MATAMÁTICA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

SETOR II

ENEM 2011

Módulo 1. Produtos notáveis

- Produto da soma pela diferença: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- Quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Cubo da soma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Cubo da diferença: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Módulo 2. Fatoração

- Fator comum $\longrightarrow$ $ax + bx = x(a + b)$
- Agrupamento $\longrightarrow$ $mx + nx + my + ny = x(m + n) + y(m + n) = (m + n)(x + y)$
- Diferença de quadrados $\longrightarrow$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Trinômio quadrado perfeito $\longrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{cases}$

Outros casos

- Trinômio do 2º grau $\rightarrow$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$
- Soma de cubos $\rightarrow$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- Diferença de cubos $\rightarrow$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Módulo 3. Porcentagem

1. Definição e cálculo

Porcentagem é uma fração de denominador centesimal.

$$\boxed{\begin{array}{l} 25\% = \dfrac{25}{100} = 0{,}25 \\ i\% = \dfrac{i}{100} \end{array}}$$

2. Porcentagem – Lucro

Lucro ou prejuízo percentual

Preço de custo + Lucro = Preço de venda
Preço de custo – Prejuízo = Preço de venda

Módulo 4. Aumentos e descontos percentuais

1. Aumento percentual

Sendo: V – valor inicial, p% – porcentagem de aumento; A – aumento; V_A – valor após o aumento, temos:

$$\boxed{V_A = V + A = V + p\% \text{ de } V = V + \frac{P}{100} \cdot V \Rightarrow V_A = V \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)}$$

Assim, $\boxed{1{,}24 \cdot V}$ é o valor inicial V mais um aumento de 24%.

2. Desconto percentual

Sendo: V – valor inicial; p% – porcentagem de desconto; D – desconto; V_D – valor após o desconto, temos:

$$\boxed{V_A = V - D = V - p\% \text{ de } V = V - \frac{P}{100} \cdot V \Rightarrow V_D = V \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right)}$$

Assim, $\boxed{0{,}76 \cdot V}$ é o valor inicial com um desconto de 24%.

Módulo 5. Porcentagem: exercícios

Porcentagem é uma fração de denominador centesimal.

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$i\% = \frac{i}{100}$$

1. Lucro ou prejuízo percentual

Preço de custo + Lucro = Preço de venda
Preço de custo – Prejuízo = Preço de venda

2. Aumentos e descontos

Se p é uma parte de V, qual porcentagem de V que p representa?

$$\frac{p}{V} \cdot 100\%$$

Se V_i era o valor inicial e V_f é o valor final, qual foi a variação percentual?

$$\frac{|\text{valor final} - \text{valor inicial}|}{\text{valor inicial}} \cdot 100\%$$

Quem aumenta p% determina o valor final, multiplicando o valor inicial por qual fator?

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Quem reduz p% determina o valor final, multiplicando o valor inicial por qual fator?

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Módulo 6. Múltiplos e divisores

$\boxed{n = m \cdot k,\ m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}}$

n é múltiplo de m.
m é divisor ou fator de n.

$\boxed{a \text{ é nº par} \Leftrightarrow a = 2k,\ k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{a \text{ é nº ímpar} \Leftrightarrow a = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}}$

Módulo 7. MDC e MMC de números

MDC: Produto dos divisores comuns às decomposições com os seus menores expoentes.

MMC: Produto de todos os divisores, comuns ou não, com os seus maiores expoentes.

Módulo 8. Múltiplos e divisores: exercícios

$\boxed{n = m \cdot k,\ m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}}$

n é múltiplo de m.
m é divisor ou fator de n.

$\boxed{a \text{ é nº par} \Leftrightarrow a = 2k,\ k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{a \text{ é nº ímpar} \Leftrightarrow a = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}}$

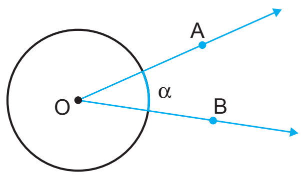
MDC e MMC de números

MDC: Produto dos divisores comuns às decomposições com os seus menores expoentes.

MMC: Produto de todos os divisores, comuns ou não, com os seus maiores expoentes.

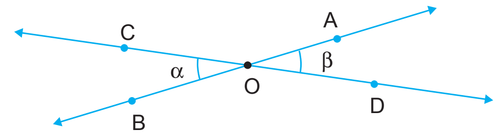
Módulo 9 · Estudo dos ângulos

1. Definição e medida de um ângulo



α = med (AOB) = AÔB

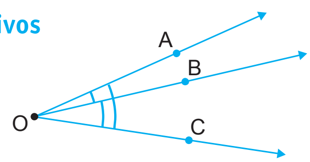
2.3. Opostos pelo vértice (OPV)



AÔD e BÔC ($\alpha = \beta$)

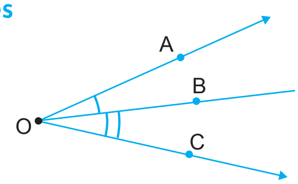
2. Classificação quanto à posição

2.1. Consecutivos



AÔB e BÔC; AÔB e AÔC; BÔC e AÔC

2.2. Adjacentes



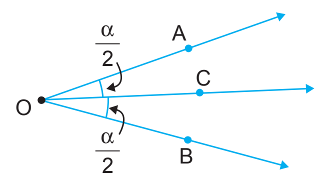
AÔB e BÔC

3. Classificação quanto à soma das medidas α e β

- Complementares: $\alpha + \beta = 90°$

- Suplementares: $\alpha + \beta = 180°$

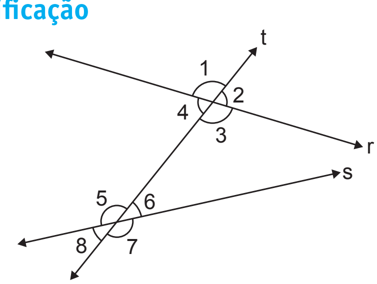
4. Bissetriz de um ângulo



$\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de AÔB.

Módulo 10 · Ângulos: retas paralelas cortadas por uma transversal

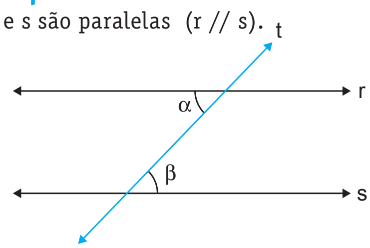
1. Classificação



Colaterais internos: 3 e 6; 4 e 5
Colaterais externos: 1 e 8; 2 e 7
Alternos internos: 3 e 5; 4 e 6
Alternos externos: 1 e 7; 2 e 8
Correspondentes: 1 e 5; 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8

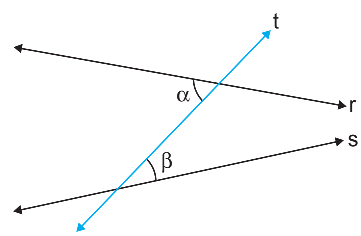
2. Propriedades

r e s são paralelas (r // s).



$\boxed{\alpha = \beta}$

r e s não são paralelas (r $\not\parallel$ s).



$\boxed{\alpha \neq \beta}$

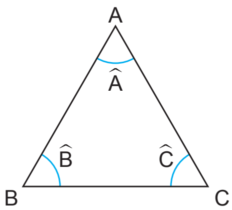
Módulo 11 · Estudo dos triângulos

1. Classificação

1.1. Quanto aos lados
- Escaleno
- Isósceles
- Equilátero

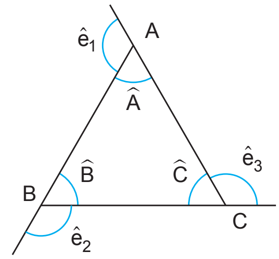
1.2. Quanto aos ângulos
- Retângulo
- Acutângulo
- Obtusângulo

2. Soma das medidas dos ângulos internos



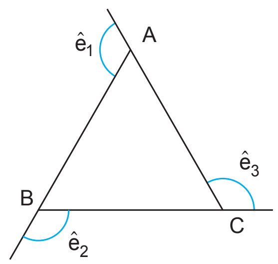
$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$

3. Medida do ângulo externo



$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{e}_1 = \hat{B} + \hat{C} \\ \hat{e}_2 = \hat{A} + \hat{C} \\ \hat{e}_3 = \hat{A} + \hat{B} \end{array}}$$

4. Soma das medidas dos ângulos externos

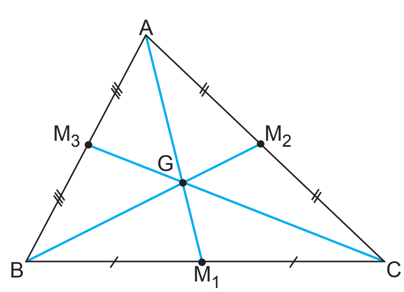


$$\boxed{\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3 = 360°}$$

Módulo 12 · Pontos notáveis: baricentro e ortocentro

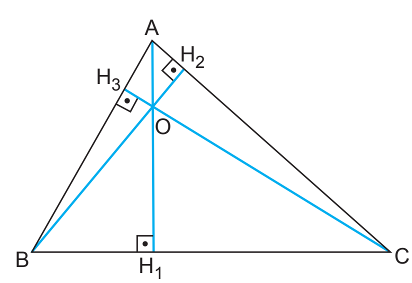
1. Baricentro

Baricentro é o encontro das medianas.
$\overline{AM_1}$, $\overline{BM_2}$ e $\overline{CM_3}$ são medianas.
G é o baricentro do ΔABC.



2. Ortocentro

Ortocentro é o encontro das retas suportes das alturas.
$\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$ são alturas.
O é o ortocentro do ΔABC.

