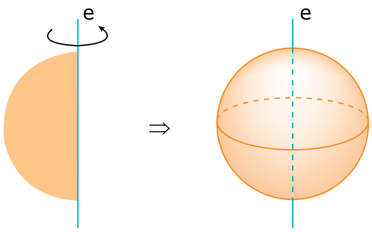
Esferas


Shawn Smith / Creative Commons

INTRODUÇÃO

Considere um ponto **O** e um segmento de medida **R**. Denomina-se esfera de centro **O** e raio **R** o conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a medida OP seja menor ou igual a **R**.

A esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

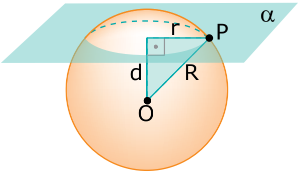


Seção

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.

Sendo **R** o raio da esfera, **d** a distância do plano secante ao centro e **r** o raio da seção, vale a relação:



$$r^2 = R^2 - d^2$$

ÁREA E VOLUME

Área da esfera

Chama-se superfície da esfera de centro **O** e raio **R** ao conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a medida OP seja igual a **R**.

A área **A** da superfície de uma esfera de raio **R** é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

Volume da esfera

O volume **V** de uma esfera de raio **R** é dado por:

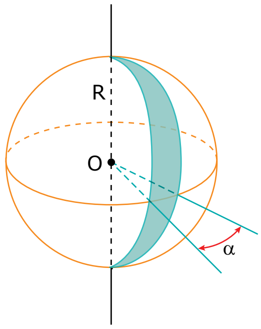
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

FUSO E CUNHA

Fuso esférico

É a região da superfície da esfera compreendida entre duas semicircunferências com extremidades nos polos da esfera.

O ângulo α, medido na seção equatorial, e o raio **R** da esfera caracterizam o fuso.



Área do fuso

Sendo α o ângulo do fuso, temos:

- Com α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——— } 4\pi R^2 \\ \alpha \text{ ——— } A_{Fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{Fuso} = \frac{\alpha}{360°}.4\pi R^2}$$

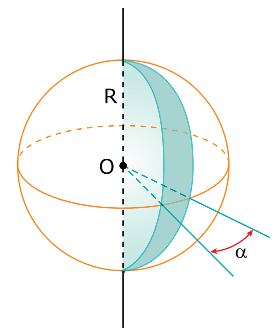
- Com α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ ——— } 4\pi R^2 \\ \alpha \text{ ——— } A_{Fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{Fuso} = \alpha 2R^2}$$

Cunha esférica

É a região da esfera compreendida entre dois semicírculos que contêm o seu diâmetro.

A cunha fica determinada pelo raio da esfera e pela medida do ângulo α.



Volume da cunha

Sendo α o ângulo da cunha, temos:

- Com α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——— } \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha \text{ ——— } V_{Cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{Cunha} = \frac{\alpha}{360°}.\frac{4}{3}\pi R^3}$$

- Com α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ ——— } \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha \text{ ——— } V_{Cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{Cunha} = \frac{\alpha 2R^3}{3}}$$

Perceba que a cunha equivale à fração $\frac{\alpha°}{360°}$ ou $\frac{\alpha}{2\pi}$ da esfera.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUCPR) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3 cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2 cm. Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale, aproximadamente

A) 1 cm.

B) 1,5 cm.

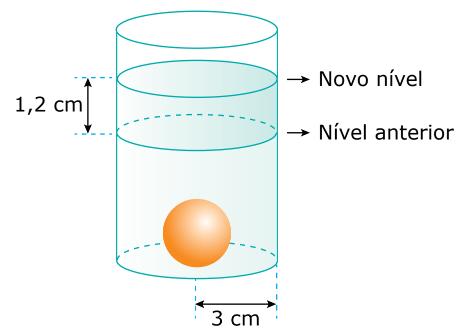
C) 2 cm.

