(4x - 1)^2$
j) $(4m - 2n)(4m + 2n)$

12. a) x^2
b) x^3
c) $x - 2$
d) $\frac{x + 2}{x - 2}$
e) $\frac{7x + y}{x - y}$
f) $\frac{a + b}{a - b}$

Revise o que estudou

1. a) $a^2 + 2ab + b^2$
b) $4a^2 + 12a + 9$
c) $9x^2 + 24xy + 16y^2$
d) $a^2 - 2ab + b^2$
e) $4a^2 - 12a + 9$
f) $9x^2 - 24xy + 16y^2$
g) $4a^2 - 9$
h) $16x^2 - 9y^2$

3. a) $x^2(4x^2 - 5x + 6)$
b) $4ab(2ab - 1 + 3a^2b^2)$
c) $(5 + a)(b + c)$
d) $(m + n)(a + b + c)$
e) $(m - 6)^2$
f) $(2x + 4y)(2x - 4y)$

4. a) $a + b$
b) d
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{a}{3}$
e) $\frac{b + c}{3}$
f) $\frac{1}{a + b}$

5. a) 529
b) 784
c) 2 401
d) 2 601
e) 3 025
f) 5 184

6. a) 399
b) 1 596
c) 4 891
d) 4 899
e) 9 999
f) 89 996

Unidade 3

Capítulo 7

Atividades

1. a) A, H, I, M, O, T, U, V, X, W e Y.
b) B, C, D, E, H, I, K, X e O.
c) H, I, X e O.

5. Todas

13. Sim

Revise o que estudou

5. a) Triângulo isósceles
b) Retângulo e losango
c) Triângulo equilátero
d) Quadrado, pentaminós em forma de cruz.
e) Hexágono regular
f) Paralelogramo

6. a) 4
b) 2
c) 2
d) 0

8. a) 3
b) 1
c) 0

10. a) 5
b) 6
c) 8

11. O pentagrama tem 5 eixos de simetria.

14. Dodecágono não convexo e com dois eixos de simetria.

Capítulo 8

Atividades

9. **a**, **b**, **d**, **e**, **f** e **h**.

10. a) Não

11. $a > 1$

12. $b > 4$

16. a) **A**, **B**, **D**, **E**, **F** e **H**.
b) **A**, **B**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H** e **I**.
c) **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **G**.

26. Duas

Revise o que estudou

6. a) Paralelogramos
e) Losangos
f) Retângulos
g) Quadrados

7. a) Impossível

Capítulo 9

Atividades

1. Todos

2. Todos

3. **c**, **e** e **f**

4. $x = 10$

5. b) É a medida do maior lado da peça **I**, que é a hipotenusa do triângulo de lados *a* e *b*.

9. 89 cm

10. a) 13 cm
b) 169 cm^2

11. 49 cm^2

Unidade 4

Capítulo 10

Atividades

1. a) 7 e 3
b) 13 e 7

2. 70 e 30

3. 23 e 12;
128 e 48;
3 e -1; $\frac{15}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

5. a) 9
b) 7,5
c) 6
d) 3
e) 0
f) -6

6. $a = 1$

7. **a**, **d**, **e** e **f**.

8. a) $S = \left\{\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$
b) $S = \{(7, 12)\}$
c) $S = \{(2, 0)\}$

9. a) $S = \{(6, -3)\}$
b) $S = \{(12, 6)\}$
c) $S = \{(3, 4)\}$

10. (47, 23)

12. 149

13. a) $\frac{43}{2}$
b) $\frac{-31}{2}$
c) $\frac{19}{4}$

14. (2, 1)

15. **a**

16. a) *Diet* = 400 e tradicional = 1 600
b) Vendeu mais refresco tradicional (22 copos), o *diet* vendeu 20 copos.

17. 86 salsichas

18. Milho: 5 000; feijão: 1 600.

19. Teimosa: 24 L e Mimosa: 20 L.

20. Melindrosa: 60 L; Cheiadeprosa: 30 L e Preguiçosa: 10 L.

21. 31 pessoas

22. 875 professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

23. $x = 62$ m e $y = 40$ m.

25. Infinitas retas

26. a) Não
b) Por dois pontos distintos passa uma única reta.

34. São iguais.

38. a) Impossível
b) Determinado
c) Indeterminado
d) Determinado

39. **I.** -17
II. 75

Revise o que estudou

1. a) (9, 8)
b) (0, 0)
c) (1, 1)
d) (3, 3)

3. A carga do burro é de 7 sacos e a do cavalo, 5 sacos.

4. a) 14 questões
b) 20 pontos

5. 24 cm e 12 cm

6. 166 pagantes

7. 12 cm, 36 cm e 36 cm.

8. $x = 72°$ e $y = 36°$.

9. $m = 2$

Capítulo 11

Atividades

4. Infinitas

5. Infinitas

9. a) 3 cm
b) A é externo, B é um ponto da circunferência e C é interno.

10. a) $d = 9$ cm b) $d = 24{,}6$ cm

11. 6 378 km

12. a) 5 cm b) 31, 40 cm

13. Todas as proposições estão corretas.

14. a) (E, 5)
b) $r = 4$
c) (C, 3); (C, 4) e (G, 2)

15. a) Nenhum ponto
b) 2 pontos
c) 1 ponto

16. a) 1 ponto
b) 2 pontos
c) Nenhum ponto
d) Nenhum ponto
e) Nenhum ponto
f) Infinitos pontos

23. a) $B\hat{A}C$ b) 2 vezes

34. a) 120 livros de poesia
b) 15%, 90 livros
c) 36°

35. a) 300 deputados
b) O partido A elegeu 30% dos deputados.
c) 25%
d) Não

Revise o que estudou

2. Todas são circunferências.

3. O equador e os meridianos têm raio máximo.

6. a) Sim
b) Sim

7. O ângulo central é reto e mede 90°.

8. a) Fronteira c) Externo
b) Fronteira d) Interno

9. I) Verdadeira
II) Verdadeira
III) Falsa
IV) Verdadeira

Capítulo 12

Atividades

1. **b**, **c** e **d**

2. a) 6
b) 12
c) 8

3. a) 5 faces, 8 arestas e 5 vértices
b) 4 triangulares e 1 quadrada

4. a) 6 faces, 8 arestas e 8 vértices
b) 2 quadradas e 4 retangulares

5. a) 10 vértices
b) 15 arestas

6. a) 9 vértices
b) 16 arestas

7. 21 vértices

8. 10 lados

9. a) 8 palitos
b) 5 bolinhas de isopor

13. a) A, B e C
b) B e C

14. a) 4 vértices
b) 8 vértices
c) 6 vértices

15. a) 6 arestas
b) 12 arestas
c) 12 arestas

16. a) 3 arestas
b) 3 arestas
c) 4 arestas
d) 3 arestas
e) 5 arestas

17. a) Verdadeira
b) Verdadeira
c) Verdadeira

18. **g** e **m**

19. a) 12 canudos
b) Ela vai precisar bem mais do que 1 m.

20. a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 0

21. a) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

22. a) $\frac{1}{12}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{5}{12}$
d) $\frac{1}{6}$

23. a) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{3}{20}$

Revise o que estudou

3. a) O prisma
b) O prisma
c) O prisma

4. a) Hexágono
b) Pentágono
c) Heptágono

5. a) Decágono
b) Hexágono
c) Quadrilátero

6. a) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{3}{5}$ g) $\frac{1}{20}$
c) $\frac{19}{20}$ h) $\frac{17}{20}$
d) 0 i) $\frac{4}{10}$
e) 0 j) $\frac{1}{5}$

8. a) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}$
b) 0 g) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{6}$ h) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{12}$ i) $\frac{1}{12}$
e) $\frac{1}{2}$ j) $\frac{5}{6}$

9. a) Reto
b) 2 hexágonos
c) 6 retângulos
d) 5 cm e 10 cm
e) 8 faces
f) 12 vértices
g) 18 arestas

10. **I.** 7 faces, 10 vértices, 15 arestas.
II. 7 faces, 10 vértices, 15 arestas.

BIBLIOGRAFIA

Livros

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1998. (Coleção Fundamentos da Matemática).

ABRANTES, P. *Avaliação e educação matemática.* 1995. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Santa Úrsula-Gepem. Rio de Janeiro, 1995. v. 1.

______ et al. *Investigar para aprender Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM), 1996.

ALSINA, Claudi; FORTUNY, Josep M.; GOMEZ, Rafael P. *¿Porque Geometría?* Propuestas didácticas para ESO. Madrid: Sintesis, 1997.

______ et al. *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó, 1996.

ARTIGUE, Michèle et al. *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Grupo Educacional Iberoamérica, 1995.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo padrões pitagóricos:* geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):* terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília, 1998.

BUSHAW, Donald et al. *Aplicações da matemática escolar.* Trabalho conjunto da Mathematical Association of America e do National Council of Teachers of Mathematics. São Paulo: Saraiva, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática.* Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. *Na vida dez, na escola zero.* 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la matemática moderna.* México: Trillas, 1980.

CENTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CEM). *Caderno especial sobre semelhanças.* São Paulo, 1991. n. 3.

CHEVALLARD, Yves. *La transposición didáctica:* del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 2002.

COLL, C. et al. *Los contenidos de la reforma.* Enseñanza y aprendizage de conceptos, procedimientos y actitudes. Madrid: Santillana, 1992.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar, 1958.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra.* Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

D´AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação:* reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

______. *Educação matemática:* da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1997.

______. *Etnomatemática.* São Paulo: Ática, 1990. (Coleção Fundamentos).

DAVIS, Phillip J.; HERSH, Reuben. *A experiência matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DIENES, Zoltán P. *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática.* São Paulo: EPU, 1975.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática.* Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

FLETCHER, Trevor James. *Ensino moderno da Matemática.* Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. 4 v.

FRANCCHI, Anna et al. *Geometria no 1º grau:* da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área. São Paulo: CLR Balieiro, 1992. (Coleção Ensinando-Aprendendo).

FREUDENTHAL, Hans. *Perspectivas da Matemática.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

GARDNER, Martin. *Divertimentos matemáticos.* Rio de Janeiro: Ibrasa, 1961.

GIMENEZ, Joaquim J. *Evaluación en Matemáticas:* una integración de perspectivas. Madrid: Sintesis, 1997.

HARIKI, S. La ambigüedad en el discurso matemático. In: *Revista Epsilon*, Sevilha, 1992, n. 22.

HERSHKOWITZ, Rina. *Especial monográfico.* Boletim n. 32. Rio de Janeiro: GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), 1994.

IFRAH, Georges. *Os números:* a história de uma grande invenção. 9. ed. São Paulo: Globo, 1998.

KLINE, M. *O fracasso da Matemática moderna.* Rio de Janeiro: Ibrasa, 1976.

LAKATOS, Imre. *A lógica do descobrimento matemático:* provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). *Aprendendo e ensinando geometria.* São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 1997.

LOPES, Antônio J. Explorando o uso da calculadora no ensino da Matemática para jovens e adultos. In: *Alfabetização e Cidadania.* São Paulo: Secretaria Municipal de Educação, 1998, n. 6.

MACEDO, Lino. *Ensaios construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

MIORIM, Maria Â. *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

PAPERT, Seymor. *Logo:* computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PERELMANN, Iakov. *Aprenda álgebra brincando.* Tradução de Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 2001.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. *A representação do espaço na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

______ et al. *La enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Aguilar, 1968.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas.* Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RUSSEL, Bertrand. *Introdução à filosofia da Matemática.* Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966.

SCHLIEMANN, Ana Lúcia et al. *Estudos em psicologia da educação matemática.* Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

______; CARRAHER, David (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos:* ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat:* a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Rio de Janeiro: Record, 2008.

STEIN, James D. *Como a Matemática explica o mundo:* o poder dos números no cotidiano. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

______. *Incríveis passatempos matemáticos.* Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

SUTHERLAND, Rosamund. *Ensino eficaz de Matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2009.

TAHAN, Malba. *Didática da Matemática.* São Paulo: Saraiva, 1961.

VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930).* São Paulo: Annablume/ Fapesp, 1999.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria L. *Matemática para aprender a pensar:* o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ZASLAVSKY, Claudia. *Jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro:* diversão multicultural para idades de 8 a 12 anos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

8º ano

SUMÁRIO

CONTEÚDO DIGITAL

Este ícone indica que há conteúdo digital disponível no Manual do Professor multimídia.

APRESENTAÇÃO

Esta coleção é o resultado de um projeto didático-pedagógico consolidado e legitimado na comunidade de Educação Matemática, vivenciado ao longo dos últimos vinte e cinco anos pela atuação do autor e seus colegas de equipe, tanto como professores em sala de aula como no trabalho de pesquisa e formação de professores, realizado em diversas instituições.

Dessa forma, nosso propósito é compartilhar nossa experiência com professores de Matemática e profissionais da Educação que anseiam por um trabalho de qualidade na formação de alunos-cidadãos.

Vivemos em um mundo em que as mudanças sociais, culturais e econômicas são profundas e intensas, a informação e a comunicação ocupam lugar de destaque. Acessar e usar adequadamente a informação possibilita a obtenção de uma bagagem cultural adequada ao exercício da cidadania, da democracia e da liberdade. Devemos, ainda, levar em conta o desenvolvimento tecnológico em nossa sociedade e seus impactos na vida cotidiana, no mundo do trabalho, das ciências e nos desafios colocados para as instituições escolares. A sociedade necessita de cidadãos capazes de dominar essa tecnologia e de produzir outras, tendo como meta uma sociedade mais igualitária e o bem-estar de seus membros.

A escola não deve ficar à margem de todas essas transformações; ao contrário, ela deve incorporar os impactos de tais mudanças para melhor cumprir seu papel social. Isso passa, necessariamente, por uma ampla discussão sobre os conteúdos curriculares, modelos e métodos de ensino.

Foi levando em consideração todos esses fatores, atuando, observando e sentindo as necessidades de nossos alunos em sala de aula, compreendendo suas mudanças e, ainda, ouvindo as demandas de nossos colegas professores, que elaboramos este projeto pedagógico.

Esta coleção procura refletir e atender o anseio de professores que desejam enriquecer suas aulas, propondo desafios que levem os alunos a pensar matematicamente, discutindo aspectos da história da Matemática ou explorando a relação da Matemática com a realidade e com outras áreas do conhecimento, tal como é recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática.

O projeto didático pedagógico desta coleção visa contemplar esses objetivos, levando os alunos a:

- aprender a apreciar e a valorizar a Matemática;
- fortalecer a segurança na própria capacidade;
- ser capaz de explorar e resolver problemas matemáticos;
- aprender a comunicar-se matematicamente;
- aprender a raciocinar matematicamente.

Tais objetivos não devem ser frases de efeito ou fruto de modismo, mas devem ser atingidos por nossos próprios filhos, alunos e por todos os jovens com quem convivemos.

Fontes e inspirações

Muitos educadores, matemáticos e educadores matemáticos contribuíram para formar nossa visão sobre a Matemática e a Educação Matemática, com seus livros, artigos, palestras e contato pessoal que inspiraram várias experiências do autor e passagens desta obra.

Porém, poucos pesquisadores da geração atual de educadores matemáticos conhecem com profundidade seus trabalhos. Muitos dos princípios considerados inovadores atualmente foram formulados por pensadores de gerações anteriores, como a que começou a moldar a Educação Matemática contemporânea há mais de meio século.

Assim, apresentamos uma homenagem a esses pioneiros, citando seus nomes que incluem educadores, matemáticos, filósofos e historiadores, brasileiros e estrangeiros, de várias épocas e que foram os responsáveis, direta ou indiretamente, pela formação do pensamento do autor desta coleção. Esperamos que a nova geração de professores de Matemática tenha sua curiosidade despertada para conhecer as ideias e os trabalhos dessas pessoas. As ideias e criações de cada um deles podem ser encontradas nas páginas dos quatro volumes desta coleção:

Manoel Jairo Bezerra, Seiji Hariki, Ubiratan D´Ambrósio, Lydia Lamparelli, Anna Franchi, Lucília Bechara, Manhucia Liberman, Euclides Roxo, Malba Tahan, Renate Watanabe, Esther Pilar Grossi, Marta Souza Dantas, Maria Laura M. L. Lopes, Hans Freudenthal, T. J. Fletcher, Emma Castelnuovo, Zoltan P. Dienes, Irving Adler, Emília Ferreiro, Constance Kamii, Martin Gardner, Yakov Perelman, Lancelot Hogben, Paul Karlson, David Bergamini, Tobias Dantzig, Lewis Carrol, Bento de Jesus Caraça, Georges Ifrah, Imre Lakatos, Caleb Gattegno, Pedro Puig Adam, Claude Gaulin, Alan Bell, Georges Glaeser, Claudi Alsina, Joaquín Gimenez, Romulo Lins, Arthur Powell, Bertrand Russell, René Thom, Davis & Hersh, Morris Kline, Kasner & Newman, Courant & Robbins, Ray Pastor, Luis Santaló, Maurício Tragtenberg, Darcy Ribeiro, Paulo Freire, Jean Piaget, Rolando Garcia, Noam Chomsky, Bruno Munari e outros.

A homenagem ficaria completa se fosse apresentada alguma passagem das obras desses autores, porém, na impossibilidade de fazê-lo, apresentamos o pensamento do educador e matemático catalão Pere Puig i Adam (1900-1960) ou Pedro Puig Adam – na forma aportuguesada:

1. Não adotar uma didática rígida, mas ajustá-la, em cada caso ao aluno, observando-o constantemente.

2. Não esquecer as origens da Matemática nem os processos históricos da sua evolução.

3. Apresentar a Matemática como uma unidade, relacionando-a com a vida natural e social.

4. Graduar cuidadosamente os planos de abstração.

5. Ensinar guiando a atividade criadora e descobridora do aluno.

6. Estimular cada atividade despertando interesse direto e funcional sobre o objeto do conhecimento.

7. Promover, sempre que possível, a autonomia na correção.

8. Garantir a habilidade nos processos antes de automatizá-los.

9. Cuidar para que a expressão do aluno seja a tradução fiel do seu pensamento.

10. Procurar devolver a cada aluno seus êxitos, evitando assim seu desânimo frente aos tropeços pontuais.

Adaptado de: ADAM, Puig. *Decálogo de la Didáctica Matemática Media.*
Jornal Matemática: Madrid. 1ª série, tom 7, n. 5 e 6. 1955.

Pedro Puig Adam exerceu forte influência na comunidade europeia de educadores no pós-guerra, foi membro ativo da Comissão Internacional para a Melhoria para o Ensino de Matemática – CIEAEM, fundada em 1950 e atuante ainda hoje. Puig Adam é conhecido por seus livros de Matemática e mais de uma centena de artigos sobre educação, dos quais oferecemos seu famoso decálogo dirigido aos professores de Matemática de todo o mundo, que sintetiza muitas das ideias e propostas desta coleção.

CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROJETO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO

Fazer matemática problematizando

CONTEÚDO DIGITAL

O foco deste projeto didático-pedagógico é a **resolução de problemas** que ao longo da obra são apresentados nas atividades, nos diálogos sugeridos e nas situações do cotidiano.

Estamos de acordo com a visão de muitos historiadores e filósofos da Matemática, cujo **fazer matemático** implica essencialmente na atividade de enfrentar e resolver problemas. Em nosso projeto didático a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e tem como objetivo levar os alunos a identificar e estabelecer relações, desenvolver ideias matemáticas, perceber regularidades, reconhecer e descobrir propriedades, relações e conceitos que levem à generalização, à resposta de perguntas e a novos conhecimentos.

Enfatizamos que a resolução de problemas não deve ser utilizada apenas como controle do domínio de uma técnica ou conceito recém-ensinados para os alunos. Na vida cotidiana, os indivíduos têm e terão sempre que enfrentar problemas, alguns conhecidos, outros novos.

A escola que não prepara os indivíduos para a resolução de problemas acaba por privá-los do exercício pleno do pensamento matemático autêntico e, consequentemente, do exercício de uma "**cidadania cognitiva**" que é uma das metas fundamentais do movimento da "**educação matemática para todos**", proposto por Hans Freudenthal no início dos anos 1980.

Dizer que a educação matemática é para todos não significa que todos os alunos aprenderão as mesmas coisas e de modo igual, deve-se considerar os distintos níveis e estilos de aprendizagem.

Todos têm direito e devem ter acesso à Educação Matemática de qualidade, para com ela desenvolver e potencializar suas capacidades. O resultado esperado é que a maioria dos estudantes adquira conhecimentos e destrezas matemáticas essenciais para suas vidas e prossiga nos estudos. Esperamos também que aqueles alunos que tiverem mais afinidade e habilidades na disciplina, possam potencializá-las e ir além do que é oferecido nesta coleção.

Dessa forma, nosso propósito é que todos os leitores desta obra tenham possibilidade de vivenciar situações matemáticas, que sejam úteis tanto na vida cotidiana como nos desafios que enfrentarão na vida escolar.

Vale lembrar que os problemas têm sido a fonte principal do desenvolvimento da Matemática como ciência, o que levou os currículos propostos nas últimas décadas a terem a resolução de problemas como foco. Esses fatos e ideias também foram usados como referência para a elaboração dos PCN de Matemática, das Diretrizes Curriculares das Secretarias Estaduais de Educação, bem como para as matrizes de referência de Matemática com os descritores de exames nacionais – SAEB, Prova Brasil, Saresp, Enem, entre outros – cujo foco é a resolução de problemas.

O que reforça as opções e a metodologia adotadas nesta coleção é:

- a situação-problema como ponto de partida da atividade matemática, e não a definição prescrita e a regra pronta;
- não reduzir o problema a um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório;
- o problema deve cumprir a função de catalisador de discussões que geram novos problemas e desencadeiam processos de argumentação, uso de estratégias, confronto de modos de resolução, controle de resultados, etc.

Um conceito matemático se constrói de modo articulado com outros conceitos, por meio de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói os conceitos a partir da resolução de uma gama de problemas, e não a partir da resposta isolada de um problema particular.

A resolução de problemas não é uma atividade decorativa para ser desenvolvida em paralelo ou apenas como aplicação de um determinado conteúdo, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Nesse sentido, propomos e explicitamos a variedade de tipos de problema e seus propósitos. Se no ensino tradicional privilegia-se a formulação de problemas cujo enunciado conduz a uma resposta única, nesta obra os alunos são convidados a enfrentar problemas com formulações mais inquisitórias que exigem processos não explícitos na pergunta.

Em algumas situações os alunos são convidados a inventar enunciados que correspondem a uma operação ou processo.

Matematizar a partir de aplicações realistas

As atividades propostas nos livros desta coleção colocam os alunos frente a problemas reais, com seus números "malcomportados" e sua multiplicidade conceitual e procedimental. A aplicação da Matemática a situações-problema significativas, embora seja visto por alguns professores como uma novidade, é um anseio dos educadores matemáticos há muitas décadas.

Na década de 1930 o educador matemático Euclides Roxo defendeu uma reforma em que os problemas realistas tinham um lugar especial. Entre os anos 1950 e 1960 os educadores Malba Tahan e Manoel Jairo Bezerra, entre outros, escreveram numerosos artigos e livros sobre Didática da Matemática, nos quais defendiam uma Matemática significativa, contextualizada e denunciaram o afastamento do ensino da Matemática de situações do mundo real.

A partir da década de 1960 até o final dos anos 1980, por influência das publicações e ações do denominado Movimento Matemática Moderna, o ensino da Matemática privilegiou as estruturas abstratas antes da construção das ideias, o que deixou as aplicações num segundo plano. Esse descaso com a Matemática do "mundo real" foi denunciado por eminentes matemáticos e educadores como Hans Freudenthal, Morris Kline e René Thom, o que levou, a partir de 1980, muitos países, como Holanda e Inglaterra, a reorientarem seus currículos dando lugar de destaque às aplicações, aos projetos, à interdisciplinaridade e à modelagem. Posteriormente EUA, Espanha e Portugal também reorientaram o seu currículo.

O matemático Henry Pollak publicou, em 1987, um estudo a respeito de "qual Matemática a escola deveria prover aos indivíduos para que fossem capazes de intervir matematicamente no mundo do trabalho" e listou habilidades e destrezas que o indivíduo deveria ter ao final de um curso fundamental:

- ser capaz de propor problemas com as operações adequadas;
- conhecer técnicas diversas para propor e resolver problemas;
- compreender as implicações matemáticas de um problema;
- poder trabalhar em grupo (cooperativamente) sobre um problema;
- ver a possibilidade de aplicar ideias matemáticas a problemas comuns e complexos;
- estar preparado para enfrentar problemas abertos, uma vez que os problemas reais, em sua maioria, não estão formulados nos moldes das tarefas escolares, com as variáveis previamente controladas;
- acreditar na utilidade e validade da Matemática.

A abordagem dos conteúdos desta coleção está em sintonia com essas ideias. Buscamos apresentar aos alunos um vasto acervo de situações matemáticas diversificadas nos aspectos contextuais, conceituais e procedimentais, nas quais as tarefas solicitadas vão além dos esquemas clássicos de decorar e aplicar regras. O foco de todo este trabalho é levar o aluno a raciocinar de modo autêntico.

O raciocínio se manifesta quando reconhecemos que nos questionam algo. Esse reconhecimento exige entender a situação colocada, interpretá-la, ser capaz de reformulá-la, adaptar e selecionar o que é essencial do enunciado ou da situação.

Sendo assim, esta coleção buscou contemplar:

- aplicações a situações do mundo real;
- contextos significativos e factíveis;
- uso de informações e textos de jornal e outras mídias;
- problematização de situações contemporâneas;
- simulação de situações;
- propostas de projetos nos quais os alunos aprendem a utilizar a Matemática para resolvê-los;
- abordagem interdisciplinar.

Realismo, contextualização e comunicação

CONTEÚDO DIGITAL

Trabalhar com a Matemática realista exige que se coloquem ideias e elementos em relação entre si. O sentido da "Educação Matemática Realística" vai muito além de uma abordagem meramente utilitarista, a palavra "*realiseren*", do vocabulário holandês, está associada à imaginação, "*zich realiseren*" significa 'tornar real na mente do aluno'.

Um dos lemas de Freudenthal é que se aprende melhor Matemática quando a reinventamos. Freudenthal entende a Matemática como uma atividade humana e que a melhor forma de aprendê-la é praticando, problematizando e relacionando-a com tudo o que for possível. Suas investigações mostraram que os estudantes podem desenvolver **compreensão matemática** gradualmente, a partir de problemas práticos bem escolhidos da vida diária, da exploração e resolução desses problemas em níveis cada vez mais complexos de pensamento matemático, o que contribui para que os alunos atinjam a abstração numa etapa adequada a seu desenvolvimento cognitivo e cultural. Segundo ele, uma das consequências é que os alunos tendem a se interessar automaticamente pela Matemática propriamente dita, adquirindo hábitos de pensar matematicamente frente a situações diversas escolares e do dia a dia extraescolar.

Atividades matemáticas que contribuem para os alunos relacionarem seus conhecimentos e as situações do cotidiano, para que façam hipóteses e se envolvam num processo argumentativo, são atividades ricas, com poder de mobilizar o raciocínio. Isso é muito mais significativo do que *saber de cor*.

Estão listadas abaixo as principais concepções de Freudenthal.

- Matemática vista como atividade humana, em vez de disciplina preestabelecida.
- Matematização da realidade, em vez de realidade já matematizada.
- Reinvenção, em vez de transmissão de conceitos.
- Apresentação da realidade como fonte, *a priori*, da Matemática, em vez de domínio de aplicação.
- Articulação da Matemática com outros domínios, em vez de apresentação isolada.
- Contextos ricos de significado, em vez de reunião de problemas linguísticos.
- Elaboração de figurações mentais, em vez de conceitos prescritos.
- Abordagens múltiplas em relação a conceitos novos, em vez de concretização múltipla.
- Compreensão, em vez de mecanização.

Hans Freudenthal, fragmentos do artigo *Matemática nova ou educação nova?* Publicado em Perspectivas, *Revista de Educação da UNESCO*, especial monográfico "Matemática para a vida", 1979.

Essa perspectiva ganha maior importância na sociedade atual, na chamada era da informação e da comunicação, impactada por grande desenvolvimento da tecnologia que já faz parte da vida cotidiana.

Comunicação matemática

CONTEÚDO DIGITAL

Ao elaborar esta coleção, assumimos a posição de que a Matemática de hoje deve preparar os alunos para atender às demandas de nossa sociedade, tornando-os capazes de ler o mundo que os rodeia, bem como agilizar e tornar mais eficaz a comunicação entre os indivíduos.

Esse objetivo pode ser alcançado se forem oferecidas aos alunos as oportunidades de:

- relacionar materiais físicos, imagens e diagramas com ideias matemáticas;
- refletir e clarear as ideias sobre conceitos e situações com conteúdos matemáticos;
- relacionar a linguagem diária com a linguagem e os símbolos matemáticos;
- perceber que, para a aprendizagem, as ideias matemáticas podem ser discutidas, lidas, escritas e ouvidas;
- reconhecer a importância da notação e da nomenclatura matemática e o papel que elas desempenham no desenvolvimento de ideias matemáticas.

Nas salas de aula de hoje, os alunos são ativos e trazem para a escola conhecimentos de várias naturezas. Sua cultura, experiências e conhecimentos prévios devem ser compartilhados com o grupo e com os adultos. Nossos jovens adolescentes têm acesso direto ou indireto a uma diversidade de mídias e aparatos tecnológicos: TV, vídeos, cinema, internet, jornais, revistas, materiais publicitários, computadores, celulares, aparelhos de som e comunicação, *videogames*, etc. Independente da posição contra ou a favor dessas mídias e aparatos, é fato que elas interferem nos processos de aprendizagem, no modo de pensar e nas relações que os alunos fazem com o mundo em que vivem. Nossos alunos são produto do nosso tempo. Não se pode ignorar que essas influências repercutem nos processos de ensino e aprendizagem. Compreender como são as relações que os meios de comunicação e as tecnologias têm com o cotidiano é importante para definir um projeto didático voltado para a formação do cidadão, mesmo que ele tenha apenas onze ou catorze anos de idade.

Atenção aos conteúdos e suas conexões

CONTEÚDO DIGITAL

A base do conhecimento matemático é o raciocínio matemático, diferente do senso comum que muitas vezes associa inteligência matemática ao domínio das técnicas de cálculo do Ensino Fundamental. Nesta coleção buscamos interpretar e desenvolver o que está proposto nos PCN, com destaque para as conexões dos conteúdos e tópicos que entendemos ser fundamentais para que os alunos possam aprender Matemática:

- reconhecimento de representações equivalentes de um conceito;
- uso de conceitos de um campo da Matemática em outro campo da mesma Matemática ou de outras disciplinas;
- redefinição de conceitos quando associados a novos contextos matemáticos;
- retomada de conceitos e técnicas em relação a novas situações-problema.

Projetos

Por suas características, os projetos são situações que motivam os alunos e contribuem para torná-los ativos, críticos e cooperativos. A seguir estão listados os pressupostos organizados pelo prof. Paulo Abrantes, da Universidade de Lisboa, em seus trabalhos de pesquisa sobre Pedagogia de Projetos e experiências.

- Um projeto é uma atividade intencional. O envolvimento e empenho dos alunos é uma característica-chave do trabalho de projeto, o qual pressupõe um objetivo que dá unidade e sentido às várias atividades, bem como um produto final que pode assumir formas muito variadas, mas procura responder ao objetivo inicial e reflete o trabalho realizado.
- Num projeto, a responsabilidade e a autonomia dos alunos são essenciais. Os alunos são corresponsáveis pelo trabalho e pelas escolhas ao longo das fases do projeto. Em geral, fazem-no em equipe, pelo que a cooperação está também quase sempre associada ao trabalho de projeto.
- A autenticidade é uma característica fundamental de um projeto. O problema a resolver é relevante e tem caráter genuíno para os alunos. Não se trata de uma mera reprodução de algo já feito por outros. Além disso, o problema não é independente do contexto e os alunos procuram construir respostas pessoais originais.
- O projeto envolve complexidade e resolução de problemas. O objetivo central do projeto constitui um problema ou uma fonte geradora de problemas. Um projeto é uma atividade já relativamente elaborada e com algum grau de complexidade.
- Um projeto tem um caráter prolongado e faseado. É um trabalho que se estende ao longo de um período mais ou menos prolongado. Não se chama de projeto a uma tarefa que pode ser executada quase imediatamente, ainda que se trate de um problema difícil. Além disso, um projeto percorre várias fases: escolha do objetivo central e formulação de problemas, planejamento, execução, avaliação e apresentação dos resultados.

In: *Avaliação e Educação Matemática*, série Reflexões em Educação Matemática. MEM/USU-GEPEM, vol.1. 1995.

Abordagem histórica

A abordagem adotada nesta coleção, embasada nas colocações abaixo, dá grande importância à história da Matemática.

- "para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal, diversificada nas suas origens e na sua evolução". Ubiratan D´Ambrosio (1996)
- "para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvida pela humanidade". Ubiratan D´Ambrosio (1996)
- porque a História constitui um fator de humanização no ensino da Matemática: a História constitui um fator de motivação nas aulas de Matemática e contribui para a melhoria da qualidade das aulas.
- porque os estudos recentes indicam que a utilização da História na sala de aula contribui para facilitar a aprendizagem da Matemática, uma vez que a História pode esclarecer sobre as origens e aplicações da Matemática e revelar o conhecimento matemático como resultado de um processo evolutivo.

Em síntese, a abordagem histórica contribui para humanizar a Matemática, dar-lhe o devido lugar como parte do patrimônio cultural e científico da humanidade, para assim desmistificá-la, pondo em xeque a crença de que se trata de uma ciência feita por gênios que a inventaram do nada, desprovida de vínculo com o mundo real.

Nesta obra, a abordagem histórica é feita na maioria dos capítulos em que pode contribuir para que os alunos compreendam o processo de desenvolvimento de uma ideia, conceito ou técnica. Procuramos ir além do tratamento factual ou anedotário, como meio de "adornar" um determinado conteúdo. Em alguns tópicos o conhecimento dos obstáculos epistemológicos do desenvolvimento de um determinado conceito contribui para que os alunos compreendam seus próprios obstáculos cognitivos, ajudando-os a superá-los.

Sempre que possível apresentamos a etimologia do termo matemático utilizado, para que os alunos façam conexão entre o sentido atribuído no início da construção de uma ideia, relação ou objeto, e seu sentido atual, para melhor compreender o processo de conceituação ao longo da história.

Foco no raciocínio matemático

Raciocinar é uma ação do pensamento de natureza complexa. Um aluno, ao efetuar corretamente uma série de contas – o aluno "bom de conta" —, não está necessariamente raciocinando ou desenvolvendo sua inteligência. A crença popular atribui aos alunos "bons" de Matemática a qualificação de inteligentes. Entretanto, outras áreas do conhecimento também desenvolvem a inteligência e o raciocínio lógico: o xadrez, a gramática e a literatura, são alguns exemplos, entre os muitos que poderíamos dar.

Não se pode pensar que a aprendizagem se dá automaticamente após a leitura de um tópico e a execução de algumas atividades ligadas a ele. E nem que se possa avaliar o que foi aprendido por meio de uma prova com questões semelhantes às que foram desenvolvidas em sala de aula.

Um aluno que tenha se dado muito bem em uma determinada prova pode não ser capaz de transferir os conhecimentos que utilizou na realização dessa prova para situações diversas, em contextos diferentes ou com acréscimo de outras variáveis.

Esta coleção oferece aos alunos um vasto acervo de situações matemáticas bem diversificadas, nas quais as tarefas solicitadas extrapolam os esquemas de memorização e aplicação de regras.

Muitos especialistas tentaram definir e expressar "o que é o raciocínio". O professor Joaquim Gimenez, da Universidade de Barcelona, organizou um conjunto de estudos sobre a natureza do raciocínio que sintetizou:

Raciocinar é uma característica humana que responde a algo que nos é proposto. Comporta um conjunto de ações cognitivas e, no âmbito do educativo, parte de um diálogo que se estabelece em uma situação didática.

Isso implica:

- reconhecer que estão nos questionando algo. Entender, interpretar, reformular, adaptar, selecionar;
- integrar intuições sobre um tema. Tratar de explicar o próprio pensamento sobre algo. Explicar, intuir, elaborar, relacionar, exemplificar;
- elaborar uma conjectura. Explicitá-la. Identificar, explicar, considerar, oferecer um resultado; defendê-la e contrastá-la. Implicar-se, argumentar, desenvolver, descrever;
- explicar o que funciona e por que algo funciona. Dar razões do que está sendo observado;
- tratar de generalizá-la. Analisar um aspecto com maior profundidade, problematizando: Ocorrerá sempre? Em que casos? Descontextualizar, simular, experimentar, sistematizar, justificar. Transformar, ampliar, desenvolver, convencer;
- imaginar um caminho que leve a uma demonstração autêntica. Frasear, contrastar, estruturar, validar, assegurar. Raciocinar mediante afirmações-chave já demonstradas. Tratar de estabelecer um rigor por meio de abstrações;
- refletir seu interesse e provocar novos desafios. Problematizar, aplicar, reinterpretar. Ser capaz de reconhecer limitações dentro do que se está trabalhando;
- definir dentro de um universo determinado.

Adaptado de: A. Bell, N. Balacheff, G. Hanna em 1997 por J. Gimenez.

O raciocínio de qualquer estudante sobre os vários campos da Matemática baseia-se em argumentações escritas ou orais, com várias características, que estão listadas no quadro abaixo, para as quais o professor deve estar atento.

Sempre que possível procuramos tratar o raciocínio matemático desta perspectiva, explicitando o que está sendo tratado e observado.

Na maioria dos comentários para o professor, discutimos as possíveis hipóteses do que os alunos podem formular diante de uma situação ou raciocínio, para assim o professor poder conduzir, institucionalizando o fato e a descoberta matemática, ainda que de forma parcial.

Características do raciocínio	Ações do aluno
Correto	Se dá uma resposta teoricamente válida.
Estruturado	Se organiza, mediante uma análise de possibilidades, ainda que se deixem algumas possibilidades de lado.
Pormenorizado	Se analisa todos os possíveis casos.
Consistente	Se justifica as intuições, dá argumentos.
Completo	Se descreve todos os casos até o final.
Adaptado	Se sugere uma relação teoria-exemplo.
Coerente	Se é logicamente correto, ainda que alguma premissa não seja válida.
Aplicável	Se sugere onde pode ser aplicado.

GESTÃO METODOLÓGICA E ORGANIZAÇÃO DA AULA

CONTEÚDO DIGITAL

Nesta obra muitos assuntos são tratados em mais de um volume, com abordagens distintas. É o caso das frações, das porcentagens, dos vários conteúdos da Geometria e das equações, entre outros. Trata-se de uma opção consciente cujo objetivo principal é garantir aprendizagem sólida dos conteúdos tratados por parte dos alunos. São escolhas baseadas em estudos incontestáveis sobre processos de aprendizagem, currículo e metodologia.

Para discutir seus fundamentos vamos listar algumas características do chamado currículo tradicional em Matemática. A primeira característica é a de explorar determinados tópicos numa única etapa da grade curricular, baseados na crença de que conteúdos matemáticos podem ser aprendidos em certo momento do programa ou que um determinado conceito é reserva de um determinado ano. Trata-se de uma visão antiga: houve um tempo em que frações só eram abordadas no 6º ano, razões e proporções somente no 7º ano, Álgebra no 8º e funções no 9º ano.

Quando o autor desta coleção estudou frações, aos 10 anos de idade, teve que estudar tudo sobre frações em um pacote único, das noções iniciais às frações equivalentes, da operação de adição à regra para dividir frações. Embora a compreensão do porquê da regra de divisão de frações só tenha ficado clara na vida adulta, quando estudava Matemática na universidade.

Acreditar que os alunos do 6º ano são capazes de produzir significado para a divisão de frações é um equívoco. Quando ensinamos tópicos como adição e divisão de frações, sem nos preocuparmos com os graus de dificuldade de uma operação e outra, estamos "colocando o carro na frente dos bois", como se diz popularmente. Trata-se de uma abordagem que foi herdada de um tempo em que se acreditava que para o aluno aprender bastava a boa vontade do professor em ensinar, sem preocupação sobre como os alunos então compreendendo o que está sendo proposto.

Muitos conteúdos são "ensinados" precocemente, sem levar em conta questões e obstáculos de natureza didática e cognitiva que interferem na aprendizagem. Estudos recentes mostram que tópicos como a divisão de frações podem ser melhor compreendidos e permanecerem como conhecimento estável quando os alunos tiverem mais experiência matemática, ou seja, com noções básicas mais sólidas de pensamento proporcional e algébrico. Esse e outros motivos é que justificam nossa opção de retomar frações em todos os livros, com distintas gradações de complexidade e explorando o desenvolvimento físico, cultural e cognitivo dos alunos (veja o quadro de conteúdos página 20).

Dificilmente um conteúdo ou um grupo de conceitos poderá ser plenamente apreendido em um único momento da vida escolar. É necessário que sejam tratados de múltiplas perspectivas, em contextos variados, e em níveis distintos de complexidade.

Outra característica é sobre pré-requisitos e revisão de tópicos. Na concepção mecanicista, que marca muitas das práticas tradicionais, quando algum conteúdo é repetido, a justificativa é que este não foi bem construído numa etapa anterior, daí a necessidade de retomá-lo, para os alunos "lembrarem", é a chamada revisão. Outros professores utilizam a revisão para ligar um tópico ensinado antes com o tópico que será ensinado depois, sempre com a intenção de construir um referencial de apoio para o aluno.

As pesquisas sobre processos de aprendizagem consideram que essas escolhas, na maioria das vezes, são inadequadas e praticadas desse modo mais por tradição do que por eficácia. Apesar desse tipo de concepção vigorar ainda hoje em muitas salas de aula do Ensino Fundamental, tal prática é questionada por especialistas e está na contramão das diretrizes curriculares vigentes, baseadas em inúmeros estudos que mostram a importância do tratamento dos conceitos ao longo de períodos, às vezes longos, com gradação do nível de complexidade.

Não queremos que os alunos "aprendam" conteúdos sem saber do que se tratam ou o que estão fazendo. Perseguimos a significatividade de tudo o que for ensinado.

Em nosso projeto não fazemos revisão, e sim revisita, pois procuramos romper com essa visão abordando os conteúdos em vários momentos da vida escolar dos alunos do 6º ao 9º ano.

Em nossa proposta, tratamos os conteúdos como construções que precisam ser exploradas em momentos distintos e de *diferentes perspectivas*, o que difere da ideia de retomada apenas com o espírito de uma revisão de conteúdo.

Nesta coleção, um mesmo conteúdo pode ser tratado de forma lúdica ou formal, mas sempre problematizadora. Lúdica, para que os alunos se acerquem das primeiras noções de um conceito ou procedimento; formal num estágio em que já estão em condições de abstrair a estrutura do objeto matemático em estudo e em condições de generalizar; problematizadora sempre, com gradação de complexidade, permitindo o desenvolvimento de novas relações, percepção de propriedades e estabelecimento de conexões dos diversos aspectos do conteúdo, objeto de estudo. Podemos chamar essa abordagem de *tratamento em espiral*, mas fazemos questão de reforçar que entendemos o desenvolvimento em espiral na perspectiva de uma releitura, uma revisita que leva a uma reconstrução conceitual.

Chamamos a atenção para o fato de que a metodologia aqui adotada admite certa flexibilidade. Assim, os professores podem implementá-la com autonomia, fazendo modificações pontuais para adaptá-la, complementando e criando novas situações e propostas em função da realidade e da cultura locais, das necessidades e dos objetivos da instituição escolar e do estágio de conhecimento dos alunos.

Gestão da sala de aula

CONTEÚDO DIGITAL

Professor como agente pedagógico mobilizador

Na sala de aula, o professor exerce vários papéis ao mesmo tempo, ele é responsável por gerenciar ações das mais diversas naturezas como catalisador, instigador, organizador, legitimador, árbitro, etc. A ele cabe conhecer o conteúdo e, além disso, os alunos, sua cultura, seus saberes, as características psicoafetivas da faixa etária, assim poderá desenvolver melhor o seu trabalho, promovendo e gerenciando debates sobre ideias matemáticas, processos de solução, concepções, valores e experiências matemáticas vividas pelos alunos ou por ele mesmo em contextos extraescolares.

As salas de aula devem contemplar espaços – inclusive as próprias paredes – em que se possam afixar murais, trabalhos e outras produções dos alunos. Tornar públicas essas produções gera reflexões, questionamentos e novos problemas. Dependendo dos recursos disponíveis na escola, o trabalho de Matemática pode ser desenvolvido em espaços para além das paredes da sala de aula: na biblioteca, na sala de informática, no pátio e em outros ambientes.

A condução do que ocorre dentro da sala de aula é uma atividade complexa de responsabilidade do docente. Para os alunos, o professor é referência e modelo, o que lhe confere uma autoridade construída. Essa legitimidade deve ser exercida e consolidada sem receios.

Sem a pretensão de esgotar o assunto, vamos discutir a seguir alguns aspectos importantes do dia a dia da sala de aula, apresentar ideias e propor sugestões.

Alunos ativos em um ambiente de trocas no trabalho em grupo

A sala de aula é um ambiente complexo e pode ser concebida como um laboratório, uma usina de conhecimento, um centro cultural, um ambiente de trocas sociais, culturais, cognitivas e afetivas.

Na escola, as relações devem ser o centro das ações de professores e alunos. Não há mais lugar para a aula asséptica, silenciosa, na qual o professor atua como detentor único do conhecimento e vai liberando informações aos poucos, sem levar em conta os interesses, os obstáculos, as curiosidades e determinadas necessidades dos alunos. Alguns autores discutiram esse tipo de ensino. Paulo Freire (2005), um dos nomes mais importantes da educação e da cultura brasileira, denominou de "concepção bancária de conhecimento" essa visão sobre o ensino.

Para Freire, o aluno é o sujeito de sua transformação, não é um receptáculo vazio de conhecimentos e experiências pessoais, afetivas, sociais e culturais. Mais recentemente outros autores especialistas em psicologia cognitiva, como César Coll, têm destacado a importância das interações, em um ambiente dinâmico e a consideração aos conhecimentos prévios dos estudantes. O educador e matemático Ubiratan D'Ambrósio, um dos principais nomes da Educação Matemática brasileira, destaca a importância de se levar em conta a cultura e os saberes dos estudantes de qualquer idade, nível social e cultural.

Ao elaborar esta obra didática partimos do princípio de que os alunos trazem para a escola uma preciosa carga de conhecimentos, cabendo ao professor levá-los em conta e, juntamente com suas experiências e sua cultura, consolidar a gestão e o desenvolvimento pleno de seu projeto pedagógico.

Estudos sobre aprendizagem indicam que os alunos aprendem melhor quando têm oportunidade de trocar ideias entre si, o que valoriza as atividades em grupo na sala de aula, que dão conta de muitas funções e objetivos, como:

- instigar os alunos a pensar do ponto de vista do outro, em condições mais igualitárias;
- exercitar sua argumentação;
- aprender a trabalhar cooperativamente;
- estabelecer relações sociais.

Nas atividades de interação com os colegas, os alunos arriscam-se mais, podem cometer erros, porém com menos receio. O professor pode orientar as atividades em grupo, considerando alguns aspectos:

- garantir que os alunos desenvolvam distintas habilidades nas atividades em grupo, por exemplo, pode sortear um deles para exercer a função de relator. Todavia, a relatoria do trabalho deve ser feita em rodízio, para que todos experimentem os diversos papéis num trabalho cooperativo e coletivo;
- as dúvidas devem ser discutidas no grupo antes de serem levadas ao professor;
- o professor deve alternar a formação dos grupos.

Dependendo da atividade, podem-se aceitar grupos "geográficos", em que o critério seja a proximidade espacial (essa forma é recomendada quando o tempo é curto e não pode ser desperdiçado com arrumações) ou grupos por afinidade, pois é natural que os alunos gostem de trabalhar com os amigos e amigas.

Contudo, devemos propiciar condições para que os alunos aprendam a conviver com a diversidade, ou seja, que tenham a oportunidade de trabalhar com todos os colegas ao longo do ano letivo: em duplas, grupos livres ou grupos organizados pelo professor ou por algum critério como alunos com dificuldades com alunos que têm mais facilidade de aprendizagem.

O trabalho em duplas, pelas características específicas da relação falar-ouvir, contribui para a construção de relações de confiança, cumplicidade e compromissos de parceria, além do exercício de um modo especial de argumentação e compartilhamento de responsabilidades.

Nas atividades em grupo os alunos aprendem mais do que conteúdos conceituais e procedimentais, há um amadurecimento socioafetivo em que conteúdos atitudinais são aprendidos direta ou indiretamente, contribuindo para a formação moral e ética do estudante.

O professor como gestor, o livro como instrumento

Consideramos o livro didático um recurso importante por seu potencial de ajuda aos professores, principalmente aqueles que têm sobrecarga de turmas e aulas. O livro pode ser utilizado tanto como fonte de informação quanto como modelo didático que auxilia os professores no planejamento de suas atividades docentes, na preparação de aulas, na organização de sequências didáticas e na construção de materiais que possam enriquecer o trabalho.

O livro é importante para os alunos, entre outros motivos, pelos hábitos que desenvolve, como a leitura, a concentração e o ritmo de estudo.

Entretanto, o livro sem o professor não pode dar conta de tudo o que se refere a um projeto pedagógico. O professor no papel de formador e gestor é insubstituível no processo de ensino-aprendizagem.

Entendemos que o bom livro potencializa o trabalho do professor, dá condições para que cumpra seus objetivos de acordo com os princípios pedagógicos que elegeu, resguardando sua **autonomia**.

O professor é o gestor, a autoridade didática responsável pelo ensino e desenvolvimento de seus alunos. É ele quem deve avaliar o conhecimento e o ritmo de aprendizagem, complementando as propostas do livro com informações e atividades, levando em conta as necessidades dos alunos e as especificidades sociais e culturais da comunidade em que o livro é utilizado.

Não elaboramos um livro para ser usado como um receituário, em que o sumário se confunde com o programa. As propostas veiculadas na coleção não devem se sobrepor às decisões e aos objetivos do professor e da comunidade escolar.

Entendemos o livro didático como um instrumento auxiliar da aprendizagem, um potencializador do diálogo entre professor e alunos. Ao professor cabe a organização de seu programa de curso, a partir dos objetivos, princípios e metas traçados. Sob essa ótica, o livro deve ser usado como **um recurso a mais**, e não o único suporte do trabalho docente.

Nossas sugestões e comentários, presentes neste Manual e em azul nos capítulos do livro, procuram estabelecer um diálogo, ainda que indireto, entre o autor e o professor durante a utilização do livro.

O caderno do aluno como meio

Propomos que os alunos usem o livro juntamente com um caderno. Acreditamos que o caderno poderia ser tratado como o **livro de autoria do aluno**. Isso se o professor orientar os alunos a registrar, no caderno, além das lições, os momentos importantes da aula, a proposição de um colega, uma dúvida, um projeto futuro, distintos modos de resolver um problema e representações interessantes. Utilizado desse modo, o caderno funciona como um guia do aluno, sua agenda, um mapa que espelha seu processo de aprendizagem.

Essas ideias não são novas, Malba Tahan dedicou um capítulo inteiro ao uso do caderno escolar, em seu livro *Didática da matemática* (1961), oferecendo sugestões para os professores, como a exigência de capricho e cuidados no uso do caderno, modos de registro, etc. Há vários estudos sobre experiências que dão atenção especial à produção e uso do caderno como recurso que ajuda os alunos a se organizarem e a desenvolverem hábitos e atitudes positivas em relação ao estudo.

A lição de casa

A lição, tarefa ou dever de casa é importante e deve ser frequente. A grande quantidade de atividades do livro deixa oportunidade para que algumas tarefas sejam feitas em casa, contribuindo para dar ritmo ao estudante, que cria sua própria rotina. O professor pode usar a lição de casa para propor aos alunos problemas e/ou atividades que serão objeto de discussão na aula seguinte. Assim, durante a aula, já estarão familiarizados com o tema.

As lições de casa devem sempre ser discutidas em sala. Propor uma tarefa e não dar algum retorno ou continuidade frustra os alunos, causando-lhes a sensação de que a atividade não teve função para a aprendizagem. Essa dinâmica acaba associada a alguma forma de punição.

A discussão das soluções das tarefas de casa pode ser feita por amostragem e com rodízio dos alunos, a fim de que ao longo de uma semana todos os alunos possam dar sua contribuição, percebendo que o professor tem controle de sua produção e está atento às suas dúvidas e descobertas.

As situações de autocorreção são momentos importantes para os alunos desenvolverem hábitos de atenção, organização, disciplina e responsabilidade com os estudos.

Tipos de atividade

CONTEÚDO DIGITAL

Tratamos os contextos e os temas transversais como cenários a serem explorados, os problemas e as atividades como meio e motivo para o estudo de fatos, conceitos e procedimentos matemáticos.

Desse modo procuramos ser cuidadosos na seleção, formulação e escolha do momento adequado para a proposição das tarefas, para que os alunos aprendam os conteúdos matemáticos de forma significativa, isto é, substantiva, não arbitrária e não mecânica, com potencial de gerar novos conhecimentos.

Nesta coleção há uma atenção especial à diversidade das atividades propostas. Essa diversidade é fundamental para que os alunos adquiram destrezas e desenvolvam habilidades e capacidade de raciocinar, adquirindo certa especialização, que lhes possibilitará aptidão para enfrentar e resolver problemas novos.

O acervo de situações e atividades matemáticas que se faz na escola é bastante diverso. No quadro a seguir comentamos alguns tipos de atividades e sua importância.

Atividade	Descrição
Argumentação	Atividades em que os alunos exercitam seus modos de explicar, demonstrar ou fazer uma escolha, com base em algum fato ou na defesa de um ponto de vista. As demonstrações matemáticas são tipos específicos de argumentação, em geral, carregadas de formalismo, uso de linguagem simbólica e rigor.
Comunicação	Atividades em que os alunos têm como alvo um interlocutor, o que os leva a respeitar o ponto de vista do outro, refletir sobre o próprio pensamento para comunicar uma ideia, uma descoberta, um fato, uma regra, etc. Ao longo do livro há diversas atividades que propõem aos alunos discutirem entre si sobre o que pensaram, descobriram e resolveram. Também fazem parte dessa categoria atividades em que os alunos são solicitados a codificar, decodificar, simbolizar, descrever, representar, etc.
Construção	Atividades que implicam uma produção: o desenho de uma figura, a decomposição ou confecção de um objeto. Em geral, envolvem a utilização de materiais (régua, tesoura, papel, cola, palitos e outros).
Criatividade	Atividades que propiciam uma produção pessoal, com conhecimentos próprios, imaginação, senso estético e certa engenhosidade.
Descoberta	Atividades específicas que provocam a percepção de regularidades que podem levar a um resultado geral a partir de casos particulares. Algumas atividades desse tipo estão identificadas com um ícone de **Desafio olímpico**.
Exploração	Atividades de caráter exploratório, podem ser manipulativas ou mentais, e objetivam a percepção de regularidades e obtenção de resultados que levam a descobertas ou a uma conceituação.
Investigação	Atividades cuja resolução não é imediata, por meio da aplicação de uma regra ou algoritmo. Para sua solução é necessário estabelecer relações (informações, dados do problema, outros conhecimentos), observar regularidades, fazer hipóteses e verificações, fazer conexões, etc. Nessas atividades os alunos desenvolvem estratégias. O resultado de uma atividade de investigação nem sempre se expressa por meio de uma resposta única ou fechada.
Pesquisa	Atividades cuja dinâmica exige que os alunos busquem ou produzam informações fora do livro e, em alguns casos, fora da aula, como entrevistar pessoas, pesquisar em livros ou *sites*, consultar uma tabela de dados, etc. No livro essas atividades estão contempladas na seção **Para pesquisar**.
Representação	Atividades que levam os alunos a imaginar, interpretar, modelar, reproduzir, ampliar e reduzir, copiar, desenhar, planejar, esboçar, esquematizar ou formular problemas e descrever procedimentos que serão tornados públicos por meio de comunicação verbal ou visual.

A coleção inclui atividades que familiarizam os alunos com um conceito ou técnica, consolidando destrezas que ativam e desenvolvem a memória.

Em alguns casos, como no cálculo, apresentamos atividades de memorização que têm como finalidade levar os alunos a fixar um conjunto de fatos essenciais, como tabuadas, múltiplos e divisores, operações com frações, porcentagens, raízes quadradas de quadrados perfeitos, etc. Essas atividades aparecem na forma de problemas, desafios, jogos ou atividades de investigação. Um caso particular são as atividades de cálculo mental e estimativa, muito valorizadas em todos os capítulos que envolvem algum tipo de cálculo: visam levar os alunos não só a exercitar, mas também a valorizar essas modalidades de cálculo. Por fornecer ao professor informações preciosas sobre como os alunos estão aprendendo, individual e coletivamente, onde e porque erram etc., qualquer atividade pode ser considerada como um momento de avaliação.

Uso de materiais e recursos

Nas aulas de Matemática os professores podem e devem usar recursos diversos, a fim de atingir objetivos didáticos, dar eficácia a seu trabalho ou contribuir para facilitar a aprendizagem de conceitos e procedimentos. Entre os recursos materiais destacamos jogos, materiais manipulativos, instrumentos de cálculo, de medição e de construção.

Jogos como atividades de aprendizagem

Há diversos jogos disponíveis em livros e *sites* que contribuem para o aprendizado de conceitos e desenvolvimento de habilidades. Recomenda-se que os jogos utilizados em aula sejam de simples concepção, construção e facilmente encontrados: dominós, cartas de baralho, dados, jogo de memória, fichas, trilhas, jogos de tabuleiro, etc.

Nos jogos é importante que o professor organize quadros de controle com o registro de informações relevantes para a avaliação do desenvolvimento dos alunos. Por exemplo:

Aluno	Joana	Ricardo
Entende as regras do jogo	Sim	Sim
Aceita as regras, sabe perder	Sim	Não
Colabora com colegas, sem resolver pelo outro	Sim	Não
Interpreta e controla a operacão matemática envolvida no jogo	Sim	Sim
Observações	Tenta antecipar a jogada do adversário.	Não tem visão do todo.

Os professores podem refletir mais sobre o papel dos jogos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática lendo os PCN do Ensino Fundamental do segmento de 6º ao 9º anos de Matemática (antigas 5ª a 8ª séries) (p. 46-47) ou por meio de bibliografia especializada, como os livros citados na bibliografia recomendada ou artigos.

Recursos materiais e seus benefícios

Muitos são os autores e pesquisadores que atribuem aos jogos e materiais manipuláveis a função de mediadores que podem prover de significado a atividade matemática. Vários materiais se prestam a essa mediação, desde que a condução da atividade explore a intuição e os raciocínios dos alunos com base nas discussões sobre os contextos, as regularidades e os processos envolvidos na resolução dos problemas.

As unidades temáticas do livro fazem referência a um conjunto diverso de materiais, instrumentos e jogos que podem ser organizados por classes ou funções, por exemplo:

- **materiais estruturados:** ábaco, material dourado, Tangram, geoplano, malha quadriculada;
- **jogos:** dados, dominós, baralhos, cartelas de memória, labirintos, liga-pontos, trilhas, tabuleiros, fichas, contas, varetas, pentaminós, Tangram;
- **materiais para construção:** tesoura, régua, dobraduras, recortes, embalagens, mosaicos, palitos, moldes, cartolina;
- **instrumentos de medição:** régua, fita métrica, metro articulável, trena, transferidor, balanças, relógios, aparatos de medição direta e indireta;
- **instrumentos de cálculo:** ábaco, réguas, calculadoras;
- **mídias:** internet, vídeos, TV, celulares e máquinas fotográficas;
- **publicações:** jornais, revistas, livros didáticos, paradidáticos, livros de apoio, romances e contos, entre outros.

Calculadoras, raciocínio e competências de cálculo

Em pleno século XXI, a discussão sobre se calculadoras e computadores devem ou não serem utilizados no ensino não é mais pertinente. Essa discussão gerou alguma polêmica no século passado, mas a realidade se impôs, e há 20 anos o uso desses equipamentos faz parte das orientações curriculares, em especial dos PCN e currículos regionais. O que ainda se discute é como devem ser usados na sala de aula para que os alunos desenvolvam suas competências de cálculo: com raciocínio, e não só apertando teclas, mecanicamente.

A calculadora deve ser usada como um recurso a mais, um instrumento do qual se lança mão para resolver certos tipos de tarefas em um dado contexto. Nas atividades de cálculo propostas nesta coleção, as atividades com calculadoras potencializam a capacidade dos alunos de fazerem, mais e melhor, cálculos mentais e estimativas, bem como contribuem para compreenderem o que fazem (às vezes, mecanicamente) no cálculo escrito.

As ideias sobre uso de calculadoras que aparecem na coleção são uma pequena amostra de um conjunto rico de atividades significativas, cujo propósito é levar os alunos a extraírem o máximo de suas capacidades cognitivas, em especial no que se refere às competências de cálculo. Cabe ao professor explorar as calculadoras e as atividades a elas associadas, propondo situações didáticas que os preparem para enfrentar problemas autênticos.

Na abordagem realista, que caracteriza as situações-problema propostas nos vários capítulos da coleção, a calculadora adquire especial importância, pois possibilita que os alunos enfrentem problemas com seus verdadeiros valores, em geral números "malcomportados", isto é, em que as quantidades não são números "fáceis", inteiros, pequenos, dezenas completas, etc. Os preços e medidas se expressam por meio de números "quebrados" (decimais ou frações), do mesmo modo que os dados reais que se exploram nos conteúdos de Tratamento da Informação. A opção por trabalhar com situações-problema com os números tais como aparecem no dia a dia, no comércio e na mídia poderia ser um obstáculo, porém deixa de ser se os alunos usarem calculadoras raciocinando sobre o que estão fazendo. Estudos mostram que alunos, principalmente aqueles que têm dificuldades em aprender Matemática, têm mais sucesso na resolução de problemas aritméticos do dia a dia quando usam calculadoras, pois, livres do obstáculo do cálculo "complicado", do trabalho braçal e demorado e às vezes enfadonho, conseguem focar seu pensamento nas relações entre as grandezas envolvidas nas situações-problema, o que os leva a adquirir mais confiança nas atividades de resolução de problemas matemáticos.

Nesta coleção, a calculadora é explorada de modo equilibrado e gradativo, com atividades que vão da familiarização com as teclas à resolução de desafios, variando a abordagem numa gradação que vai da simples à complexa, e eventualmente lúdica, visando o aprofundamento dos conhecimentos sobre os algoritmos e as fórmulas, desenvolvendo suas capacidades de fazer estimativas, cálculo mental e investigações.

O uso sensato das calculadoras contribui para a formação de cidadãos aptos a intervir numa sociedade em que a tecnologia ocupa um espaço cada vez maior. Nesse cenário, os alunos devem ter uma formação tão diversa quanto possível, estar preparados para enfrentar problemas novos e, sobretudo, ter desenvolvidas suas capacidades para simular, fazer relações complexas, articular variáveis, elaborar modelos, investigar, codificar e decodificar, comunicar-se, tomar decisões e aprender por si. Esses atributos são necessários para a formação do cidadão contemporâneo, não importando sua função ou profissão futura no mercado de trabalho.

Computadores e programas

"As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas".

PCN de Matemática, 1998, p. 43.

Tal como no caso da calculadora, não está mais em questão se devemos ou não usar as ferramentas de informática no ensino, e sim como fazer, o que usar e com que abordagem.

Estamos prestes a testemunhar uma mudança profunda no currículo da Matemática que vem se adaptando à cultura digital. Hoje já é possível dispensar alguns recursos e métodos pedagógicos e utilizar ferramentas computacionais, ou programas de apresentação para ensinar e aprofundar conteúdos. Há uma vasta oferta de programas, como planilhas de cálculo que permitem produzir tabelas e gráficos e fazer simulações, e *softwares* de Geometria Dinâmica, como o Geogebra, que é um *software* gratuito.

Não é possível listar aqui todos os programas educativos que podem ser usados nas aulas de Matemática. Além dos aplicativos comuns como editores de texto, planilhas eletrônicas, ferramentas de desenho, buscas, etc. destacamos a seguir alguns programas e suas possibilidades.

LOGO é o primeiro de sua categoria, é uma linguagem de programação criada em 1968 pelo educador matemático Seymour Papert, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), um dos pioneiros da inteligência artificial. Anos depois serviu de base para várias versões do programa educativo que pode ser considerado o percursor dos *softwares* de Geometria Dinâmica, que permite que os alunos aprendam noções de programação para construir figuras e produzir animações e é recomendado para qualquer ano do Ensino Fundamental. No Brasil, um dos principais centros de estudos sobre o LOGO é o Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED), da Unicamp. Entre as várias pesquisas em curso destacam-se os projetos LEGO-LOGO, uma versão da linguagem criada por Papert para que os alunos aprendam as primeiras noções de robótica por meio da construção de mecanismos eletrônicos e módulos construtivos.

Softwares de Geometria Dinâmica são programas de construção de figuras geométricas bi e tridimensionais, que usam fatos e ferramentas da Geometria

Euclidiana para construir, movimentar e transformar figuras, por meio de ampliações e reduções, giros, reflexões translações, cortes, etc. Os primeiros foram desenvolvidos no final da década de 1980: Cabri Géomètre (1988) e Geometer´s Sketchpad (1989). Hoje há muitos outros de distintas procedências e com uma variedade de recursos, destacando-se os seguintes: Geogebra, Geometric Supposer, WinGeom, Euklid, Cinderella, Geometricks, Régua e Compasso (C.a.R.), Poly, Calques 3D, Geoplan e outros.

No Geogebra, além de fazer construções com régua e compasso virtuais, é possível estudar e visualizar objetos tridimensionais transformando-os por meio do teclado, movimentando o *mouse* ou tocando na tela de computadores, *tablets*, lousas eletrônicas e outros meios.

Outra categoria é a dos *softwares* de funções que permitem a construção de gráficos e tabelas, dos quais destacamos: Geogebra, Winplot, Winmat, Graphmática, Graph, Modellus e outros.

Outros tipos de recurso são os *Applets*, aplicativos que se pode explorar de modo interativo, pela internet. Recomendamos que sejam utilizados *links* confiáveis, disponíveis em páginas de universidades públicas e no portal Domínio Público do MEC e outros portais regionais, como o da Secretaria de Educação do Paraná. Veja os *links* a seguir.

- <www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 9 jan. 2015.
- <www.matematica.seed.pr.gov.br/>. Acesso em: 9 jan. 2015.

Somos críticos do fascínio exagerado exercido pelos aparatos eletrônicos que leva a um consumismo desmesurado, defendemos o uso consciente e planejado dos recursos disponíveis.

Reconhecemos as limitações do objeto físico livro didático, por seu aspecto discursivo e estático, e cuja interface com as ferramentas digitais ainda está por ser melhor aproveitada. A relação entre os instrumentos digitais como computadores e o livro de papel, no formato atual, em geral não consumível, fica aquém de suas potencialidades. Entretanto, defendemos que os professores procurem inovar investigando maneiras criativas de fazer bom uso de ferramentas da informática em sintonia com o livro de papel, complementando-o.

ESTRUTURA DA OBRA

Cada livro está estruturado em quatro unidades e cada unidade é composta de três capítulos.

Os capítulos de uma unidade podem ter em comum um campo conceitual, um campo de aplicação ou um nível de complexidade.

As unidades são compostas de diversos tipos de atividades, que têm objetivos específicos dependendo da seção em que são propostas e o nível de complexidade.

Nesta coleção, as atividades estão distribuídas nas seções **Atividades**, **Revise o que aprendeu** e **Para pesquisar**.

O trabalho de reflexão e interpretação de textos é feito nas seções **Matemática em toda parte**, **Engenhocas e ideias engenhosas** e **Matemática tem História**. Essas seções são facilmente identificáveis tanto para o aluno quanto para o professor, com o objetivo de facilitar a abordagem, a aprendizagem e o trabalho com os textos em sala de aula.

Finalmente, temos a seção **Revista da Matemática** que encerra cada capítulo com textos lúdicos e informativos relacionados ao conteúdo do capítulo.

Apresentamos a seguir uma descrição mais completa de cada seção.

Atividades

Nesta seção, como o próprio nome já diz, são apresentadas atividades cuja finalidade é aplicar e consolidar os conteúdos estudados, sejam eles de natureza conceitual ou procedimental.

Em geral são atividades de aplicação do conteúdo estudado, podendo ser de resolução de problemas, cálculo mental, estimativas e outras em que os alunos podem usar a calculadora. Nesse último caso o cálculo é um meio auxiliar para os alunos resolverem um problema, compreenderem uma propriedade ou construírem um conceito.

Procuramos equilibrar as atividades de acordo com os níveis de complexidade do Pisa (veja página 26), com cerca de 30% de atividades de reprodução, em que os alunos aplicam o que aprenderam; 50% de atividades de conexão de complexidade média, em que os alunos resolvem problemas utilizando não só o que estão estudando, mas fazendo relações com conhecimentos já aprendidos; e 20% de atividades de reflexão, mais complexas, nas quais são estabelecidas relações entre vários campos conceituais, utilizadas ferramentas diversas, descobertos fatos e sistematizados os conceitos.

Em alguns casos o bloco de atividades traz questões que serão aprofundadas no bloco seguinte, para instigar o aluno sobre o que será tratado e/ou formalizado em seguida, tendo assim uma função catalisadora.

Entre as atividades propostas destacamos aquelas denominadas *Desafios olímpicos*, que são mais complexas que as demais atividades. Fica a critério do professor se elas serão propostas a todos os alunos ou somente aos alunos que têm habilidades matemáticas mais desenvolvidas e, por isso, necessitam de mais desafios.

Matemática em toda parte

Apresenta textos sobre temas variados cujo objetivo é mostrar aos alunos como a Matemática está presente nas mais diversas atividades do cotidiano, que muitas vezes passam despercebidas.

Em razão da grande diversidade dos temas abordados nessa seção, a leitura dos textos pode gerar reflexões extracurriculares e ser trabalhada de diversas formas.

Engenhocas e ideias engenhosas

Esta seção apresenta ideias e soluções criativas para problemas matemáticos corriqueiros, com o objetivo de mostrar aos alunos, de maneira bem-humorada, que pode ser divertido resolver um problema matemático.

Matemática tem História

Nesta seção são apresentados fatos ou situações de natureza histórica relacionados direta ou indiretamente ao conteúdo do capítulo. A seção fornece informações com a função de complementar os objetivos do capítulo. O fato de ser complementar não significa que seja um conteúdo de menor relevência.

Para pesquisar

Esta seção convida os alunos a levantar dados, informações que podem servir para melhor compreender um conteúdo. A pesquisa pode ser feita em horário e ambiente fora da aula, e o conteúdo da pesquisa, em geral, pode ser utilizado como apoio para o que será estudado em seguida ou, eventualmente, para que os alunos verifiquem que o que foi estudado se presta a resolver determinados problemas.

Revise o que aprendeu

Seção de atividades cuja função principal é de reconhecimento e fixação do conteúdo aprendido, na qual os alunos testam suas capacidades para explorar problemas semelhantes aos estudados ou resolver novas situações levemente mais complexas. É recomendável que algumas dessas atividades (ou todas) sejam respondidas individualmente e, depois, comentadas com todo o grupo.

Revista da Matemática

Esta seção encerra cada capítulo com textos lúdicos, culturais e informativos sobre o conteúdo estudado. Ela é uma seção visualmente diferente das demais, de modo a permitir uma leitura mais descontraída e atrativa para os alunos.

QUADROS DE CONTEÚDOS TRABALHADOS NA COLEÇÃO

Os quadros a seguir apresentam a distribuição dos conteúdos ao longo dos quatro volumes da coleção.

Pensamento numérico

O pensamento numérico na coleção é tratado de múltiplas perspectivas: do senso numérico às modalidades de cálculo, do estudo das propriedades dos números à construção dos vários campos numéricos.

Organização do pensamento numérico na coleção

		6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Ideias gerais		História dos sistemas de numeração, bases, representação, nomenclatura, propriedades, operações inversas e cálculo mental.	Aplicações e resolução de problemas.	Aplicações e resolução de problemas.	Conjuntos numéricos, propriedades, representações e operações entre conjuntos.
Números naturais		Operações, múltiplos e divisores, mmc, mdc, divisibilidade, números primos, decomposição e potências.	Potenciação, quadrados perfeitos e raiz quadrada exata, aproximações, arredondamento e raiz cúbica.	Aplicações e resolução de problemas.	Conjunto $\mathbb{N}$, expoente zero e 1.
Números racionais	**Frações**	Ideias, relação parte todo, razão. Representação, comparação, números mistos, operações aditivas (+ e −), frações equivalentes, cálculo mental e frações decimais.	Fração como resultado de uma divisão, simplificação de frações, representação na reta numérica, operações multiplicativas (× e ÷), simplificação de frações, aplicações e resolução de problemas.	Aplicações e resolução de problemas.	Conjunto $\mathbb{Q}$, potenciação, expoente racional, dízimas e aproximações de π.
	Decimais	Representação, frações centesimais, comparação, arredondamento, operações de natureza aditiva (+ e −) e multiplicativa (× e ÷).	Representação na reta numérica, aproximações e arredondamento, aplicações e resolução de problemas.	Aplicações e resolução de problemas.	Dízimas e aproximações.
Números inteiros		Ideia de número negativo no termômetro.	Números negativos, números simétricos, noção de módulo, representação na reta numérica, comparação, operações, regra de sinais e expressões numéricas.	Aplicações e resolução de problemas em equações.	Conjunto $\mathbb{Z}$, potenciação e expoentes negativos.
Números reais					Conjuntos numéricos, $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\sqrt{2}$, π, φ, propriedades dos radicais e racionalização.

Pensamento geométrico, espacial e métrico

Há muitos modelos sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Entre os mais estudados destaca-se os níveis de Van Hiele, que propõem um modelo de estratificação do conhecimento em uma série de níveis de conhecimento que permitem categorizar os distintos graus de representação do espaço. Para um aprofundamento deste modelo, veja "O modelo de Van Hiele de desenvolvimento geométrico" em Lindquist (1994), Hershkowitz (1994) e em Alsina (1997).

Os níveis elaborados por Dina e Pierre van Hiele, em sua tese de doutorado no final da década de 1950, são os seguintes:

Nível 1: (**Reconhecimento**): Se reconhecem os objetos e conceitos matemáticos por seu aspecto físico e de forma global, sem distinguir explicitamente seus componentes matemáticos.

Nível 2: (**Análise**): Se reconhecem os componentes matemáticos de um conceito ou uma figura. Podem-se estabelecer relações entre objetos e/ou entre seus componentes, porém só de forma experimental. Não se podem estabelecer relações mediante deduções lógicas nem fazer descrições formais.

Nível 3: (**Classificação**): Se estabelecem relações lógicas e se podem seguir raciocínios dedutivos simples, porém não se compreende a função dos elementos de um sistema axiomático e, portanto, não se sabem manejá-los.

Nível 4: (**Dedução**): Se compreendem e realizam raciocínios dedutivos e demonstrações formais, pois se entende o significado de axiomas, hipóteses, etc.

Embora o modelo ainda seja objeto de estudos, é o mais recomendado para a organização da maioria dos currículos vigentes. Na medida do possível e respeitando a cultura curricular brasileira, organizamos a Geometria ao longo da coleção levando em conta esses estudos (como mostrado nos quadros a seguir), procurando apresentar uma Geometria significativa a partir do cotidiano e do que o aluno tem familiaridade, valorizando a intuição e preparando o terreno para uma formalização que deve ser feita preferencialmente no Ensino Médio.

Organização do pensamento geométrico na coleção

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Ideias gerais	Formas do cotidiano.		Formas tridimensionais.	
Polígonos	Pentaminós, Tangram, nomenclatura, classificação, composição e decomposição de figuras planas.	Polígonos regulares, mosaicos, convexidade, eixos de simetria e ângulos internos.	Simetria, mosaicos escherianos, construção de mosaicos e pentaminós.	Demonstrações de propriedades de polígonos, diagonais, etc.
Ângulos	Reto, agudo e obtuso.	Ângulos em um polígono regular, soma dos ângulos internos, ângulo externo, medidas, uso do transferidor, construção com régua e compasso, dobraduras e bissetriz.	Ângulos opostos pelo vértice, ângulos correspondentes, ângulos alternos internos e bissetriz.	Ângulos no círculo (central, inscrito).
Relações	Paralelismo, perpendicularismo, intersecção e pertinência.	Paralelismo, perpendicularismo e relações angulares.	Paralelas e perpendiculares em figuras tridimensionais, mediatriz e bissetriz.	Congruência e semelhança.
Triângulos e quadriláteros	Nomenclatura e classificação, elementos, lados e diagonais, medidas de lados, altura, soma dos ângulos internos e prova experimental.	Classificação de triângulos, triângulo retângulo, Tangram, quadriláteros, classificação (retângulos, paralelogramos, trapézios, losangos, etc.)	Construção, elementos, propriedades, soma dos ângulos internos, rigidez, construção com régua e compasso, construção em malha quadriculada, pontos notáveis, desigualdade triangular, classificação de quadriláteros, propriedade do paralelogramo, área de triângulos e quadriláteros.	Semelhança, Teoremas de Tales e Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo, introdução à Trigonometria.

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Circunferência e círculos	Formas curvas.	Noção de raio e diâmetro.	Circunferência, círculo e outras curvas, construção, relações de pertinência e intersecção.	Medidas em circunferência, círculo e cilindro.
Demonstrações	Provas intuitivas de regularidades numéricas.	Relações angulares.	Teorema de Pitágoras (relação entre áreas).	Teorema de Pitágoras, relações do Teorema de Tales e relações métricas no círculo.
Formas tridimensionais	Paralelepípedos, formas no cotidiano e planificações.	Volume do bloco retangular.	Poliedros, prismas e pirâmides.	Volume do cilindro.
Simetria	Polígonos regulares.	Números simétricos e eixos de simetria.	Figuras regulares, mediatriz, bissetriz, isometrias (movimentos rígidos).	Eixo da parábola, polígonos regulares e formas circulares.

Representações e localização

Organização do pensamento espacial na coleção

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Representações	Sistemas numéricos, códigos, Matemática na mídia, representação fracionária e decimal.	Linguagem algébrica, pares ordenados, linguagem geométrica, notações e tipos de escalas.	Fórmulas, representações algébricas, representações gráficas, linguagem geométrica e notações.	Fórmulas, representações algébricas, representações gráficas, linguagem geométrica e notações.
Localização	Reta numérica.	Sistema cartesiano.	Sistema cartesiano.	Sistema cartesiano.

Medidas

Organização do pensamento métrico na coleção

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Lineares	Perímetros, sistema métrico decimal, sistema imperial e conversões de medidas.	Resolução de problemas de escalas com distâncias e perímetros.	Resolução de problemas com áreas e perímetros	Perímetro, comprimento da circunferência, relações métricas no triângulo, relações de Tales.
Superfície	Área de figuras por decomposição na malha quadriculada e aproximação.	Noção de área e resolução de problemas.	Fórmulas de área.	Fórmulas de área: círculos, setores, coroas.
Volume e capacidade	História das medidas.	Volume do paralelepípedo e de corpos com formato irregular.	Contagem dos cubos.	Cilindro e princípio de Cavalieri.
Angulares	Ângulo reto por dobraduras.	Transferidor, transferidor de papel, operações com ângulos (divisão, soma, etc.).	Ângulos nos quadriláteros e polígonos.	Relações angulares de duas paralelas cortadas por uma transversal e casos de congruência.
Outras		Conversões.		

O pensamento proporcional

O pensamento proporcional está presente em vários tópicos do currículo do Ensino Fundamental e é base para a compreensão de vários conceitos e domínio de procedimentos. Por exemplo, no estudo das tabuadas, múltiplos e funções, além dos tópicos clássicos como porcentagens razões e proporções. Estudos recomendam um trabalho contínuo e diversificado ao longo de todo o currículo escolar.

Organização do pensamento proporcional na coleção

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Porcentagem	Porcentagem relacionada a frações centesimais e parte de um todo, estratégias de cálculo mental, resolução de problemas e porcentagem na mídia.	Porcentagem relacionada a razão e probabilidade.	Porcentagem nas mídias.	Porcentagem relacionada à taxa de variação.
Razões e proporções	Múltiplos e divisores.	Razões, proporções e problemas de comparação indireta.	Grandezas diretamente e inversamente proporcionais e regra de três.	Semelhança, funções lineares, razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência.
Geometria e proporcionalidade	Relações entre as peças do Tangram.	Ampliação e redução de figuras, escalas, mapas, planta baixa, maquetes, gráficos, retângulos e triângulos semelhantes e construção de gráficos proporcionais.	Retas paralelas cortadas por transversais e construção de gráfico de setores.	Semelhança, Teorema de Tales, introdução à Trigonometria, razão áurea ouro, divisão de segmento em partes iguais, relações de proporcionalidade em figuras ampliadas ou reduzidas, homotetia.
Matemática comercial e financeira	Problemas comerciais com as quatro operações e porcentagem.	Problemas comerciais.	Problemas na mídia.	Juros e descontos.

Ideias da Álgebra

De acordo com Zalman Usiskin, "as finalidades da Álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da Álgebra que corresponde à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis".

Ele descreve as concepções de acordo com o quadro abaixo:

Concepções da Álgebra	Uso das variáveis	Exemplos e comentários
Álgebra como aritmética generalizada.	Generalizadora de modelos (traduzir, generalizar).	Modelo da propriedade comutativa (passagem de casos particulares como $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ para expressões gerais $a \cdot b = b \cdot a$).
Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar).	Processo de equacionamento, resolução de equações, etc.
Álgebra como estudo de relações entre grandezas.	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos).	Estudo de grandezas interdependentes, fórmulas, funções, modelagem, etc.
Álgebra como estudo das estruturas.	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar).	Propriedades dos conjuntos numéricos, regra que define que $a^0 = 1$ e $a^1 = a$, ...

Adaptado de: USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: *Ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

Organização da Álgebra e do pensamento algébrico na coleção

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Linguagem algébrica	Códigos e sequências.	Incógnita.	Variáveis e fórmulas.	Relações de dependência.
Equações	Operação inversa.	Balanças, equações do 1º grau e máquinas algébricas.	Fórmulas e equações, sistemas de equações e regra da falsa posição.	Equações do 2º grau, equações que se reduzem a uma equação do 2º grau, relação entre coeficientes e raízes e inequações.
Cálculo algébrico	Pré-Álgebra.	Operações inversas e propriedades.	Polinômios, operações básicas, redução de termos semelhantes, regras de potenciação, produtos notáveis e fatoração.	Fatoração, produtos notáveis e trinômio quadrado perfeito.
Funções	Múltiplos e regularidades.	Fórmulas básicas de Geometria e fórmulas de conversão.	Sistemas de equações (interpretação geométrica).	Funções polinomiais, função afim, função quadrática e modelos.

Pensamento estatístico e probabilístico

O pensamento estocástico, ou estatístico, e o pensamento probabilístico, ou aleatório, só recentemente vêm sendo estudados no âmbito do currículo e na escola do Ensino Fundamental. No Brasil fazem parte do bloco Tratamento da Informação dos PCN.

O trabalho com a Estatística trata especialmente de analisar a habilidade das pessoas em interpretar, criticar e avaliar informação estatística, discutir e comunicar a informação, compreender seu significado e tirar conclusões a partir da organização de dados. Quanto ao pensamento probabilístico, de natureza diferente, refere-se a fazer inferências, avaliar e prever resultados não determinísticos no âmbito da incerteza.

Organização do pensamento estatístico e probabilístico na coleção

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Probabilidade	Problemas combinatórios.	Noção de chance, cálculo de probabilidade e porcentagem como medida de uma chance.	Relação entre área e probabilidade.	Resolução de problemas.
Gráficos	Tabelas de dupla entrada, quadros e Matemática nas mídias.	Gráficos de barra, setores e de linha.	Gráficos e áreas; gráfico de radar.	Gráficos de barra, setores e de linha.
Estatística	Matemática na mídia.	Tipos de gráficos, sistema cartesiano e setores.		Estatística e amostra.
Médias	Noção de médias em problemas aritméticos.	Média aritmética, ponderada e moda.		Medidas de tendência central (média, moda, mediana); medidas de dispersão: amplitude e desvio médio.

AVALIAÇÃO

CONTEÚDO DIGITAL

As reformas curriculares de Matemática propostas nos últimos anos no Brasil, e em diversos países de todos os continentes, dão especial atenção a aspectos que tinham pouco ou nenhum destaque nos programas curriculares vigentes até então, em especial quanto à questão da docência e da formação dos professores e, principalmente, à questão da avaliação.

Os currículos atuais atribuem um papel importante para a avaliação: não mais o de restringir-se a testar o domínio de técnicas e algoritmos para posterior prescrição de uma nota. Em uma prática reflexiva, a avaliação é tida como parte integrante dos processos de ensino-aprendizagem, fornecendo informação relevante para o professor saber se está conseguindo cumprir seus objetivos e metas didáticas e, assim, reorganizar e replanejar seu programa.

Essa posição está presente em vários documentos curriculares, como: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM dos EUA (1989); *Diseño Curricular Base*, MEC da Espanha (1989, 1992); *Renovação do Currículo de Matemática*, APM de Portugal (1988, 1991); *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), *do Brasil* (1997, 1998); e em outros publicados na Inglaterra, Japão, Cingapura, Holanda, Chile, Colômbia e Argentina.

As práticas de avaliação feitas até meados dos anos 1990, em sua maioria, caracterizavam-se por apontar o que os alunos não sabiam, em detrimento de outros modelos que permitiam detectar e atribuir valor ao que os alunos aprenderam. A "prova" tornou-se sinônimo de avaliação, tal como a palavra "sabatina", pois eram realizadas aos sábados, em épocas remotas. Tanto num caso como no outro, o que se fazia eram "medições" pontuais, muito longe do objetivo da avaliação contínua e significativa proposta nas práticas construtivistas que orientam a maioria dos currículos atuais.

Nos antigos programas, a avaliação era quase sempre feita por meio de testes escritos de duração limitada, nos quais apenas se testavam capacidades relacionadas ao uso de técnicas e algoritmos. Porém, como diz o professor Ubiratan D´Ambrósio (1986), as mudanças curriculares não podem ficar restritas apenas à mudança de conteúdos. Segundo eles, novos conteúdos exigem repensar métodos, objetivos e, em consequência, novas perspectivas, modos e instrumentos de avaliação.

É importante reconhecer que nossa sociedade não é a mesma de décadas atrás. A avaliação não poderá ficar restrita à aferição de domínio de técnicas matemáticas, ela deverá operacionalizar todos os objetivos da Educação Matemática, e os alunos deverão ter oportunidade de demonstrar que são capazes de:

- escolher uma estratégia apropriada para resolver um problema e de usar algoritmos quando resolvem esses problemas;
- criticar um dado modelo ou argumentação;
- integrar diferentes modelos matemáticos;
- usar novos conceitos ou dados em situações novas, após uma breve descrição;
- explicar a escolha de um método, o processo usado na resolução e os resultados obtidos, por meio de palavras convenientemente organizadas ou mediante outras formas de representação adequadas.

Adaptado de: KOOJI, Henk van Der. *Matemática realista na Holanda*. Lisboa: E&M - Educação & Matemática, n. 23, 1992.

Instrumentos de avaliação

Ao longo dos capítulos, tanto as atividades que acompanham a teoria quanto as da seção **Revise o que estudou** podem ser utilizadas como avaliação. O professor pode ainda elaborar outras atividades de avaliação, mas o importante é que o resultado permita reconhecer o nível de conhecimento matemático do aluno no final de um capítulo, uma unidade e do curso desenvolvido ao longo do ano letivo.

A avaliação deve fornecer ao professor mais do que informações tópicas e muitas vezes genéricas do tipo: "atingiu", "não atingiu", "satisfatório", "insatisfatório".

Por esse motivo é importante apresentar aos alunos um conjunto de atividades que situam o professor em relação ao que está sendo avaliado, o tipo de respostas que os alunos podem dar e a interpretação dessas respostas.

Consideramos importante que as atividades que se prestam à avaliação sejam compatíveis com os objetivos e habilidades que se pretende observar, tendo o cuidado de considerar vários níveis de apreensão. Não queremos saber apenas se os alunos sabem fazer uma conta, queremos avaliar como raciocinam, argumentam, se comunicam, formulam problemas, se colocam questões pertinentes, representam, constroem, se usam adequadamente termos e símbolos, elaboram estratégias, fazem conjecturas, etc. Tudo isso pode ser observado em distintos níveis, sintonizados com os objetivos definidos pelo professor na sequência didática aplicada.

Por exemplo, em relação a uma operação aritmética, podemos querer saber se os alunos:

- reconhecem as ideias associadas à operação e a contextos e situações que se podem resolver por meio dessa operação;
- compreendem os passos de um procedimento de cálculo;
- conseguem reproduzir o procedimento em uma situação nova;
- conseguem explicar o que fazem, por exemplo, ensinando um colega;
- usam corretamente a nomenclatura, notação e simbologia associadas à operação em questão;
- criam estratégias de cálculo não convencionais, percebendo atalhos ou inventando regras eficazes;
- identificam um campo de problemas com a mesma estrutura operatória resolvendo problemas novos e mais complexos;
- usam com rapidez e compreensão um instrumento de cálculo fazendo uso de propriedades dessa operação.

Estudos e exames que se propõem a aferir os conhecimentos dos alunos em vários níveis têm focado a questão das competências e habilidades, como é o caso do Enem e de outros exames nacionais e regionais que estão sendo aprofundados e implementados.

Um importante estudo é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (*Programme for International Student Assessment*, Pisa), que se propõe a estabelecer em que medida os jovens de 15 anos estão preparados para satisfazer as necessidades de hoje ao finalizar o Ensino Fundamental. Seu foco é estabelecer se os estudantes podem utilizar o que aprenderam em situações usuais da vida cotidiana, em vez de se limitar a conhecer quais conteúdos, dos que foram ensinados, foram aprendidos e que os alunos são capazes de reproduzir. Veja a seguir as competências matemáticas avaliadas no Pisa.

As competências matemáticas no Pisa

CONTEÚDO DIGITAL

Pensar e raciocinar

Esta competência inclui:

a) formular questões próprias de natureza matemática (Quanto tem?; Como encontrou?; O que acontece se ...?);

b) conhecer os tipos de respostas matemáticas às questões anteriores;

c) distinguir diferentes tipos de enunciados (definições, teoremas, conjecturas, hipóteses, exemplos, afirmações mediante certas condições);

d) entender e utilizar os conceitos matemáticos em sua extensão e limites.

Argumentar

Esta competência inclui:

a) conhecer o que são as provas matemáticas e como se diferenciam de outros tipos de raciocínio;

b) seguir e reconhecer o valor de cadeias de argumentos matemáticos de diferentes tipos;

c) dispor de sentido para raciocínios heurísticos (O que pode — ou não — ocorrer e por que, se mudarmos as condições de um problema?);

d) criar e expressar argumentos matemáticos.

Comunicar

Esta competência inclui:

a) expressar-se usando uma variedade de modos e recursos, sobre temas de conteúdo matemático, de forma oral e também escrita;

b) entender enunciados sobre proposições formuladas por outras pessoas, seja na forma oral ou escrita.

Modelar

Esta competência inclui:

a) estruturar o campo ou situação que se pretende modelar;

b) traduzir a realidade para uma estrutura matemática;

c) interpretar os modelos matemáticos em termos reais;

d) trabalhar com um modelo matemático;

e) refletir, analisar e oferecer uma crítica a um modelo e seus resultados;

f) comunicar sobre um modelo e seus resultados (incluindo suas limitações);

g) dirigir e controlar o processo de modelagem.

Propor e resolver problemas

Esta competência inclui:

a) propor, formular e definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de resposta aberta ou fechada);

b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos usando uma diversidade de estratégias.

Representar

Esta competência inclui:

a) codificar e decodificar, interpretar e distinguir entre diferentes tipos de representação de ideias, relações e objetos matemáticos e situações, assim como as inter-relações entre as distintas representações;

b) escolher e relacionar entre diferentes formas de representação de acordo com as condições da situação e o objetivo.

Utilizar a linguagem simbólica, formal e técnica e as operações

Esta competência inclui:

a) decodificar e interpretar a linguagem simbólica e formal e compreender sua relação com a linguagem natural;

b) traduzir da linguagem natural para a simbólica e formal;

c) operar com enunciados e expressões que contenham símbolos e fórmulas;

d) utilizar variáveis, resolver equações e compreender os cálculos.

Uso de ferramentas e recursos

Esta competência inclui utilizar os recursos e ferramentas familiares (inclusive ferramentas da informática) em contextos reais e situações matemáticas, mas também reconhecer as limitações dos recursos e ferramentas para a solução de determinados problemas.

Esse conjunto de competências é avaliado de acordo com três níveis de complexidade: reprodução, conexão, reflexão.

Abaixo apresentamos as principais características de cada um desses níveis.

<u>Reprodução</u>: envolve essencialmente a reprodução de conhecimentos já praticados. Inclui os que são mais comumente utilizados em avaliações padronizadas e tradicionais: conhecimento de fatos e representações de problemas comuns, reconhecimento de equivalências, memorização de termos, objetos e propriedades familiares, domínio de procedimentos rotineiros, aplicação de algoritmos e habilidades técnicas padronizadas, manipulação de expressões simbólicas simples como fórmulas e realização de cálculos.

<u>Conexão</u>: se apoia nos domínios das competências do nível reprodução, para resolver problemas que não se pode resolver por simples rotinas, ainda que familiares.

<u>Reflexão</u>: envolve situações em que é necessário estabelecer relações, refletir sobre conexões, pensar sobre as estratégias e os processos de resolução de problemas, alterando as condições para analisar o que ocorre. Possibilita formulação de hipóteses, generalização e prova.

Veja a seguir um modelo dos níveis por competência.

Modelo de agrupamentos de competências × níveis

	Reprodução	Conexões	Reflexão
Pensamento e raciocínio			
Argumentação			
Comunicação			
Modelagem			
Colocação e resolução de problemas			
Representação			
Uso de linguagem matemática			
Utilização de ferramentas			

Quadro adaptado do Pisa.

Controle e avaliação de conteúdos

Como complemento às várias atividades de avaliação, o professor pode conduzir uma discussão com os alunos sobre tudo o que foi estudado num determinado capítulo, pedindo que identifiquem quais as ideias principais, os tópicos explorados, o que aprenderam de novo, o que descobriram, o que consideraram mais interessante, como os tópicos se conectam uns com os outros e com conteúdos de outros capítulos, no que avançaram aprofundando o que já sabiam, que dúvidas ficaram, como podem aplicar o que foi estudado, etc.

Esse tipo de atividade de natureza metacognitiva tem como função regular e sistematizar o processo de aprendizagem, levando os alunos a refletir sobre seu próprio pensamento, possibilitando que "amarrem" o conteúdo estudado nos capítulos, levando-os a reconhecer o trabalho matemático realizado por meio de variadas formas de expressão: resumo escrito, quadro de conceitos, mapa, representações, relações conceituais, resumos em forma de tabela, etc.

Essa síntese pode ser feita oralmente ou por escrito.

Muitos professores utilizam esse tipo de estratégia didática como parte da avaliação, tanto a formativa, que regula e fornece informação ao professor sobre o processo de aprendizagem do aluno, como a somativa, que tem um caráter de balanço final e, por essa razão, deve ser aplicada depois de uma sequência de ensino ou no final de um ciclo de formação.

O professor pode usar um conjunto de grades de avaliação formativa para ter controle, por meio do registro de informações, sobre a evolução dos alunos durante um período de tempo que pode coincidir com as unidades ou capítulos do livro (mensal, bimestral ou trimestral).

Experiências desse tipo de registro têm mostrado resultados bastante eficazes, pois os professores dispõem de uma informação completa e organizada, sendo possível acompanhar e controlar a aprendizagem dos alunos a fim de intervir para que os objetivos definidos no planejamento sejam atingidos.

No modelo apresentado na página 29, a primeira coluna traz os descritores na forma de objetivos com critérios de avaliação pontuais sobre tópicos relacionados a um campo conceitual (ver critérios de avaliação dos PCN de Matemática, 1998); as demais colunas referem-se a cada aluno, em que o professor pode usar símbolos simples para avaliar o seu desenvolvimento, por exemplo, + ou ☺ se o conteúdo está superado; − ou ☹ se percebe dificuldades e # se o tipo de dificuldade merece um tratamento especial e personalizado.

Se um determinado objetivo tem muitos símbolos do tipo ☹, é um indício de que a abordagem feita pelo professor não foi adequada, pois a maioria dos alunos não atingiu os objetivos, assim, o professor deve retomar o tópico e procurar entender quais tipos de obstáculos estão impedindo que a maioria dos alunos aprenda.

O modelo abaixo é um exemplo fictício, que lista critérios observados no ensino de variados tópicos do currículo.

Modelo de critérios observados

Conteúdo	Alunos										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Identifica antecessor e sucessor de um número.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Identifica se um número é par ou ímpar.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Reconhece regularidades numa sequência numérica.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Decompõe um número em parcelas de diversas maneiras.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Reconhece os significados dos números naturais em diferentes contextos.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	
Reconhece distintos tipos de números por suas propriedades: par, ímpar, primo, quadrado perfeito, ...	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Estabelece relações entre números naturais, tais como: ser múltiplo de ..., ser divisor de ...	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Identifica o conjunto de regras e símbolos que caracterizam o sistema de numeração decimal.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Entende as regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal.	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Localiza números na reta numérica.	☺	☺	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☺	
Reconhece os números inteiros em diferentes contextos cotidianos e históricos.	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Reconhece que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Reconhece que diferentes operações podem resolver um mesmo problema.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Faz cálculo exato ou aproximado (mentalmente ou por escrito).	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Explora situações-problema que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Reconhece números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos.	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	
Explora situações-problema que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	

O modelo acima permite saber que o aluno 4 tem muitas dificuldades em vários tópicos e que precisa de atenção especial; mostra ainda, por exemplo, que os alunos estão tendo dificuldade em representar números na reta numérica, o que deve exigir do professor uma retomada do tópico.

Os conteúdos podem ser agrupados por sua natureza (conceitual, procedimental e atitudinal) e devem estar sintonizados com os objetivos de Matemática do Ensino Fundamental propostos pelos PCN e/ou documentos curriculares regionais.

Como se trata de uma proposta, os conteúdos listados não se referem especificamente a um determinado ano do Ensino Fundamental, tampouco esgota a lista de objetivos específicos. Nossa intenção é que o professor se aproprie do modelo e do tipo de expressões associadas a objetivos, que podem ser selecionados dos PCN ou formulados pelo próprio professor.

DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL E A FORMAÇÃO CONTINUADA

A educação é um direito das crianças e dos jovens, e deve ser tratada com profissionalismo e competência. Exigimos ser tratados com profissionalismo quando precisamos de um médico ou advogado. Quando precisamos de um médico, por exemplo, procuramos preferencialmente aqueles que sejam especialistas competentes, sintonizados com os avanços recentes de sua especialidade médica, como as novas técnicas e medicações cuja eficácia tenha sido comprovada, para bem cuidar de nossa saúde.

Um raciocínio análogo pode ser feito em relação à educação de nossos filhos, defendemos a qualidade do ensino e isso se consegue, entre outras variáveis, com professores bem formados, em constante atualização, para que sua atuação seja eficaz e seu trabalho docente seja respeitado.

Nos últimos anos, a atividade docente não tem sido prestigiada na sociedade como deveria, em razão de fatores de natureza econômica e outros, como alguns índices de avaliação e rendimento escolar, detectados por exames nacionais ou regionais (prova Brasil, SAEB, Enem, Provão, Sinaes, Pisa, Saresp, etc.). Porém tais adversidades não devem baixar nossa autoestima, sequer desviar-nos da meta principal, que é a busca incessante pela qualidade do ensino e o sucesso da aprendizagem dos alunos. Trata-se de um anseio de interesse de toda a sociedade.

Nesta coleção, procuramos dar nossa contribuição produzindo livros de qualidade tanto no aspecto conceitual como metodológico. Para os alunos que os utilizam no dia a dia escolar estejam seguros, oferecemos também recursos didáticos e orientações metodológicas para que os professores implementem seus planejamentos com autonomia e que sejam os sujeitos da prática docente. Da perspectiva que orientamos esta proposta pedagógica, entendemos que o conteúdo do programa do professor não deve ser reduzido ao livro didático. Cada sala de aula é um pequeno universo em que elementos culturais, sociais e afetivos são fatores a considerar para a garantia de uma aprendizagem efetiva e significativa.

De nosso ponto de vista, o docente que opta pelo projeto didático que orienta esta obra é um professor que aprecia e investe em seu estudo, atualização e formação contínua. Entendemos que a própria coleção contribui para essa atualização, seja pelos conteúdos matemáticos, seja pelos métodos didáticos que veicula. Por outro lado, essa formação pode ser ampliada se o professor se integrar à comunidade de Educação Matemática brasileira, composta de profissionais reunidos em grupos de estudo e pesquisa e em sociedades científicas, como a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), e outras do gênero. Temos, no Brasil, uma comunidade ativa que publica revistas e livros, promove cursos de especialização e cursos acadêmicos de mestrado e doutorado em praticamente todos os estados da federação.

O conceito de *desenvolvimento profissional* é relativamente recente nos debates sobre a formação de professores, particularmente no segmento do Ensino Fundamental. Consideramos muito importante que a formação dos professores não se restrinja ao que estudou durante sua formação inicial no Ensino Superior, levando em consideração a complexidade da atividade docente e as constantes mudanças sociais e tecnológicas, que impõem à instituição escolar e a seus profissionais, responsabilidades e novos desafios.

Estudos mostram que os conhecimentos e competências adquiridos pelos professores antes e durante a formação inicial tornam-se insuficientes para o exercício de suas funções ao longo de toda a sua carreira.

Esse quadro cria para os professores demandas que exigem uma contínua atualização, de modo a aprofundar conhecimentos teóricos, estar sintonizado com as reformas curriculares propostas, com distintos métodos de ensino, tecnologias e recursos materiais que contribuam para a eficácia no trabalho docente.

Nos últimos anos, a Educação Matemática brasileira teve um acelerado desenvolvimento, principalmente na pesquisa, o que gerou uma vasta produção bibliográfica documentada na forma de publicações de artigos, dissertações, teses, livros e revistas especializadas. Parte desse acervo está relacionada na seção

Bibliografia comentada e consultada a seguir, para que os professores que adotam esta coleção possam atualizar e aprofundar seus conhecimentos.

A seguir apresentamos uma relação de instituições que desenvolvem programas de formação de professores em serviço e programas de mestrado acadêmico e profissional, além de doutorado em Educação Matemática.

Estado/Distrito	Instituição
Amazonas	UEA
Bahia	UFBA, Uefs, Uesc, Ucsal, FACSUL, EMFoco
Brasília-DF	UnB
Ceará	UFC
Espírito Santo	Ufes, Leacim da Ufes
Goiás	Lemat da UFG
Mato Grosso do Sul	UFMS, GETECMAT
Minas Gerais	UFMG, UFJF, Cefet, PUC, Cecimig, Ufop, UFU
Pará	UFPA, UEA
Paraíba	UFPB
Paraná	UFPR, UEL, UEM, Unioeste, Udesc, UTFPR
Pernambuco	Pós-graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE, LEM da UFPE, UFRPE
Rio de Janeiro	LEG, Labem da UFF, Gepem, LIMC do Projeto Fundão da UFRJ, UFRRJ, Cefet, PUC, Uerj, USS, Cefeteq, Unigranrio
Rio Grande do Norte	UFRN
Rio Grande do Sul	Unisinos, Unijuí (LVM), PUC, UFRGS, USM, Unifra, URI, Ulbra, Univates
Santa Catarina	UFSC, Furb
São Paulo	Unesp – Rio Claro, Bauru, Ribeirão Preto e Ilha Solteira; FE, Cempem, PraPeM (GdS), LEM e IMECC da Unicamp; Ufscar; USF; FE-USP, IME-USP, Caem-USP; Uniban; PUC, Unicsul, Unifesp, PUC-Camp, CEM

No quadro a seguir, relacionamos a maioria das publicações de interesse para o professor de Matemática.

Publicação	Entidade
Bolema – Boletim de Educação Matemática	Departamento de Matemática do IGCE da Unesp – Rio Claro
Boletim Gepem	Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – Gepem
Educação Matemática em Revista	Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM
Educação Matemática em Revista – Rio Grande do Sul	Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – RS
Educação Matemática em Revista – São Paulo	Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – SP
Educação Matemática Pesquisa	Pontifícia Universidade Católica – SP
Eureka!	Sociedade Brasileira de Matemática – SBM
Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	Uniban
Revemat: revista eletrônica de Educação Matemática	UFSC
Revista Brasileira de História da Matemática	Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHMat
Revista do Professor de Matemática	Sociedade Brasileira de Matemática – SBM
Revista Modelagem na Educação Matemática	Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino da Fundação Universidade Regional de Blumenau – Furb
Revista Perspectivas da Educação Matemática	UFMS
Zetetiké	Cempem – Faculdade de Educação da Unicamp

Os contatos e endereços das instituições e informações sobre as publicações podem ser obtidos pelo *site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): <www.sbem.com.br>. Acesso em: 12 jan. 2015.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA E CONSULTADA

Optamos por indicar preferencialmente, livros que tratam de temas de interesse para os professores do Ensino Fundamental e que, ainda, podem ser encontrados nas livrarias ou consultados nas bibliotecas brasileiras. O conteúdo da maioria desses livros forneceu informações e subsídios para as decisões tomadas pelo autor na elaboração desta coleção.

Observe que cada título está alocado em uma categoria principal, embora muitos deles possam ser classificados em mais de uma categoria.

Aritmética

BIGODE, Antonio J. L. *Matemática*: soluções para dez desafios: 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. São Paulo: Ática, 2014.

BIGODE, Antonio J. L; GIMENEZ, Joaquin. *Metodologia para o ensino da Aritmética*: competência numérica no cotidiano. São Paulo: FTD, 2010.

______; FRANT, Janete B. *Matemática*: soluções para dez desafios. São Paulo: Ática Educadores, 2011.

GROSSI, Esther P. *Um novo jeito de ensinar Matemática*: começando pela divisão. Rio de Janeiro: CDI, 2000.

KAMII, Constance. *A criança e o número*. Campinas: Papirus, 1986.

KATO, Fukutaro. *Soroban pelo método moderno*. São Paulo: Associação Cultural Shuzan do Brasil. [s. d.].

LINS, Rômulo C; GIMENEZ, Joaquin. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 2005.

MOYSÉS, Lúcia. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. Campinas: Papirus, 2009.

SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos*: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998.

ZUNINO, Delia Lerner de. *A Matemática na escola*: aqui e agora. Porto Alegre: Artmed, 2002.

Geometria

ALSINA, Claudi; FORTUNY, Josep M.; GOMEZ, Rafael P. *¿Por qué Geometría?* Propuestas didácticas para ESO. Madri: Sintesis, 1997.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo padrões pitagóricos*: geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993.

CENTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CEM). *Caderno especial sobre semelhanças*. São Paulo, 1991. n. 3.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. *O ensino de Geometria na escola fundamental*: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

FRANCHI, Anna et al. *Geometria no 1º grau*: da composição e decomposição de figuras às fórmulas de área. São Paulo: CLR Balieiro, 1992.

GERDES, Paulus. *Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico*. Curitiba: Ed. da UFPR, 1992.

HERSHKOWITZ, Rina (Org.). *Ensino e Aprendizagem de Geometria*. Boletim n. 32. Rio de Janeiro: Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), 1994.

KALEFF, Ana Maria. *Vendo e entendendo poliedros*: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. 2. ed. Niterói: EdUFF, 2003.

______; REI, Dulce M.; GARCIA, Simone dos S. *Quebra-cabeças geométricos e formas planas*. Niterói: EdUFF, 1996.

KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Marcos V.; KLUSENER, Renita. *Aprendendo e ensinando Matemática com o geoplano*. Ijuí: Ed. da Unijuí, 2004.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LOPES, Maria Laura M . L. *Grafos*: jogos e desafios. Rio de Janeiro: Ed. da UFRJ/IM – Projeto Fundão, 2010.

NACARATO, Adair M.; GOMES, Adriana A. M.; GRANDO, Regina C. (Org.). *Experiências com Geometria na escola básica*: narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

SEGADAS, Claudia (Coord.). *Visualizando Figuras Espaciais*. Rio de Janeiro: Ed. da UFRJ/IM – Projeto Fundão, 2008.

SERRAZINA, Lurdes; Matos, José M. *O Geoplano na sala de aula*. Lisboa: APM, 1988.

TINOCO, Lucia. *Geometria Euclidiana*: por meio da Resolução de Problemas. Rio de Janeiro: Ed. da UFRJ/IM – Projeto Fundão, 2004.

ZARO, Milton; HILDEBRAND, Vicente. *Matemática instrumental e experimental*. São Paulo: Ática, 1990.

Didática e processos de ensino e aprendizagem

ABRANTES, P. *Avaliação e educação matemática*. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Santa Úrsula - Gepem. Rio de Janeiro, 1995. v. 1.

ARTIGUE, Michèle et al. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Educacional Iberoamérica, 1995.

BRITO, Márcia Regina F. de (Org.). *Psicologia da educação matemática*: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2003.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo das situações didáticas*. São Paulo: Ática, 2008.

BURIASCO, Regina L. C. de (Org.). *Avaliação e Educação Matemática*. Recife: SBEM, 2009.

CARRAHER, Terezinha N. (Org.). *Aprender pensando*: contribuições da psicologia cognitiva. Petrópolis: Vozes, 2008.

______; CARRAHER, David; SCHLIEMAN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 2011.

CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas, 1980.

CHEVALLARD, Yves. *La transposición didáctica:* del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 2002.

COLL, C. et al. *Los contenidos de la reforma.* Enseñanza y aprendizage de conceptos, procedimientos y actitudes. Madrid: Santillana, 1992.

CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D´AMORE, Bruno. *Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

_______. *Epistemologia e didática da Matemática*. São Paulo: Escrituras, 2005

DIENES, Zoltan P. *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática*. São Paulo: EPU, 1972.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_______. *Ver e ensinar a Matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM, 2011.

FALCÃO, Jorge T. da R. *Psicologia da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FLETCHER, T. J. *Ensino moderno da Matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. 4 v.

GIMENEZ, Joaquim J. *Evaluación en Matemáticas*: una integración de perspectivas. Madrid: Sintesis, 1997.

HARIKI, S. El ambigüidad em el discurso matemático. Sevilha: In: *Revista Epsilon*, 1992. n. 22.

LORENZATO, Sergio. *Para aprender Matemática*. Campinas: Autores Associados. 2006.

MACEDO, Lino de. *Ensaios construtivistas*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2003.

PINTO, Neuza B. *O erro como estratégia didática*: estudo dos erros no ensino da Matemática elementar. Campinas: Papirus, 2009.

PAPERT, Seymor. *Logo*: computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PONTE, João P.; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia de. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

SUTHERLAND, Rosamund. *Ensino eficaz de Matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2009.

TAHAN, Malba. *Didática da Matemática*. São Paulo: Saraiva, 1961.

VALENTE, Wagner R. (Org.) et al. *Avaliação em Matemática*: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008.

VAN de WALLE, John A. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação na sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, Gérard. *A criança, a Matemática e a realidade*. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

História, Filosofia e Epistemologia da Matemática

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

Brito, Arlete de J. et al. *História da Matemática em atividades didáticas*. Natal: EDUFRN, 2005.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?*: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

D´AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática. In: *Caderno Cedes 40*: monográfico História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, 1996. p. 7-17.

DAVIS, Philip J.; HERCH, Reuben. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1995.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

FREUDENTHAL, Hans. *Perspectivas da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

IFRAH, Georges. *Os números*: a história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 2005.

KLEIN, Felix. *Matemática elementar de um ponto de vista superior*. Lisboa: SPM, 2009. v. 1.

KLINE, M. *O fracasso da Matemática moderna*. Rio de Janeiro: Ibrasa, 1976.

LAKATOS, Imre. *A lógica do descobrimento matemático*: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

MIORIM, Maria A. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MILIES, Francisco. C. P.; BUSAB, José H. de O. *A Geometria na Antiguidade Clássica*. São Paulo: FTD, 1999.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROXO, Euclides de M. G. A Matemática e o curso secundário. In: *Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil*. São Paulo: SBEM. Biblioteca do Educador Matemático. 2003. p. 159-189.

RUSSELL, Bertrand. *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Rio de Janeiro: Record, 2008.

VALENTE, Wagner R. (Org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil.* São Paulo: SBEM. Biblioteca do Educador Matemático, 2003.

_______. *Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930)*. 2 ed. São Paulo: Annablume/Fapesp, 2007.

Jogos e recursos para a aula

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. In: *Boletim SBEM-SP*. São Paulo, n. 7, 1990.

GARDNER, Martin. *Divertimentos matemáticos*. Rio de Janeiro: Ibrasa, 1961.

GIMENEZ, Joaquin; BAIRRAL, Marcelo. *Frações no currículo do Ensino Fundamental*: conceituação, jogos e atividades lúdicas. Seropédica, RJ: Gepem/EDUR, 2005.

GRANDO, Regina C. *O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus, 2004.

LORENZATO, Sergio (Org.). *O laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. 2. ed. São Paulo: Autores Associados, 2009.

MACEDO, Lino de et al. *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

OCHI, Fusako Hori; et al. *O uso de quadriláteros no ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1992.

ZASLAVSKY, Cláudia. *Jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro*: diversão multicultural para idades de 8 a 12 anos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

______. *Mais jogos e atividades matemáticas*: diversão multicultural a partir dos 9 anos. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Tópicos especiais (Aplicações, Resolução de Problemas, Modelagem, Álgebra, etc.)

BARBOSA, Jonei; CALDEIRA, A. D. e ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática*: na Educação Matemática brasileira. Pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BUSHAW, Donald et al. *Aplicações da matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da Álgebra.* São Paulo: Atual, 1994.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. *Resolução de problemas*: construção de uma metodologia. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert R. (Org.). *A resolução de problemas na Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 2010.

LOPES, Antônio J. Explorando o uso da calculadora no ensino da Matemática para jovens e adultos. In: *Alfabetização e cidadania*. São Paulo: Secretaria Municipal de Educação, 1998, n. 6.

PAPERT, Seymour. *Logo*: computadores e educação. São Paulo, Brasiliense, 1985.

PERELMAN, Yakov. *Aprenda álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2001.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PROJETO NUFFIELD. *Se eu faço, eu compreendo*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1978.

VILA, Antoni; CALLEJO, María L. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crianças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ZERMIANI, Vilmar J. *Feiras de Matemática de Santa Catarina*: relevância para a educação. Blumenau: Edifurb, 2003.

Matemática e cidadania

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação (e) Matemática. São Paulo: Summus, 1986.

______. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2011.

______. *Etnomatemática*. 4. ed. São Paulo: Ática, 1998.

FERREIRA, Mariana Kawal Leal (Org.). *Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global, 2002.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. São Paulo: Paz e Terra, 2005.

KNIJNIK, Gelsa. *Exclusão e resistência*: educação matemática e legitimidade cultural. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SKOVSMOSE, Olé. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. 6. ed. Campinas: Papirus, 2011.

Cultura e recreações matemáticas

BARCO, Luiz. *2 + 2*: a aventura de um matemático no mundo da comunicação. São Paulo: Thema Editorial, 1993.

BELLOS, Alex. *Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BEZERRA, Jairo. *Vamos gostar de Matemática*. Rio de Janeiro: Philobiblion, 1985.

DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2000.

ENZENSBERGER, Hans. M. *O diabo dos números*. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*: Um *thriller* da história da Matemática. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

RÊGO, Rogéria G; RÊGO, Rômulo M. *Matemáticativa I e II*. 3. ed. João Pessoa: Ed. da UFPB, 2004.

TAHAN, Malba. *Maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2010.

______. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2010.

______. *Meu anel de sete pedras.* Rio de Janeiro: Record, 2010.

______. *O homem que calculava*. 76. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

______. *Os números governam o mundo*: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2009.

______. *Incríveis passatempos matemáticos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2010.

______. *Mania de Matemática 1 e 2*: diversão e jogos de lógica e matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor. 2005. 2 v.

Documentos oficiais

BRASIL. Cadernos da TV Escola: PCN na Escola – Matemática 1 e 2. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação a Distância. Brasília, 1998.

______. GESTAR: Programa de gestão da aprendizagem escolar: Matemática. Cristiano Alberto Muniz e Nilza Eigenheer Bertoni (Org.). Brasília: DIPRO / FNDE / MEC. 2008.

______. Parâmetros curriculares nacionais: apresentação dos temas transversais. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Ministério da Educação e Desporto/Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF. 1997.

São Paulo. Atividades matemáticas: ciclo básico – 1ª a 4ª séries do 1º grau. (Várias edições). Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SE/CENP, 1991.

CAPÍTULO A CAPÍTULO EM SALA DE AULA

UNIDADE 1

Linguagem e aplicações algébricas

Agrupamos nesta Unidade três capítulos que têm em comum, entre outros aspectos, a linguagem matemática e, em especial, a linguagem algébrica. No Capítulo 1 a linguagem algébrica é utilizada na resolução de problemas e no Capítulo 3, para expressar relações. No Capítulo 2, fazemos uma discussão sobre linguagens em geral e com alguns episódios da história da linguagem matemática.

CAPÍTULO 1 Desafios e aplicações com equações

Tal como nos volumes anteriores, reservamos ao primeiro capítulo temas mais atraentes aos alunos, como os tópicos de Matemática Recreativa, por considerar que os alunos tiveram um período de férias e estão distantes do ritmo de atividades de construção de conceitos e resolução de problemas próprios dos finais de anos letivos. A abordagem desses desafios tem como propósito que os alunos relembrem ideias, conceitos e procedimentos, e exercitem ferramentas estudadas, por exemplo, a resolução de equações do 1º grau e proporções.

Selecionamos atividades de quadrados mágicos, de *sudoku* e de pirâmides mágicas, em que os alunos, para resolver os desafios, têm que resolver equações simples.

Uma vez já imersos em atividades de natureza algébrica, introduzimos o tópico "Um modo engenhoso de encontrar o 'xis' da questão", em que é possível resolver uma determinada classe de equações utilizando o raciocínio "de traz para a frente" e conceitos básicos das operações inversas. Essa abordagem fundamenta a apresentação, como curiosidade, da regra da falsa posição, utilizada por egípcios e babilônios há mais de 4 mil anos.

Uma vez que os alunos estão resolvendo problemas que envolvem equações, introduzimos uma classe de problemas geométricos. Para resolver esses problemas, será necessário revisar algumas relações angulares estudadas no 7º ano, em especial as ideias de ângulos complementares e suplementares, ângulos opostos pelo vértice e soma dos ângulos internos de um triângulo.

No bloco "Equações e a regra de três", revisamos alguns aspectos das proporções estudados no 7º ano, agora com um tratamento algébrico, que justifica a regra "o produto dos meios é igual ao produto dos inteiros". Aproveitamos essa retomada para explorar o conceito de velocidade média e problemas que envolvem variação de grandezas inversamente proporcionais.

Revista da Matemática

Nesta seção temos dois textos: **Uma regra egípcia para resolver problemas e equações** e **As aparências enganam**.

No texto **Uma regra egípcia para resolver problemas e equações** discutimos o engenhoso método de resolução de problemas utilizado pelos antigos egípcios e popularmente conhecido como "regra da falsa posição".

No texto **As aparências enganam** apresentamos um problema que pode ser resolvido por meio de uma regra de três, porém cujo resultado obtido pelos métodos matemáticos é incompatível com a realidade. O propósito é apresentar uma visão crítica e os limites dos métodos matemáticos.

Comentários finais

4 a 6 aulas previstas

Neste capítulo procuramos mostrar que é possível revisar conteúdos sem ter que repeti-los tal como foram ensinados na primeira vez, o que em geral pode causar desinteresse nos alunos. O capítulo retoma temas importantes como: equações do 1º grau, proporções, regra de 3, médias e ângulos por meio de atividades lúdicas, mas sem infantilizar a relação dos alunos com o conhecimento.

O conjunto de atividades procura tratar de modo equilibrado os conteúdos, bem como atrair os alunos para a Matemática por meio de situações interessantes e curiosas, além de ajudá-los a "esquentar" suas baterias para os temas que vão estudar nos próximos capítulos.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

1 **I.** Esta atividade pode ser resolvida de vários modos, por tentativa e erro ou montando equações.

Somando os elementos da primeira linha obtém-se:

$(x + 1) + (x - 6) + (x - 1) = 45$

$3x - 6 = 45$

$3x = 51$

$x = 17$

Substituindo o valor encontrado para a incógnita x e montando o quadrado mágico, temos:

18	11	16
13	15	17
14	19	12

II. Recomendamos que os alunos montem as equações. Por exemplo, tomando a 2ª coluna temos:

$(x + 3) + (x - 2) + (x - 3) + x = 30$

$4x - 2 = 30$

$4x = 32$

$x = 8$

Substituindo o valor numérico nas expressões das células obtém-se o quadrado mágico:

0	11	7	12
13	6	10	1
14	5	9	2
3	8	4	15

III. Oriente os alunos a fatorar os números para reconhecer seus divisores e de que números são múltiplos; por exemplo, $65 = 5 \cdot 13$, 65 é múltiplo de 5 e de 13. São múltiplos de 2: 2, 4, 8 e 16; de 3: 3, 9, 27 e 81; de 5: 5, 25, 55 e 65; de 7: 7, 49, 77 e 91; de 11: 33, 55 e 77; de 13: 65 e 91.

2	7	33	5
55	9	49	4
27	8	65	77
91	25	16	3

2 Resposta possível:

F	S	C	V
V	C	S	F
C	F	V	S
S	V	F	C

4 Nesse caso, é recomendável começar a resolver de cima para baixo.

$F + 9 = 26 \Rightarrow F = 17;$

$E + 3 = 9 \Rightarrow E = 6;$

$C + 1 = 3 \Rightarrow C = 2;$

$E = B + C \Rightarrow 6 = B + 2 \Rightarrow B = 4;$

$D + E = F \Rightarrow D + 6 = 17 \Rightarrow D = 11;$

$A + B = D \Rightarrow A + 4 = 11 \Rightarrow A = 7$

16 a) $15 \cdot 80 = 24x \Rightarrow 1\,200 = 24x \Rightarrow x = 1\,200 : 24 = 50$
b) $14x = 24 \cdot 35 \Rightarrow 14x = 840 \Rightarrow x = 840 : 14 = 60$
c) $96x = 32 \cdot 15 \Rightarrow 96x = 480 \Rightarrow x = 480 : 96 = 5$
d) $9 \cdot 50 = 18x \Rightarrow 450 = 18x \Rightarrow x = 450 : 18 = 25$

18 A proporção é: 2 está para 5 assim como x está para 240:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{240} \Rightarrow 5x = 480 \Rightarrow x = 96$$

Assim, o transporte escolar é utilizado por 96 alunos.

19 a) A relação entre as grandezas número de peças e horas de máquina é diretamente proporcional; mais horas, mais peças: 600 (peças) está para 3 (horas) assim como x (peças) está para 8 (horas):

$$\frac{600}{3} = \frac{x}{8}$$

$3x = 600 \cdot 8$
$3x = 4\,800$
$x = 4\,800 \div 3 = 1\,600$ peças.

b) A relação produção (peças)/máquina é diretamente proporcional, mais máquinas $\rightarrow$ mais peças produzidas; dessa forma a razão do aumento no número de máquinas é $\frac{6}{4}$ e o número de peças aumenta na mesma proporção; assim; neste período; são produzidas 900 peças.

c) Neste caso, a relação é inversamente proporcional: mais máquinas implica em menos tempo. A razão de diminuição do tempo é $\frac{1}{2}$; portanto, será necessário o dobro de máquinas: 8.

Revise o que estudou

1 A atividade pode ser resolvida de vários modos, por tentativa e erro ou montando as equações. Somando os elementos da primeira coluna, obtém-se:
$(x - 5) + (x + 2) + (x - 3) = 21$
$3x - 6 = 21$
$x = 9$
Substituindo o valor encontrado para a incógnita x e montando o quadrado mágico, temos:

Banco de imagens/Arquivo da editora

4	9	8
11	7	3
6	5	10

3 a) $y = x + 7$; $z = x + 13$; $y + z = 50$
$(x + 7) + (x + 13) = 50$
$2x + 20 = 50$
$2x = 30$
$x = 15$; $y = 22$ e $z = 28$.

b) $y = x + 10$; $z = 10 + x$; $y + z = 60$
$(x + 10) + (10 + x) = 60$
$2x + 20 = 60$
$2x = 40$
$x = 20$; $y = 30$ e $z = 30$.

5 Proponha que os alunos discutam as diferenças nos enunciados das atividades 4 e 5, a pontuação e a ordem em que aparecem as palavras é importante e determina como os parênteses devem ser usados:
o quíntuplo do sucessor $\rightarrow 5(x + 1)$
o sucessor do quíntuplo $\rightarrow 5x + 1$.

7 a) $69x = 5 \cdot 23 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$
b) $17 \cdot 120 = 85x$
$$x = \frac{120 \cdot 17}{85} = 24$$
c) $13x = 18 \cdot 65$
$$x = \frac{18 \cdot 65}{13} = 90$$
d) $5 \cdot 18 = 12x$
$$x = \frac{90}{12} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

8 a) A relação entre as grandezas número de peças e horas de máquina é diretamente proporcional (mais horas, mais peças): 720 está para 6 assim como x está para 4:
$$\frac{720}{x} = \frac{6}{4}$$
$6x = 720 \cdot 4$
$$x = \frac{720 \cdot 4}{6} = 480 \text{ peças}$$
b) A relação produção/máquina é diretamente proporcional (mais máquinas, mais peças produzidas): a razão do aumento no número de máquinas é 12 : 8 que equivale a 3 : 2, o número de peças aumenta na mesma proporção: neste período são produzidas $1{,}5 \cdot 720 = 1\,080$ peças.
c) A relação é inversamente proporcional (mais máquinas, menos tempo). A razão de diminuição do tempo é $\frac{1}{3}$, portanto, será necessário o triplo de máquinas: $3 \cdot 8 = 24$ máquinas.

9 Nesse caso, temos uma proporcionalidade direta. Considerando o capital investido, o primeiro sócio entrou com $\frac{2}{5}$ e o segundo com $\frac{3}{5}$.

O problema pode ser resolvido com a regra de três em cada caso. O primeiro sócio fica com R$ 2 400,00 e o segundo, com R$ 3 600,00.

10 Neste caso, trata-se de uma proporcionalidade direta: 80 km está para 1 hora, assim como x km está para 5 horas. Calculando, obtém-se a distância de 400 km.

CAPÍTULO 2 Introdução à Álgebra: a linguagem algébrica

Um capítulo sobre linguagem algébrica que trata de símbolos, códigos e outras convenções é necessário para introduzir a Álgebra, mesmo que os alunos já tenham tido algum contato com "xis" e "ípsilons" nos anos anteriores. Há estudos que relacionam as dificuldades que os alunos apresentam, quando têm que se expressar por meio de linguagem algébrica, à falta de um trabalho explícito e focado na linguagem algébrica.

Em Matemática as letras e outros símbolos como, por exemplo, o sinal de igualdade não têm um único significado. Essa ambiguidade está na contramão do senso comum e da crença de que a Matemática é precisa e imune a tudo que não condiz com sua história nem com seus usos.

Iniciamos o capítulo destacando as várias linguagens utilizadas usualmente para a comunicação entre as pessoas, na forma de códigos, símbolos e outras convenções. É importante o aluno perceber que a linguagem da Matemática é uma entre outras e que seus símbolos são convenções dotadas de certa universalidade, isto é, a linguagem da Matemática não conhece fronteiras, ela é utilizada e compreendida pela maioria dos povos, independentemente da língua ou da cultura.

É importante propor aos alunos que encontrem no dicionário o significado das palavras: símbolo, signo, sinal, convenção, notação, código, codificar, decodificar e tradução. Convencionar significa "entrar em acordo". Portanto, há sempre algo de arbitrário nas convenções adotadas.

Certas linguagens têm uma função apenas representativa, por exemplo, a linguagem utilizada pelos enxadristas para descrever uma partida e a taquigrafia, um sistema de signos utilizados para registrar com mais velocidade conferências e debates. Há, entretanto, linguagens que têm uma função operativa, isto é, possibilitam a manipulação e a transformação dos símbolos por meio de regras admissíveis, por exemplo, a linguagem matemática e a linguaguem utilizada pelos químicos, que permite que se realizem certas operações e obtenham resultados sem ter que ir ao laboratório.

Entre as linguagens simbólicas, uma das mais úteis e usuais é a do sistema de numeração decimal (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), com os sinais indicadores de operação (+, − , ×, · , : e ÷) e de igualdade (=). Esses símbolos matemáticos dão conta de resolver uma infinidade de problemas cotidianos e, acrescidos dos símbolos de separação, como os parênteses; relacionais, que usamos para expressar desigualdades; e outros, como os que usamos para representar frações, expoentes, radicais, funções, etc., fazem da Matemática uma poderosa ferramenta na solução de problemas mais complexos.

Para mostrar a importância e a conveniência de se adotar uma linguagem simbólica, são apresentados problemas curiosos e os desdobramentos que se obtêm, quando usamos esquemas e adotamos uma linguagem conveniente.

No problema da travessia, é apresentada uma exploração originalmente publicada nos livros de Santiago Lopez Medrano, *Modelos matemáticos* (México: Trillas, 1983), e *Lenguajes simbólicos* (México: Instituto de Matemática da Universidade Nacional Autônoma, 1972). Nos problemas das "meias" e dos "vasilhames" as explorações e as formas de simbolização foram desenvolvidas em sala de aula com alunos de 12 a 15 anos. Todos esses problemas são objeto de discussão em clássicos de Matemática Recreativa como os livros de Martin Gardner (1914-2010) e no excelente livro *Matemática e imaginação*, de Edward Kasner (1870-1955) e James Roy Newman (1907-1966) (Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976).

As demais atividades destacadas como "Desafios olímpicos" podem ser propostas como lição de casa e serem discutidas em aula a partir das estratégias e ideias dos alunos. A proposta é que os alunos resolvam fazendo uso de alguma linguagem simbólica, tal como está desenvolvido no capítulo.

Uma vez tendo discutido o sentido dos símbolos e seus usos e identificadas as várias linguagens presentes em nossa cultura, considerando que a linguagem matemática é uma entre várias, é momento de passar para o estudo e a exploração da própria linguagem matemática, tendo como objetivo o reconhecimento de sua principal finalidade: propiciar uma comunicação mais ágil e precisa sobre fatos e propriedades relacionadas a objetos reais ou abstratos.

Iniciamos uma reflexão sobre a linguagem matemática fazendo uma abordagem histórica, pois, além do efeito motivador, contribui para prover de significados a relação dos alunos com os símbolos e notações da Matemática.

Para maior aprofundamento destes aspectos, a principal fonte é o livro *A History of Mathematical Notations*, de Florian Cajory (1859-1930), mas até o momento não há publicações em português que permitam um estudo completo das notações da Matemática. Entretanto, o professor encontrará informações preciosas nos vários títulos da coleção *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula* (São Paulo: Atual, 1992).

Desde as civilizações antigas do Egito e da Babilônia até nossos dias, a linguagem matemática passou por várias fases. Os historiadores as dividem em três principais: *retórica*, *sincopada* e *simbólica*. De acordo com Tobias Dantzig (1884-1959), em *Número:* a Linguagem da Ciência (Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970):

> *A Álgebra retórica é caracterizada pela completa ausência de símbolos, exceto, naturalmente, as próprias palavras, que são usadas em seu sentido simbólico* [...]*; a Álgebra sincopada, a egípcia é um exemplo típico, é um desenvolvimento posterior da retórica. Certas palavras de uso frequente são gradualmente abreviadas. Finalmente essas abreviações contraem-se até esquecer-se sua origem, de maneira que os símbolos não têm nenhuma conexão óbvia com a operação que representam. A sincopação tornou-se um símbolo* [...]. *[p. 78]*

Nesse mesmo livro, Dantzig ilustra essas fases da história dos símbolos de adição e subtração.

De acordo com ele, na Europa medieval o sinal da subtração era escrito por extenso usando a palavra *minus*, e depois pela primeira letra com um traço ou ponto acima. Finalmente a própria letra foi abandonada, ficando apenas o traço "–". O sinal "+" passou por uma metamorfose semelhante, sendo que no início era derivada da parte superior da letra "t", com o traço horizontal. A Matemática atual é, desde François Viète (1540-1603), fundamentalmente simbólica.

Em "A linguagem matemática representando relações", começamos a fazer uso da notação algébrica dos "xis" e "ípsilons". Recomendamos propor aos alunos que expressem relações simples, como dobro, triplo, metade, sucessor e antecessor de um número. Esse tipo de atividade foi abordado no volume do 6º ano, na primeira vez que tratamos de linguagem da Matemática.

O trabalho operativo com letras é feito, neste volume, pela exploração de fórmulas simples relacionadas a fatos da Geometria, relação preço/quantidade, médias, índices de massa corporal, relação número do sapato/tamanho do pé, conversão de temperaturas e outras. Nesses casos, os alunos calculam o valor numérico de uma expressão e, dependendo do sentido da pergunta, utilizam o raciocínio inverso que leva à solução de uma equação.

A atividade 13, além do caráter recreativo, é um bom exemplo de formulação simples e geradora de diversas situações de fixação; nesse caso, de fatos sobre operações e valor numérico de expressões algébricas. O professor que tiver tempo e recursos pode criar novas atividades e convidar os alunos a inventar outras.

Em "Equações e problemas" é enfatizada a relação entre valor numérico e raiz de uma equação. Observe que não destacamos os métodos de solução de equações, e sim ao significado da raiz. Neste ponto o professor deve chamar atenção dos alunos para o fato de que a letra representa um termo desconhecido e tem um caráter estático.

Em nossa experiência em sala de aula, este conjunto de atividades é um dos que mais envolvem os alunos, principalmente quando são convidados a criar problemas e propô-los a seus colegas. É possível que alguns problemas formulados pelos alunos não tenham solução, como a atividade 27, mas isso deve ser aproveitado didaticamente para os alunos valorizarem as etapas de resolução de um problema, que apresentamos na seção **Matemática em História**.

Pode ser oportuno explorar um enunciado como "Achar três números pares consecutivos cuja soma é 57", para levar os alunos a discutir o valor e imaginar a natureza da solução de um problema, antes de partir para equacioná-lo. No caso, espera-se que percebam que estamos somando números pares, portanto, não é possível obter um número ímpar.

Engenhocas e ideias engenhosas: A arte de resolver problemas

Nesta seção sistematizamos as quatro etapas de resolução de problemas adaptando o texto do livro *A arte de resolver problemas*, de George Polya (Editora Interciência, a edição original deste livro é de 1945). Recomenda-se aos professores a leitura deste clássico da Educação Matemática.

Revista da Matemática

Nesta seção temos dois textos: **A Matemática dos códigos de barra** e **O que as palavras estão comunicando?**.

No texto **A Matemática dos códigos de barra** descrevemos como é composto e que informações estão embutidas em um código de barras. Trata-se de um aspecto curioso de aplicação contemporânea da Matemática. Curiosidade: os códigos de barra já vêm sendo substituídos por outro tipo de sistemas como os códigos QR, que podem ser lidos por aparelhos celulares e gerar acesso *on-line* para páginas da internet. A imagem ao lado representa a palavra "matemática", gerada no código QR.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O texto **O que as palavras estão comunicando?** trata da origem etimológica de algumas palavras e das ideias matemáticas que podem estar na composição de palavras que usamos no dia a dia, como bicicleta, equador, esferográfica e outras.

Sugestões de atividades complementares e dicas

Proponha atividades que possam familiarizar os alunos com símbolos, códigos e notações. Sinais de trânsito, código Morse, sistema Braille, linguagem matemática, bandeiras de sinalização para a orientação de navios no mar são alguns exemplos de códigos universais.

Comentários finais

6 a 8 aulas previstas

Um dos eixos desta coleção e deste capítulo, em especial, é a produção de significados para os conceitos, relações, propriedades e procedimentos matemáticos. Usamos a história, o cotidiano, as conexões, a interdisciplinaridade e a resolução de problemas para garantir que a Matemática aprendida pelos alunos seja significativa.

Recomendamos que os alunos sejam colocados diante de situações em que eles possam refletir sobre seu conhecimento, os métodos e procedimentos que usam para organizar e solucionar problemas. Leve-os a reconhecer técnicas e maneiras variadas de resolução de certos problemas. Crie possibilidades para que reconheçam problemas que têm uma mesma estrutura (do mesmo tipo). Estimule-os a refletir sobre o próprio pensamento em ação. Proponha atividades em que os alunos tenham que sistematizar e redigir ideias matemáticas.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

1 **II.** O caso extremo é que as quatro primeiras bolas retiradas sejam de cores diferentes B-A-C-P. A próxima bola retirada combinará com uma das outras cores formando um par. Portanto, 5 bolas são suficientes.

3 Os alunos resolvem melhor discutindo e simulando a solução, com objetos como lápis, borracha, etc. Mas deixe claro que, neste caso, mais importante que resolver o problema é representá-lo por meio de uma linguagem simbólica.

Primeiro dois filhos atravessam o rio para a outra margem, de lá um dos filhos volta para a margem de origem onde está seu pai; o pai vai para a margem oposta onde ficou um dos filhos; este filho volta com o barco e, junto com seu irmão, atravessa de volta para encontrar o pai.

Vamos usar **F1** e **F2** para nos referirmos aos filhos e **P** para o pai; indicando por $\rightarrow$ a travessia da direção da outra margem do rio, e $\leftarrow$ para indicar a volta à margem de origem.

A solução pode ser representada pelos códigos:

F1 + F2 $\rightarrow$; F1 $\leftarrow$; P $\rightarrow$; F2 $\leftarrow$; F1 + F2 $\rightarrow$.

6 Coloque as duas ampulhetas em posição inicial (com a parte cheia de areia para cima); quando esvaziar completamente a ampulheta de 3 minutos, inicie o cozimento do ovo. Quando acabar a areia da ampulheta de 5 minutos, retire o ovo. A explicação é simples: $5 - 3 = 2$.

7 Para obter 2 litros, basta repetir o procedimento descrito para obter 6 litros; em seguida, considere a última posição $A(6) + B(0)$ que significa que há 6 litros no vasilhame maior e o menor está vazio; $A(6) + B(0) \rightarrow A(2) + B(4)$ significa que o conteúdo do vasilhame maior foi despejado no vasilhame menor, ficando 2 litros no maior e 4 litros no menor. Para obter 11 litros, basta esvaziar o vasilhame **B**, despejar o conteúdo do vasilhame **A** em **B** e encher o vasilhame **A**; simbolicamente, temos: $A(2) + B(4) \rightarrow A(2) + B(0) \rightarrow A(0) + B(2) \rightarrow A(9) + B(2)$. Para obter 13 litros, basta encher os dois vasilhames: $A(9) + B(4)$.

12 Convenção: acordo ou determinação sobre um assunto.

Código: vocabulário ou sistema de sinais convencionais ou secretos.

Linguagem: uso da palavra articulada ou escrita como meio de expressão e de comunicação entre pessoas.

Legenda: texto explicativo que acompanha uma ilustração, uma gravura, numa reprodução de obra de arte, em um mapa, etc., e compreende título, explicações, etc.

Símbolo: Aquilo que representa ou substitui outra coisa.

19 b) Aqui, a fórmula deve ser usada de modo inverso, pois sabemos o valor de N e queremos saber o valor de p:

$$42 = \frac{5p + 28}{4}$$

$$42 \cdot 4 = 5p + 28$$

$$168 = 5p + 28$$

$$5p = 140 \Rightarrow p = 28$$

O pé mede 28 cm.

25 Este problema foi adaptado de outro proposto no equivalente do Enem dos Estados Unidos e chamou a atenção dos educadores, pois, apesar de 70% dos candidatos terem feito as contas certas, poucos deram a resposta correta: as respostas mais frequentes foram: "31, resto 12"; 31,33 e "31"; somente $\frac{1}{4}$ responderam 32, que é a resposta correta. Neste problema, é importante pensar sobre a natureza numérica da resposta que exige um número inteiro de ônibus.

26 Este é um problema clássico da Matemática Recreativa que apresenta uma "pegadinha" de interpretação. Temos que imaginar que a Terra é uma esfera e, para que todas as janelas apontem para o polo sul, a casa só pode estar no polo norte, portanto a cor do urso é branca, pois só existem ursos brancos no polo norte.

29 Este famoso problema foi originalmente proposto a 97 alunos em uma escola da cidade de Grenoble, França, e ficou famoso pelo resultado, pois $\frac{3}{4}$ dos alunos responderam a idade do capitão usando os números que aparecem no enunciado. Este é um exemplo de enunciado cujos dados não são suficientes para resolver o problema.

30 Este problema é uma adaptação de um problema muito antigo e o segredo de sua solução está na estratégia, uma vez que pode ser resolvido de trás para a frente. Se ficou sem nenhuma moeda é porque tinha 40 moedas, que é o dobro de 20. Isso quer dizer que quando saiu da segunda árvore tinha 20 moedas, sendo que já havia dado 40 para o guardião; assim, depois da mágica, tinha 60 moedas, que é o dobro de 30.
Então, após ter passado pela primeira árvore, tinha 70 moedas. Como ele deu 40 moedas para o guardião, então 70 ($30 + 40$) era o dobro das moedas que tinha no bolso; portanto, 35 moedas.

	Tinha	Dobrou	Deu 20	Ficou
1ª	35	70	$70 - 40$	30
2ª	30	60	$60 - 40$	20
3ª	20	40	$40 - 40$	0

32 À primeira vista se veem 16 quadrados, mas, se o professor provocar os alunos, dizendo, por exemplo, que vê 17 quadrados, os alunos perceberão que o enunciado não faz referência ao tamanho dos quadrados; logo, podem interpretar de modo mais aberto o problema e discutir quais são os tamanhos possíveis. Por experimentação e algum método poderão concluir que na figura se pode ver: 16 quadrados 1×1; 9 quadrados 2×2; 4 quadrados 3×3 e 1 quadrado 4×4.
Total: $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ quadrados. A partir dessa conclusão talvez algum aluno se sinta encorajado a generalizar. Quantos quadrados se pode ver num quadro 10×10? A resposta é uma soma de quadrados: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 9^2 + 10^2 = 204$.

41 A diferença entre dois números ímpares consecutivos é 2; equacionando, temos:

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 105$$

$$3x + 6 = 105$$

$$3x = 99$$

$$x = 33.$$

Os números são 33, 35 e 37.

CAPÍTULO 3 Área de figuras planas

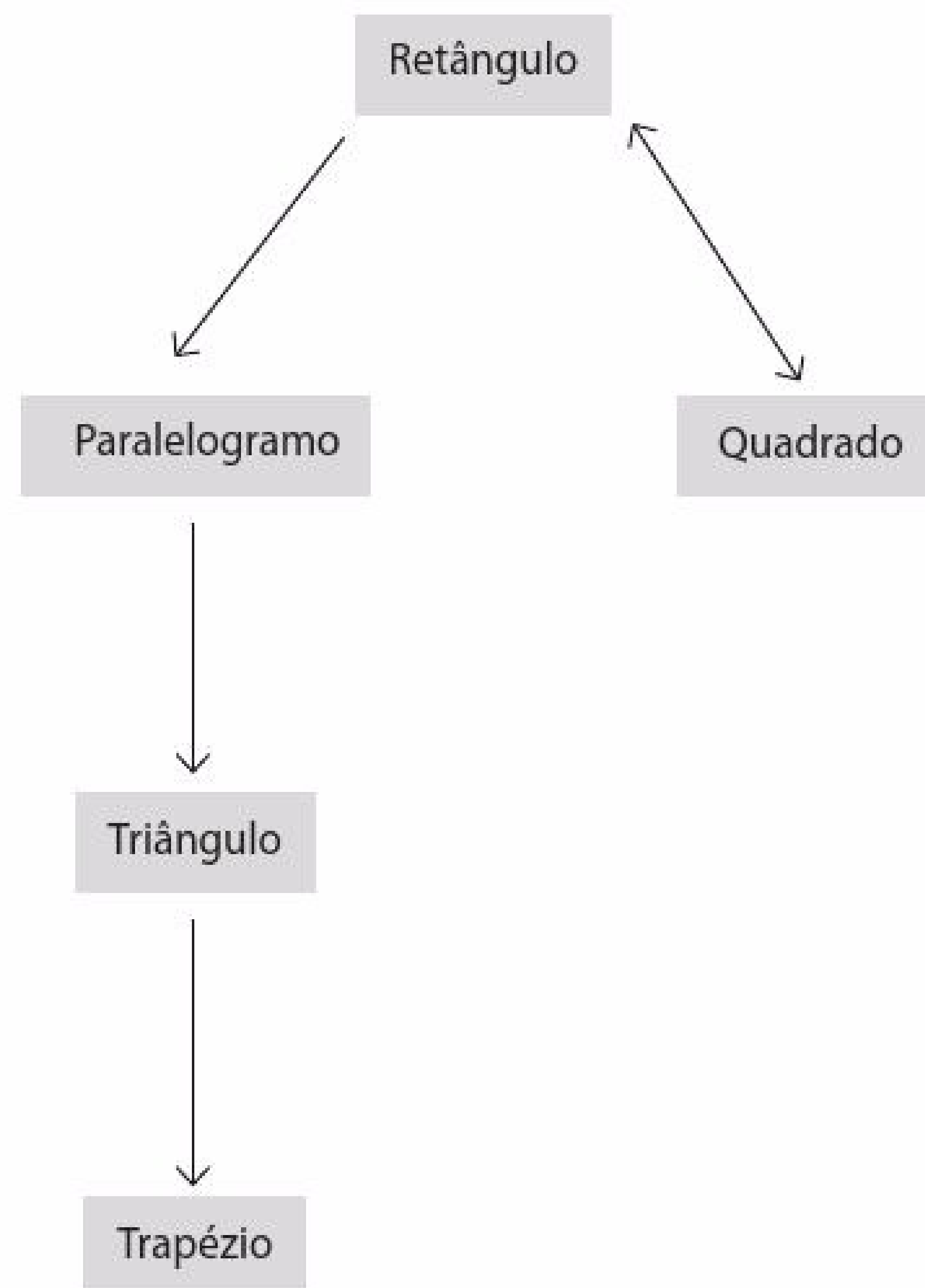
A maioria dos alunos tem o primeiro contato com a noção de área no Ensino Fundamental I. Nesta coleção introduzimos o conceito no Capítulo 10 do 6º ano. Neste volume retomamos o estudo de áreas, dando um tratamento algébrico que utilizaremos em outros capítulos deste volume.

Consideramos intuitiva a ideia de que a área de um quadrado unitário é 1 e a usamos no estudo da área de outras figuras.

Iniciamos com o retângulo, para em seguida determinar a área de um quadrado qualquer, partindo da consideração de que o quadrado é um caso particular de retângulo. A fórmula da área do quadrado é um caso particular de um retângulo em que a altura é igual ao comprimento. Observe também que, apesar de o quadrado ser também um losango particular, não é usual utilizar as diagonais para calcular sua área.

Partimos de transformações de figuras geométricas formadas por peças do tangram para discutir o importante conceito de equivalência de áreas. A base para o desenvolvimento do capítulo são dois teoremas da Geometria: o primeiro diz que "Duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras num número finito de partes e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura"; o segundo é o teorema de Bolyai-Gerwien, que diz que "Dois polígonos de mesma área são equidecomponíveis".

A metodologia adotada é deduzir a fórmula das áreas de triângulos e quadriláteros a partir desses teoremas que podem ser intuídos pelos alunos por meio da manipulação do tangram. O caminho que utilizamos foi:



Cabe lembrar que um retângulo é um paralelogramo particular, daí o fato do cálculo da área dessas duas figuras ser feito da mesma forma.

Qualquer triângulo retângulo pode ser obtido da decomposição, pela diagonal, de um retângulo de lados a e b. Assim, a área do triângulo retângulo equivale à metade da área do retângulo. De modo geral, a área de um triângulo retângulo é igual ao semiproduto dos lados perpendiculares.

Sabendo como determinar a área de um triângulo, os alunos podem encontrar a área de qualquer polígono, uma vez que um polígono de n lados pode ser decomposto em no mínimo $(n - 2)$ triângulos.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto **Um triângulo equilátero equivalente a um quadrado** que mostra como um quadrado dividido em quatro partes pode formar um triângulo.

Comentários finais

4 a 6 aulas previstas

Recomendamos que a maioria das atividades discutidas neste capítulo seja feita com o recurso de materiais, como cartolina, régua e tesoura. Os alunos podem trabalhar em grupos e produzir painéis explicativos do processo de dedução das fórmulas estudadas.

Sugestões de atividades complementares e dicas

Após a leitura do texto **O gráfico da aranha** da **Revista da Matemática** sugere-se a realização das atividades a seguir.

1 Analise os quatro gráficos de radar que representam as vendas semestrais das lojas.

a) Indique a loja e os meses em que foram vendidos apenas 1000 computadores.

Loja 1: 2º bimestre (mar - abr); loja 3: 4º bimestre (set - - out).

b) Indique a loja e os meses em que o volume de vendas teve o maior aumento de um mês para outro.

Do 2º para o 3º bimestre as vendas na loja 2 subiram de 1 000 computadores para 4 000 no bimestre seguinte.

c) Indique a loja e os meses que registraram a maior queda no volume de vendas.

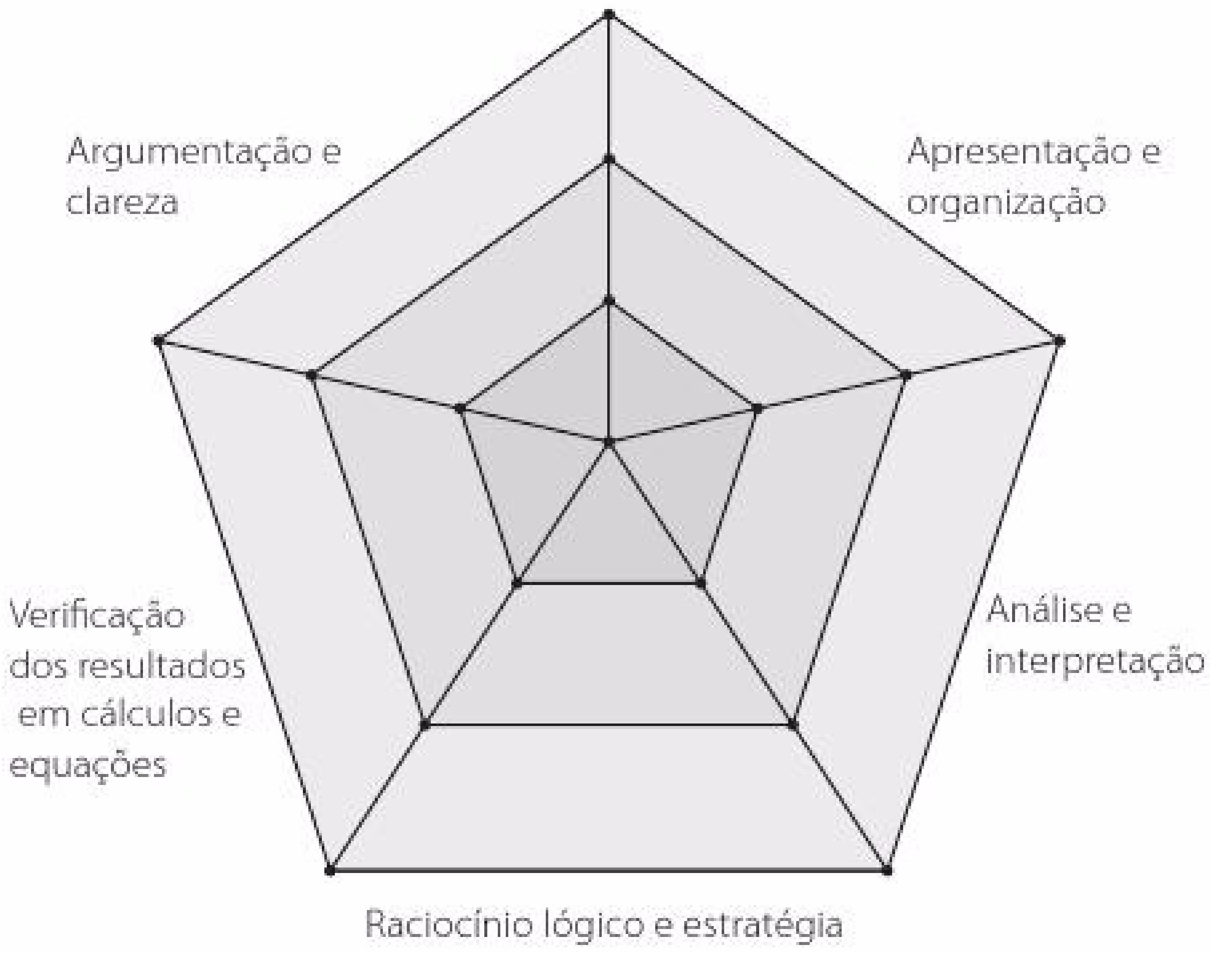
Do 4º para o 5º bimestre a loja 3 teve uma queda de 4 000 para 1 000 computadores.

d) Qual dos hexágonos parece ter maior área?

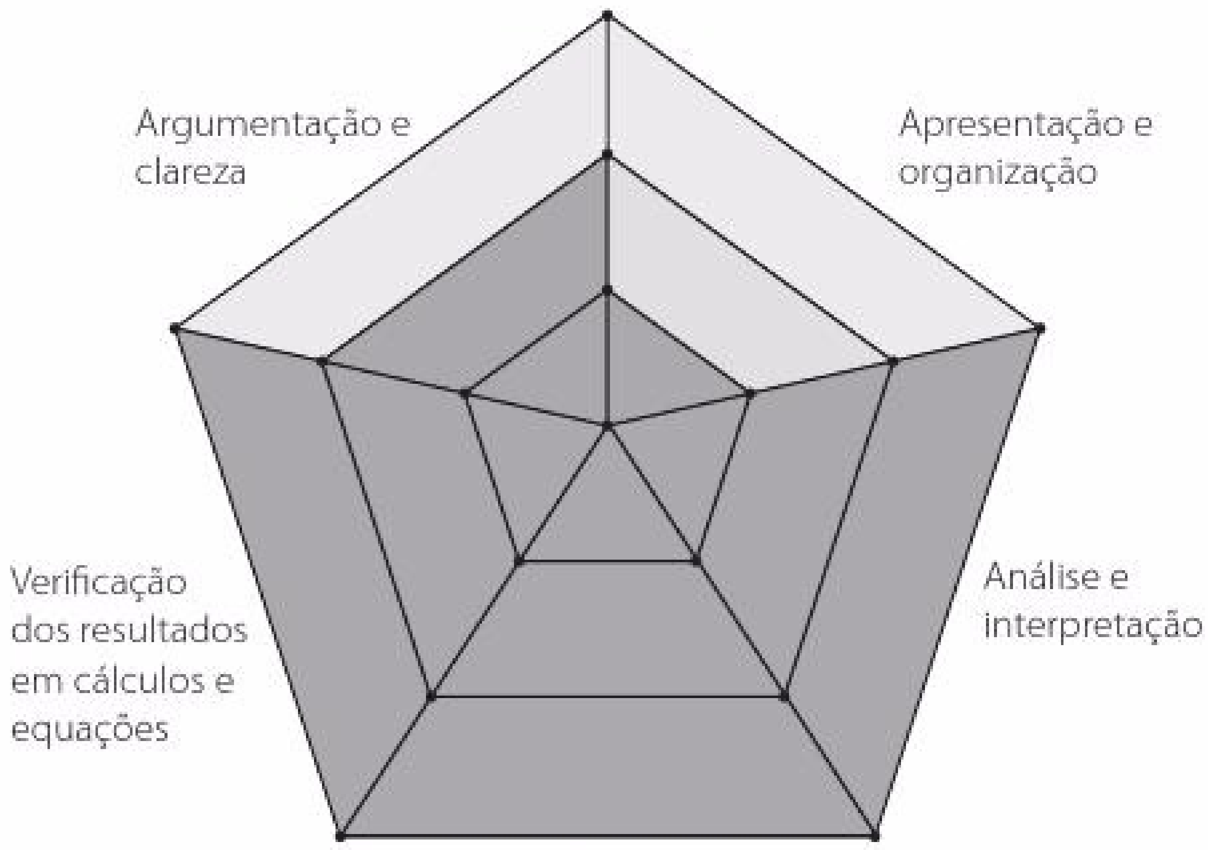
O hexágono que representa as vendas da loja 1. Nesta loja foram vendidos 20 000 computadores no semestre.

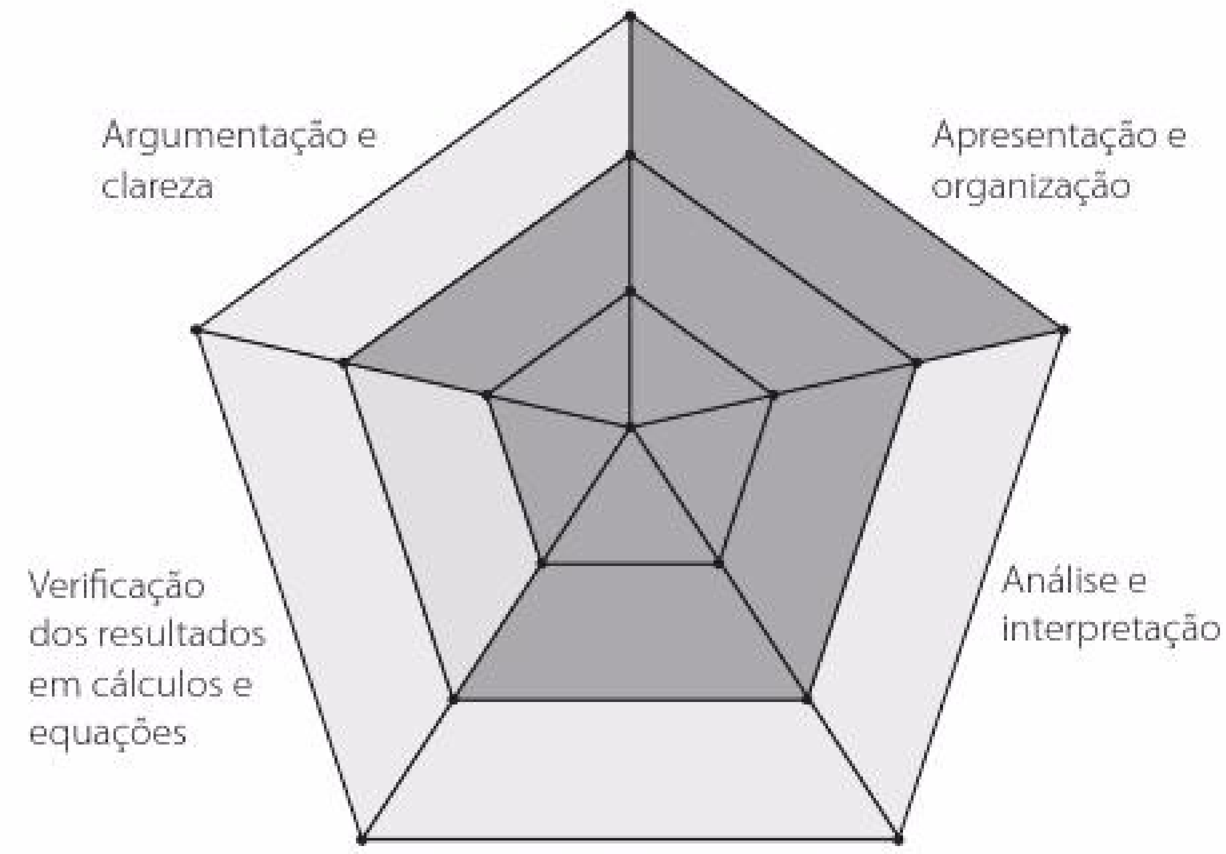
2 Usando um gráfico de radar para avaliar competências em um trabalho escolar

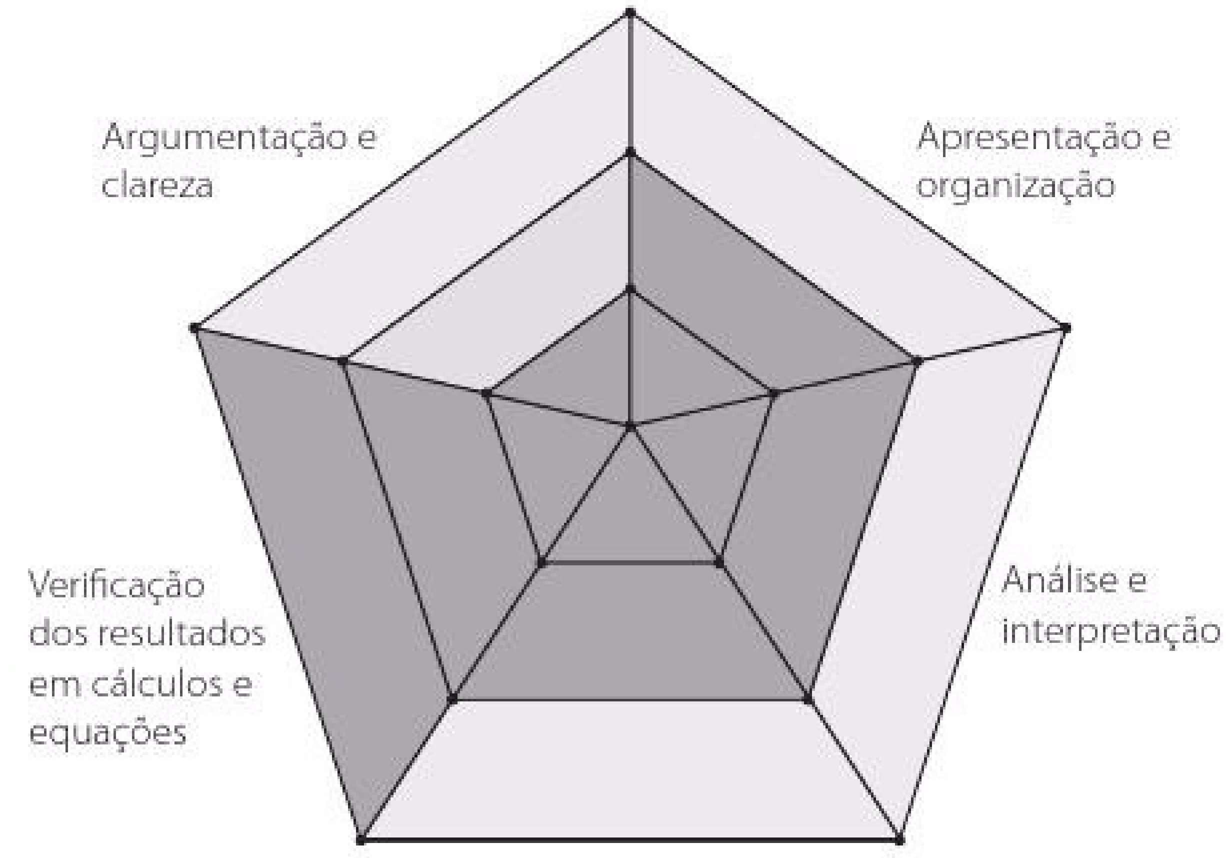
A professora Patrícia propôs a seus alunos um trabalho de matemática em que foram avaliados 5 grupos de competências. Para que os alunos fossem informados sobre seu rendimento em cada uma delas, ela utilizou um gráfico de radar.



Veja nos gráficos as categorias analisadas pela professora no caso de três alunos: Joana, Pedro e Marta.







Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Analise os gráficos de radar criado pela professora e responda as perguntas abaixo.

a) Qual foi a competência melhor avaliada em cada aluno?

Joana: raciocínio lógico e estratégia, verificação dos resultados em cálculos e equações e análise e interpretação; Pedro: apresentação e organização; Marta: verificação dos resultados em cálculos e equações.

b) Qual o aluno que teve o melhor rendimento no quesito "verificação dos resultados em cálculos e equações"?

Marta.

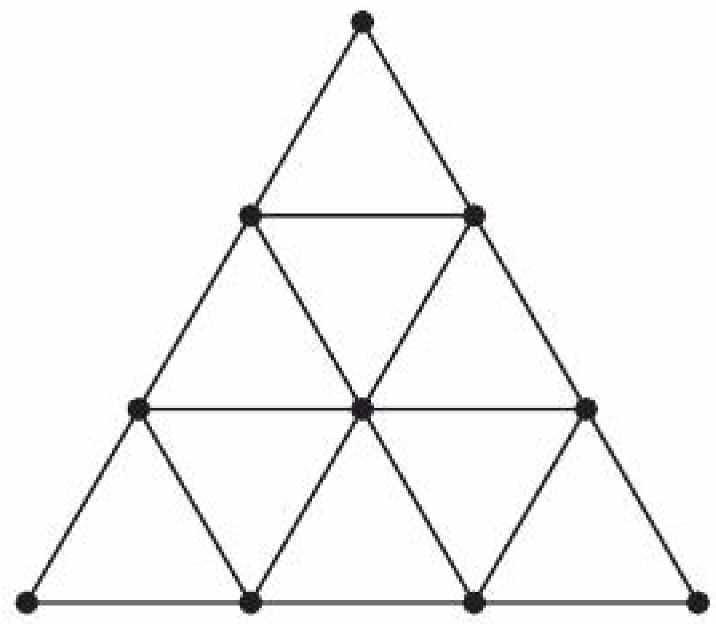
c) Qual o aluno que teve o melhor rendimento no quesito "argumentação e clareza"?

Joana e Pedro.

d) Qual foi o aluno que teve melhor rendimento?

Joana.

Isto pode ser feito comparando as áreas dos polígonos hachurados ou por contagem, se considerarmos que cada triângulo isósceles que forma o pentágono regular é composto de 9 triângulos menores.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

1 Propositalmente nesta atividade os enunciados dos itens são apresentados de modos distintos, porém equivalentes, para que os alunos se acostumem com as variações utilizadas por distintas culturas e práticas pedagógicas.

7 Nesta atividade temos de usar o raciocínio inverso: $26,4 \div 4,8 = 5,5$; portanto, a altura do retângulo é de 5,5 cm.

25 d) Ao final desta atividade, leve os alunos a perceber que o losango é um paralelogramo particular e que o quadrado é um losango particular.

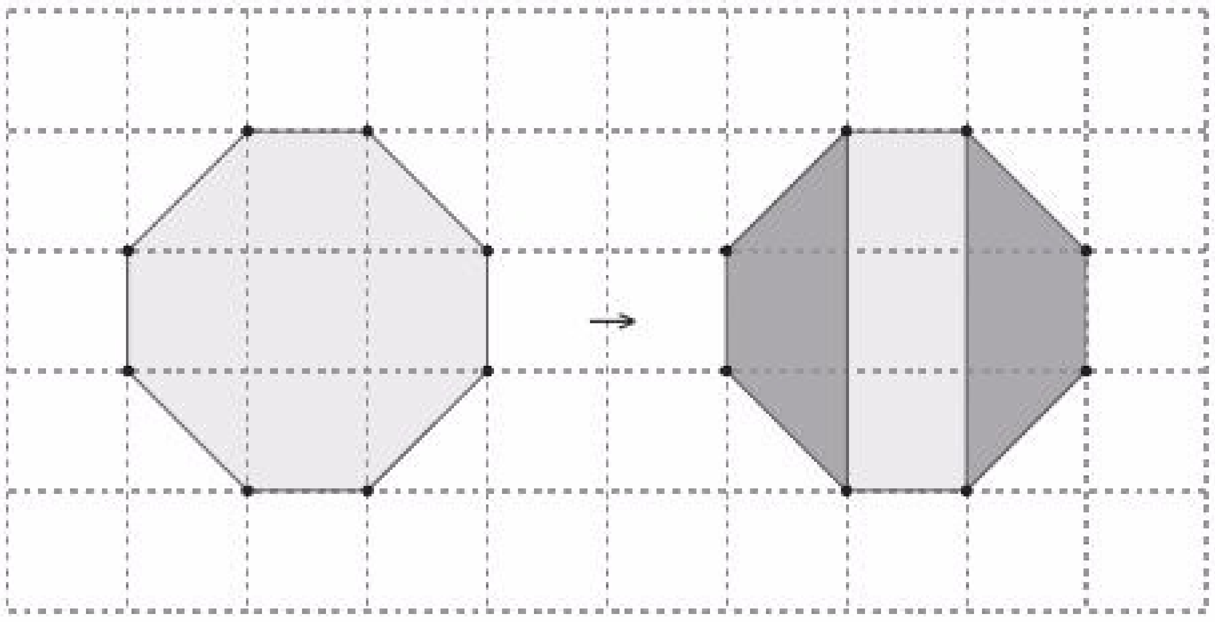
A fórmula $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$, comumente apresentada nos livros, é limitada, pois não permite que se determine a área de um losango quando conhecidas as medidas dos lados.

A atividade pode ser feita decompondo o losango em quatro triângulos retângulos congruentes, pois, como será estudado no 9º ano, as diagonais dos losangos são perpendiculares.

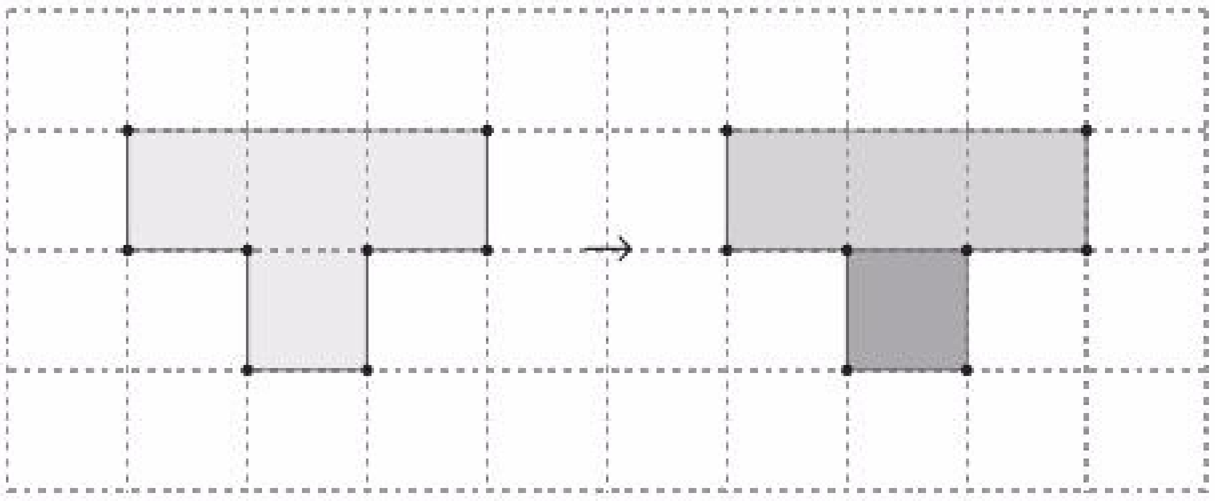
26 O lado maior do retângulo tem a mesma medida que a diagonal maior do losango, o lado menor do retângulo tem a mesma medida da diagonal menor do losango. A área do retângulo é $D \cdot d$, a área do losango é metade da área do retângulo, portanto é $\dfrac{D \cdot d}{2}$.

Revise o que estudou

9



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Nos dois exemplos os octógonos não são regulares, pois os lados não são todos iguais; no octógono da direita, os ângulos não são todos iguais.

O octógono convexo pode ser decomposto em dois trapézios e um retângulo; o octógono não convexo em forma de **T**, pode ser decomposto em um quadrado e um retângulo. A medida de suas áreas vai depender das medidas dos lados.

UNIDADE 2

Cálculo algébrico

Agrupamos nesta Unidade três capítulos que tratam de vários aspectos do cálculo algébrico e seus usos. O domínios dos procedimentos aqui explorados se tornarão ferramentas úteis para os alunos aprenderem novos conceitos e procedimentos e resolverem problemas.

CAPÍTULO 4 Relações entre Álgebra e Geometria

A linguagem algébrica ganha grande impulso tanto na história como na escola quando aplicada à Geometria. Neste capítulo, a linguagem algébrica é utilizada para expressar perímetros e áreas de figuras planas.

No tópico "Linguagem algébrica para expressar relações entre medidas", os alunos são colocados diante de atividades em que a linguagem algébrica é usada para expressar relações entre grandezas lineares.

O tópico seguinte, "Decompondo retângulos", é de grande utilidade para o desenvolvimento da visualização de figuras planas, propiciando aos alunos a oportunidade de transformar mentalmente uma figura por meio da composição e decomposição. Algumas pessoas se utilizam dessa habilidade para efetuar cálculo mental aritmético e algébrico. Professores têm feito uso dessa decomposição para ensinar produtos notáveis, que são tratados no capítulo 6 deste volume. A esse respeito, cabem as seguintes considerações: neste capítulo não estamos "provando" os produtos notáveis com Geometria, como se diz em geral; o que estamos fazendo é utilizar a linguagem algébrica para representar relações geométricas — neste caso, relações entre medidas.

A novidade do capítulo é a exploração de áreas e perímetros de figuras, em especial figuras cujos lados são perpendiculares, pois podem ser decompostas em retângulos. O professor deve ler e analisar atentamente as atividades propostas no livro do aluno e verificar a força das atividades. Elas remetem à reflexão e exploração de expressões equivalentes.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto **O bolo, a Geometria e a Álgebra** que trata da divisão de um cubo em 64 cubos menores e um desafio relacionado ao mesmo assunto.

Comentários finais

2 a 4 aulas previstas

As atividades propostas na seção **Revise o que estudou** foram criadas por alunos de 13/14 anos.

Destacamos que, embora o foco do capítulo seja o uso da linguagem algébrica, os conceitos geométricos são introduzidos ou retomados, para que os alunos possam enfrentar as situações propostas com certa desenvoltura. O professor não deve ter receio de voltar a temas já explorados e deve entender estas retomadas como um investimento.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

8 Leve os alunos a perceber que nos itens **a** e **c** o valor da área é o mesmo porque a área corresponde à mesma figura, ou seja, se $b = 7$, então $x = 5$ e vice-versa; do mesmo modo, se $m = 2$, então necessariamente $y = 4$.

CAPÍTULO 5 Cálculo algébrico

O uso de letras na Matemática tem sido útil, até este ponto, na solução de problemas e equações e também na representação de grandezas que variam: número de palitos, ladrilhos, lados, perímetros e áreas de figuras planas. Porém, os objetos algébricos (letras, expressões, relações) nem sempre se referem a "coisas" do mundo real. O objetivo deste capítulo é estudar o cálculo algébrico de objetos abstratos. Daqui em diante vamos fazer "cálculos" usando as letras, sem nos preocuparmos com o que elas podem representar. A chamada "passagem do concreto para o abstrato" já foi bem explorada nos capítulos anteriores; é hora de olhar de frente para o "abstrato".

O professor deve dar a devida importância a essa posição didática e contribuir para que os alunos vejam outros aspectos da Matemática que vão além do utilitarismo. A Matemática deve ser vista também como uma linguagem e como um sistema lógico e abstrato (um jogo mental).

O capítulo se inicia com a retomada das operações no conjunto dos números racionais. O professor não deve se impressionar com o formalismo da abertura; não deve ser dada tanta ênfase à nomenclatura das propriedades. No livro do aluno indicam-se as propriedades comutativa, associativa, distributiva, elemento neutro, elemento inverso e propriedade de fechamento, sem a pretensão de transformar as propriedades em conteúdo.

Transformar as propriedades estruturais em conteúdo foi um dos grandes desvios da chamada Matemática Moderna. Esse fato foi denunciado no livro *O fracasso da Matemática Moderna*, de Morris Kline (São Paulo: Ibrasa, 1976). Nessa obra, o autor expõe os equívocos e desvios de algumas práticas de ensino observadas nos EUA durante o auge do movimento, descrevendo diálogos fictícios, mas que espelhavam o que estava ocorrendo na escola básica:

"[...] *Um pai perguntou ao filho, de oito anos, quanto era $5 + 3$. A resposta que recebeu foi que $5 + 3 = 3 + 5$, segundo a propriedade comutativa. Espantado, tornou a fazer a pergunta, dando-lhe outro fraseado:*

— Mas quantas maçãs são 5 maçãs e 3 maçãs?

A criança não compreendeu bem que "e" significa "mais", portanto, perguntou:

— O senhor quer dizer 5 maçãs mais 3 maçãs?

O pai apressou-se a dizer que sim e esperou ansioso a resposta:

— Oh, não tem importância se se fala sobre maçãs, peras ou livros — disse o filho — $5 + 3 = 3 + 5$ em qualquer dos casos.

Outro pai, interessado em saber como o pequeno filho estava indo em Aritmética, perguntou-lhe como ele estava se saindo.

— Não muito bem — respondeu o menino. — A professora vive falando em propriedades associativa, comutativa e distributiva. Eu apenas somo e obtenho a solução exata, mas ela não gosta disso." [p. 17-18]

Entretanto, o professor deve conhecer em profundidade a estrutura algébrica dos conjuntos numéricos, o significado e a importância das propriedades. Cabe ao professor dosar o que, como e quanto seus alunos podem aprender sobre as estruturas.

Neste livro propomos retomar as operações com frações, levando em conta que agora os alunos devem ter mais maturidade matemática, o que possibilita que possam compreender a razão que dá suporte a certas técnicas e algoritmos, como a divisão de frações.

Uma propriedade muito importante do conjunto dos números racionais é a densidade na reta numérica. Trata-se de uma propriedade que não é válida para os naturais ou inteiros. Dizer que o conjunto dos números racionais é denso (na reta numérica ou nos reais) significa que "entre dois números racionais quaisquer há infinitos números racionais".

É simples encontrar um racional entre dois racionais dados, basta calcular a média aritmética entre esses racionais. Esse tipo de exploração permite, ao mesmo tempo, revisar um fato numérico já estudado e exercitar o raciocínio abstrato em processos de argumentação. Isso é possível porque os alunos dessa faixa etária estão em fase de desenvolvimento de suas estruturas de pensamento formal.

A argumentação baseada em processos formais é aplicada na discussão de casos particulares da potenciação que é retomada e aprofundada, com a base variando no conjunto dos racionais. No livro do aluno desenvolvemos este tópico com ênfase na justificação das propriedades.

Atente para o bloco que trata do expoente 0 e expoente 1. A justificativa dessa convenção é feita pelo princípio da economia, também chamado princípio da permanência das propriedades. Àqueles que desejarem uma leitura sobre o assunto, recomenda-se o livro *Conceitos fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça (Lisboa: Gradiva, 1998).

Neste bloco discutimos a complexidade que está por trás das definições matemáticas. Uma vez que a potenciação foi definida como um produto de fatores iguais, não faz sentido a ideia de uma potência de expoente menor que 2. No texto explicamos como os matemáticos superaram este problema "inventando" um valor para potências de expoente 0 e 1, a fim de garantir a permanência de propriedades nos conjuntos numéricos.

Cabem alguns comentários e recomendações sobre polinômios. A nomenclatura usual — monômios, binômios, etc. — deve ser utilizada corretamente pelo professor, porém sem exageros, pois nomenclatura não deve ser tratada como conteúdo conceitual.

A redução de termos semelhantes é uma das operações algébricas que os alunos podem aceitar intuitivamente. Como se poderá ver no texto da Revista da Matemática, que trata da história da palavra álgebra, esse procedimento era utilizado pelos árabes na solução de problemas.

Outra operação algébrica com algum potencial intuitivo é a multiplicação por meio da propriedade distributiva que os alunos utilizam desde o Ensino Fundamental I.

Para pesquisar

Algumas palavras que aparecem nos livros de Matemática soam estranhas para os alunos. Daí nossa insistência em propor a pesquisa sobre a origem etimológica das palavras para que os alunos atribuam significado aos termos que usam. O nome de uma propriedade tão intuitiva como a comutativa não tem nenhum mistério: *comutar* significa *trocar*.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto **A História de algumas palavras** que trata da origem das palavras "álgebra" e "aritmética", descreve um pouco da obra do matemático Al-Khowarizmi e explica a origem de seu nome.

Comentários finais

6 a 8 aulas previstas

O professor não deve se preocupar em esgotar todo o cálculo algébrico nesta etapa do curso. Esta era uma prática comum no ensino tradicional, porém muitos estudos mostraram que tal "pressa" poderia gerar fracasso na aprendizagem, o que significa fracasso no ensino.

Foi intencional organizar os tópicos algébricos deste livro de modo gradativo: em algumas passagens fazemos uma introdução, mas o aprofundamento foi deixado propositalmente para ser feito no 9º ano, quando os alunos estão mais habilidosos no tratamento de atividades algébricas. Tópicos como divisão de polinômios por binômios foram eliminados do Ensino Fundamental; afinal, o mesmo tipo de problema pode ser mais bem aprofundado no Ensino Médio, quando os alunos estudam polinômios e o dispositivo de Briot-Ruffini.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

2 $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ são frações equivalentes. A questão poderia ser reformulada da seguinte maneira: Qual é o número que somado a $\frac{4}{5}$ é igual a $\frac{4}{5}$? Este número é 0, o elemento neutro da adição.

4 Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos:

$$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{15}\right)=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{3}}}+\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5+4}{10}=\frac{9}{10}$$

14 I. Há várias estratégias para encontrar um racional que satisfaça a condição: pelo cálculo da média aritmética obtém-se o número $\frac{8}{15}$; e pelo senso numérico, levando em conta que $\frac{2}{5} = 0{,}4$ e $\frac{2}{3} = 0{,}66...$ sabemos que $0{,}5 = \frac{1}{2}$; portanto, também satisfaz essa condição. Há infinitas respostas.

27 Este tipo de atividade é útil, pois mostra aos alunos como se pode produzir uma variedade de expressões algébricas a partir de poucos polinômios. É uma boa dica para os alunos estudarem sozinhos, criando 2 ou mais polinômios e, a partir deles, criarem polinômios combinando os originais por meio das operações básicas.

28 b) Este polinômio pode ser reduzido, pois a parte literal de todas as parcelas são equivalentes. Lembre-se de que a ordem dos fatores não altera o produto. Somado tudo, temos: $21xyz$.

Revise o que estudou

8 Sugestões de resposta:

a) A média aritmética entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$ é $\frac{11}{20}$, que é um racional maior e muito próximo de $\frac{1}{2}$.

b) A média aritmética entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$ é $\frac{19}{30}$ que é um racional menor e muito próximo de $\frac{2}{3}$.

CAPÍTULO 6 Produtos notáveis e fatoração

Os produtos notáveis são abordados de passagem. O professor não precisa dar tanta ênfase a eles, pois serão retomados no 9º ano, antes do trabalho com equações do 2º grau, oportunidade em que podem ser utilizados com mais propriedade.

Uma utilização curiosa de um dos casos de produtos notáveis é a exploração de truques de cálculo. Como sugestão, escreva no quadro multiplicações desse tipo e organize um torneio de cálculo mental. Um grupo de alunos pode usar uma calculadora para conferir o resultado dos concorrentes.

Mais à frente trabalha-se a representação geométrica de produtos notáveis por meio de atividades com materiais manipuláveis (tesoura e cartolina), propostas aos alunos como recurso analógico para representar essa propriedade algébrica.

A fatoração deve ser iniciada com a revisão do conceito na aritmética dos números naturais. Usamos procedimentos de fatoração para fazer a simplificação de determinadas expressões.

No bloco "A linguagem algébrica e a prova em Matemática", estamos realçando um dos aspectos mais importantes da Álgebra como linguagem, para além das atividades de resolução de equações.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto **Álgebra e os truques aritméticos** em que usamos a linguagem algébrica e as propriedades das operações para mostrar aos alunos o que justifica determinados truques aritméticos úteis para o cálculo mental.

Aproveitamos para mostrar uma "miragem matemática", uma "prova" que leva a uma igualdade absurda. Atente para a passagem da 3ª para a 4ª linha, na qual os dois membros foram divididos por $(x - y)$. Entretanto, $x = y$ e, portanto, $x - y = 0$. No caso, o objetivo é alertar os alunos para que tenham cuidado com as manipulações algébricas e lembrar que em Matemática não se divide por zero.

O professor pode gerenciar uma dinâmica com a sala em que ele adivinha o número pensado pelos alunos que, em geral, mostram interesse pela justificativa do método que utiliza um dos casos dos produtos notáveis.

Comentários finais

4 a 6 aulas previstas

Os procedimentos utilizados neste capítulo, em especial os casos de fatoração e seus usos para simplificar são retomados no 9º ano. Acreditamos que esses tópicos podem e devem ser explorados e aprofundados mais adequadamente no próximo ano.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

3 Nesta atividade apresentamos quatro monômios: *A*, *B*, *C* e *D*. A partir deles, propomos manipulações que levarão os alunos a exercitar as regras de cálculo algébrico para encontrar novas expressões. Trata-se de um modo econômico de propor atividades para que os alunos pratiquem suas habilidades. Dada a variedade de combinações possíveis, o mesmo enunciado pode gerar algumas dezenas de exercícios.

9 a) $18^2 \rightarrow 10^2 = 100$;

$2 \cdot 10 \cdot 8 = 160$;

$8^2 = 64$;

$100 + 160 + 64 = 324$

b) $29^2 \rightarrow 29 = 30 - 1$;

$(30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2$

$900 - 60 + 1$

$840 + 1 = 841$

c) $31^2 \rightarrow 31 = 30 + 1$;

$(30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2$

$900 + 60 + 1 = 961$

d) $75^2 \rightarrow 7^2 = 49$; $70^2 = 4\,900$; $2 \cdot 70 \cdot 5 = 700$; $5^2 = 25$;

$4\,900 + 700 + 25 = 5\,625$

e) $83^2 \rightarrow 8^2 = 64$;

$80^2 = 6\,400$;

$2 \cdot 80 \cdot 3$

$160 \cdot 3 = 480$;

$3^2 = 9$;

$6\,400 + 480 + 9 = 6\,889$

f) $92^2 \rightarrow 9^2 = 81$;

$90^2 = 8\,100$;

$2 \cdot 90 \cdot 2 = 360$;

$2^2 = 4$;

$8\,100 + 360 + 4 = 8\,464$

Revise o que estudou

2 Os retângulos têm lados iguais dois a dois:

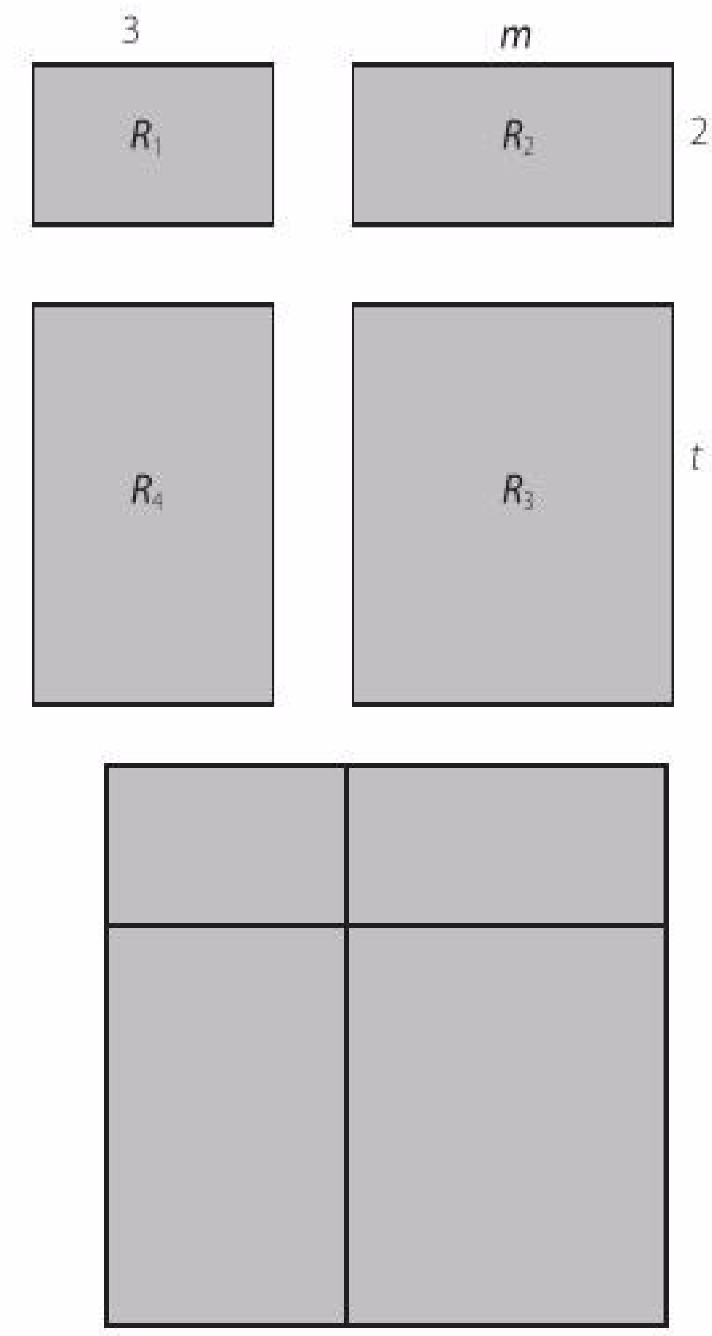
R_1 e $R_2 \rightarrow$ lado medindo 2;

R_1 e $R_3 \rightarrow$ lado medindo 3;

R_2 e $R_4 \rightarrow$ lado medindo *m*;

R_3 e $R_4 \rightarrow$ lado medindo *t*.

Sendo assim, é possível compor um retângulo de lados $(3 + m)$ e $(2 + t)$, cuja área é $A = (3 + m)(2 + t) = 6 + 3t + 2m + mt$.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

5 a) $23^2 \rightarrow 23 = 20 + 3$;

$20^2 = 400$; $2 \cdot 20 \cdot 3 = 120$;

$3^2 = 9$;

$23^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

b) $28^2 \rightarrow 28 = 30 - 2$;

$30^2 = 900$;

$2 \cdot 30 \cdot 2 = 120$;

$2^2 = 4$;

$28^2 = 900 - 120 + 4 = 784$

c) $49^2 \rightarrow 49 = 50 - 1$;

$50^2 = 2\,500$;

$2 \cdot 50 \cdot 1 = 100$;

$1^2 = 1$;

$49^2 = 2\,500 - 100 + 1 = 2\,401$

d) $51^2 \rightarrow 51 = 50 + 1$;

$50^2 = 2\,500$; $2 \cdot 50 \cdot 1 = 100$;

$1^2 = 1$;

$49^2 = 2\,500 + 100 + 1 = 2\,601$

e) $55^2 \rightarrow 55 = 50 + 5$;

$50^2 = 2\,500$;

$2 \cdot 50 \cdot 5 = 500$;

$5^2 = 25$;

$2\,500 + 500 + 25 = 3\,025$ ou $55 = 60 - 5$; $60^2 = 3\,600$;

$2 \cdot 60 \cdot 5 = 600$;

$5^2 = 25$;

$3\,600 - 600 + 25 = 3\,025$

f) $72^2 \rightarrow 72^2 = (70 + 2)^2 = 4\,900 + 280 + 4 = 5\,184$

UNIDADE

3 Relações e propriedades geométricas

Agrupamos nesta Unidade três capítulos de temas geométricos, destacando sua relação com aspectos estáticos, no caso das simetrias, utilitários, no caso dos triângulo, e quadriláteros e lúdico-matemáticos, no caso do teorema de Pitágoras.

CAPÍTULO 7 Simetrias

CONTEÚDO DIGITAL

O conceito de simetria é muito importante no estudo da Geometria. Uma figura é simétrica se puder ser composta, a partir de uma de suas partes, por meio de um movimento rígido. Os movimentos rígidos são transformações geométricas sobre uma figura que preservam as distâncias. No Ensino Fundamental estudamos três movimentos rígidos: a reflexão, a translação e a rotação.

Em geral, a maioria das pessoas só reconhece uma figura simétrica se ela tem um eixo de simetria. Nesse caso, a figura tem uma simetria de reflexão. Mas há outras simetrias além dessa, como os logotipos com motivos circulares que tem simetria de rotação.

Simetrias de reflexão podem ser observadas na natureza, no formato das letras e em peças de artesanato que contêm ornamento. As rotações podem ser observadas em logotipos, calotas de pneus, flores e mandalas, que são tipos de símbolos em geral circulares usados em rituais religiosos; as translações podem ser encontradas em motivos indígenas.

O professor pode ainda explorar jogos de composição e decomposição, como os vários tipos de tangrans e os pentaminós, para propor atividades de construção de figuras simétricas. Há vários *sites* interativos desenvolvidos por universidades que têm ferramentas virtuais com os quais os alunos podem produzir figuras simétricas mediante condições.

O bloco "Mosaicos e ornamentos" introduz um estudo da pavimentação do plano com polígonos. As atividades sobre pavimentação (ou ladrilhagem) são muito apreciadas pelos alunos por seu valor estético. A cidade de São Paulo tem um tipo de pavimento padrão assemelhado com o mapa do estado, um octógono não convexo e com simetria de rotação (180°), que permite cobrir o plano.

Revista da Matemática

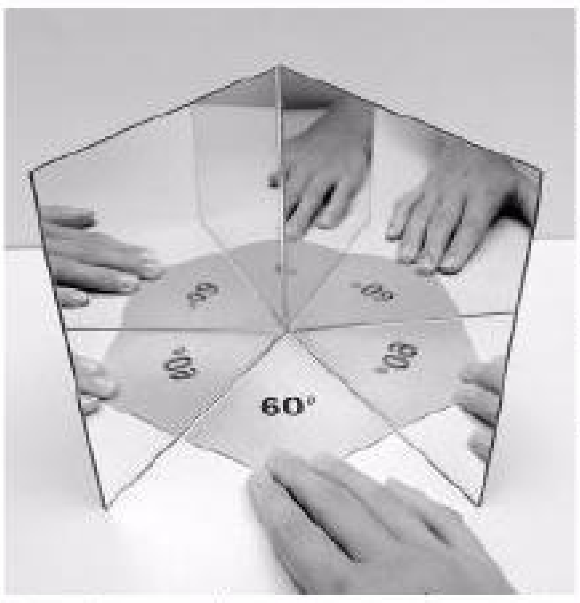
Nesta seção temos o texto **Mosaicos escherianos** contando um pouco da história e do trabalho do gravurista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

Escher é provavelmente o artista plástico mais apreciado pelos matemáticos. Ele produziu, ao longo de sua vida como artista, centenas de criações baseadas em fatos geométricos, em especial as simetrias.

Sugestões de atividades complementares e dicas

O estudo das simetrias pode ser enriquecido usando materiais, em especial o espelho, que os alunos devem colocar sobre o eixo de simetria de uma figura para ver a imagem resultante.

Outra dica é construir um livro de espelhos, um material pedagógico confeccionado com dois espelhos retangulares e iguais e ligados pelas bordas de comprimentos maiores com fita adesiva ou tecido resistente colado na parte que não reflete. Construído dessa forma, é possível abrir e fechar como se fosse duas folhas de um livro. Alguns professores orientam os alunos a proteger os espelhos usando materiais emborrachados, madeira ou papelão.



Fernando Favoretto/Acervo do fotógrafo

Livro de espelhos

Comentários finais

4 aulas previstas

Incentive os alunos a observarem a natureza, a arquitetura, as artes gráficas e as artes plásticas em geral, para que reconheçam formas simétricas.

O estudo das simetrias pode ser feito em conjunto com as aulas de Arte.

O capítulo tal como está estruturado pode ser estudado pelos alunos em grupos independentes. O professor pode apresentar as ideias gerais do capítulo, esclarecer dúvidas e propor o estudo com finalidades de produção de projetos visuais desenvolvidos pelos alunos.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

4 A resposta é o nome do aluno, mas é comum que os alunos esqueçam de inverter as letras; nesse caso, o esquecimento que leva ao "erro" é pedagógico. Chame a atenção após escreverem ou deixe que façam a autocorreção a partir da discussão dos resultados.

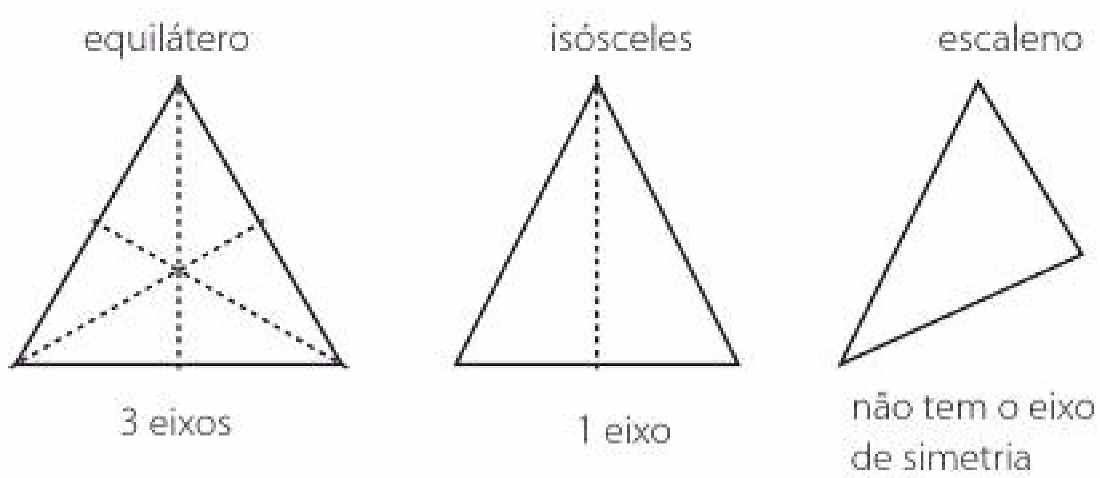
5 IMPORTANTE: O círculo tem infinitos eixos de simetria e pode ser girado qualquer ângulo em torno de seu centro; portanto, satisfaz as condições dos itens **d**, **e**, **f**.

Revise o que estudou

3 Exemplos: pratos, copos, calotas de carros, toalhas bordadas, cestaria com padrões indígenas, estampas de roupas, escudos de times, etc.

Se houver condições, faça um ensaio fotográfico, ou desenhos livres, e monte uma exposição com o tema "Simetria no dia a dia", com legendas identificando o tipo de simetria do objeto ou da figura representada.

9



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

CAPÍTULO 8 Triângulos e quadriláteros

Os alunos já conhecem triângulos e quadriláteros estudados nos anos anteriores, porém neste capítulo aprofundamos esses tópicos estudando outros elementos, propriedades e relações.

Entre os elementos novos, destacamos as cevianas e os pontos notáveis de um triângulo. Uma ceviana é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao lado oposto correspondente ou ao do seu prolongamento. São exemplos de cevianas a bissetriz, a mediatriz, a mediana e a altura. Os pontos notáveis são os pontos de intersecção desses segmentos.

O incentro é o ponto de encontro das bissetrizes. Ele é equidistante dos lados, o que faz dele o centro da circunferência inscrita.

O circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes, ele é equidistante dos vértices, o que faz dele o centro da circunferência circunscrita.

O baricentro é o ponto de encontro das medianas.

O ortocentro é o ponto de encontro das alturas.

Pode-se construir esses segmentos e pontos notáveis com dobraduras de triângulos de papel. Se o professor desejar, explore essas construções com régua e compasso.

Dê ênfase à desigualdade triangular e à rigidez do triângulo, que são relações e propriedades importantes em contextos utilitários.

Quanto aos quadriláteros, explore a classificação de quadriláteros, ilustrada pelos diálogos em forma de história em quadrinhos. Se possível, prepare uma aula interativa em que os alunos vão falando o que sabem dos quadriláteros; enquanto o professor organiza suas falas, vai tirando dúvidas, corrigindo concepções equivocadas e sistematizando as descobertas.

Consideramos o tema e a discussão importantes. Os alunos, em uma certa fase de aprendizagem, não consideram inclusão de classes, isto é, não reconhecem que o quadrado, por ter todos os atributos do retângulo, além de quadrado também é um retângulo e, da mesma forma, é um losango. Por sua vez, os retângulos, por terem os lados paralelos dois a dois, são também paralelogramos.

Completamos o estudo do paralelogramo discorrendo sobre um procedimento de construção sobre uma malha quadriculada.

Revista da Matemática

Nesta seção temos dois textos: **O código de Marina** e **Um quadrilátero muito especial**.

No texto **O código de Marina** apresentamos um sistema de códigos baseado em uma quadra ordenada, que conduz a um tipo de classificação que leva em conta os atributos convexidade, simetria, paralelismo e ângulos retos.

No texto **Um quadrilátero muito especial** destacamos a principal propriedade do paralelogramo: os paralelogramos são quadriláteros que têm os lados paralelos dois a dois. Essa propriedade é de grande utilidade na construção de objetos ou mecanismos nos quais o paralelismo deve ser preservado. Imagine se um balanço, como o mostrado no capítulo, não tivesse o banco paralelo à parte de cima do suporte: as crianças cairiam no chão.

Sugestões de atividades complementares e dicas

O professor pode orientar os alunos a construir um triângulo em material rígido que pode ser papelão duro, plástico ou madeira compensada. O desafio é encontrar um ponto do triângulo material que pode ficar apoiado e em equilíbrio sobre um ponto representado por uma agulha, prego ou ponto em que pode ser pendurado. Este ponto é o baricentro do triângulo.

Comentários finais

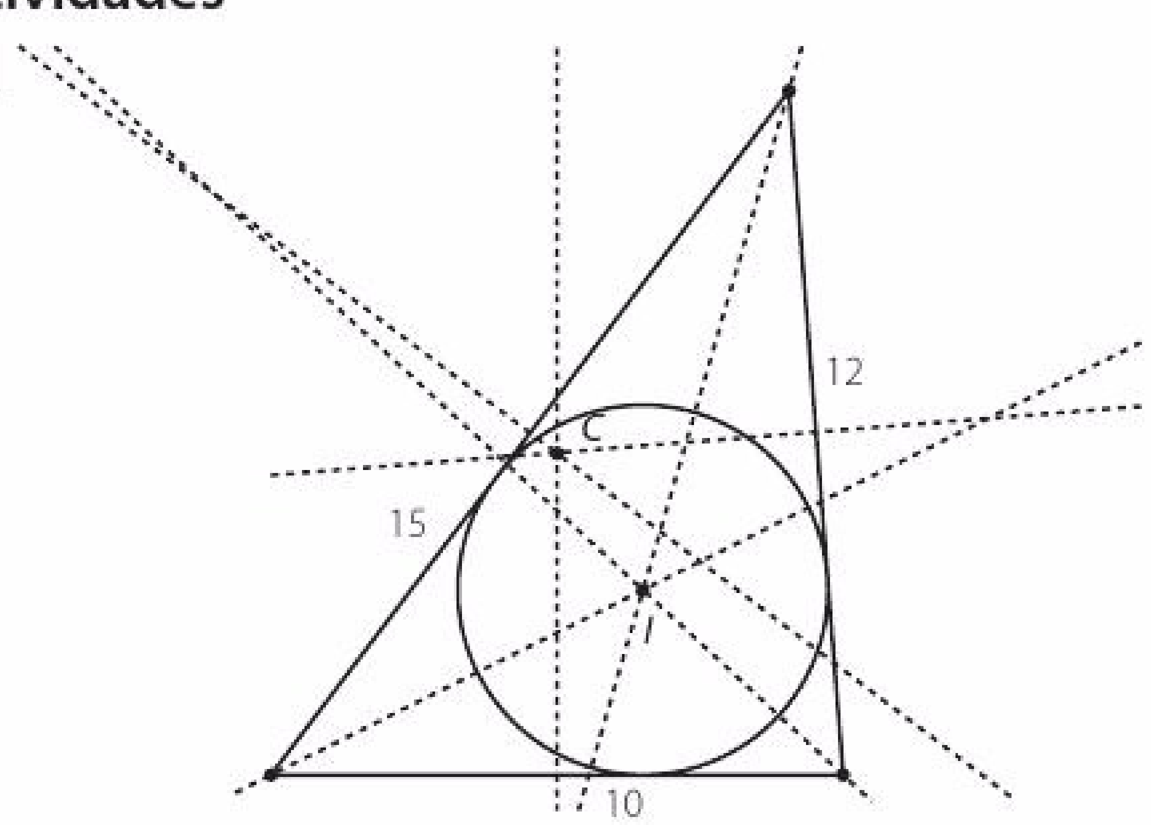
4a 6 aulas previstas

Após o estudo dos triângulos e quadriláteros o professor pode orientar os alunos a produzirem, em grupo, painéis com fotografias, desenhos ou mecanismos envolvendo triângulos e quadriláteros e suas propriedades. Nesses painéis podem ser descritos o passo a passo das dobraduras que explicam o que são as cevianas e os pontos notáveis.

Comentários das atividades e algumas resoluções

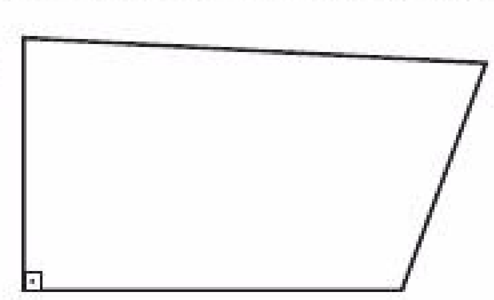
Atividades

8

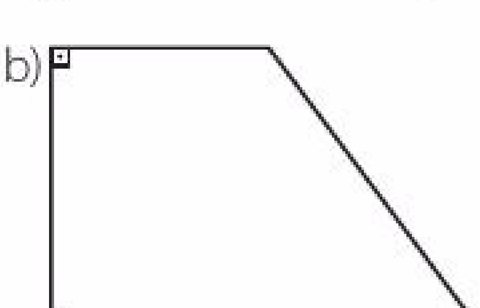


18 Os geômetras utilizam termos como "pandorga", "pipa" ou "papagaio" para se referir aos quadriláteros que têm lados adjacentes iguais, dois a dois; mas um losango não é uma pandorga porque tem todos os lados iguais.

20 a)



b)



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Impossível, pois o 4º ângulo é o que falta à soma desses três ângulos retos para resultar 360°, nesse caso, obrigatóriamente teriam 4 ângulos retos.

d) 

Banco de imagens/Arquivo da editora

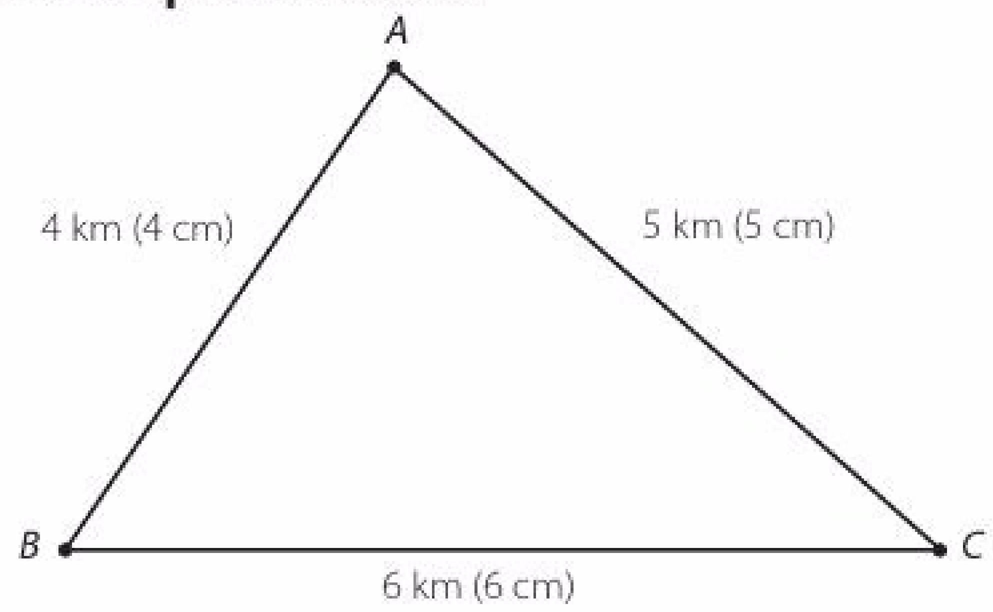
22 Os alunos devem perceber que as diagonais de qualquer paralelogramo se interceptam no ponto médio; as diagonais de um retângulo têm a mesma medida; as diagonais de um losango são perpendiculares; as diagonais de um quadrado são perpendiculares, têm a mesma medida e se interceptam no ponto médio. Ou seja, o quadrado tem propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos.

24 Deve haver variação no formato dos paralelogramos porque não foi fixada a medida do outro lado, nem da altura, nem de algum ângulo.

28 Na explicação de como construir um paralelogramo em uma posição qualquer estão as bases para essa atividade. Os alunos devem perceber que os triângulos assim construídos são superponíveis (congruentes).

Revise o que estudou

3



Banco de imagens/Arquivo da editora

CAPÍTULO 9 Áreas e quadrados num triângulo retângulo

CONTEÚDO DIGITAL

O estudo do teorema de Pitágoras, em geral, é tratado no final do Ensino Fundamental. Há argumentos contra e a favor a essa opção. Entre os argumentos que procuram justificar o ensino no 9º ano, há os que se apoiam na tradição e os que acreditam que só é possível demonstrá-lo após o estudo do teorema de Tales. Mas há pelo menos 370 demonstrações diferentes do famoso teorema, publicadas no livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis (1927), no qual é possível encontrar dezenas de demonstrações interessantes que não utilizam relações de semelhança. Algumas dessas demonstrações são apresentadas neste capítulo.

Em muitos países a relação pitagórica é introduzida como ferramenta para resolver alguns problemas, tão logo os alunos aprendem quadrados perfeitos e raízes quadradas. A abordagem do teorema de Pitágoras é feita em espiral, em que a abordagem em cada ano é diferente.

A abordagem dada ao teorema de Pitágoras neste capítulo dá ênfase à relação entre áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, tal como fizeram Euclides e Bháskara.

As atividades do 5 e 6 da seção "Revise o que estudou" sugerem uma generalização da relação pitagórica. George Polya (1887-1985) demonstrou que as áreas de polígonos semelhantes com lados correspondentes construídos sobre os lados de um triângulo retângulo satisfazem a relação pitagórica. A demonstração pode ser encontrada no livro *Descobrindo Padrões Pitagóricos*, de Ruy Madsen Barbosa (São Paulo: Atual, 1993).

Dada a importância do teorema de Pitágoras, retomamos o tema no capítulo 6 do 9º ano, porém com outra abordagem e cuja demonstração da relação entre os lados é baseada nos conceitos de congruência e semelhança.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto **Pitágoras** contando um pouco da história de Pitágoras e da história do teorema que leva seu nome.

Comentários finais

2 a 4 aulas previstas

O teorema de Pitágoras, além de suas aplicações, ocupa um lugar de destaque na história e na cultura matemática. Acompanhará os alunos daqui até o final do Ensino Médio ou dos cursos universitários, dependendo de suas escolhas.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

4 Se (6, 8, x) é um terno pitagórico, então satisfaz a relação de Pitágoras:

$6^2 + 8^2 = x^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100 = x^2$

O problema é encontrar um número que elevado ao quadrado seja igual a 100. Esse número é a raiz quadrada de 100. Como os números de um terno pitagórico têm que ser números naturais, $x = 10$.

Ao resolver problemas desse tipo, os alunos estão se familiarizando com situações que enfrentarão no estudo de equações do 2º grau, que serão estudados no 9º ano.

7 Os alunos devem encontrar um dos ângulos com medida muito próxima de 90º.

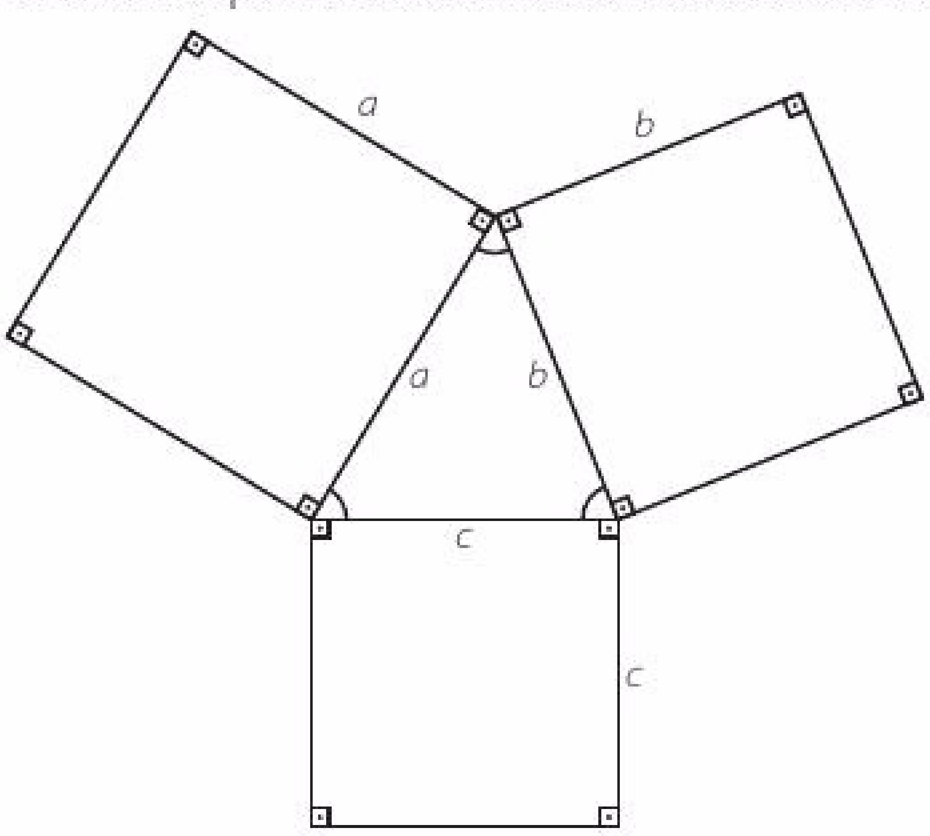
Discuta com eles os fatores que provocam imprecisões, como a elasticidade do barbante ou a imprecisão dos nós que podem não estar perfeitamente equidistantes.

8 A distância entre os nós não altera o resultado, os triângulos sempre serão retângulos.

Discuta com os alunos que os triângulos obtidos são semelhantes a qualquer triângulo de lados 3, 4 e 5.

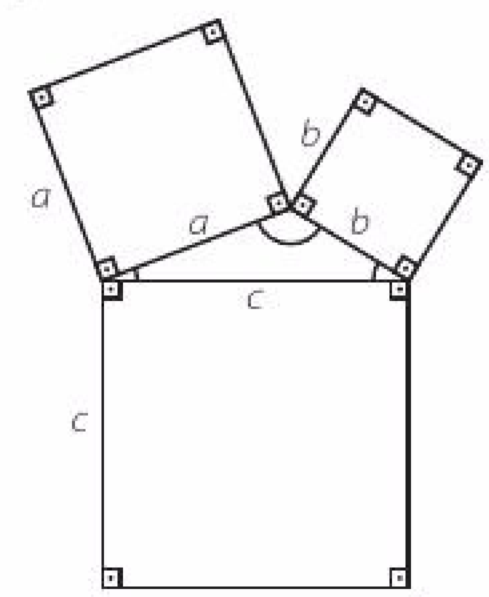
Revise o que estudou

1 Os alunos devem descobrir que em um triângulo acutângulo $a^2 + b^2 > c^2$, ou seja, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre dois lados quaisquer é maior do que a área do quadrado construído sobre o terceiro lado.



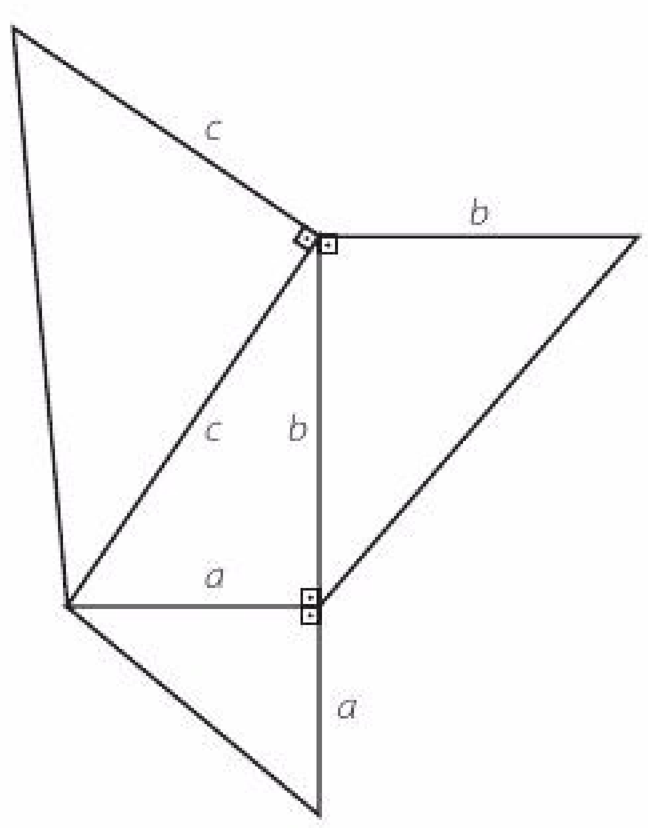
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Os alunos devem descobrir que em um triângulo obtusângulo $a^2 + b^2 < c^2$, ou seja, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados menores é menor do que a área do quadrado construído sobre o lado maior.



5 Os alunos devem perceber que a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos é igual à área do triângulo construído sobre a hipotenusa. Chame atenção para o fato de que os triângulos construídos sobre os lados do triângulo (a, b, c) são semelhantes.

Exemplo:



6 Os alunos devem perceber que a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos é igual à área do triângulo construído sobre a hipotenusa. Chame atenção para o fato de que os triângulos construídos sobre os lados do triângulo (a, b, c) são semelhantes. Explore e discuta com os alunos o fato de que a relação de Pitágoras é extensiva a retângulos, paralelogramos e triângulos semelhantes construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

UNIDADE 4

Aplicações algébricas e geométricas

Agrupamos nesta unidade três capítulos que tratam de tipos de aplicações: algébrica no capítulo de sistemas e geométricas nos capítulos de curvas e Geometria tridimensional.

CAPÍTULO 10 Sistemas de duas equações e duas incógnitas

Os alunos, quando desafiados a resolver problemas de adivinhação, desenvolvem certas estratégias e mecanismos de cálculo algébrico, muitas vezes não explicitados. As atividades propostas no início deste capítulo permitem que os alunos resolvam uma classe de problemas que também podem ser resolvidos por meio de sistemas de equações. Mas o objetivo inicial é que os alunos resolvam os problemas usando estratégias pessoais e métodos não convencionais, como a tentativa e erro.

Reintroduzimos o modelo das balanças como um contexto em que é possível "materializar" as operações algébricas, necessárias para resolver um sistema.

Algumas atividades no início do capítulo chamam a atenção dos alunos para as estratégias que utilizam. O texto que vem a seguir coloca o problema da necessidade de um método geral e direto para resolver os problemas que tenham a mesma estrutura.

Observe as tabelas que chamam a atenção para o fato de que a solução de um sistema é um par ordenado que satisfaz as duas equações. Proponha aos alunos que construam algumas tabelas, antes de ensinar a eles os métodos de solução de sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Os métodos de solução são desenvolvidos em seguida. É provável que alguns alunos descubram sozinhos alguns dos métodos descritos: adição, subtração e substituição. Um dos pontos mais importantes deste tópico refere-se às aplicações a problemas práticos.

O professor pode propor, como projeto, que os alunos pesquisem e formulem situações concretas que possam ser resolvidas por meio de sistemas de equações.

O bloco "Das equações às tabelas e das tabelas aos gráficos" destaca a abordagem funcional que associa gráficos e tabelas.

CONTEÚDO DIGITAL

O gráfico de uma equação de primeiro grau com duas variáveis é uma reta. Uma prova desse fato é feita no capítulo 9 do 9º ano, no estudo das funções polinomiais do 1º grau.

Matemática tem História: O epitáfio de Diofante

Nesta seção apresentamos o epitáfio de Diofante (ou Diofanto), que muitos consideram como o primeiro matemático a usar letras, o que o torna um dos pioneiros da Álgebra. Apesar disso, Diofante é mais conhecido pelo epitáfio de seu túmulo em forma de enigma.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto: **Uma solução engenhosa**, no qual apresentamos um problema muito popular nos livros antigos (sobre pés e cabeças de porcos e galinhas) e que pode ser resolvido por um método engenhoso e não convencional.

Comentários finais

6 a 8 aulas previstas

Não deve ser prioritário um estudo interminável de sistemas, abarcando todos os casos e detalhes. Os alunos devem poder usar estratégias pessoais para resolver problemas significativos. A limitação dos métodos próprios pode levar à necessidade de conhecer métodos formais. No Ensino Médio, quando estudarem sistemas de equações com mais de duas variáveis, matrizes e determinantes, os alunos estarão mais maduros matematicamente para um aprofundamento.

Um dos objetivos de natureza pedagógica e educacional neste tópico é propiciar experiências aos alunos voltadas ao desenvolvimento de sua autonomia intelectual e pessoal, não queremos os alunos somente no papel de resolutores de tarefas propostas no livro. Oferecemos atividades cujo objetivo é dar condições para que os alunos pratiquem inventando atividades sobre sistemas de equações. Atividades de invenção são propícias ao exercício da autonomia. Os alunos podem, em grupo, formular atividades que serão propostas a outro grupo. Explicite os procedimentos que você utiliza para a verificação de resultados.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

4 Verifique se surgiram métodos iguais ou muito parecidos, proponha que cada um explique como fez e, se for o caso, generalize os procedimentos corretos.

10 $\begin{cases} a + b = 70 \\ a - b = 24 \end{cases}$

Pelo método da adição:

$2a = 94$

$a = 47$

$b = 70 - 47 = 23$

Pelo método da subtração:

$2b = 46$

$b = 23$

$a = 24 + 23$

$a = 47$

14 $\begin{cases} 2a + 3b = 7 & \text{(I)} \\ -3a + 5b = -1 & \text{(II)} \end{cases}$

Multiplicando (I) por 3 e (II) por 2 e somando, eliminamos a variável a.

$\begin{cases} 6a + 9b = 21 & \text{(I)} \\ -6a + 10b = -2 & \text{(II)} \end{cases}$

$19b = 19 \Rightarrow b = 1$

Substituindo em (I) temos:

$2a + 3 \cdot 1 = 7 \Rightarrow 2a = 7 - 3 = 4 \Rightarrow a = 2$ (2, 1)

16 a) $\begin{cases} t + d = 2000 \\ t + 1{,}25d = 2100 \end{cases}$

diet = 400; tradicional = 1 600

b) $\begin{cases} t + d = 42 \\ 0{,}9t + 1{,}1d = 41{,}8 \end{cases}$

vendeu mais refresco tradicional (22 copos), o *diet* vendeu 20 copos.

17 $\begin{cases} x + y = 46 \\ 1{,}5x + 1{,}6y = 81 \end{cases}$

86 salsichas

18 $\begin{cases} m + f = 6600 \\ 9m + 60f = 141\,000 \end{cases}$

milho: 5 000 e feijão: 1 600

20 $\begin{cases} M = 2C \\ P = \dfrac{C}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow M + C + P = 2C + C + \dfrac{C}{3} = 100,$

Melindrosa: 60 L; Cheiadeprosa: 30 L e Preguiçosa: 10 L.

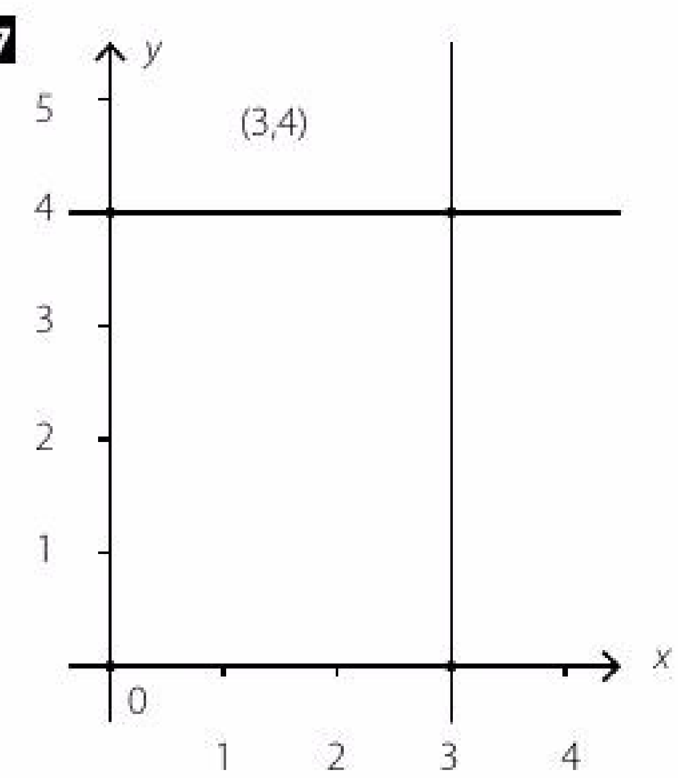
21 $\begin{cases} x + y = 60 \\ 15x + 18y = 987 \end{cases}$

31 pessoas

22 $\begin{cases} x + y = 1\,208 \\ 50x + 75y = 68\,725 \end{cases}$

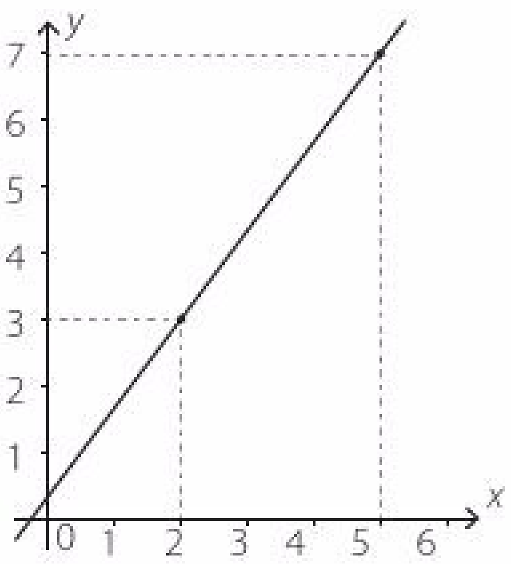
875 professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

27



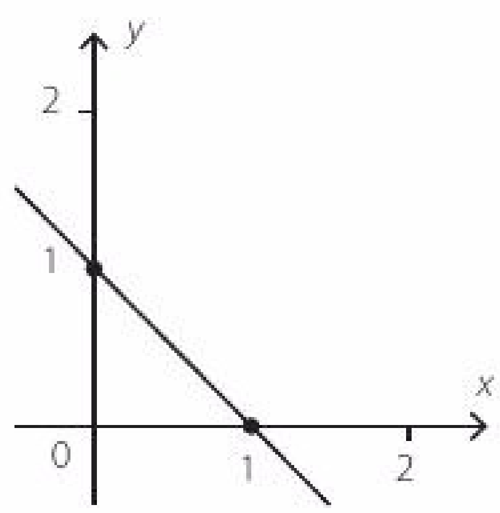
Banco de imagens/Arquivo da editora

28



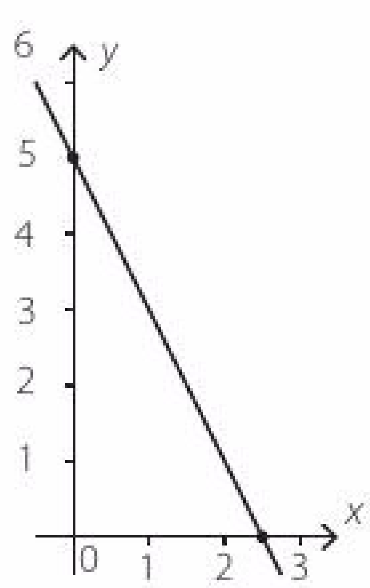
29 a) $x + y = 1$

x	y
0	1
1	0



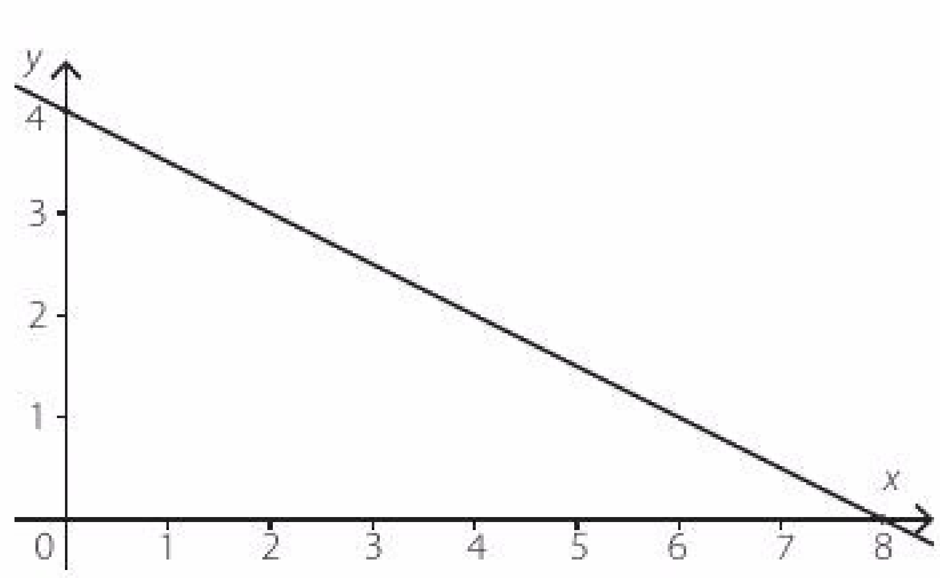
b) $2x + y = 5$

x	y
0	5
8	0



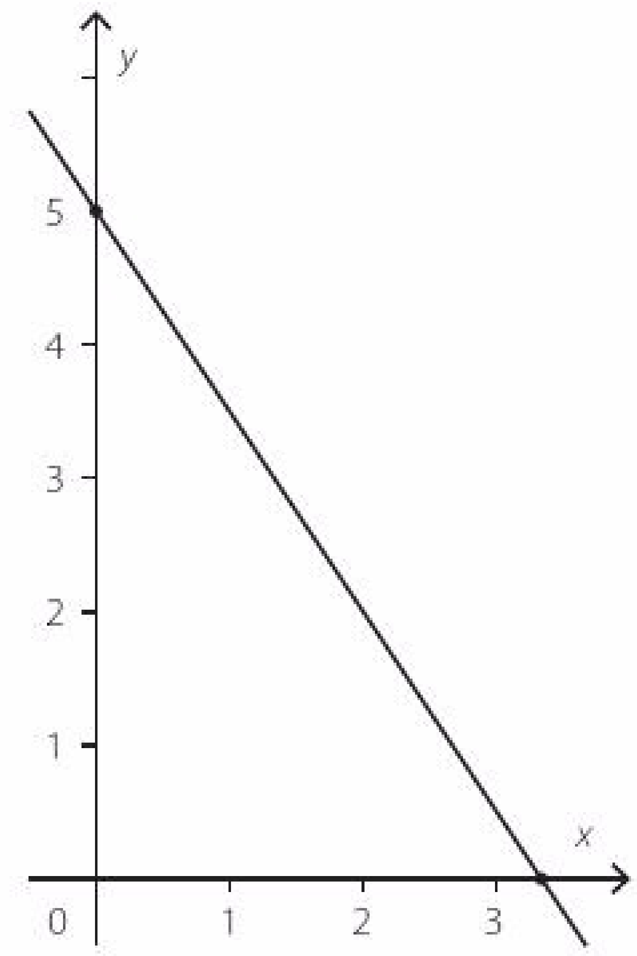
c) $x + 2y = 8$

x	y
0	4
2,5	0



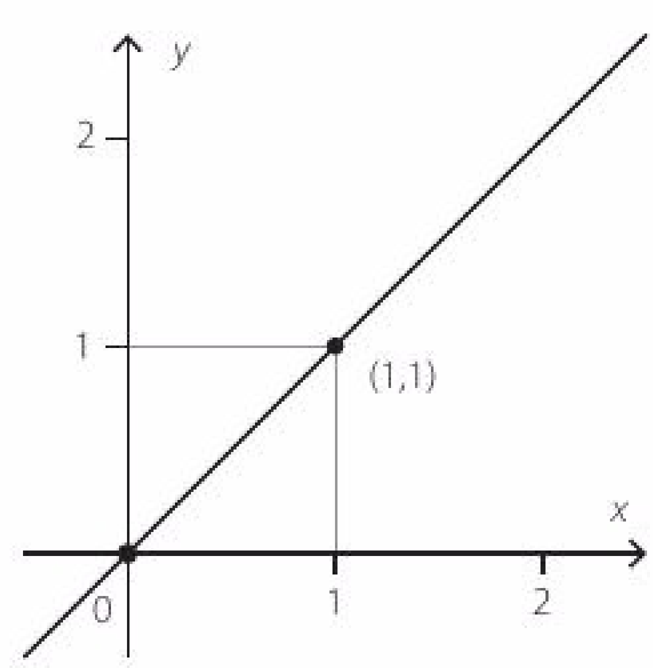
d) $3x + 2y = 10$

x	y
0	5
3,33	0



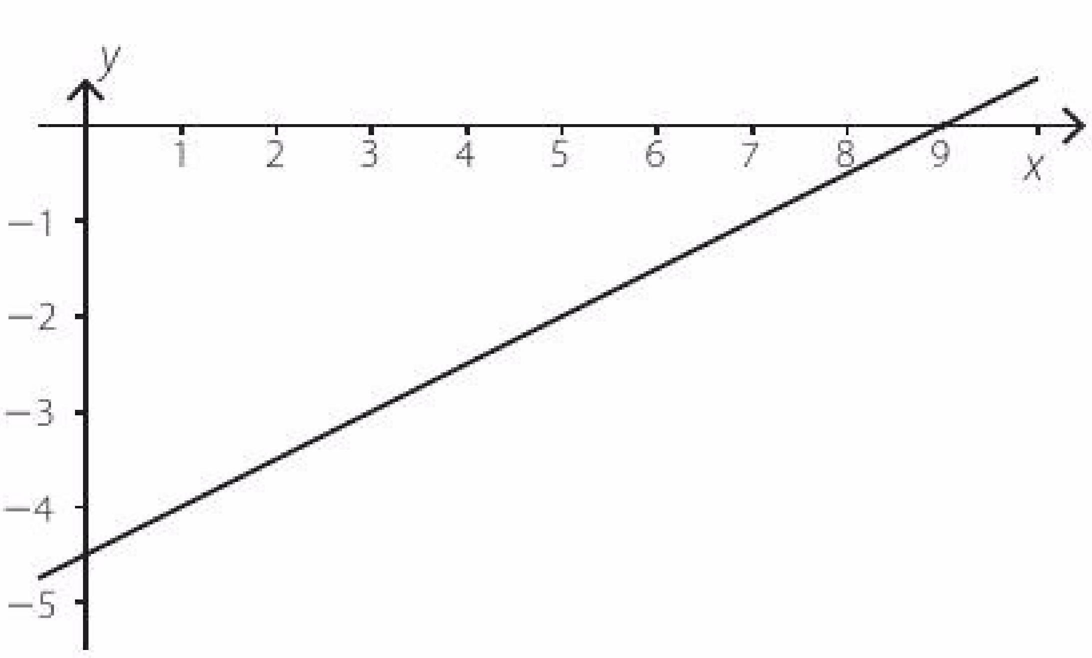
e) $x - y = 0$

x	y
0	0
1	1



f) $x - 2y = 9$

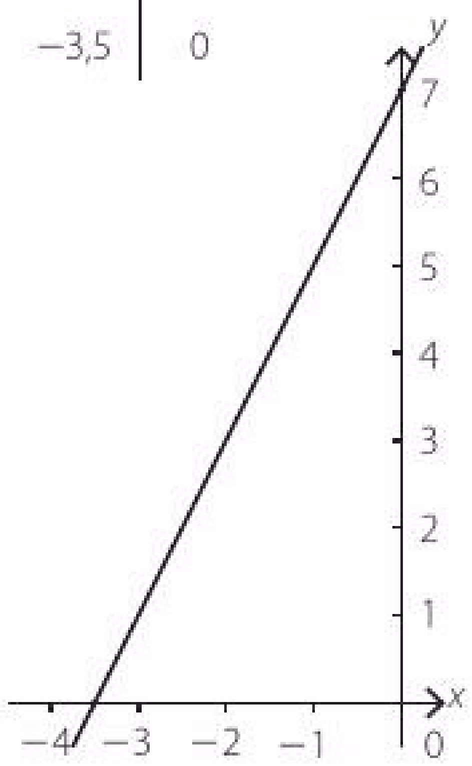
x	y
0	−4,5
9	0



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

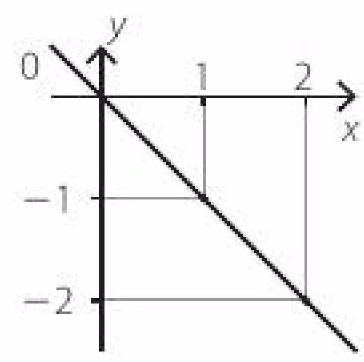
g) $y - 2x = 7$

x	y
0	7
−3,5	0

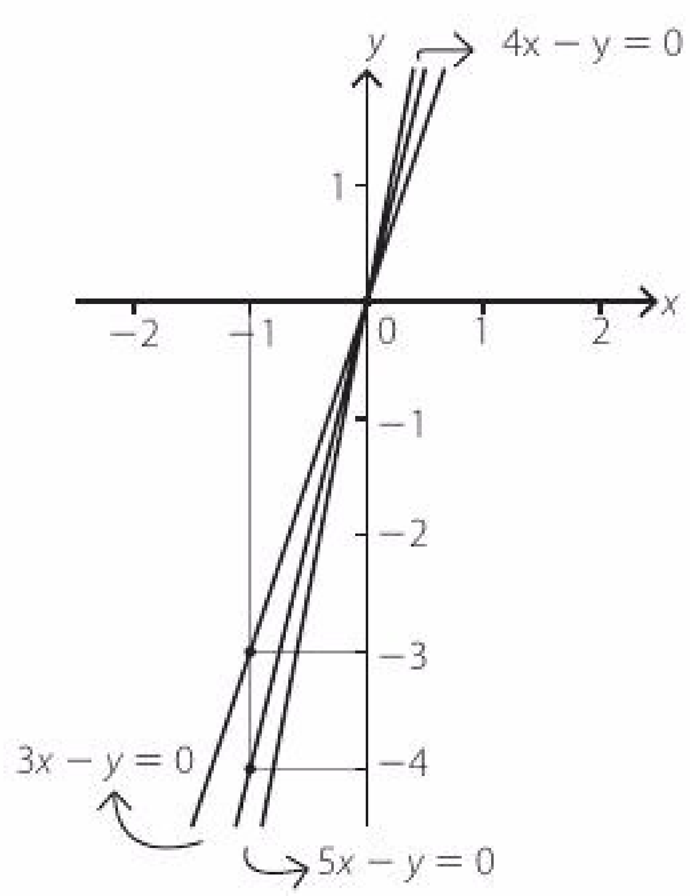


h) $x + y = 0$

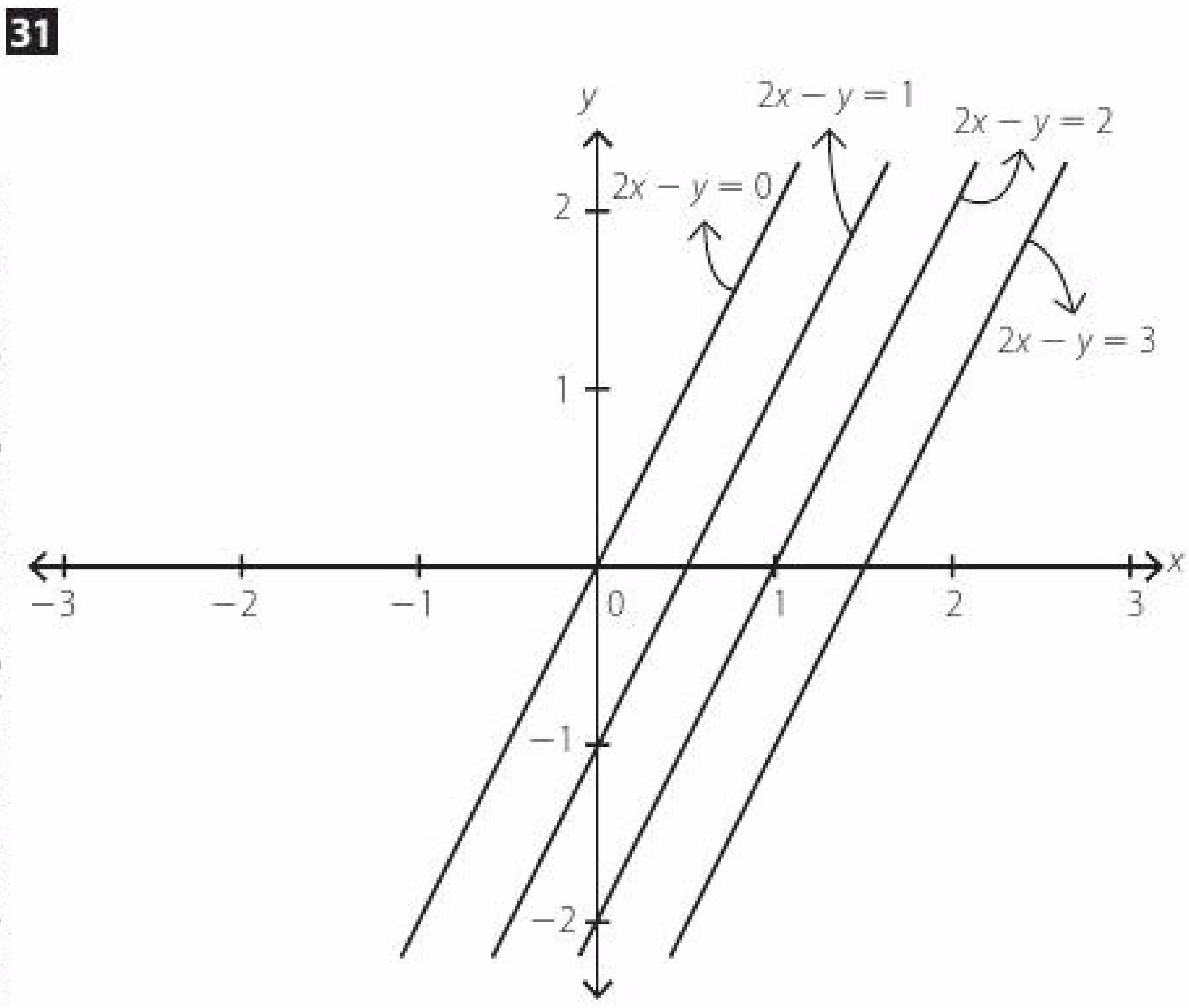
x	y
1	−1
2	−1



30



31



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

36 Isolando x na primeira equação, obtemos a segunda equação só que com os membros trocados; substituindo $y - x = 5$ na segunda equação, ficamos com $(x - 5) + 5 = x$, que leva a $x = x$, o que é verdade para qualquer valor de x.

A conclusão é que há infinitas soluções para esse sistema e a representação gráfica das equações são duas retas coincidentes.

Revise o que estudou

3 Peso original da carga do burro: b e do cavalo: c.

Situação descrita pelo burro em equações:

$$\begin{cases} b + 1 = 2(c - 1) \\ b - 1 = c + 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, descobrimos que a carga do burro é de 7 sacos, e a do cavalo, 5 sacos.

4 a) $\begin{cases} 5c - 3e = 52 \\ c + e = 20 \end{cases}$

Acertou 14 questões.

5 $\begin{cases} 2x + 2y = 72 \\ x = 2y \end{cases}$

Os lados medem 24 cm e 12 cm.

7 $\begin{cases} 2x + y = 84 \\ x = 3y \end{cases}$

Os lados medem 12 cm, 36 cm e 36 cm.

8 $\begin{cases} 2x + y = 18° \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Os ângulos medem 36°, 72° e 72°.

11 Um modo de levar os alunos a praticar a resolução de sistemas é propor que inventem um sistema, escrevendo, primeiro, as duas expressões do primeiro membro das duas equações; depois, escolhendo valores x e y, que deverão ser as soluções esperadas.

Eles devem calcular o valor numérico das duas expressões algébricas para obter os valores dos segundos membros.

Em seguida, devem desafiar um colega a resolver o sistema inventado, usando um dos métodos estudados neste capítulo.

CAPÍTULO 11 Circunferência, círculo e outras curvas

É provável que a primeira ideia associada a círculos e circunferências diz respeito ao fato de serem curvas, mas, desde tempos remotos, outras propriedades foram observadas, como o fato de serem curvas com largura constante, característica que gerou inúmeras aplicações, como nas rodas de veículos, mecanismos vários, roldanas, etc.

A definição formal de que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo pode ter sido abstraída daquele fato da largura constante e do ponto que o inventor da roda encontrou para colocar um eixo.

Esse estudo sobre curvas dá ênfase às suas propriedades e não a propriedades métricas, que serão estudadas no capítulo 10 do 9º ano, quando então os alunos terão conhecido o número pi. Neste capítulo introduzimos a nomenclatura adequada, destacando elementos como corda, arco, raio e diâmetro. Exploramos posições relativas entre circunferências, pontos e retas, introduzindo mais terminologia no caso de circunferência, secantes e tangentes.

Exploramos o problema de determinação do centro de um disco de papel, por meio da dobradura, usando a propriedade da mediatriz. Discutimos ângulos na circunferência, tópico que é retomado no 9º ano.

Recomendamos que se faça largo uso do compasso para produzir curvas e observar regularidades.

No bloco "Polígonos inscritos e circunscritos", o professor pode estender as atividades, ensinando a inscrição de outros polígonos regulares, como o pentágono, o heptágono, o octaedro e outros. Porém, não é recomendável exagerar com procedimentos muito complexos. Como sugestão, proponha que os alunos construam 12-ágonos (dodecágonos), 24-ágonos e outros polígonos regulares que podem ser obtidos pela bissecção de arcos.

No bloco "Elipse" apresentamos uma curva especial, a elipse, de uma perspectiva construtiva e não analítica, sem fórmulas e sem preocupações métricas, para que os alunos reconheçam algumas de suas propriedades. Por meio das construções propostas, os alunos devem descobrir que a distância entre os focos deve ser menor que o tamanho do barbante. Devem descobrir ainda que, quanto mais os focos se aproximam, mais parecida com uma circunferência fica a elipse.

Revista da Matemática

Nesta seção temos dois textos: **Ovo mágico: Tangram oval** e **O Tangram "coração partido"**, que tratam de Tangrans com formatos diferentes do original quadrado.

Comentários finais

6 a 8 aulas previstas

Este capítulo explora as características geométricas das curvas que os alunos conhecem desde os primeiros anos escolares. Quando estudarem os números reais e aprenderem como calcular pi, estarão em condições de investigar mais formas como circunferências, círculos, cilindros, esferas, cones e outras formas curvas.

Comentários das atividades e algumas resoluções

Atividades

2 Se a distância entre os centros das circunferências for maior que a soma dos raios (7 cm), as circunferências não se interceptam; se o ponto *A* for interior à circunferência de centro *B* a uma distância menor que 1 cm do ponto *B*, elas também não devem se interceptar.

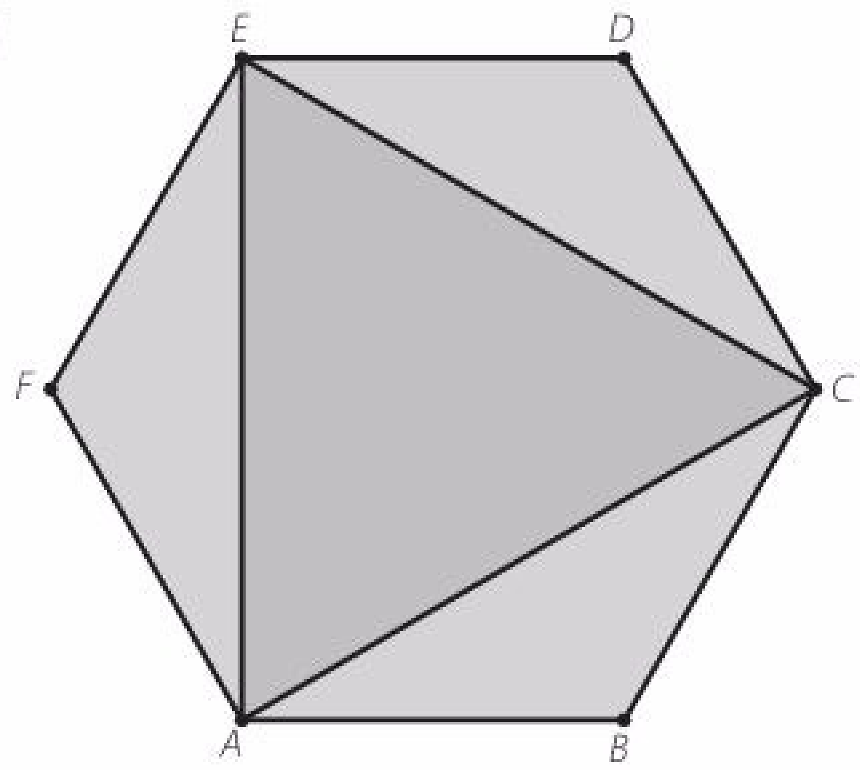
8 Os alunos devem concluir que a medida é o dobro da medida do raio, e o segmento que tem os pontos de intersecção como extremidades é um diâmetro da circunferência.

20 a) Os alunos deverão descobrir experimentalmente que os segmentos são perpendiculares.

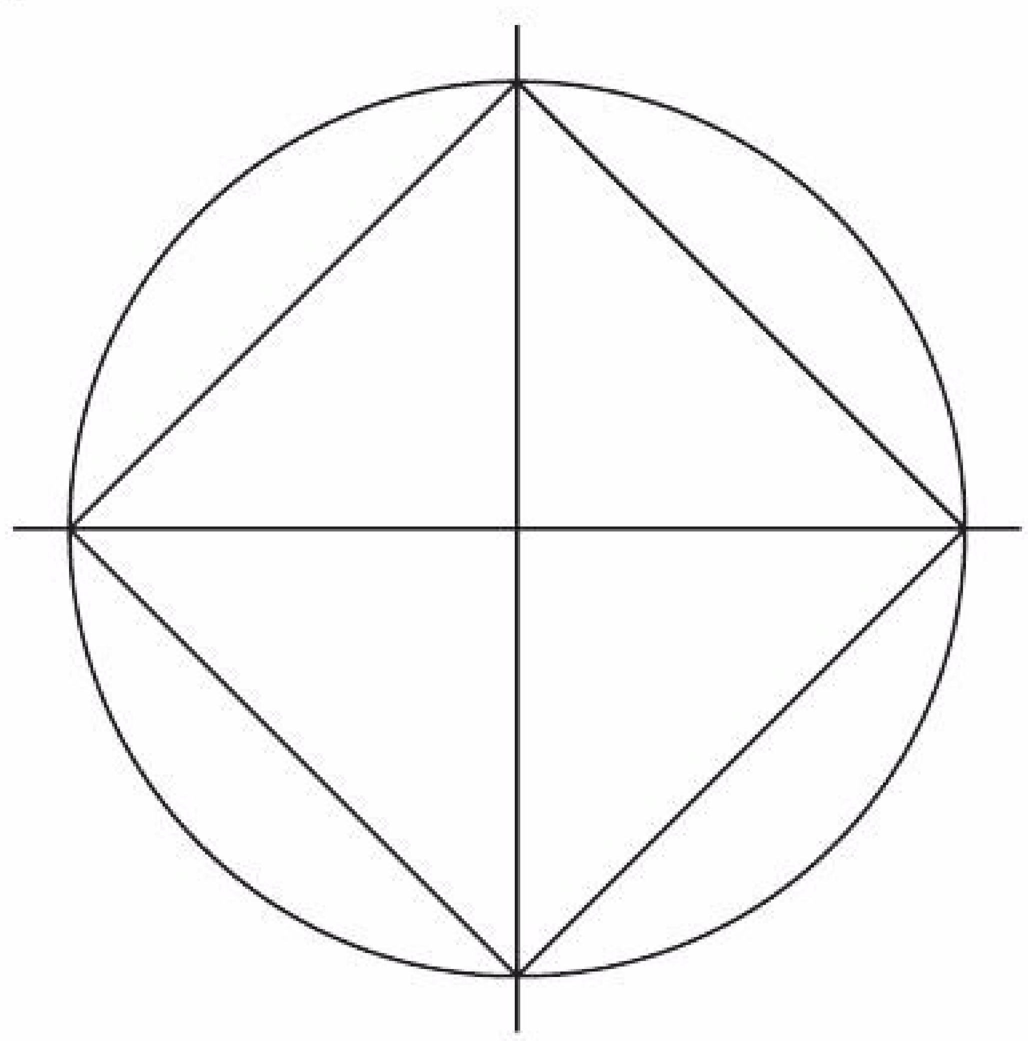
b) Os alunos deverão descobrir experimentalmente que o ponto *M* é equidistante dos extremos da corda.

c) Qualquer que seja *P* escolhido, ele será equidistante dos pontos *A* e *B*; observe que o triângulo *APB* é isósceles.

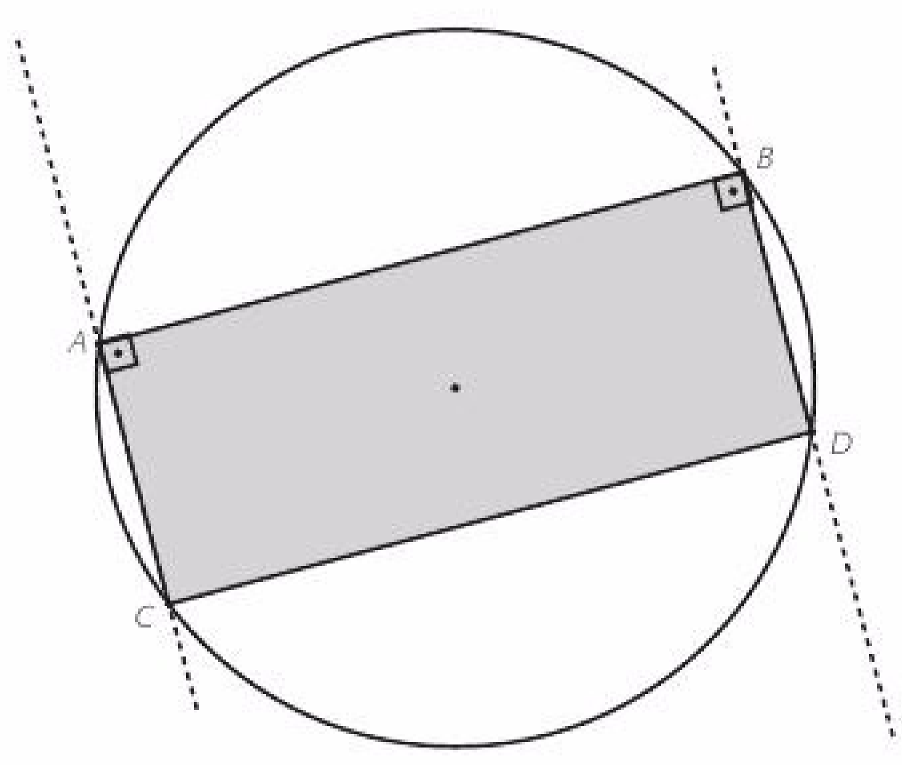
30



31 Sugestão de resposta: traçar uma circunferência e dois diâmetros perpendiculares. Marcar os pontos de intersecção dos diâmetros com a circunferência. Ligar os pontos da circunferência, formando um quadrado. Observe que a circunferência foi dividida em 4 partes iguais.

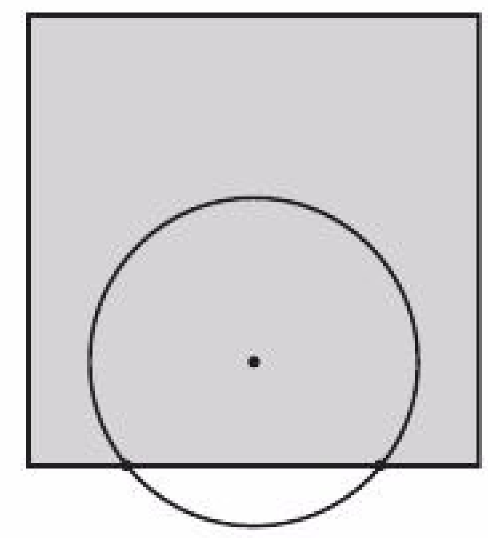


32 Sugestão de resposta: traçar uma corda qualquer, em seguida traçar retas perpendiculares que passem pelas extremidades da corda, marcar as intersecções dessas perpendiculares com a circunferência. Juntar os pontos da circunferência, para obter o retângulo. As relações de perpendicularismo garantem que os ângulos do quadrilátero são retos.

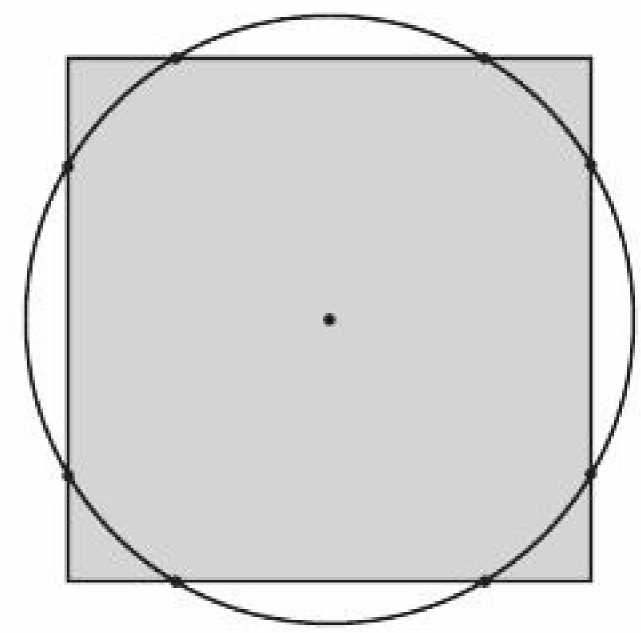


Revise o que estudou

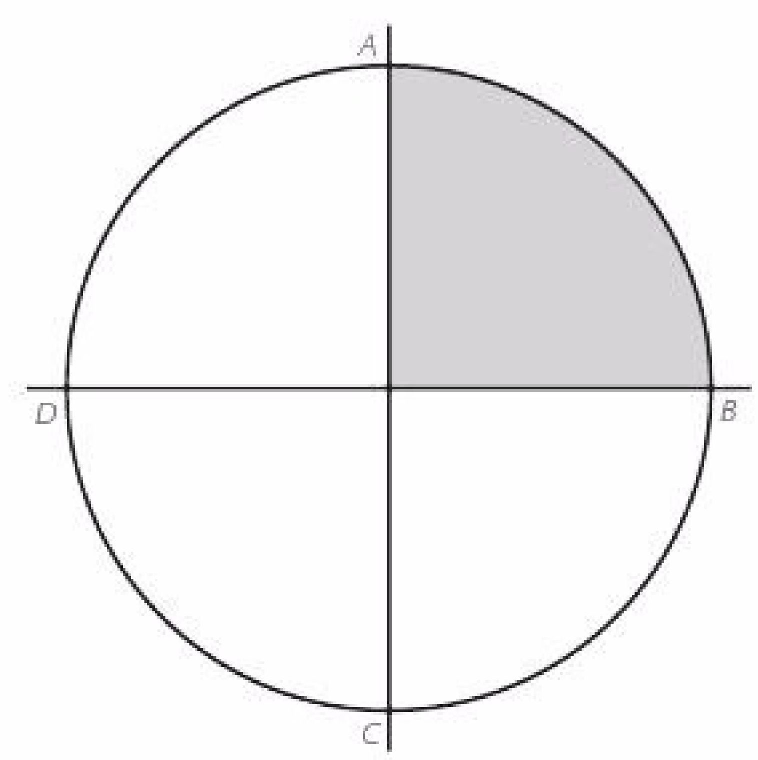
6 a)



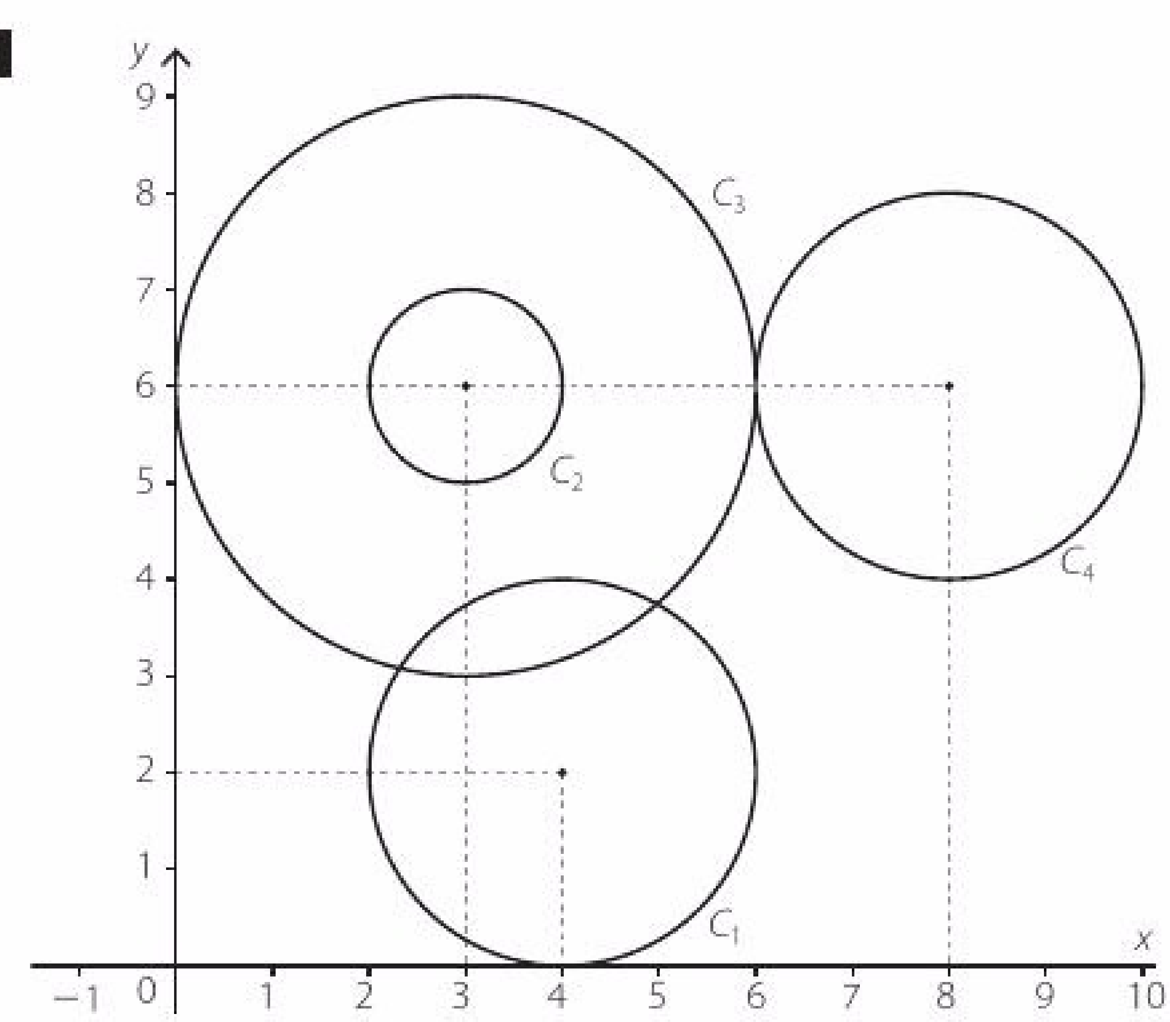
b)



7 Se os diâmetros são perpendiculares e suas extremidades estão sobre a circunferência, o ângulo central é reto e mede 90º.

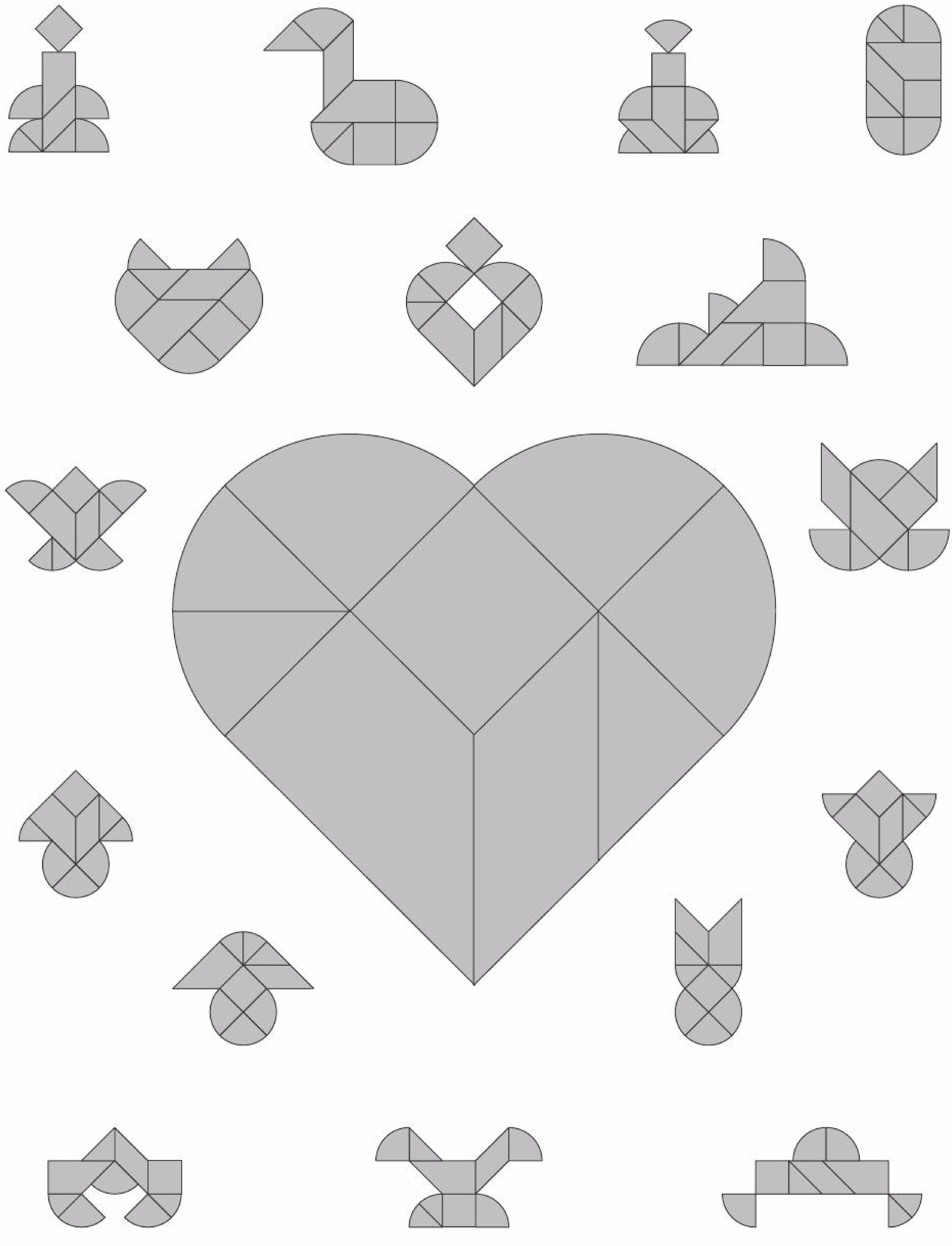


9



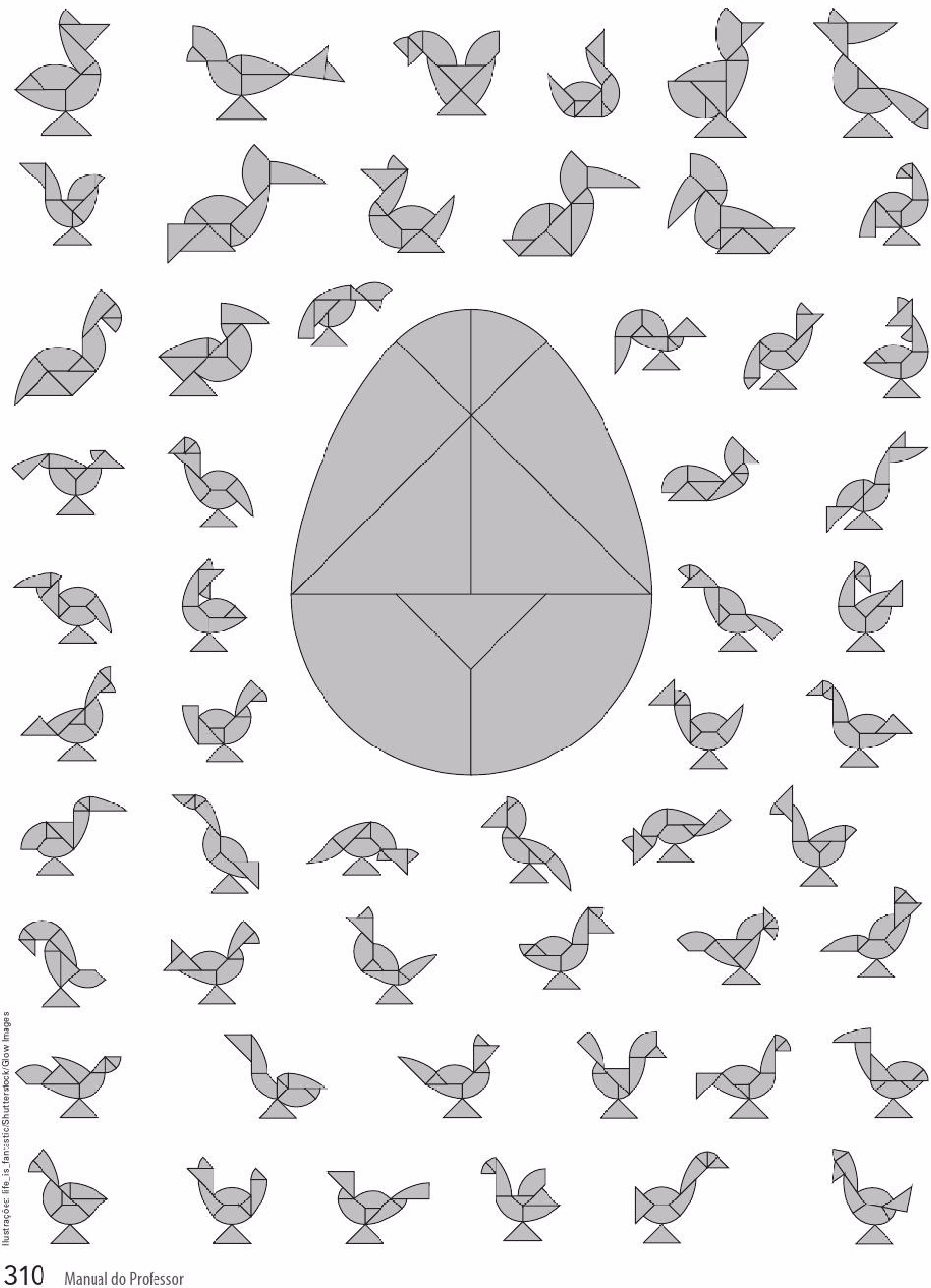
Revista da Matemática

Os Tangrans de "coração partido" apresentados na página 221 podem ser resolvidos como mostram as figuras abaixo:



Ilustrações: life_is_fantastic/Shutterstock/Glow Images

Os Tangrans ovais apresentados na página 220 podem ser resolvidos como mostram as figuras abaixo:



Ilustrações: life_is_fantastic/Shutterstock/Glow Images

CAPÍTULO 12 Geometria 3-D: poliedros e outros sólidos

Consideramos este último capítulo uma boa maneira de encerrar um ano letivo em que os alunos estudaram uma diversidade de conceitos e métodos, alguns complexos.

O estudo das formas tridimensionais, popularmente conhecidas como formas 3-D, é uma abordagem contemporânea, estética e cultural das formas ao nosso redor.

Os alunos conhecem as formas tridimensionais mesmo antes de terem entrado na escola, é a forma de seus brinquedos: a bola, os dados, as caixas, etc. O objetivo deste capítulo é aprofundar o conhecimentos dessas formas, ampliando e relacionando com as "coisas" do cotidiano e seus usos.

Destacamos, na primeira parte, as formas no entorno, em especial na Arquitetura, nas Artes e nas formas dos objetos do cotidiano.

Apresentamos o conceito de poliedros, que são sólidos limitados por faces planas, para em seguida explorar casos especiais como os prismas, as pirâmides e os poliedros de Platão.

Em cada caso mostramos onde estão presentes nas Artes, na natureza ou nos objetos do cotidiano, e os analisamos construtivamente destacando seus elementos.

Recomendamos a construção de modelos poliédricos usando matérias variados, como cartolina no caso das planificações, canudos e varetas no caso das estruturas.

Entre as atividades propostas, chamamos atenção para aquelas que desenvolvem a visualização dos alunos, indicando *sites* confiáveis onde podem explorar as formas 3-D fazendo transformações do tipo cortes, planificações, projeção, etc.

No bloco "Simetrias do cubo" trazemos o conceito de simetria para as figuras tridimensionais, propondo como exemplo uma reflexão sobre as simetrias do cubo.

Retomamos o conceito de probabilidades, apresentando atividades com dados poliédricos.

Revista da Matemática

Nesta seção temos o texto **Policubos**, que trata de construções 3-D formadas por cubinhos, e o texto **Cubo impossível**, que discute um tipo de cubo que não pode existir em 3-D.

Comentários finais

6 a 8 aulas previstas

O estudo das formas 3-D é uma boa maneira de encerrar o ano letivo, não só pelas possibilidades estético-lúdico-funcionais dos objetos deste capítulo, mas também pela oportunidade de encerrar o ano com produções dos alunos, que podem se organizar em grupos para desenvolver e apresentar projetos coletivos de construção de objetos inusitados, estruturas, maquetes, etc.

Há escolas que têm um ambiente do tipo laboratório de Matemática; se esse for o caso de sua escola, prepare modelos e traga para a sala de aula.

Curiosidade: o ano 2000 foi o Ano Internacional da Matemática. Em sua comemoração, escolas do mundo inteiro realizaram exposições, gincanas, olimpíadas de jogos lógicos, peças de teatro, poesia e músicas com temas matemáticos, construção de obras de arte e instalações com motivos geométricos. Uma das atividades realizadas nos cinco continentes foi a construção de um icosaedro gigante, em que as arestas tinham mais de 1 metro. Fica aqui uma sugestão para despertar a criatividade de professores e alunos.

Atividades

5 a) O número de vértices de um prisma é a soma dos vértices do polígono da base inferior com os vértices do polígono da base superior. Se o prisma é um pentágono, então, 5 + 5 = 10 vértices.

b) As arestas são os lados das bases, somados com as arestas laterais; então, temos:
5 + 5 + 5 = 15 arestas.

6 a) O polígono da base é um octógono. O número de vértices de uma pirâmide é o número de lados do polígono da base somado ao vértice da ponta superior da pirâmide; nesse caso, temos:
8 + 1 = 9 vértices.

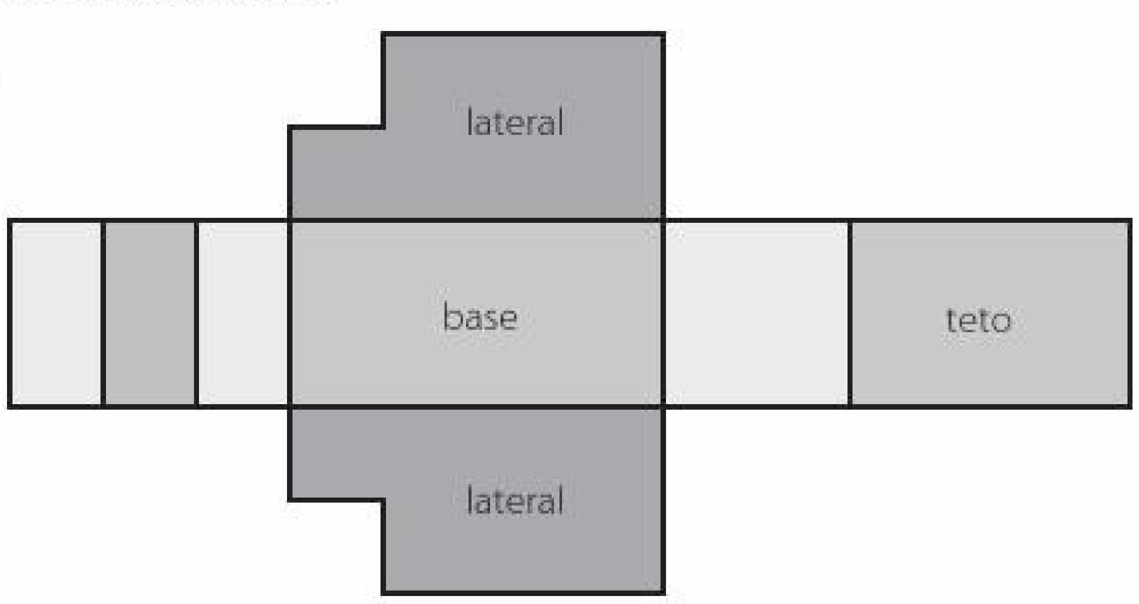
b) O número de arestas de uma pirâmide é a soma das arestas da base, que coincidem com os lados do polígono da base, com as arestas laterais. De cada vértice do polígono da base saem as arestas laterais, logo: 8 + 8 = 16 arestas.

8 Baseado nas atividades anteriores que relacionam o número de vértices ao número de lados do polígono da base, 11 = 10 + 1; portanto, a base da pirâmide tem 10 lados, ou seja, é um decágono.

9 Havendo recursos materiais na sua escola, proponha uma seção de construção de prismas e pirâmides, usando palitos e bolinhas de isopor, ou massinha, para fazer as junções.

11 Estas medidas foram convertidas para o sistema métrico decimal. Na época de sua construção seus arquitetos a mediram usando como unidade de comprimento a "vara".
O lado da base da pirâmide media 440 varas e a sua altura 280 varas.

12



Banco de imagens/Arquivo da editora

Há muitas outras maneiras de planificar este objeto tridimensional. Havendo recursos materiais na sua escola, proponha que os alunos construam objetos tridimensionais usando cubos ligados face a face e que planifiquem a construção obtida.

13 a) A, B e C; no caso de A, embora as faces não sejam iguais, são do mesmo tipo, ou seja, retangulares.

c) *A*: todas as faces são retangulares; *B*: todas as faces são triângulos; *C*: todas as faces são quadriláteros convexos em forma de pandorga ou pipa; *D*: as faces laterais são retangulares, as faces da "ponta" em forma de pirâmide são triângulos e a base é um hexágono.

18 A proposta é que os alunos imaginem os movimentos de dobragem dos triângulos, tentando montar o octaedro na cabeça. Trata-se de um importante exercício de visualização. Uma alternativa manipulativa é recortar moldes das figuras e dobrá-las para ver se formam um octaedro.

Revise o que estudou

2 Sugestões de respostas: Semelhanças: faces planas, base poligonal. Diferenças: faces laterais triangulares no caso das pirâmides, paralelogramos e retangulares no caso dos prismas.

9 a) Reto, pois todas as faces laterais são retângulos.

b) 2 hexágonos: a base inferior e a base superior.

c) 6 retângulos: o mesmo número do polígono da base.

d) 5 cm × 10 cm

e) 2 bases + 6 faces laterais = 8 faces

f) Todos os vértices do prisma também são vértices dos polígonos das bases, então $2 \cdot 6 = 12$ vértices.

g) Todos os lados das bases poligonais são arestas do prisma ($2 \cdot 6 = 12$), os lados dos retângulos também são arestas.
Total: $3 \cdot 6 = 18$ arestas.

10 **I.** Da transformação do cubo o novo sólido ganhou uma face (a seção de corte triangular); 3 arestas (os lados da seção de corte); perdeu um vértice (que ficou na pirâmide), mas ganhou mais 3 vértices (os vértices do triângulo da seção de corte) → Sólido: 7 faces, 10 vértices, 15 arestas.

Chame atenção que tanto no caso do cubo original como neste novo sólido F + V = A + 2;
7 + 10 = 15 + 2

II. Da transformação do cubo o novo sólido ganhou uma face (a seção de corte retangular); 3 arestas (os lados da seção de corte); perdeu 2 vértices (que ficaram no prisma), mas ganhou mais 4 vértices (os vértices do retângulo da seção de corte) → Sólido: 7 faces, 10 vértices, 15 arestas.
Também neste caso: 7 + 10 = 15 + 2.

ISBN 978-852629647-3