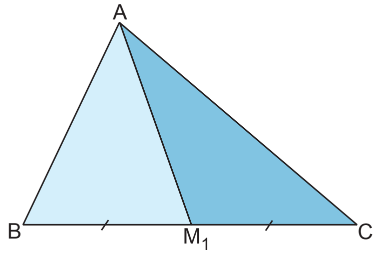


3. Posições do ortocentro

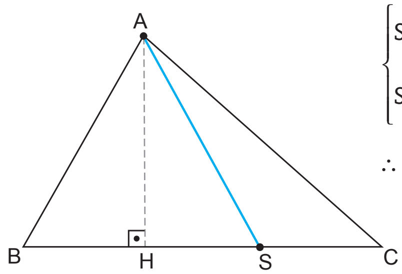
Δ acutângulo – interno ao triângulo
Δ obtusângulo – externo ao triângulo
Δ retângulo – vértice do ângulo reto do triângulo

4. Propriedade da mediana

Área do ΔABM_1 = Área do ΔACM_1



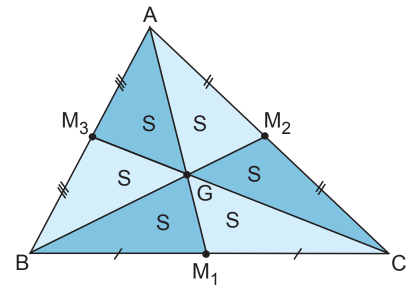
5. Propriedade de uma ceviana qualquer



$$\begin{cases} S_{ABS} = \dfrac{BS \times AH}{2} \\ S_{ACS} = \dfrac{SC \times AH}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{BS}{SC}$$

6. Propriedades do baricentro



$$S_{AGM_2} = S_{AGM_3} = S_{BGM_1} = S_{BGM_3} = S_{CGM_1} = S_{CGM_2} = \frac{S_{ABC}}{6}$$

$$S_{ACG} = 2S_{CGM_1} \Rightarrow AG = 2GM_1$$

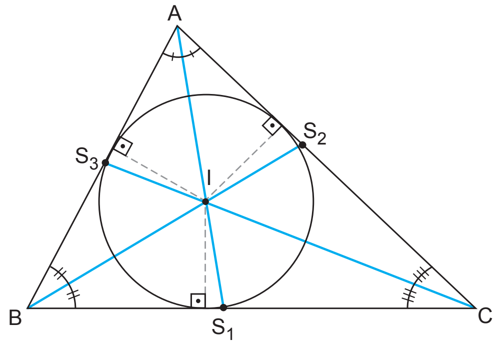
$$S_{BCG} = 2S_{CGM_2} \Rightarrow BG = 2GM_2$$

$$S_{BCG} = 2S_{BGM_3} \Rightarrow CG = 2GM_3$$

Módulo 13 · Pontos notáveis: incentro e circuncentro

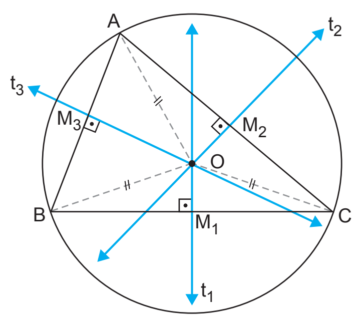
1. Incentro

Incentro é o encontro das bissetrizes internas.
$\overline{AS_1}$, $\overline{BS_2}$ e $\overline{CS_3}$ são bissetrizes internas.
I é o incentro do ΔABC.
(I equidista dos lados do ΔABC.)



2. Circuncentro

Circuncentro é o encontro das mediatrizes.
t_1, t_2 e t_3 são mediatrizes.
O é o circuncentro do ΔABC.
(O equidista dos vértices do ΔABC.)

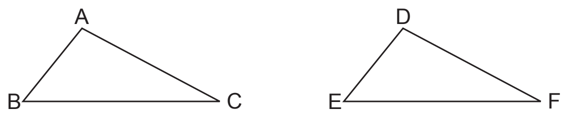


3. Posições do circuncentro

Δ acutângulo – interno ao triângulo
Δ obtusângulo – externo ao triângulo
Δ retângulo – ponto médio da hipotenusa

Módulo 14 · Congruência de triângulos

1. Definição



$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D}; \hat{B} \equiv \hat{E}; \hat{C} \equiv \hat{F} \\ AB \equiv DE; AC \equiv DF; BC \equiv EF \end{cases}$$

2. Casos de congruência

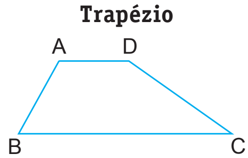
- 1º caso: LLL
- 2º caso: LAL
- 3º caso: ALA
- 4º caso: LAA_0

Caso especial de congruência de triângulos retângulos: HC (hipotenusa – cateto)

Módulo 15 · Quadriláteros notáveis

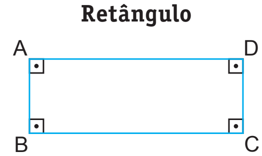
1. Classificação

Trapézio



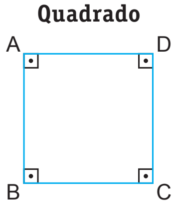
$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

Retângulo



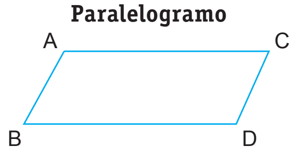
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

Quadrado



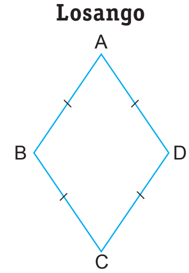
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90° \\ \text{e} \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$

Paralelogramo



$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AC} \,//\, \overline{BD}$

Losango



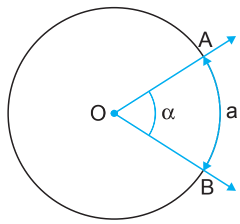
$AB = BC = CD = DA$

2. Propriedades

1ª) Paralelogramo: ângulos opostos congruentes
2ª) Paralelogramo: lados opostos congruentes
3ª) Paralelogramo: diagonais cortam-se ao meio
4ª) Losango: paralelogramo com diagonais perpendiculares
5ª) Losango: paralelogramo com diagonais nas bissetrizes
6ª) Retângulo: paralelogramo com diagonais congruentes

Módulo 16 · Ângulos na circunferência (I)

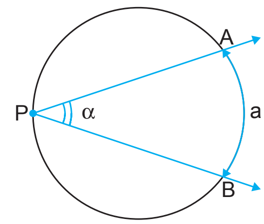
1. Ângulo central



Definição

$\boxed{\alpha = a}$

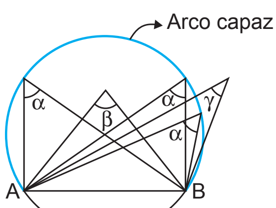
2. Ângulo inscrito



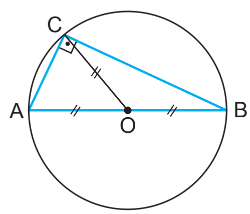
Propriedade

$\boxed{\alpha = \frac{a}{2}}$

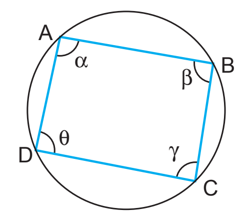
Consequências da propriedade



$\beta > \alpha$ e $\gamma < \alpha$

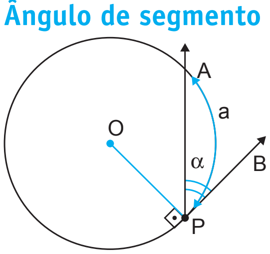


$\overline{OC} = \frac{\overline{AB}}{2}$



$\alpha + \gamma = 180°$ e $\beta + \theta = 180°$

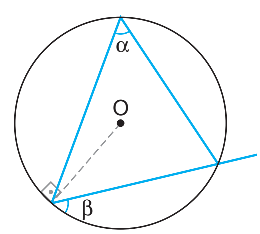
3. Ângulo de segmento



Propriedade

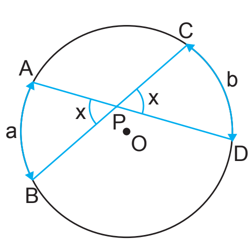
$\boxed{\alpha = \frac{a}{2}}$

Consequências da propriedade



$\boxed{\alpha = \beta}$

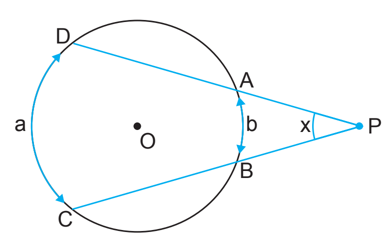
4. Ângulo de vértice interno



Propriedade

$\boxed{x = \frac{a + b}{2}}$

5. Ângulo de vértice externo

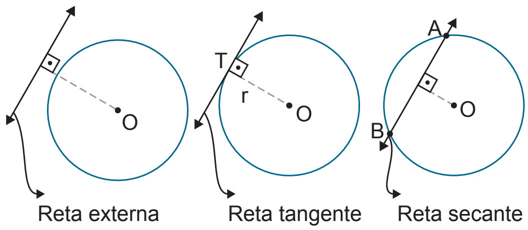


Propriedade

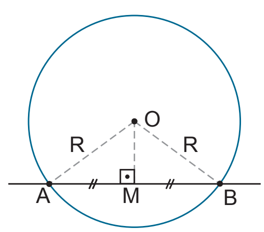
$\boxed{x = \frac{a - b}{2}}$

Módulo 17· Ângulos na circunferência (II)

1. Posições entre reta e circunferência



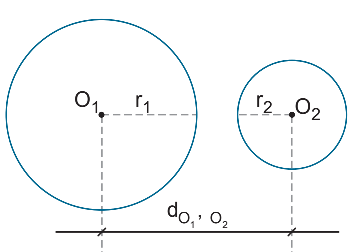
Propriedade importante



$\overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow AM = MB$

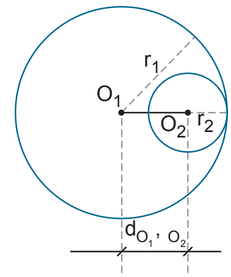
2. Posições entre duas circunferências

2.1. Circunferências externas



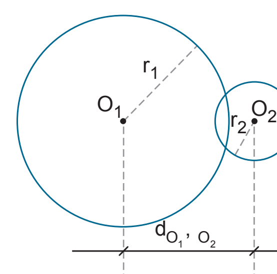
$d_{O_1,\,O_2} > r_1 + r_2$

2.3. Circunferências tangentes internamente



$d_{O_1,\,O_2} = r_1 - r_2$, com $r_1 > r_2$

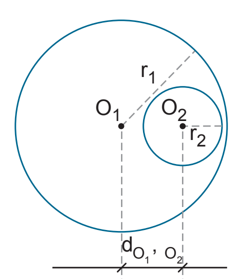
2.4. Circunferências secantes



$r_1 - r_2 < d_{O_1,\,O_2} < r_1 + r_2$, com $r_1 > r_2$

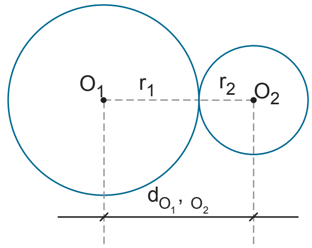
Circunferências internas

2.5.