D) 2,5 cm.

E) 3 cm.

Resolução:

Ao mergulharmos totalmente uma bolinha em um recipiente cilíndrico de raio 3 cm, o nível da água sobe 1,2 cm. Veja a figura:



O volume da esfera imersa no cilindro é igual ao volume de água deslocada, que corresponde a um cilindro de raio 3 cm e altura 1,2 cm (em azul escuro). Assim:

$V_{Esfera} = V_{Água\ deslocada} \Rightarrow$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi.3^2 . 1,2 \Rightarrow$

$r^3 = 8,1 \Rightarrow$

$r \cong 2$ cm

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP–2015) Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a **R**, tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio:

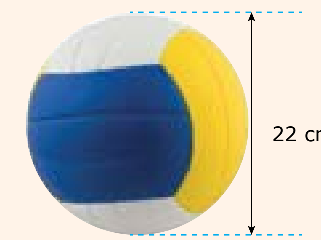
A) 2R

B) $\sqrt{3}$R

C) $\sqrt{2}$R

D) R

02. (UEA-AM–2016) Determinado tipo de bola de vôlei é uma esfera com 22 cm de diâmetro, confeccionada com 18 gomos de couro, agrupados em 6 conjuntos coloridos com 3 gomos cada um, sendo 2 conjuntos na cor amarela, 2 conjuntos na cor azul e 2 conjuntos na cor branca, conforme mostra a figura.



Disponível em: <http://uolesporte.blogosfera.uol.com.br>.

Utilizando π = 3 e sabendo que todos os conjuntos coloridos têm a mesma área, é correto concluir que a área aproximada de todos os gomos amarelos dessa bola, em cm², é:

A) 495.

B) 484.

C) 472.

D) 446.

E) 418.

03. (UFU-MG) Dispõe-se de um cilindro maciço circular reto, feito de alumínio, cujo raio da base mede 4 cm e cuja altura mede 10 cm. Esse cilindro será derretido e, com o material fundido, serão fabricadas esferas de aço de raio 2 cm. Supondo que nesse processo não ocorra perda de material, então o número de esferas a serem fabricadas a partir do cilindro dado é igual a:

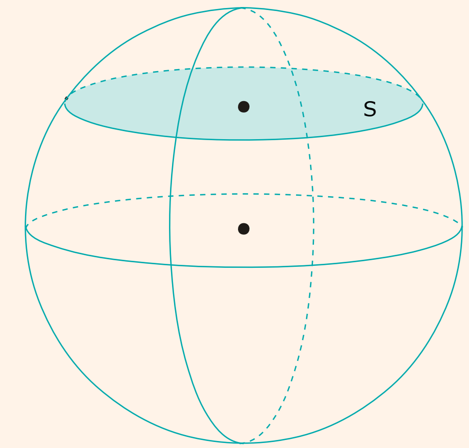
A) 13.

B) 15.

C) 14.

D) 16.

04. (UDESC-SC) Seja **S** uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme a figura.



Se **S** está a 3 cm do centro da esfera e tem área igual a 16π cm² então o volume desta esfera é

A) 36π cm³.

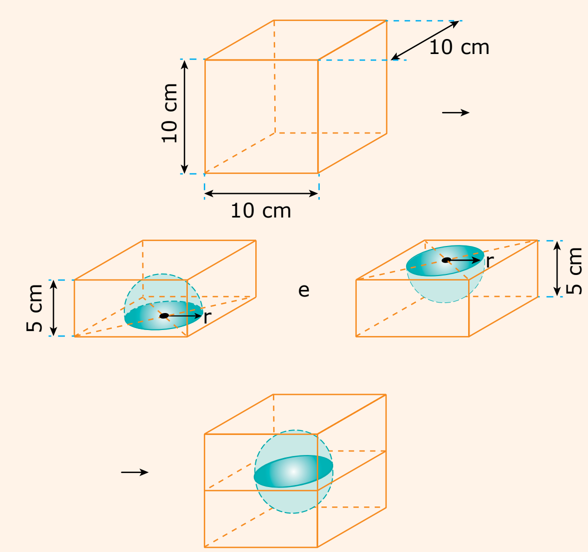
B) $\frac{256\pi}{3}$ cm³.

