INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
PROVA DE MATEMÁTICA - 1983

OBS: As questões **16**, **17**, **18**, **19** e **20**, referentes ao assunto de Desenho, foram omitidas.

01. Ao girarmos o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0;1] \\ \sqrt{2x - x^2} & ; x \in (1;2] \end{cases}$ em torno do eixo das abscissas (eixo dos x), obtemos uma superfície de revolução cujo volume é:

a) $\pi/3$ b) $\pi/2$ c) π d) 2π e) 3π

02. Um general possui *n* soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com *r* soldados e outro da retaguarda com *s* soldados (r+s=n), ele poderá dispor seus homens de:

a) $\frac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque
b) $\frac{n!}{r!.s!}$ maneiras distintas neste ataque
c) $\frac{n!}{(r.s)!}$ maneiras distintas neste ataque
d) $\frac{2.(n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque
e) $\frac{2.(n!)}{r!.s!}$ maneiras distintas neste ataque

03. Dadas as funções $f(x^2) = \log_{2x} x$ e $g(x) = 2sen^2 x - 3senx + 1$, definidas para $x > 0$ e $x \neq 1/2$, o conjunto $A = \{x \in (0,2\pi) : (gof)(x) = 0\}$ é dado por:

a) $A = \left\{4^{\frac{\pi}{2-\pi}},\ 4^{\frac{\pi}{6-\pi}},\ 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$
b) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}},\ 2^{\frac{\pi}{6-\pi}},\ 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$
c) $A = \left\{4^{2-\pi},\ 4^{6-\pi},\ 4^{6-5\pi}\right\}$
d) $A = \left\{4^{\frac{2\pi}{2-\pi}},\ 4^{\frac{2\pi}{6-\pi}},\ 4^{\frac{2\pi}{6-5\pi}}\right\}$
e) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}},\ 4^{\frac{\pi}{6-\pi}},\ 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

04. Considere os números reais não-nulos a, b, c e d em progressão geométrica tais que a, b e c são raízes da equação (em x) $x^3 + Bx^2 - 2Bx + D = 0$, onde B e D são números reais e B > 0. Se ad – ac = –2B, então:

a) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $b^2 + c^2 + d^2 = 16B^2/(B^2 + 4B)$
b) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 16B/(B^2 + 4)$
c) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)$ e $b^2 + c^2 + d^2 = 16B/(B + 4)$
d) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 16B/(B + 4)$
e) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = (B + 4)/(16B)$

05. Dado o polinômio P definido por $P(x) = sen\theta - (tg\theta).x + (\sec^2\theta).x^2$, os valores de θ no intervalo $[0,2\pi]$ tais que P admita somente raízes reais são:

a) $0 \leq \theta \leq \pi/2$
b) $\pi/2 < \theta < \pi$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$
c) $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ ou $3\pi/2 < \theta \leq 2\pi$
d) $0 \leq \theta \leq \pi/3$
e) $\pi/2 \leq \theta < 3\pi/2$

06. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ onde $a = 2^{(1+\log_2 5)}$; $b = 2^{\log_2 8}$; $c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$. Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

a) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3/2 & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3/2 & 2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & \log_2 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3.\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_2 81} \end{bmatrix}$

07. Sejam três funções f, u, v: **R** → **R** tais que f(x + 1/x) = f(x) + 1/f(x) para todo x não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$ para todo x real. Sabendo-se que x_0 é um número real tal que $u(x_0).v(x_0) \neq 0$ e $f\left(\frac{1}{u(x_0)}\cdot\frac{1}{v(x_0)}\right) = 2$, o valor de $f\left(\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)$ é:

a) –1 b) 1 c) 2 d) ½ e) –2

08. A solução da equação $arctgx + arctg\frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto dos reais diferentes de -1 é:

a) 1 b) 1/2 c) 1/2 e 1 d) 2 e) 2 e 1

09. Dados A, B e C ângulos internos de um triângulo, tais que $2B + C \neq \pi$ e $\alpha \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$, o sistema $\begin{cases} senA + senB = sen\left(\frac{\alpha - C}{2}\right) \\ -\cos A + \cos B = \cos\left(\frac{\alpha - C}{2}\right) \end{cases}$ admite como solução:

a) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\pi}{3}$ e $C = \frac{2\pi}{3}$

b) $A = \frac{2\pi}{3}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = 0$

c) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}$

d) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{2\pi}{3}$ e $C = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\pi}{3}$

e) $A = \pi$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = -\frac{\alpha}{2}$

10. Determine o polinômio P de 3º grau que apresenta uma raíz nula e satisfaz a condição $P(x - 1) = P(x) + (2x)^2$ para todo x real. Com o auxílio deste, podemos calcular a soma $2^2 + 4^2 + ... + (2n)^2$, onde n é um número natural, que é igual a:

a) $4n^3/3 - 2n^2 - 2n/3$ b) $4n^3/3 + 2n^2 + 2n/3$ c) $4n^3/3 - 2n^2 + 2n/3$
d) $4n^3 + 2n^2 + n$ e) $n^3 + n^2 + 2n$

11. Seja **a** um número real tal que **a** ≠ **π/2 + kπ**, onde **k** ∈ **Z**. Se (x_0, y_0) é solução do sistema $\begin{cases}(2.\sec a)x+(3.\text{tg}a)y=2.\cos a\\ (2.\text{tg}a)x+(3.\sec a)y=0\end{cases}$, então podemos afirmar que:

a) $x_0 + y_0 = 3 - 2.\text{sen } a$ b) $(-2/3 - x_0)^2 - y_0^2 = -4/9 - \cos^2 a + 2$ c) $x_0 - y_0 = 0$
d) $x_0 + y_0 = 0$ e) $(-2/3 - x_0)^2 - y_0^2 = 4(\cos^2 a)/9$

12. Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede 64 cm^2. Numa seção paralela à base que dista 30 mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede 4π cm^2, então a altura desta pirâmide mede:

a) 1 cm b) 2 cm c) 4 cm d) 6 cm e) 60 cm

13. Sejam m e n constantes reais estritamente positivas. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, consideramos "C" a circunferência de centro P(1/m, 1/n) e de raio R = $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$ e "r" a reta de equação mx + ny + ($\sqrt{m^2-n^2}$ – 2) = 0. Nestas condições, se "s" é a reta que passa por P e é perpendicular à reta "r", então os pontos de intersecção de "s" com "C" são:

a) (1/m + 1, 1/n) e (1/m – 1, 1/n – n/m)
b) (1/m + 1, n/m) e (1/m, 1/n)
c) (1/m, n/m) e (1/m, – m/n)
d) (1/m, 1/n + 1) e (1/m, 1/n + n/m)
e) (1/m + 1, 1/n + n/m) e (1/m – 1, 1/n – n/m)

14. As equações $x^3+ax^2+18=0$ e $x^3+nbx+12=0$, onde a e b são constantes reais e n um inteiro, têm duas raízes reais comuns. Das afirmativas abaixo, qual é verdadeira?

a) As raízes não comuns às equações têm sinais opostos.
b) As raízes não comuns às equações são negativas quando a é negativo.
c) A soma das raízes não comuns às equações é 5.
d) b e n possuem o mesmo sinal.
e) As raízes comuns às equações dependem de n.

15. Consideremos um número complexo z tal que $\frac{z^2}{\bar{z}i}$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ e $\log_2(z+\bar{z}+2)=3$. Nessas condições, podemos afirmar que:

a) Não existe $\ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)$ b) $z^4+\ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)=-324$ c) $z+2\bar{z}$ é um número real
d) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=\frac{1}{108}(1+i)$ e) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=\frac{-1}{108}(1+i)$