$d_{O_1,\,O_2} < r_1 - r_2$, com $r_1 > r_2$

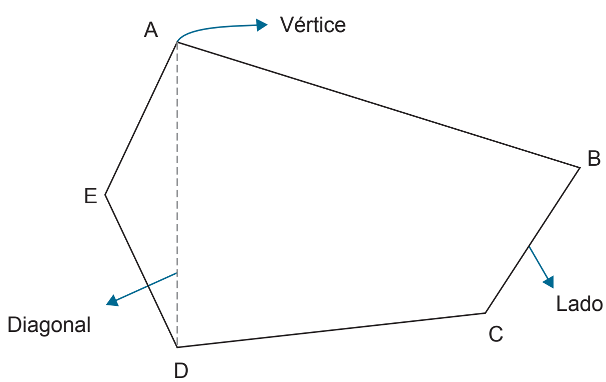
2.2. Circunferências tangentes externamente



$d_{O_1,\,O_2} = r_1 + r_2$

Módulo 18 · Estudo dos polígonos

1. Elementos



2. Número de diagonais

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Onde n= número de lados do polígono

3. Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

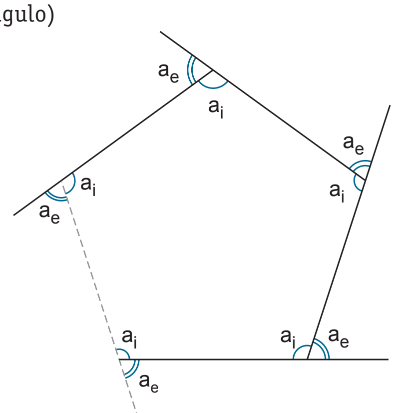
$$\boxed{S_i = (n-2)\cdot 180^\circ}$$

4. Soma dos ângulos externos de um polígono convexo

$$\boxed{S_e = 360^\circ}$$

Módulo 19 · Polígonos regulares

Lados congruentes (equilátero) e ângulos congruentes (equiângulo)

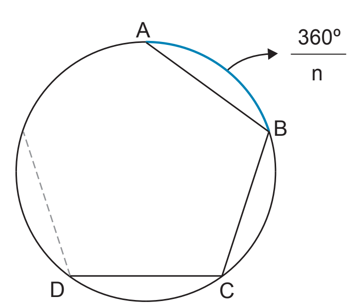


$$\boxed{a_e = \frac{360^\circ}{n}} \quad \boxed{ai = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}} \quad \boxed{a_e + a_i = 180^\circ}$$

Onde n = número de lados do polígono.

Importante

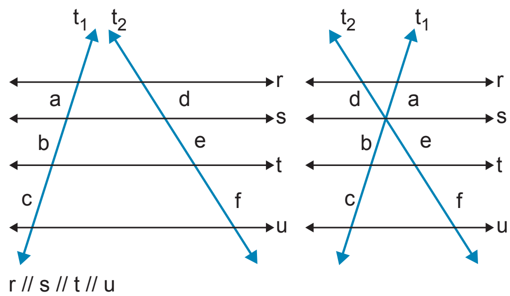
Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.



$$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD}) = \ldots = \frac{360^\circ}{n}$$

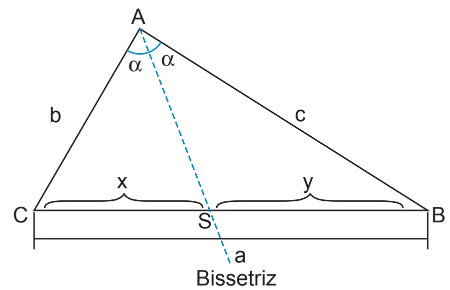
Módulo 20 · Teoremas de Tales e da bissetriz interna

1. Teorema de Tales



$$\boxed{\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{a+b+c}{d+e+f}}$$

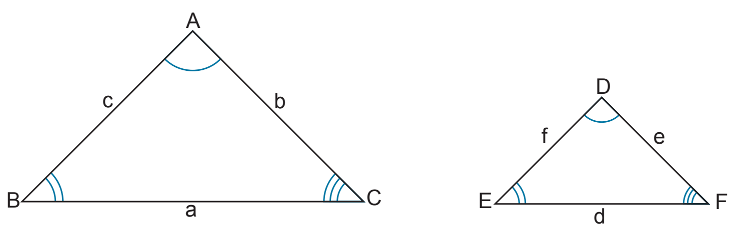
2. Teorema da bissetriz interna (TBI)



$$\boxed{\frac{b}{x} = \frac{c}{y}}$$

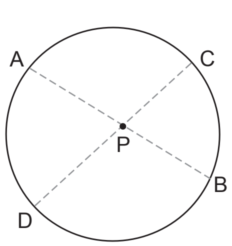
Módulo 21 · Semelhança de triângulos

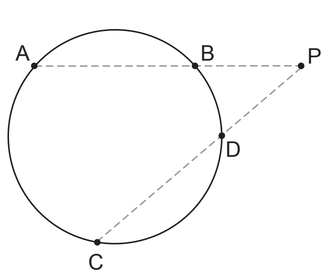
1. Definição

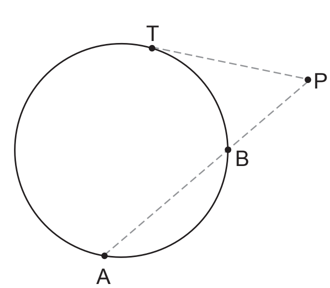


$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{D};\ \hat{B} = \hat{E};\ \hat{C} = \hat{F} \\ \text{e} \\ \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} = k \end{cases}$$

Módulo 23 · Relações métricas na circunferência







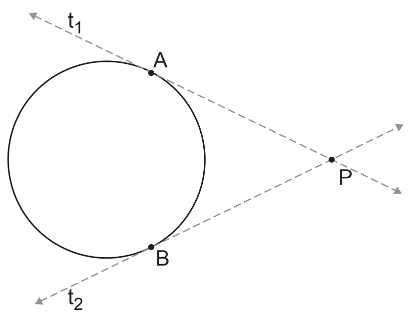
$$\boxed{\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}}$$

$$\boxed{\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}}$$

$$\boxed{\overline{PA} \times \overline{PB} = (\overline{PT})^2}$$

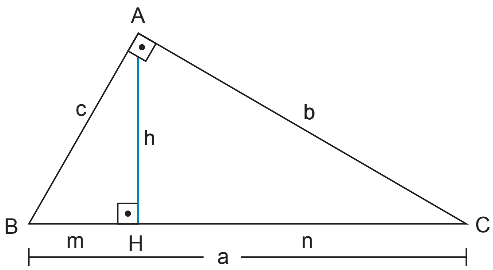
Segmentos tangentes

Duas retas tangentes a uma circunferência por um ponto externo



$\boxed{PA = PB}$

Módulo 24 · Relações métricas no triângulo retângulo



$\overline{AH}$ = altura relativa à hipotenusa

$\overline{BH}$ = projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$

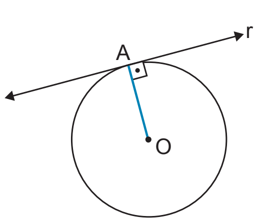
$\overline{CH}$ = projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$

$b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$
$h^2 = m \cdot n$
$b \cdot c = a \cdot h$
$b^2 + c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras)

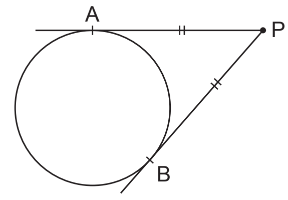
Módulo 25 · Tangência

Propriedades importantes

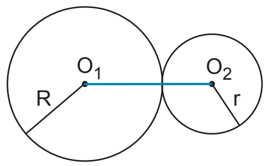
1) $\overline{OA} \perp r$



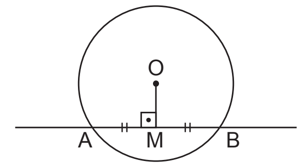
4) PA = PB



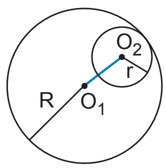
2) $O_1O_2 = R + r$



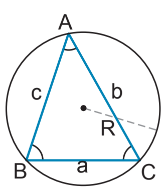
5) $AM = MB$



3) $O_1O_2 = R - r$



Módulo 26 · Teorema dos senos

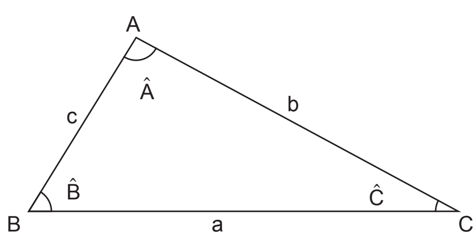


$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Observação
Todo triângulo é inscritível em uma circunferência.

Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos numa razão igual ao diâmentro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Módulo 27 · Teorema dos cossenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo por eles formado.

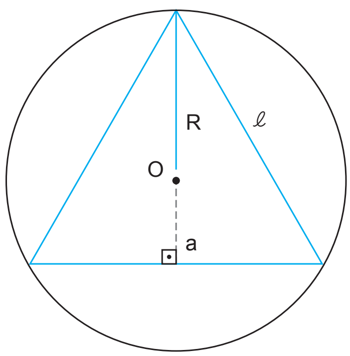
- Natureza de um triângulo

Se **a** é o maior lado de um triângulo, então:
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ retângulo
$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ acutângulo
$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ obtusângulo

Módulo 28 · Relações métricas nos polígonos regulares

Polígonos regulares: principais apótemas

Triângulo equilátero

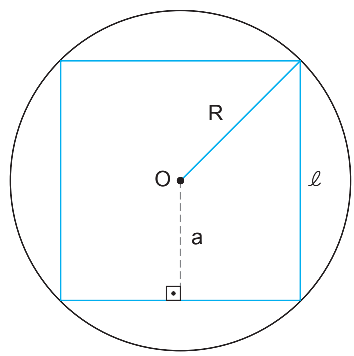


$R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$

e

$a = \dfrac{R}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$

Quadrado

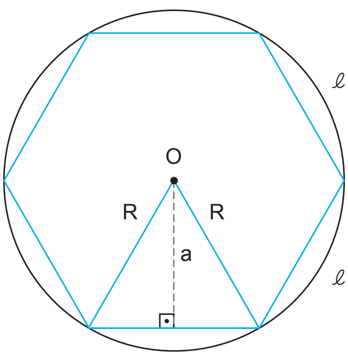


$R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$

e

$a = \dfrac{\ell}{2}$

Hexágono regular



$R = \ell$

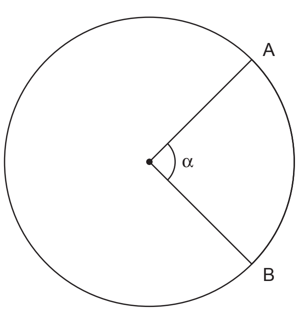
e

$a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Obs.: O apótema **a** de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

Módulo 29 · Circunferência e arcos

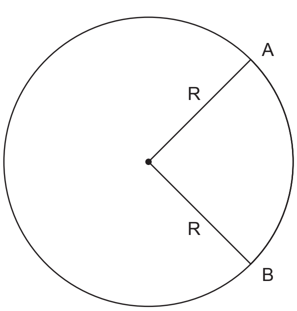
1. Medida de arcos em graus



$\boxed{\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = \alpha}$

α = medida em graus do ângulo central $A\hat{O}B$

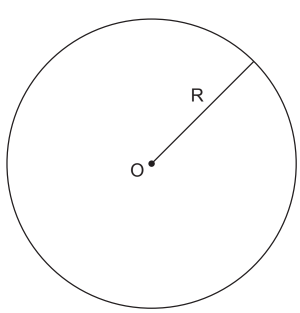
2. Medida de arcos em radianos



$\boxed{\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\ell}{R}}$

ℓ = comprimento do $\overset{\frown}{AB}$
R = raio

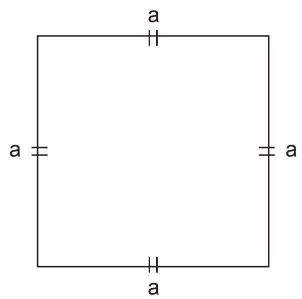
3. Comprimento de uma circunferência



$\boxed{C = 2\pi R}$

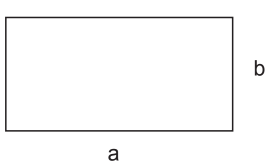
Módulo 30 · Áreas das regiões elementares

1. Área de um quadrado



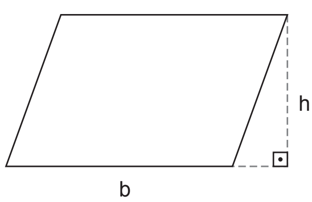
$$\boxed{S = a^2}$$

2. Área de um retângulo



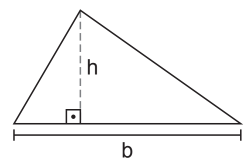
$$\boxed{S = a \cdot b}$$

3. Área de um paralelogramo



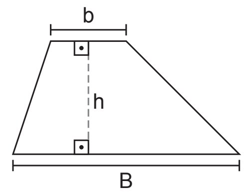
$$\boxed{S = b \cdot h}$$

4. Área de um triângulo



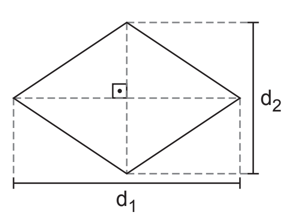
$$\boxed{S = \frac{b \cdot h}{2}}$$

5. Área de um trapézio



$$\boxed{S = \frac{(B + b)}{2} \cdot h}$$

6. Área de um losango



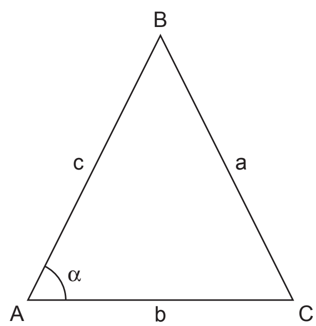
$$\boxed{S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

7. Figuras planas equivalentes

Figuras planas equivalentes são figuras que têm a mesma área.

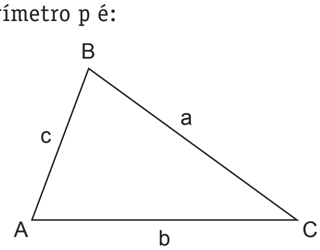
Módulo 31 · Expressões de área de um triângulo

1. A área S de um triângulo de lados com medidas b e c e ângulo compreendido com medida α é:



$$\boxed{S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}}$$

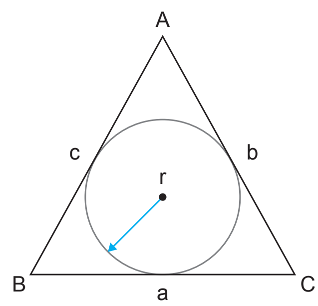
2. A área S de um triângulo de lados com medidas a, b e c e semiperímetro p é:



$$\boxed{S = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}}$$ (Fórmula de Heron)

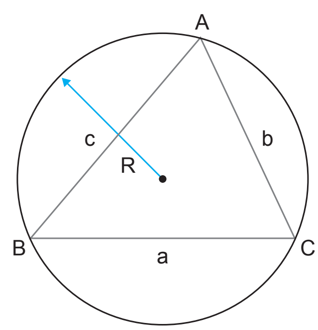
em que $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

3. A área S de um triângulo de semiperímetro p e raio da circunferência inscrita r é:



$$\boxed{S = p \cdot r}$$

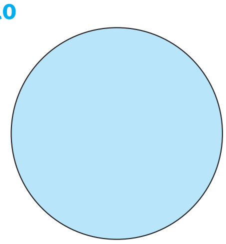
4. A área S de um triângulo de lado r com medidas a, b e c e com raio da circunferência circunscrita R é:



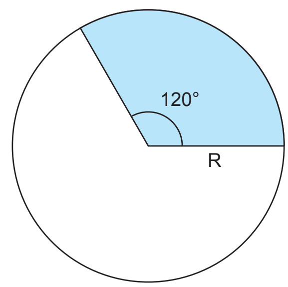
$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

Módulo 32 · Área do círculo e de suas partes (I)

1. Círculo

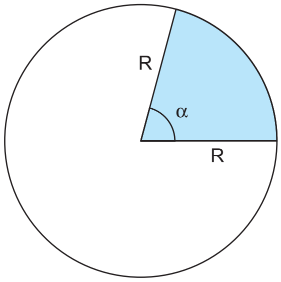


$$\boxed{A = \pi R^2}$$



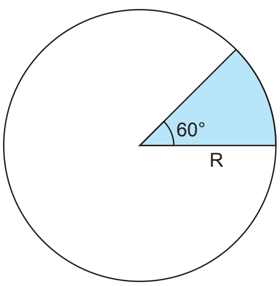
$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{3}}$$

2. Setor circular

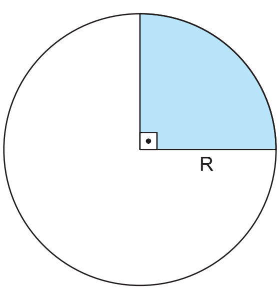


$$\begin{cases} 360^\circ \text{ ——— } \pi R^2 \\ \alpha \text{ ——— } A_{setor} \end{cases}$$

Exemplos importantes

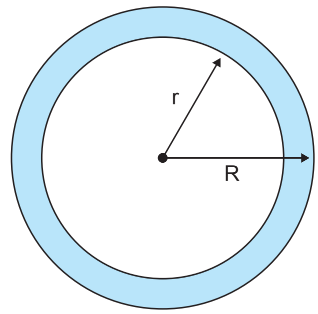


$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{6}}$$



$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{4}}$$

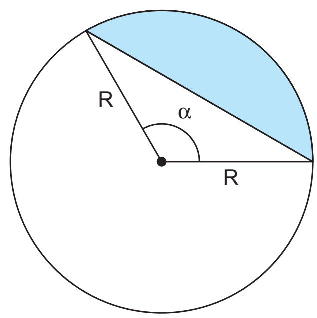
3. Coroa circular



$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$$

4. Segmento circular



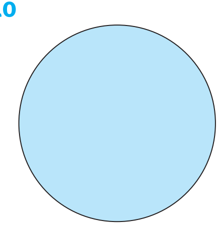
$$\boxed{A = A_{setor} - A_{triângulo}}$$

Observação

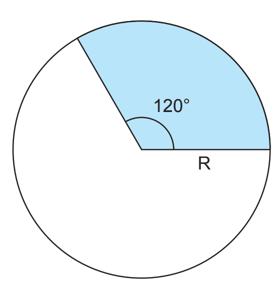
$$A_{triângulo} = \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

Módulo 33 · Área do círculo e de suas partes (II)

1. Círculo

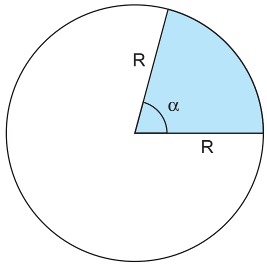


$$\boxed{A = \pi R^2}$$



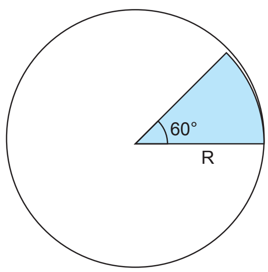
$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{3}}$$

2. Setor circular

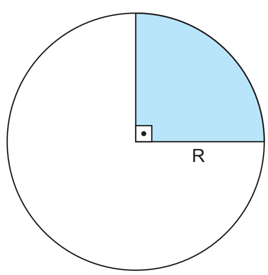


$$\begin{cases} 360° \text{ —— } \pi R^2 \\ \alpha \text{ —— } A_{setor} \end{cases}$$

Exemplos importantes

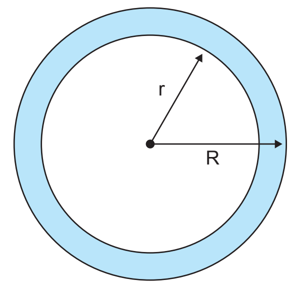


$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{6}}$$



$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{4}}$$

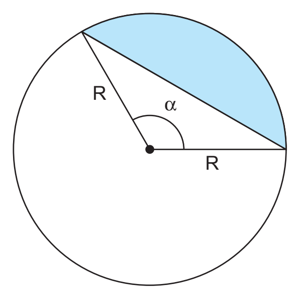
3. Coroa circular



$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$$

4. Segmento circular



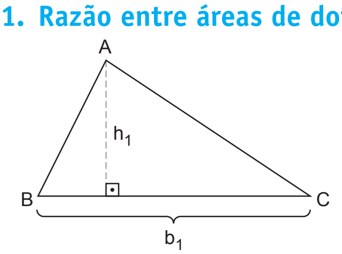
$$\boxed{A = A_{setor} - A_{triângulo}}$$

Observação

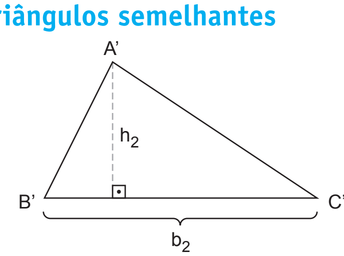
$$A_{triângulo} = \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

Módulo 34 · Razão entre áreas

1. Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes



Área do triângulo ABC = S_1



Área do triângulo A'B'C' = S_2

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

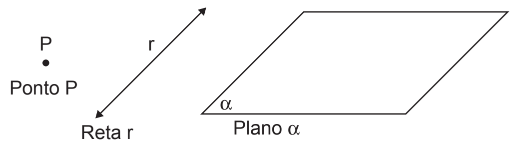
$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = K \text{ (razão de semelhança) e } \frac{S_1}{S_2} = K^2$$

Conclusão: a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

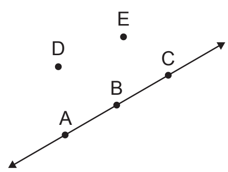
Módulo 35 · Postulados e determinação

1. Postulados da existência

- Existem ponto, reta e plano.

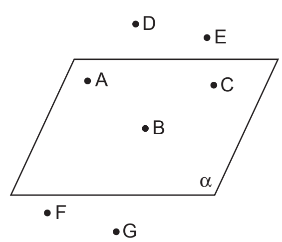


- Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



Observação: os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, portanto eles são colineares.

- Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

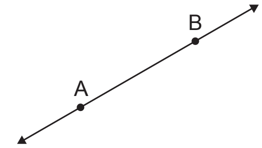


Observação: os pontos A, B e C pertencem a um mesmo plano, portanto eles são coplanares.

2. Determinação de uma reta

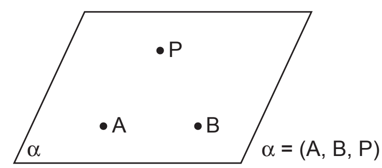
- Dois pontos distintos

(Dois pontos distintos determinam uma única reta.)

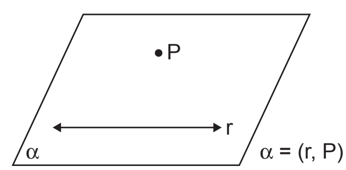


3. Determinação de um plano

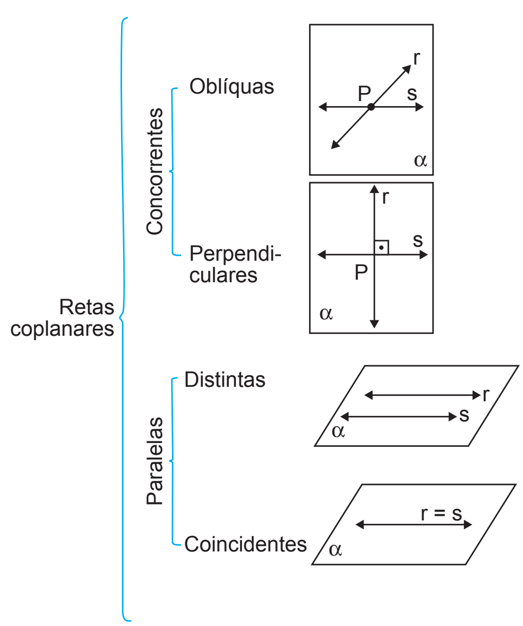
- Três pontos não colineares

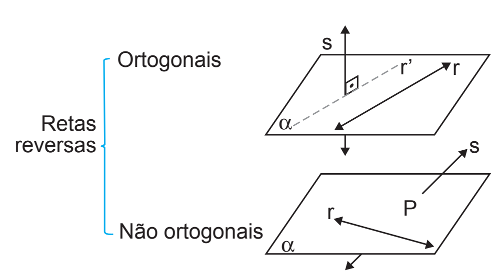


- Uma reta r e um ponto P fora dela



Módulo 36 · Posições relativas de duas retas

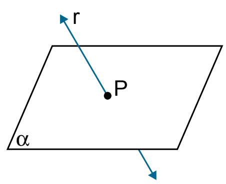




Módulo 37· Posições relativas de uma reta e um plano e entre dois planos

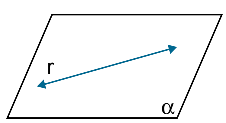
1. Reta e plano

1.1. Reta secante ao plano (concorrente)



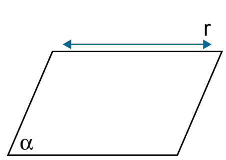
$r \cap \alpha = \{P\}$

1.2. Reta contida no plano



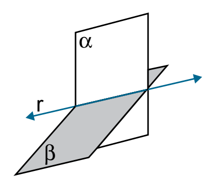
$r \cap \alpha = r$

1.3. Reta paralela ao plano



$r \cap \alpha = \varnothing$

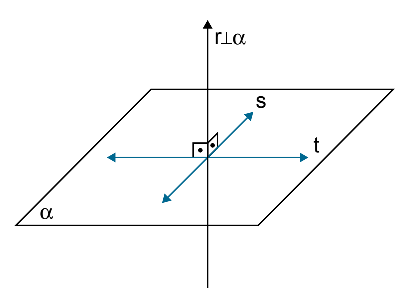
2.3. Planos secantes (concorrentes)



$\alpha \cap \beta = r$

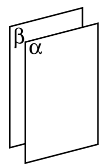
3. Perpendicularismo

3.1. Reta e plano perpendiculares ($r \perp \alpha$)



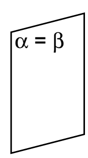
2. Dois planos

2.1. Planos paralelos distintos



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

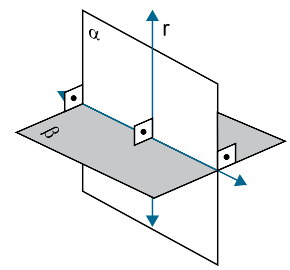
2.2. Planos paralelos coincidentes



$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

3.2. Planos perpendiculares ($\alpha \perp \beta$)

Existe em α uma reta perpendicular a β.

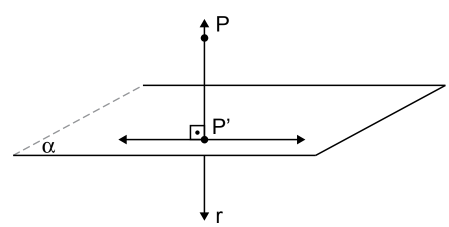


$\exists r,\ r \subset \alpha \ /\ r \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

4. Projeções

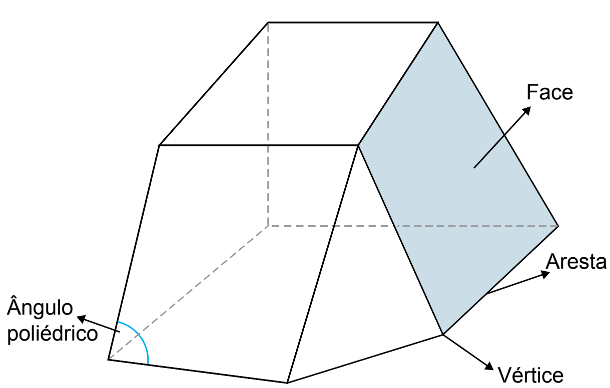
4.1. Projeção ortogonal de um ponto

Dados um ponto P e um plano α, denomina-se P' a projeção ortogonal de P em α, obtida pela intersecção de uma reta r, passando por P, perpendicular a α.



Módulo 38 · Poliedros

1. Poliedro convexo



2. Teorema de Euler

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

A – número de arestas de um poliedro
F – número de faces de um poliedro
V – número de vértices de um poliedro
n – número de arestas em cada face de um poliedro
m – número de arestas em cada vértice de um poliedro

2.1. Fórmulas auxiliares

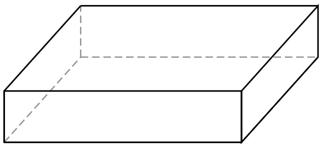
$$A = \frac{n \cdot F}{2} \qquad A = \frac{m \cdot V}{2}$$

2.2. Soma dos ângulos das faces

$S = (V - 2) \cdot 360°$

3. Poliedros de Platão

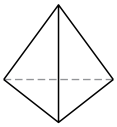
- Todas as faces têm um mesmo número (n) de arestas.
- Todos os vértices têm um mesmo número (m) de arestas.
- São convexos.



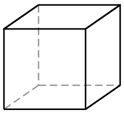
- Existem apenas cinco poliedros de Platão:
- Tetraedro
- Hexaedro
- Octaedro
- Dodecaedro
- Icosaedro

4. Poliedros regulares

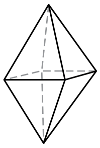
Os poliedros regulares são os poliedros de Platão que têm como faces polígonos regulares.



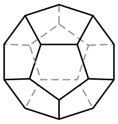
Tetraedro regular



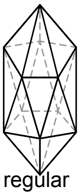
Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



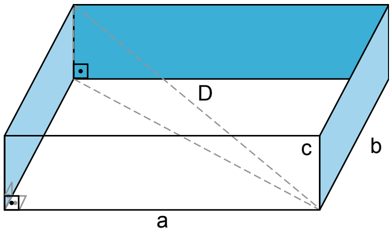
Icosaedro regular

Módulo 39 · Prismas (I)

1. Paralelepípedo

1.1. reto-retângulo

1.2. (ortoedro)



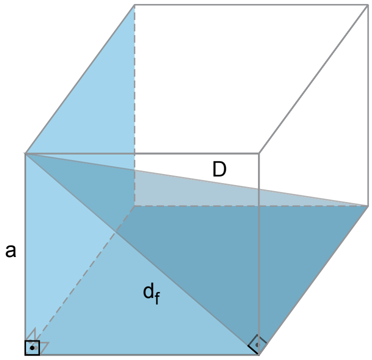
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A_t = 2(ab + ac + bc)$$

$$A_\ell = 2(ac + bc)$$

$$V = abc$$

2. Cubo



$$d_f = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

$$A_\ell = 4a^2$$

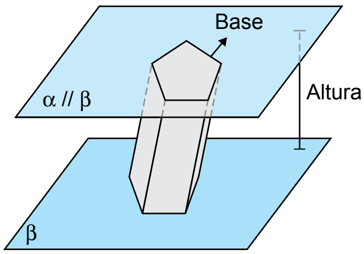
$$A_t = 6a^2$$

$$A_f = a^2$$

$$V = a^3$$

Módulo 40 · Prismas (II)

1. Prisma



2. Prisma reto

- Área lateral (A_ℓ)

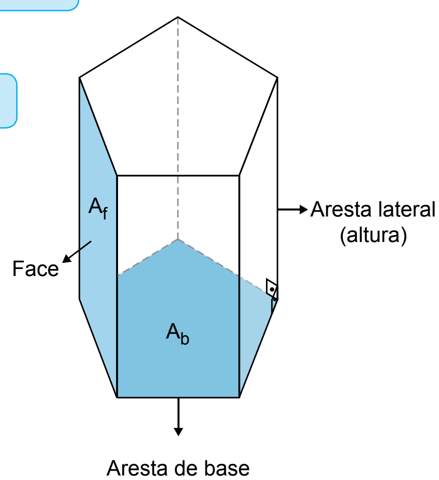
$$\boxed{A_\ell = \text{soma das áreas das faces}}$$

- Área total (A_t)

$$\boxed{A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b}$$

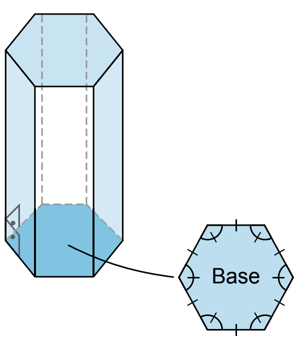
- Volume (V)

$$\boxed{V = A_b \cdot h}$$



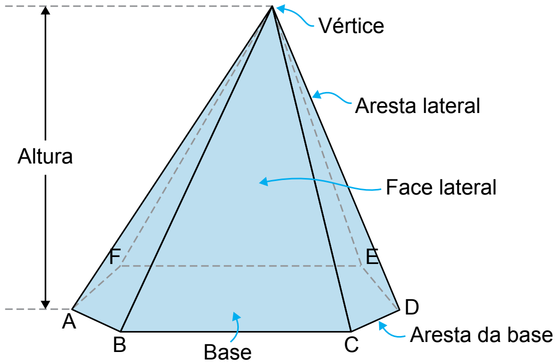
3. Prisma regular

É o prisma que, além de ser reto, tem por base um polígono regular.



Módulo 41 · Pirâmides (I)

1. Elementos



Área lateral (A_ℓ)

$$\boxed{A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}}$$

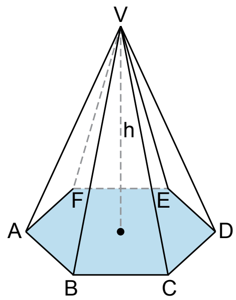
Área total (A_t)

$$\boxed{A_t = A_\ell + A_b}$$

Volume

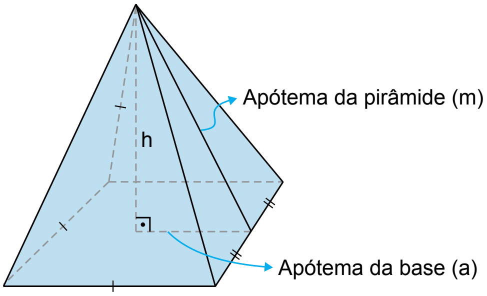
$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

2. Pirâmide regular



Uma pirâmide é chamada de pirâmide regular se, e somente se, a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro dessa base.

3. Apótema de uma pirâmide regular



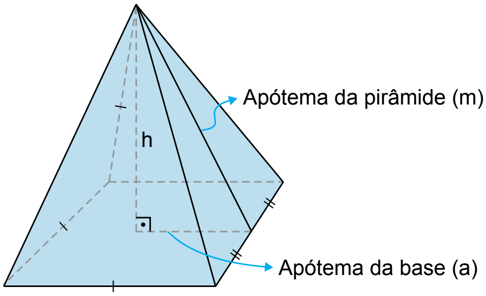
Apótema de uma pirâmide regular é o segmento cujas extremidades são o vértice da pirâmide e o ponto médio de uma aresta da base.

Cálculo do apótema:

$$\boxed{m^2 = h^2 + a^2}$$

Módulo 42 · Pirâmides (II)

Resumo



$$\boxed{m^2 = h^2 + a^2}$$

Área lateral (A_ℓ)

$$\boxed{A_\ell = \text{soma das áreas das faces}}$$

Área total (A_t)

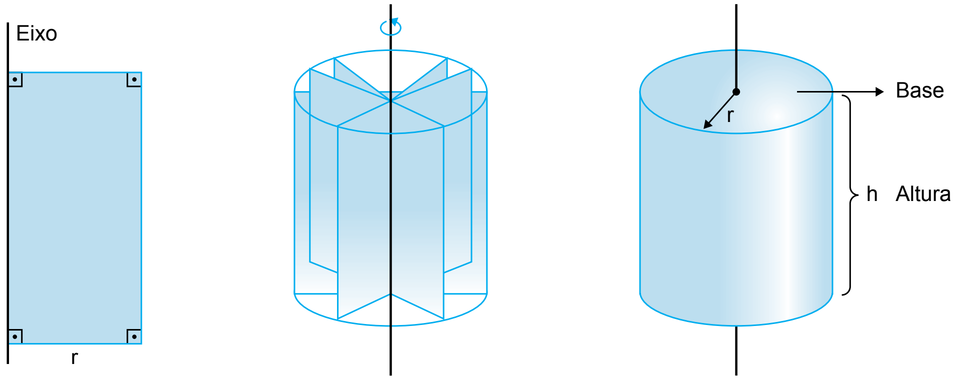
$$\boxed{A_t = A_\ell + A_b}$$

Volume

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

Módulo 43 · Cilindros

1. Cilindro reto ou de revolução



2. Fórmulas

Área da base

$$A_b = \pi r^2$$

Área total

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$
$$A_t = 2\pi r \cdot (r + h)$$

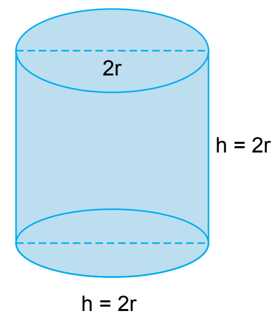
Área lateral

$$A_\ell = 2\pi r h$$

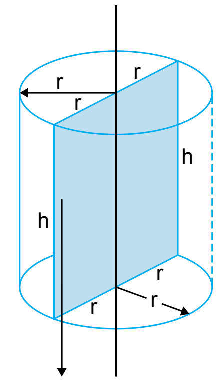
Volume

$$V = A_b \cdot h$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

3. Cilindro equilátero



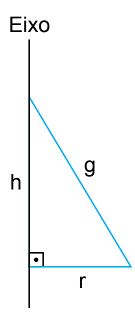
Cilindro equilátero

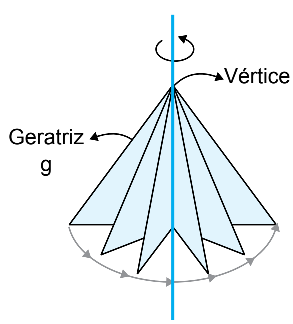


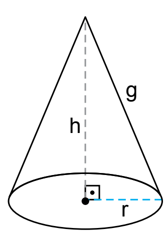
Secção meridiana
(quadrado)
h = 2r

Módulo 44 · Cones

1. Cone reto ou de revolução







$$g^2 = r^2 + h^2$$

Fórmulas

Área da base (A_b)

$$A_b = \pi r^2$$

Área total (A_t)

$$A_t = A_\ell + A_b$$
$$A_t = \pi r \cdot (r + g)$$

Área lateral (A_ℓ)

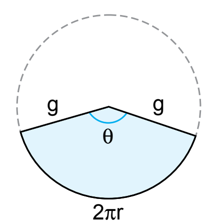
$$A_\ell = \pi r g$$

Volume (V)

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Superfície lateral

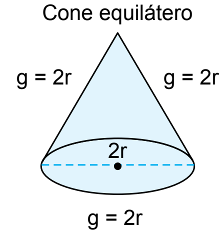
A superfície lateral é equivalente a um setor circular de raio g e arco $2\pi r$.



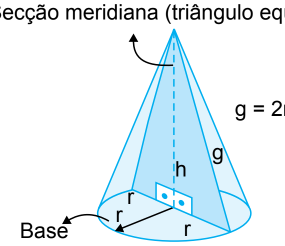
$$\theta = \frac{2\pi r}{g}$$

2. Cone equilátero

Cone equilátero



Secção meridiana (triângulo equilátero)



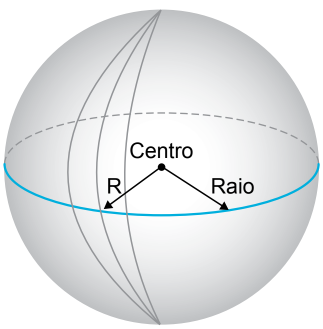
Módulo 45 · Esfera

1. Superfície esférica

Conjunto de pontos do espaço que mantém sempre a mesma distância (R) de um ponto (centro).

2. Esfera

Sólido limitado pela superfície esférica



Área da superfície esférica

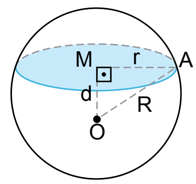
$$\boxed{A_s = 4 \cdot \pi \cdot R^2}$$

Volume da esfera

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

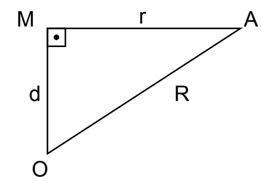
3. Secção plana

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.



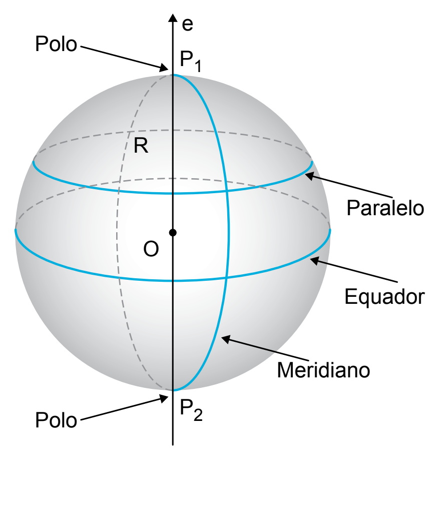
Área da secção plana

$$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$$



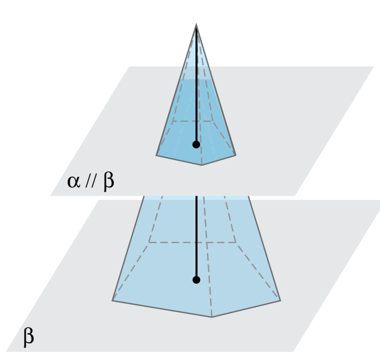
$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2}$$

4. Elementos da esfera



Módulo 46 · Sólidos semelhantes

1. Razões



Razão entre medidas lineares

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{H}{h} = k}$$

Razão entre áreas

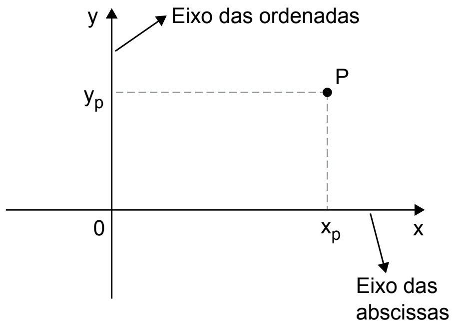
$$\boxed{\frac{A_B}{A_b} = k^2}$$

Razão entre volumes

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = k^3}$$

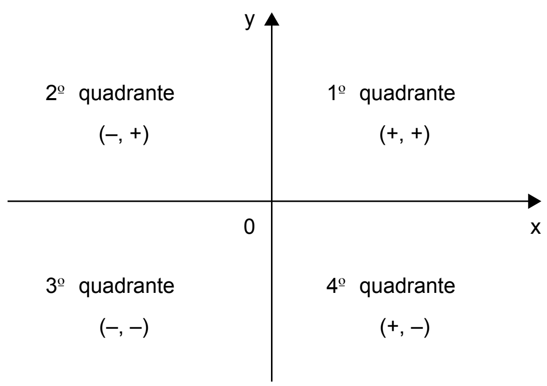
Módulo 47 · Introdução à Geometria Analítica

1. O sistema cartesiano

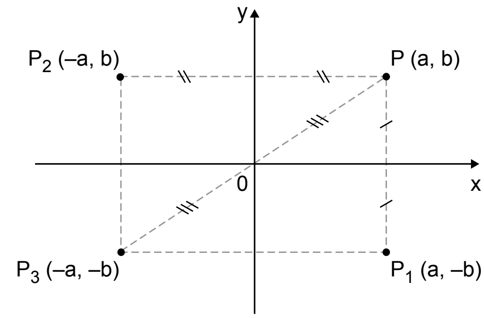


x_p = obscissa de P
y_p = ordenada de P

2. Os quadrantes

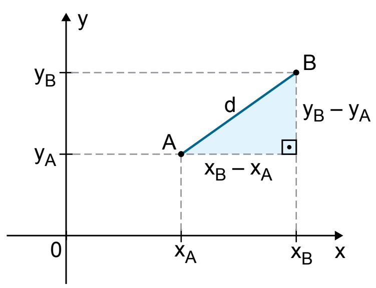


4. Simetria



P_1 = simétrico de P em relação ao eixo x
P_2 = simétrico de P em relação ao eixo y
P_3 = simétrico de P em relação à origem

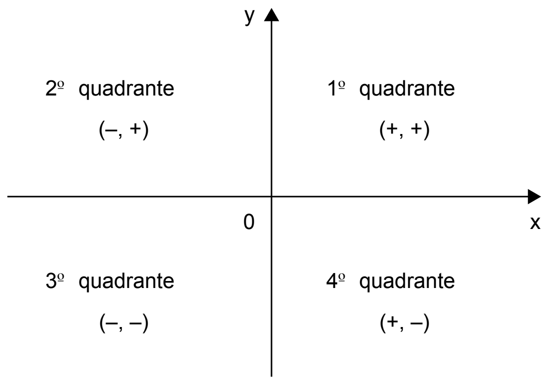
5. Distância entre dois pontos



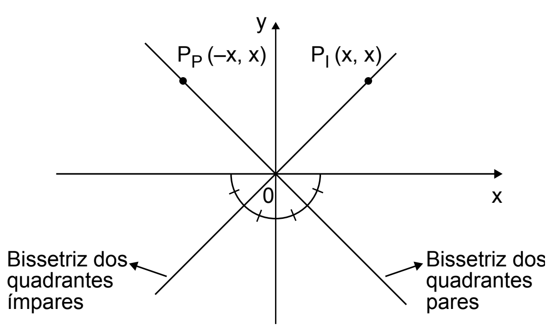
$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

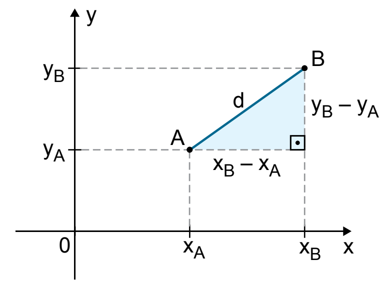
2. Os quadrantes



3. As bissetrizes dos quadrantes



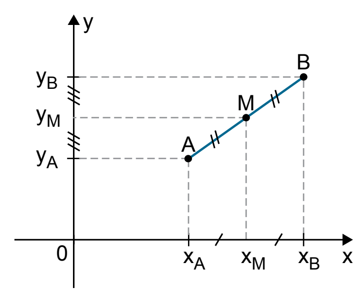
5. Distância entre dois pontos



$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

6. Ponto médio de um segmento



$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

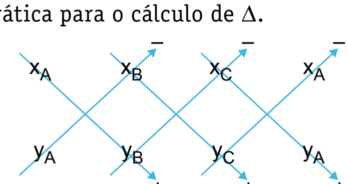
Módulo 48 · Área de polígonos

1. Área do triângulo de vértices

A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) e C (x_C, y_C)

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ em que } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Regra prática para o cálculo de Δ.

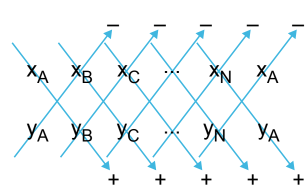


2. Condição de alinhamento de três pontos

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{A, B e C alinhados}$$

3. Área do polígono convexo de N vértices

$A(x_A, y_A)$, B (x_B, y_B) , ... , $N(x_N, y_N)$



$$\boxed{S = \frac{|\Delta p|}{2}}$$

Observação – Δp montado na sequência anti-horária

Módulo 49 · Lugar geométrico

1. Definição

Um conjunto de pontos é um lugar geométrico (LG) quando todos os seus pontos, e apenas eles, têm uma certa propriedade comum.

2. Equação de um LG

É uma equação nas incógnitas x e y, cujas soluções são os pares (x, y) dos pontos do LG.

3. Como achar a equação de um LG

- Consideremos um ponto P(x, y) genérico.
- Aplicamos ao ponto P a propriedade característica do LG.

4. Intersecção de dois lugares geométricos

Resolvemos o sistema determinado pelas equações dos dois lugares geométricos.

Exercícios de Aplicação

1. (Unifesp) A parábola $y = x^2 - tx + 2$ tem vértice no ponto (x_t, y_t). O lugar geométrico dos vértices da parábola, quando t varia no conjunto dos números reais, é:

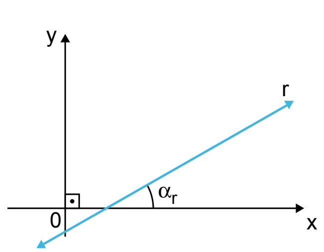
a) uma parábola.
b) uma elipse.
c) um ramo de uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas concorrentes.

2. (Fuvest-SP) O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem $t^2 - t - 6 = 0$, em que $t = |x - y|$, consiste de:

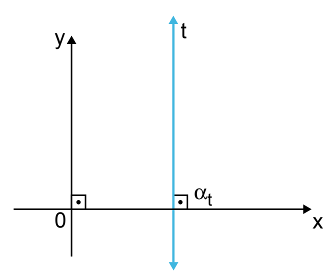
a) uma reta.
b) duas retas.
c) quatro retas.
d) uma parábola.
e) duas parábolas.

Módulo 50 · Teoria angular

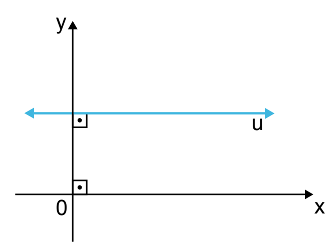
1. Inclinação e coeficiente angular de uma reta



α_r = inclinação de r
$m_r = tg\alpha_r$ = coeficiente angular de r

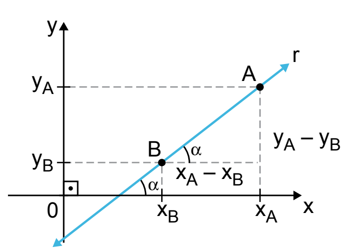


$\alpha_t = 90°$ = inclinação de t
$\nexists m_t$, pois não é definida tg 90°



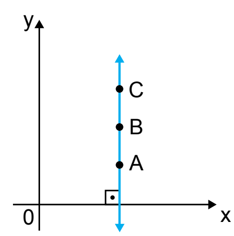
$\alpha_u = 0°$ = inclinação de u
$m_u = 0$ = coeficiente angular de u

2. Cálculo do coeficiente angular

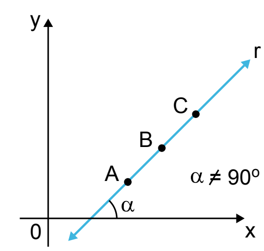


$$m_r = m_{AB} = tg\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3. Condição de alinhamento para três pontos



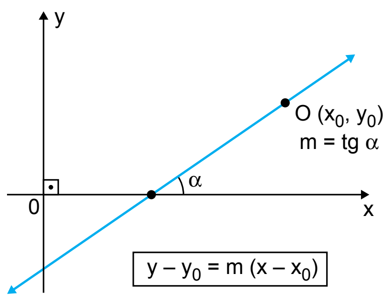
$\boxed{x_A = x_B = x_c}$



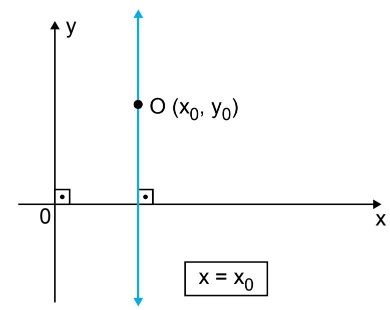
$\boxed{m_{AB} = m_{BC}}$

Módulo 51 · Equação fundamental da reta

1. Reta não paralela ao eixo Oy



2. Reta paralela ao eixo Oy



Módulo 52 · Formas de equação da reta

1. Equação fundamental da reta

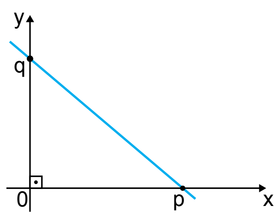
$$\boxed{y - y_0 = m\ (x - x_0)}$$

2. Equação geral da reta

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

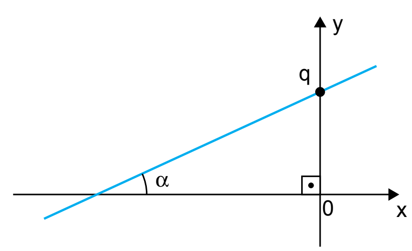
$a = 0$ e $b \neq 0$: reta paralela ao eixo x.
$b = 0$ e $a \neq 0$: reta paralela ao eixo y.
$c = 0$: reta passa pela origem.