C) 100π cm³.

D) 16π cm³.

E) $\frac{500\pi}{3}$ cm³.

05. (Unesp) Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.



MATEMÁTICA

Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm^3 e admitindo $\pi \cong 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é:

A) 63.

B) 634.

C) 630.

D) 632.

E) 638.

06. (UEG–2017) Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

A) 2 vezes maior.

B) 3 vezes maior.

C) 9 vezes maior.

D) 12 vezes maior.

E) 20 vezes maior.

07. (FUVEST-SP) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio dessa circunferência é:

A) 1 cm.

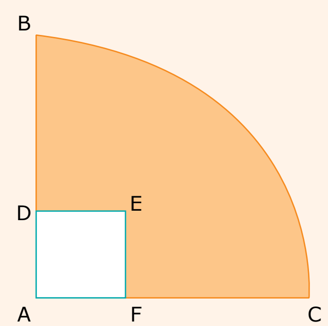
B) 2 cm.

C) 3 cm.

D) 4 cm.

E) 5 cm.

08. (UFMG) Observe esta figura.



Nela, ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1 cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360°, em torno da reta AB, da região hachurada na figura. Sabe-se que o volume de uma esfera de raio **r** é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$. Dessa forma, esse sólido tem um volume de:

A) 14π cm^3.

B) 15π cm^3.

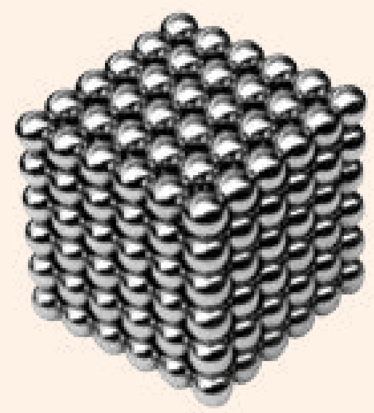
C) 16π cm^3.

D) 17π cm^3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEPA) A ideologia dominante também se manifesta por intermédio do acesso aos produtos do mercado, sobretudo daqueles caracterizados por tecnologias de ponta. O "Cubo Magnético" é um brinquedo constituído por 216 esferas iguais e imantadas. Supondo que esse brinquedo possa ser colocado perfeitamente ajustado dentro de uma caixa, também no formato de um cubo, com aresta igual a 30 mm, a razão entre o volume total das esferas que constituem o "Cubo Magnético" e o volume da caixa que lhe serve de depósito é:



A) $\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{\pi}{5}$

C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{3}$

E) $\frac{\pi}{2}$

02. (Unifor) Uma bola de basquete em forma esférica não passa pelo aro da cesta cuja borda é circular. Se o raio do aro mede 60 cm e a distância entre o centro do aro e o centro da bola é igual a 80 cm, o raio da bola é de

A) 90 cm.

B) 100 cm.

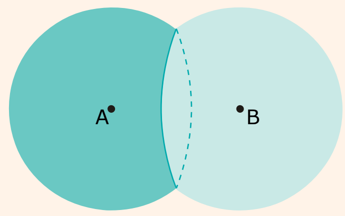
C) 120 cm.

D) 140 cm.

E) 160 cm.

03. (UERJ) Na fotografia a seguir, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio **R**, unidas de tal modo que a distância entre seus centros **A** e **B** é igual ao raio **R**. A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

A) $\frac{\pi R^2}{2}$

B) $\frac{3\pi R^2}{2}$

C) $\frac{3\pi R^2}{4}$

D) $\frac{4\pi R^2}{3}$

04. (UEG-GO–2015) Suponha que haja laranjas no formato de uma esfera com 6 cm de diâmetro e que a quantidade de suco que se obtém ao espremer cada laranja é $\frac{2}{3}$ de seu volume, sendo o volume dado em litros. Nessas condições, se quiser obter 1 litro de suco de laranja, deve-se espremer no mínimo:

(Use: π = 3,14.)

