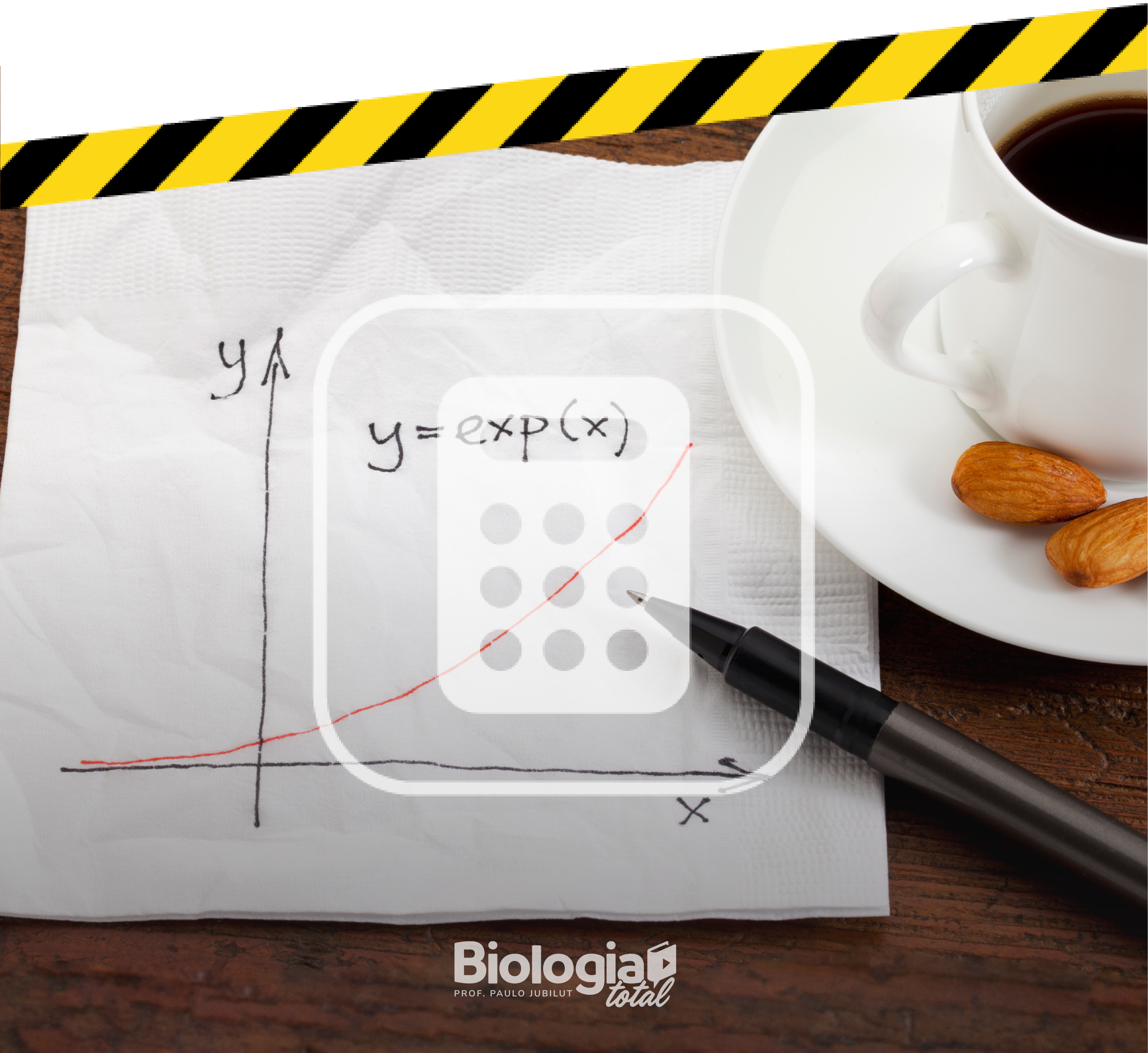
GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Exponencial e Logaritmo



Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

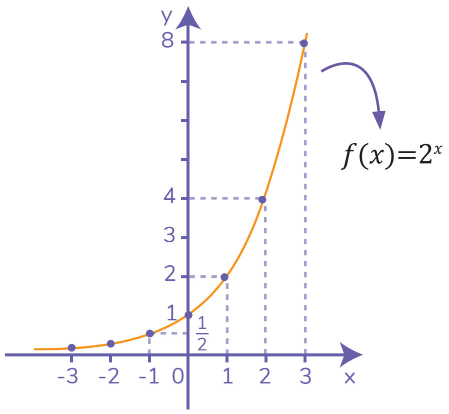
Exponencial

Função Exponencial

Função exponencial é a função do tipo $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x)=a^x$, em que a simboliza um número real constante maior que zero e diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$).

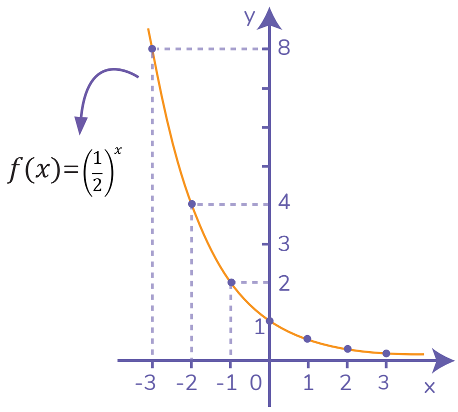
Caso $a > 1$

- O gráfico será crescente;
- Cortará o eixo y em 1;
- A curva nunca tocará o eixo x.



Caso $0 < a < 1$

- O gráfico será decrescente;
- Cortará o eixo y em 1;
- A curva nunca tocará o eixo x.



O gráfico da função exponencial sempre passa pelo ponto (0,1).

Equação Exponencial

As equações exponenciais são as equações cuja **incógnita aparece no expoente**. Para resolvê-las utilizamos as propriedades de potenciação para transformá-la em uma igualdade entre **potências de mesma base.**

Exemplos:

$$2^x=64$$

Como $64 = 2^6$, temos então:

$2^x=64 \Rightarrow 2^x=2^6 \Rightarrow x=6$

Portanto, $S=\{6\}$.

$$\left(\frac{1}{125}\right)^x=25$$

Como $125 = 5^3$ e $25 = 5^2$, então:

$\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25 \Rightarrow \left(\frac{1}{5^3}\right)^x = 5^2$

$(5^{-3})^x = 5^2 \Rightarrow (5)^{-3x} = 5^2$

$5^{-3x} = 5^2 \Rightarrow -3x = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Portanto, $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

$$4^{x+1} - 8 = 2\cdot 4^x$$

Como $8=2\cdot 4$, então:

$4^{x+1}-8=2\cdot 4^x \Rightarrow$

$4^x\cdot 4-2\cdot 4^x=2\cdot 4 \Rightarrow$

$4^x\cdot(4-2)=2\cdot 4 \Rightarrow$

$4^x\cdot 2=2\cdot 4 \Rightarrow$

$4^x=4 \Rightarrow$

$x=1$

Portanto, $S=\{1\}$.

Inequação Exponencial

Inequações exponenciais são inequações cuja **incógnita aparece no expoente**. Para resolvê-las utilizamos as propriedades de potenciação para transformá-la em uma desigualdade entre **potências de mesma base.** Posteriormente verificamos se a base a é maior ou menor que um.

Caso $a > 1$:
mantém-se o sinal da desigualdade.

$3^x + 3^{x+1} - 2.3^{x+2} + 3^{x+3} < 13 \Rightarrow$
$3^x + 3^x \cdot 3^1 - 2.(3^x \cdot 3^2) + 3^x \cdot 3^3 < 13 \Rightarrow$
$3^x\,(1 + 3^1 - 2.3^2 + 3^3) < 13 \Rightarrow$
$3^x\,(1 + 3 - 2.9 + 27) < 13 \Rightarrow$
$3^x\,(31 - 18) < 13 \Rightarrow$
$3^x\,(13) < 13 \Rightarrow$
$3^x < 1 \Rightarrow 3^x < 3^0$
Como a base é maior que um: $x < 0$.
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\}$.

Caso $0 < a < 1$:
inverte-se o sinal da desigualdade.

$$\left(\frac{9}{25}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow \left(\frac{3^2}{5^2}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow$$
$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \geq \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^7 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-7}$$

Como a base é menor que um:

$2x \leq -7 \Rightarrow x \leq -\frac{7}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{7}{2}\right\}$.

Logaritmo

Sejam a, b números reais tais que $\underbrace{a>0,\ b>0 \ e \ b \neq 1}_{\text{Condições de existência}}$ e seja também x número real. Dizemos que:

$$\boxed{\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a}$$

- b é a base do logaritmo
- x é o logaritmo
- a é o logaritmando

Lemos $\log_b a = x$ como "logaritmo de a na base b".

Exemplo:
$\log_3 27 = 3$ pois $3^3 = 27$

Logaritmo Decimal: base vale 10: $\log_{10} a$.

geralmente omite-se o valor da base
$\log_{10} a = \log a$

Logaritmo Neperiano: base vale e: $\log_e a$.

também chamado de logaritmo natural
$\log_e a = \ln a$

$e = 2.718281828\ldots$ é um número irracional e é chamado de número de Euler.

Consequências da Definição

- $\log_b 1 = 0$ pois qualquer número b elevado a zero dá 1.
  $\log_{35} 1 = 0$
- $\log_1 1$ não existe, pois pela condição de existência, $b \neq 1$.
- $\log_b b = 1$ pois qualquer número b elevado a 1 dá ele mesmo.
  $\log_5 5 = 1$
- $\log_b b^k = k$ pois qualquer número b elevado a k dá b^k.
  $\log_3 3^4 = 4$
- $b^{\log_b a} = a$
  $3^{\log_3 7} = 7$

Propriedades do Logaritmo

- $log_b\,(a\,.\,c) = log_b\,a + log_b\,c$

  $log_5(4\,.\,3) = log_5\,4 + log_5\,3$

  não vale que: $log_b(a+c) = log_b\,a \cdot log_b\,c$

- $log_b(\frac{a}{c}) = log_b\,a - log_b\,c$

  $log_4(\frac{15}{2}) = log_4\,15 - log_4\,2$

  não vale que: $log_b(a-c) = log_b\,a \,/\, log_b\,c$

- $log_b\,a^k = k.log_b\,a$

  $log_3\,9^2 = 2.log_3\,9$

Mudança de Base

Utilizamos a mudança de base quando precisamos mudar a base de um logaritmo por alguma razão.

$$log_b\,a = \frac{log_c\,a}{log_c\,b}$$

Exemplos:

Passando o $log_2\,5$ para a base 3:

$$log_2\,5 = \frac{log_3\,5}{log_3\,2}$$

Passando o $log_{11}\,6$ para a base 4:

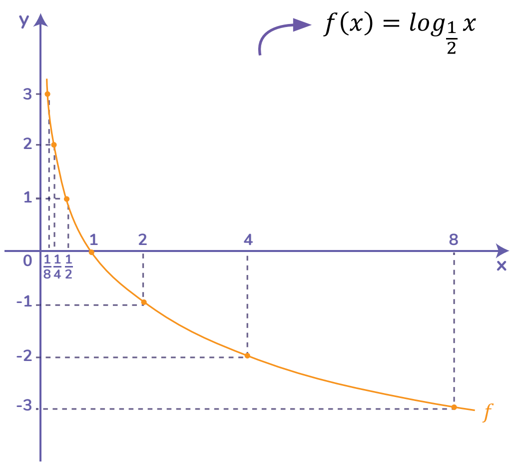
$$log_{11}\,6 = \frac{log_4\,6}{log_4\,11}$$

Função Logarítmica

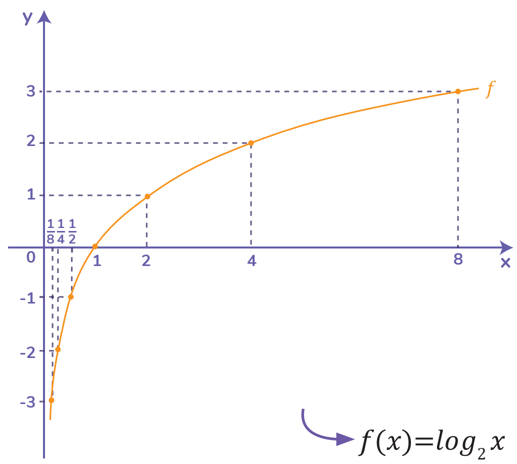
Damos o nome de função logarítmica a toda função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ da forma $f(x)=\log_b x$, com $b>0$ e $b\neq1$.

A condição de existência da função logarítmica recai sobre os valores da base b.

Se $0<b<1$ a função logarítmica é decrescente.



Se $b>1$ a função logarítmica é crescente.



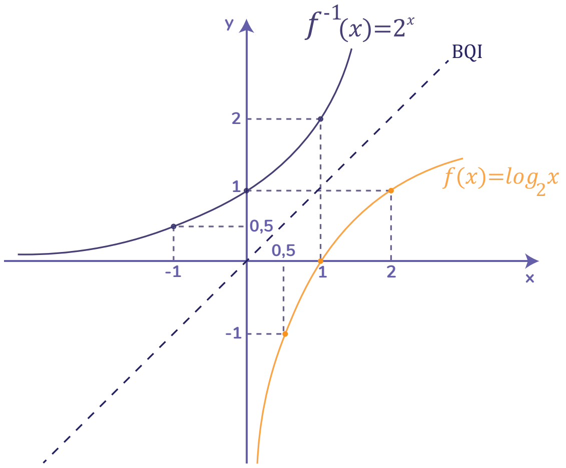
O gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto (1,0).

Função Inversa da Função Logarítmica

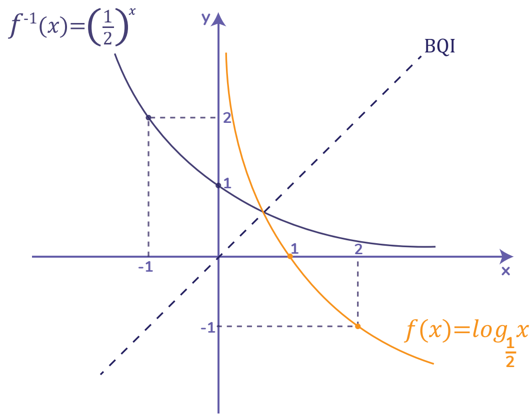
Dada a função logarítmica $f(x)=log_b\,x$, sua função inversa é a função $f^{-1}(x)=b^x$.

Exemplos:

Se $f(x)=log_2\,x$ então $f^{-1}(x)=2^x$



Se $f(x) = log_{\frac{1}{2}}\,x$ então $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}^x$



Simetria de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ em relação à **bissetriz dos quadrantes ímpares.**

As funções exponenciais e logarítmicas de **mesma base** são inversas.

Equação Logarítmica

Equações logarítmicas são equações em que a incógnita aparece no logaritmando ou na base do logaritmo.

Resolvemos as equações utilizando a definição e as propriedades do logaritmo, sempre lembrando das condições de existência e, quando necessário, fazer uma mudança de base para deixar os logaritmos na mesma base.

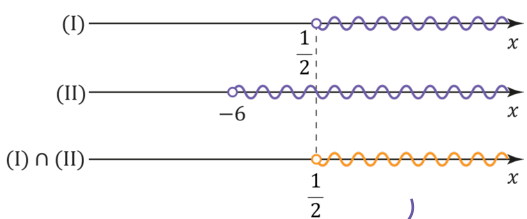
Fique ligado: $log_b\,x=log_b\,y \Leftrightarrow x=y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $b>0$ e $b\neq 1$.

Exemplos:

$$log_5(2x-1) = log_5(x+6)$$

$$(I) 2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$(II)\; x+6>0 \Rightarrow x>6$$

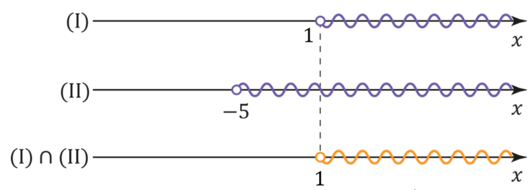


Condição de Existência

$$log_2(x-1) + log_2(x+5) = 4$$

$$(I)\; x-1>0 \Rightarrow x>1$$

$$(II) x+5>0 \Rightarrow x>-5$$



Condição de Existência

Resolvendo a equação:

$log_5(2x-1)=log_5(x+6) \Leftrightarrow 2x-1=x+6$

$\Leftrightarrow 2x-x=6+1 \Leftrightarrow x=7$

Como $7 > \frac{1}{2}$, então $S = \{7\}$.

Resolvendo a equação:

$log_2(x-1) + log_2(x+5) = 4$

$\Leftrightarrow log_2(x-1)(x+5) = 4$

$\Leftrightarrow 2^4 = (x-1)(x+5)$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -7 \; e \; x_2 = 3$

$S = \{3\}$.

Inequação Logarítmica

Inequações logarítmicas são inequações em que a incógnita aparece no logaritmando ou na base do logaritmo.

Para resolvermos uma inequação logarítmica, precisamos tomar cuidado com a condição de existência e, ainda, prestar atenção no valor da base b.

Exemplos:

Caso $b>1$: mantém-se o sinal da desigualdade.

$$log_2(2x-4) > 4$$

$2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$

Condição de Existência

Resolvendo a inequação:

Como $4 = log_2 16$, pois $2^4=16$, então:

$log_2(2x-4)>4 \Leftrightarrow log_2(2x-4) > log_2 16$

Agora, como a base é maior que um: $2x-4>16$.

Assim $2x-4>16 \Rightarrow x>10$.

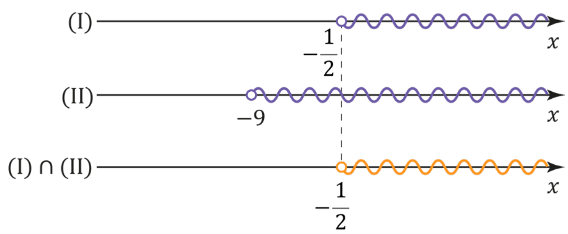
Como $x>10$ satisfaz $x>2$, então $S=\{x \in \mathbb{R};\, x > 10\}$.

Caso $0<b<1$: inverte-se o sinal da desigualdade.

$$log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \leq log_{\frac{1}{2}}(x+9)$$

(I) $2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

(II) $x + 9 > 0 \Rightarrow x > -9$



Condição de Existência

Resolvendo a inequação:

$log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \leq log_{\frac{1}{2}}(x+9) \implies$

$2x + 1 \geq x + 9 \Rightarrow x \geq 8.$

Como $x \geq 8$ satisfaz a condição de existência, então $S=\{x \in \mathbb{R};\, x \geq 8\}$.


y
y=exp(x)