3. Equação segmentária da reta



$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

4. Equação reduzida da reta



$$\boxed{y = mx + q}$$

m = coeficiente angular ($m = tg\alpha$)
q = coeficiente linear

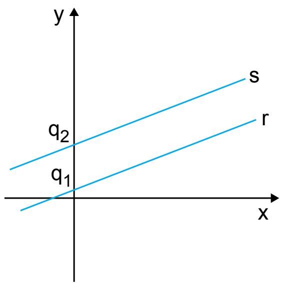
5. Equações paramétricas de uma reta

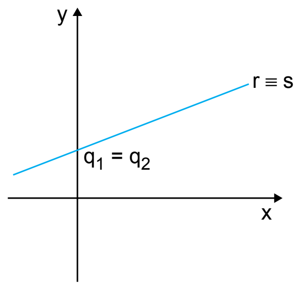
$$\boxed{\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},\ \text{em que } t \in \mathbb{R}}$$

Módulo 53 · Posições relativas entre retas

1. Paralelas

Sendo (r)$y = m_1x + q_1$e (s) $y = m_2x + q_2$, temos:



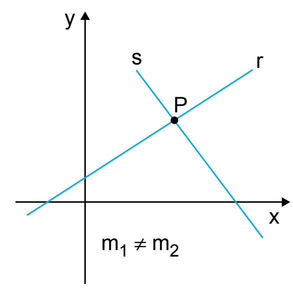


Paralelas distintas
$m_1 = m_2$ e $q_1 \neq q_2$

Paralelas coincidentes
$m_1 = m_2$ e $q_1 = q_2$

2. Concorrentes

Sendo (r)$y = m_1x + q_1$ e (s)$y = m_2x + q_2$, temos:



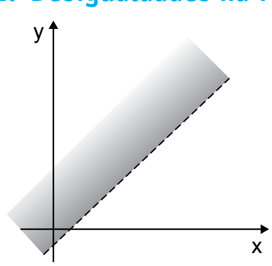
Observações:

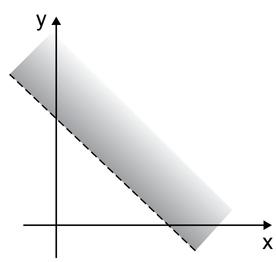
1ª) Para se obter P, resolvemos o sistema com as duas equações.

2ª) Se $m_1 \cdot m_2 = -1$, r e s são perpendiculares.

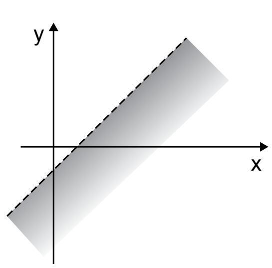
Módulo 54 · Desigualdades

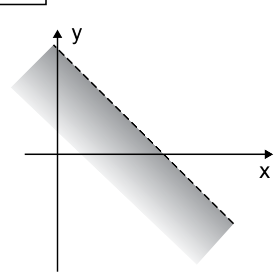
1. Desigualdades na forma reduzida





$\boxed{y > mx + q}$





$\boxed{y < mx + q}$

2. Desigualdades na forma geral

$$\boxed{ax + by + c > 0 \text{ ou } ax + by + c < 0}$$

1) Constrói-se o gráfico da reta $ax + by + c = 0$

2) Toma-se um ponto $P(x_0, y_0)$ não pertencente à reta.

3) Substituem-se as coordenadas de P na expressão $ax + by + c$

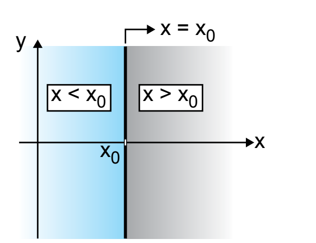
4) Se $ax_0 + by_0 + c > 0$, temos:

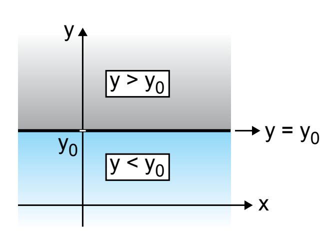
- $ax + by + c > 0$ para os pontos do semiplano de P;
- $ax + by + c < 0$ para os pontos do semiplano que não tem P.

5) Se $ax_0 + by_0 + c < 0$, temos:

- $ax + by + c < 0$ para os pontos do semiplano de P;
- $ax + by + c > 0$ para os pontos do semiplano que não tem P.

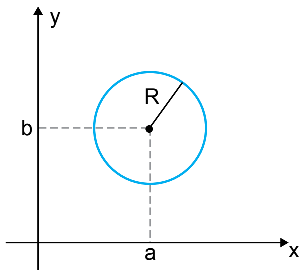
3. Casos particulares





Módulo 55 • Equações da circunferência

1. Equação reduzida



Centro C (a, b) e raio R

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

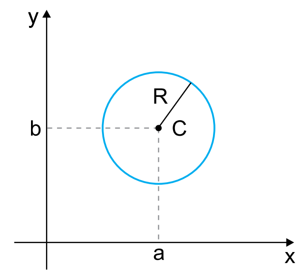
2. Observações

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$$

$k > 0 \longrightarrow$ Equação de circunferência
$k = 0 \longrightarrow$ Equação do ponto (a, b)
$k < 0 \longrightarrow$ Equação de um conjunto vazio

3. Equação geral

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$



$$\boxed{a = -\frac{D}{2};\ b = -\frac{E}{2};\ R^2 = a^2 + b^2 - F}$$

4. Reconhecimento

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0}$$

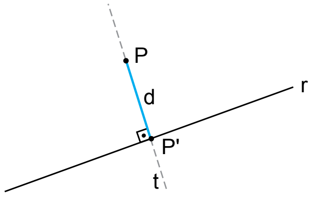
Para que a equação represente uma circunferência, devemos ter:

1) $A = B \neq 0$
2) $C = 0$
3) $R^2 > 0$

Lembrar que, para obter R^2, devemos dividir a equação por A, de modo que fique na forma geral.

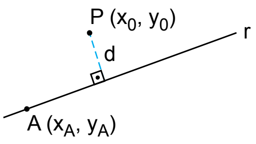
Módulo 56 • Distância entre ponto e reta

1. Distância de ponto a reta sem fórmula especial



1) Obtemos a equação da reta t, que passa por P e é perpendicular a r.
1) Obtemos o ponto P', intersecção de r e t.
2) Obtemos a distância entre P e P', que é a distância procurada.

4. Equação de reta conhecendo um ponto

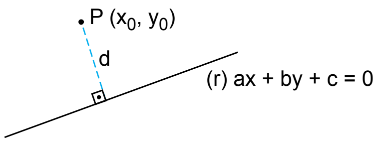


Dados: ponto A, ponto P e d
Pedido: equação de r

1) Escrevemos a equação fundamental da reta r com o ponto A conhecido, deixando m como incógnita.

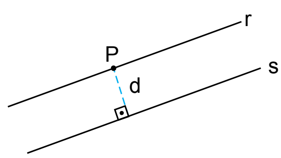
$$\boxed{y - y_A = m\,(x - x_A)}$$

2. Fórmula para cálculo da distância de ponto a reta



$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

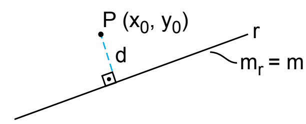
3. Distância entre retas paralelas



1) Obtemos um ponto qualquer da reta r.
2) Calculamos a distância entre P e a reta s.

2) Colocamos a equação de r na forma geral.
3) Calculamos m usando a fórmula da distância entre ponto e reta, já que conhecemos P e d.

5. Equação de reta conhecendo a declividade



Dados: m_r, ponto P e d
Pedido: equação de r
1) Escrevemos a equação reduzida de r, conhecendo m e deixando q como incógnita.

$$\boxed{y = mx + q}$$

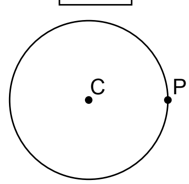
2) Colocamos a equação de r na forma geral.
3) Calculamos q usando a fórmula da distância entre ponto e reta, já que conhecemos P e d.

Módulos 57/58 • Posições relativas

1. Ponto e circunferência

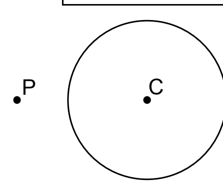
$P(x_0, y_0)$ e (λ) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$\boxed{P \in \lambda}$



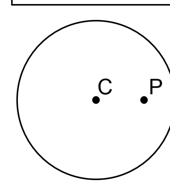
$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0}$

$\boxed{\text{P é externo a } \lambda}$



$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 > 0}$

$\boxed{\text{P é interno a } \lambda}$

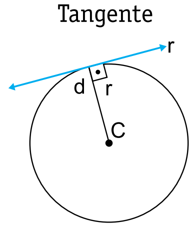


$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 < 0}$

2. Reta e circunferência

(r) ax + by + c = 0 $\quad (\lambda)$ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Tangente

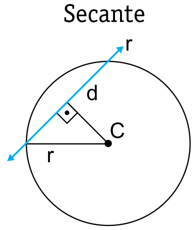


$\boxed{d_{C,r} = R}$

ou

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases} \quad \Delta = 0}$$

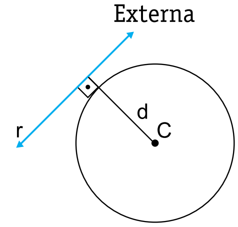
Secante



$\boxed{d_{C,r} < R}$

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases} \quad \Delta > 0}$$

Externa



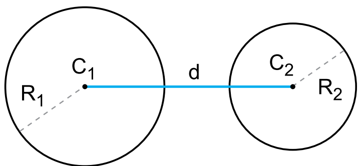
$\boxed{d_{C,r} > R}$

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases} \quad \Delta < 0}$$

3. Duas circunferências

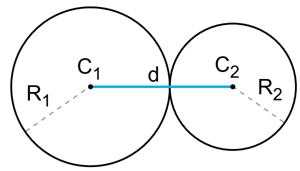
(λ_1) centro C_1 e raio R_1 (λ_2) centro C_2 e raio R_2

Externas



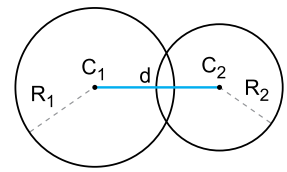
$\boxed{d > R_1 + R_2}$

Tangentes externamente



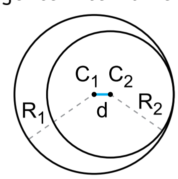
$\boxed{d = R_1 + R_2}$

Secantes



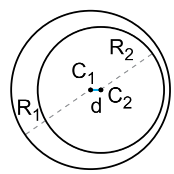
$\boxed{|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2}$

Tangente internamente



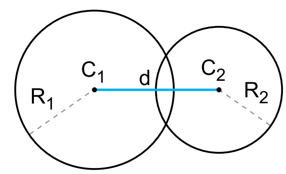
$\boxed{d = |R_1 - R_2|}$

Internas



$\boxed{d < |R_1 - R_2|}$

Concêntricas



$\boxed{d = 0}$