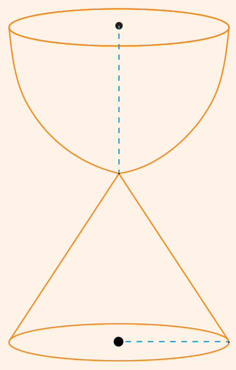
A) 13 laranjas.

B) 14 laranjas.

C) 15 laranjas.

D) 16 laranjas.

05. (CEFET-MG) Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total **V** constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura a seguir.



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de **V**. Portanto o volume de areia, em cm^3, é:

A) 16π

B) $\frac{64\pi}{3}$

C) 32π

D) $\frac{128\pi}{3}$

E) 64π

06. (EsPCEx-SP–2015) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida **R**, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}$R, então o raio da esfera mede:

A) $\frac{2}{3}$R

B) $\frac{3}{4}$R

C) $\frac{4}{9}$R

D) $\frac{1}{3}$R

E) $\frac{9}{16}$R

07. (UECE) Um círculo de raio **R** gira em torno de seu diâmetro, gerando uma esfera de volume **V**. Se o raio do círculo é aumentado em 50%, então o volume da esfera é aumentado em

A) 100,0%.

B) 125,0%.

C) 215,0%.

D) 237,5%.

08. (UFRGS-RS–2016) Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm, que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é:

A) 8.
B) 10.
C) 12.
D) 14.
E) 16.

09. (UECE–2016) Duas esferas que se tangenciam estão em repouso sobre um plano horizontal. Os volumes das esferas são respectivamente $2\,304\pi$ m³ e 36π m³. A distância, em metros, entre os pontos de contato das esferas com o plano é igual a:

A) 9.
B) 12.
C) 15.
D) 10.

10. (PUC-SP–2017) O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm², é:

A) $42\sqrt{2}\pi$
B) $36\sqrt{3}\pi$
C) $32\sqrt{2}\pi$
D) $24\sqrt{3}\pi$

11. (Unesp) Diferentes tipos de nanomateriais são descobertos a cada dia, viabilizando produtos mais eficientes, leves, adequados e, principalmente, de baixo custo. São considerados nanomateriais aqueles cujas dimensões variam entre 1 e 100 nanômetros (nm), sendo que 1 nm equivale a 10^{-9} m, ou seja, um bilionésimo de metro. Uma das características dos nanomateriais refere-se à relação entre seu volume e sua área superficial total.

Por exemplo, em uma esfera maciça de 1 cm de raio, a área superficial e o volume valem 4π cm² e $\left(\frac{4}{3}\right)\pi$ cm³, respectivamente. O conjunto de nanoesferas de 1 nm de raio, que possui o mesmo volume da esfera dada, tem a soma de suas áreas superficiais:

A) 10 vezes maior que a da esfera.
B) 10^3 vezes maior que a da esfera.
C) 10^5 vezes maior que a da esfera.
D) 10^7 vezes maior que a da esfera.
E) 10^9 vezes maior que a da esfera.

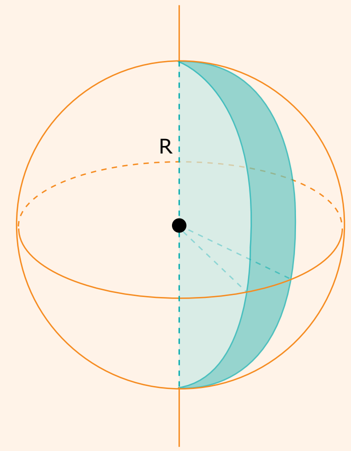
12. (UFPE) Um cilindro reto de ferro é derretido, e o ferro obtido, que tem o mesmo volume do cilindro, é moldado em esferas com raio igual à metade do raio da base do cilindro. Se a altura do cilindro é quatro vezes o diâmetro de sua base, quantas são as esferas obtidas?

13. (UEFS-BA–2016) Uma bolha de sabão, esférica, não estouraria se sua área superficial fosse, no máximo, 44% maior.

Logo, ela poderia conter um volume de ar em seu interior, sem estourar, até

A) 32,4% maior.
B) 44% maior.
C) 53,6% maior.
D) 66% maior.
E) 72,8% maior.

14. (Unesp) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida **R** cm foi cortada em 12 fatias iguais, em que cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio **R** cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de **R**:

A) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico).
B) quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2016) Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio **R**, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi(R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2.h$, sendo **h** a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de **R**) deverá ser igual a:

A) 2R
B) 4R
C) 6R
D) 9R
E) 12R

02. (Enem) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

(Use: $\pi = 3$.)

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

A) 168.
B) 304.
C) 306.
D) 378.
E) 514.

03. (Enem) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na figura 1, uma foto de um globo da morte e, na figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

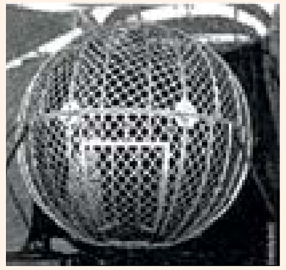


Figura 1

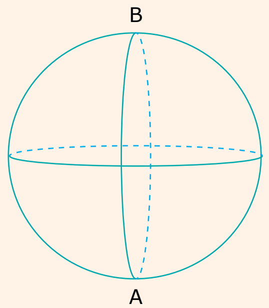
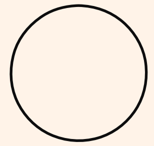


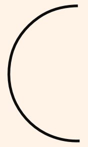
Figura 2

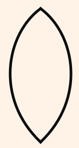
Na figura 2, o ponto **A** está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto **B** e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos **A** e **B**.

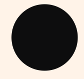
Disponível em: <www.baixaki.com.br>. Acesso em: 29 fev. 2012.

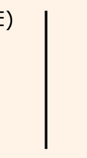
A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

A) 

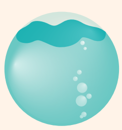
B) 

C) 

D) 

E) 

04. (Enem) Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

 1 385 km	Toda a água do planeta 1,39 bilhões de km³
 406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km³
 272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km³
 58 km	Água doce superficial 104,59 mil de km³

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares + ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é:

A) $\frac{1}{343}$.

B) $\frac{1}{49}$.

C) $\frac{1}{7}$.

D) $\frac{29}{136}$.

E) $\frac{136}{203}$.

05. (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (figura 1), porém, um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

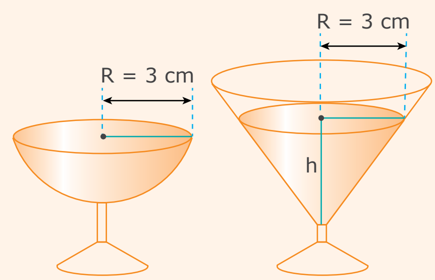


Figura 1 Figura 2

Considere: $V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{Cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

A) 1,33.

B) 6,00.

C) 12,00.

D) 56,52.

E) 113,04.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. B
- 04. E
- 05. D
- 06. C
- 07. E
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. C
- 04. B
- 05. A
- 06. B
- 07. D
- 08. B
- 09. B
- 10. C
- 11. D
- 12. 48
- 13. E
- 14.
  - A) $\frac{\pi R^2}{3}$ cm²
  - B) $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm²

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. E
- 03. E
- 04. A
- 05. B

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %