Capítulo 6
Função modular

Para pensar

1. A altitude será +200 m ou −200 m.

2. A distância será:
- x se o helicóptero estiver acima do nível médio do mar ou se estiver no nível médio do mar, isto é, se $x \geqslant 0$;
- $-x$ se o helicóptero estiver abaixo do nível médio do mar, isto é, se $x < 0$.

Exercícios propostos

1. **a)** 7
b) 0
c) 3
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $2 - \sqrt{3}$
f) $2 - \sqrt{3}$
g) $3 + \sqrt{7}$
h) $\pi - 3$
i) $\pi - 3{,}14$
j) 8
k) $\sqrt{11} - \sqrt{10} + \sqrt{10} = \sqrt{11}$
l) $\sqrt{7} - \sqrt{5} - (\sqrt{7} - \sqrt{5}) = 0$

2.
- Para qualquer $x \in [5, 15]$, tem-se $x > 3$. Logo, $|x - 3| = x - 3$.
- Para qualquer $x \in [5, 15]$, tem-se $x < 18$. Logo, $|x - 18| = 18 - x$.

Assim, concluímos que:
$|x - 3| + |x - 18| = x - 3 + 18 - x = 15$
Alternativa **b**.

3. $|x|^2 = |x| \cdot |x| = |x \cdot x| \Rightarrow |x|^2 = |x^2| \quad \text{(I)}$
Como $x^2 \geqslant 0$, temos:
$|x^2| = x^2 \quad \text{(II)}$
De (I) e (II), concluímos:
$|x|^2 = x^2$

4. $\sqrt{(10 - x)^2} + |x - 30| = |10 - x| + |x - 30|$
- Para qualquer $x \in [15, 25]$, tem-se $x > 10$. Logo, $|10 - x| = -10 + x$.
- Para qualquer $x \in [15, 25]$, tem-se $x < 30$. Logo, $|x - 30| = -x + 30$.

Assim, concluímos que:
$\sqrt{(10 - x)^2} + |x - 30| = -10 + x - x + 30 = 20$
Alternativa **b**.

5. **a)** F, pois para $x < 0$ temos que: $|x| = -x$

b) V, pois números opostos estão associados a pontos do eixo real que equidistam da origem O.

c) F, pois para $x < 0$ temos que: $|x^3| = -x^3$

d) V, pois $x^4 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

e) V, pois, de acordo com a justificativa do item **b**, números opostos têm o mesmo módulo.

f) F, pois se $a = 3$ e $b = -4$, então
$|a + b| = |3 + (-4)| = 1$ e $|a| + |b| = |3| + |-4| = 7$
Logo, para $a = 3$ e $b = -4$, $|a + b| \neq |a| + |b|$.

g) F, pois se $x = 0$, então: $|0| = 0$

h) V, pois $5 \cdot |x| = |5| \cdot |x|$ e, pelo item **b** do exercício resolvido 3, temos que o produto dos módulos é igual ao módulo do produto. Assim, $|5| \cdot |x| = |5x|$.

i) F, pois se $x = 2$, então $(-5) \cdot |x| = (-5) \cdot 2 = -10$ e $|-5x| = |-5 \cdot 2| = 10$.
Logo, para $x = 2$, $(-5) \cdot |x| \neq |-5x|$.

j) V, pois:
- se x é um número real positivo ou nulo, então $\sqrt{x^2} = x$.
- se x é um número real negativo, então $\sqrt{x^2} = -x$.

Assim, para qualquer número real x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

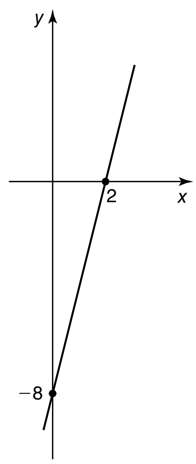
k) V, pois $\frac{7}{|x|} = \frac{|7|}{|x|}$ e, pelo item **c** do exercício resolvido 3, temos que o quociente dos módulos é igual ao módulo do quociente. Assim, $\frac{|7|}{|x|} = \left|\frac{7}{x}\right|$.

6. Saber o número de andares que um elevador está acima do outro é equivalente a saber a distância entre os dois elevadores, ou seja, podemos fazer $|x - 5|$ ou $|5 - x|$.
Alternativa **d**.

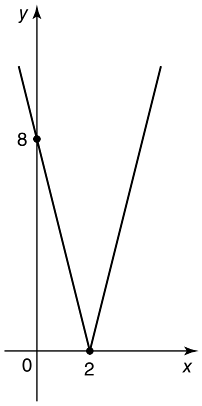
7. Das 14 h de um dia às x h do dia seguinte, com $x < 14$, há uma diferença de $24 - (14 - x)$ horas. Para $x < 14$, essa expressão equivale a $24 - |x - 14|$.
Alternativa **e**.

8. **a)** $f(x) = |4x - 8|$
- Construímos o gráfico da função $g(x) = 4x - 8$:

x	$g(x)$
0	−8
2	0



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f:

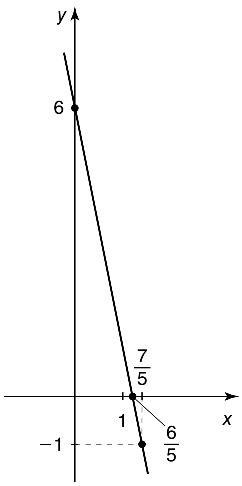


O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

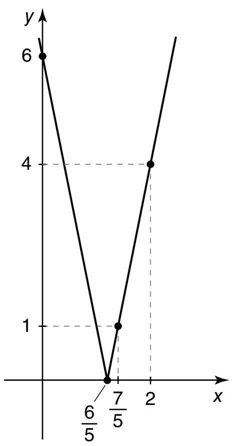
b) $g(x) = |-5x + 6|$

- Construímos o gráfico da função $f(x) = -5x + 6$:

x	$f(x)$
0	6
$\frac{6}{5}$	0
$\frac{7}{5}$	-1



- No gráfico de f, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de g:

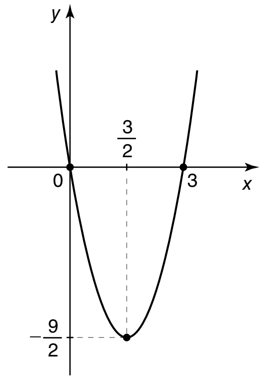


O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+$.

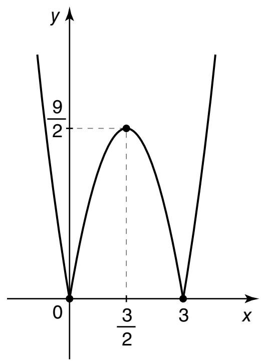
c) $h(x) = |2x^2 - 6x|$

- Construímos o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 6x$:

x	$f(x)$
0	0
3	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$



- No gráfico de f, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de h:

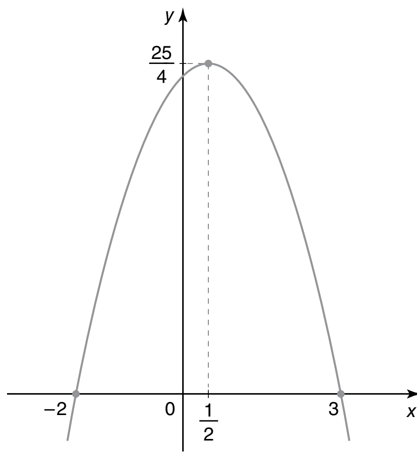


O domínio e o conjunto imagem de h são, respectivamente, $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+$.

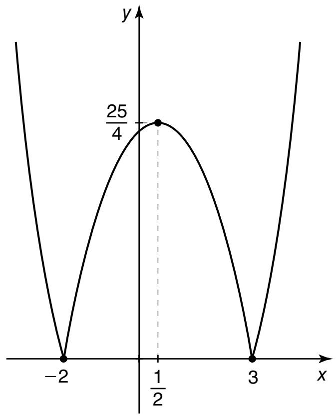
d) $f(x) = |-x^2 + x + 6|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = -x^2 + x + 6$:

x	$g(x)$
-2	0
3	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{4}$



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |-x^2 + x + 6|$:

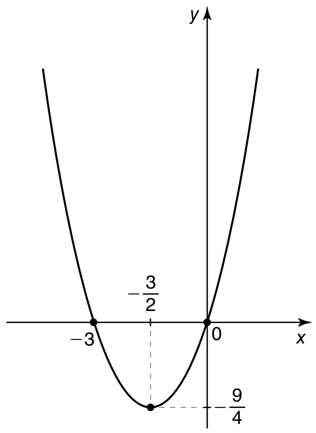


O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |-x^2 + x + 6|$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

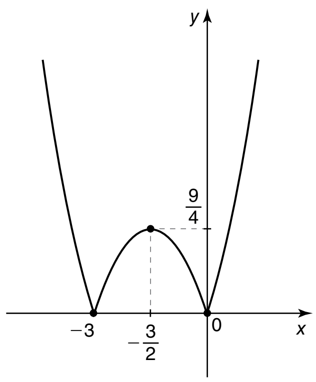
e) $f(x) = -|x^2 + 3x|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 + 3x$:

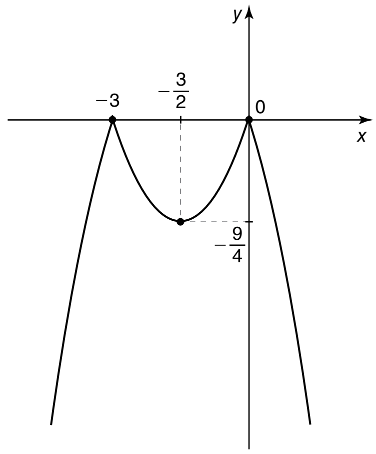
x	$g(x)$
0	0
−3	0
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $h(x) = |x^2 + 3x|$:



- Para obter o gráfico da função $f(x) = -|x^2 + 3x|$, transformamos todos os pontos do gráfico anterior em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.

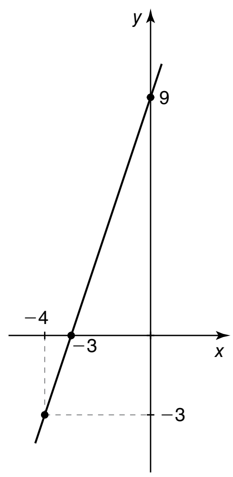


O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = -|x^2 + 3x|$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_-$.

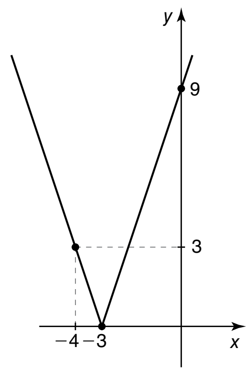
f) $g(x) = |3x + 9| - 4$

- Construímos o gráfico de $y = 3x + 9$:

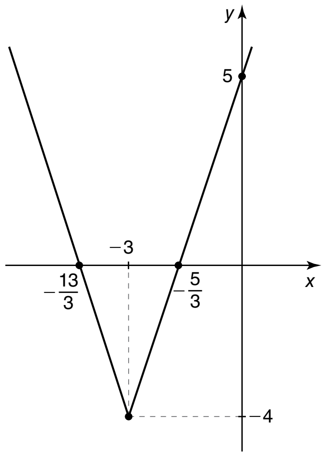
x	y
0	9
−3	0
−4	−3



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |3x + 9|$:



- Finalmente, transladamos o gráfico anterior verticalmente 4 unidades para baixo, obtendo assim o gráfico de g:

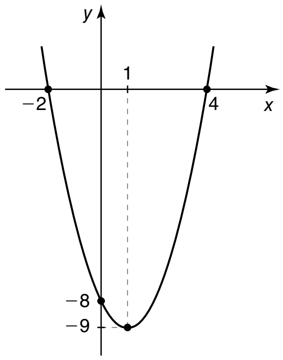


O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$.

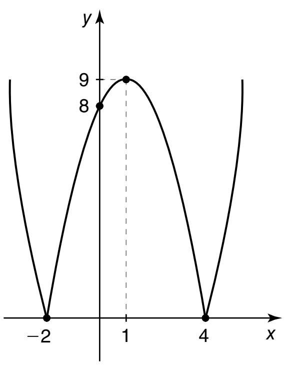
g) $h(x) = |x^2 - 2x - 8| + 2$

- Construímos o gráfico de $y = x^2 - 2x - 8$:

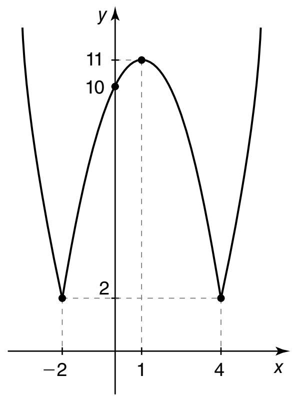
x	y
0	−8
−2	0
4	0
1	−9



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |x^2 - 2x - 8|$:



- Finalmente, transladamos o gráfico anterior verticalmente 2 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de h:

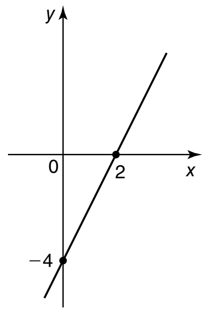


O domínio e o conjunto imagem de h são, respectivamente, $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

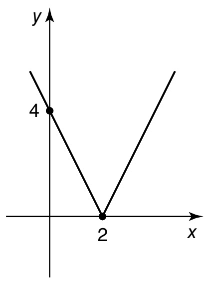
h) $f(x) = 2 - |2x - 4|$

- Construímos o gráfico de $g(x) = 2x - 4$:

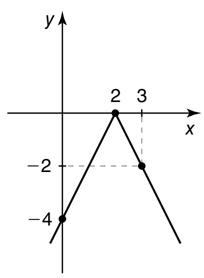
x	$g(x)$
2	0
0	−4



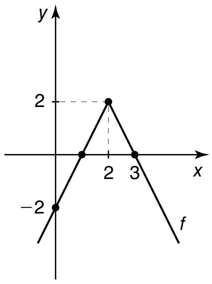
- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $h(x) = |2x - 4|$:



- Para obter o gráfico da função $i(x) = -|2x - 4|$, transformamos todos os pontos do gráfico anterior em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas:

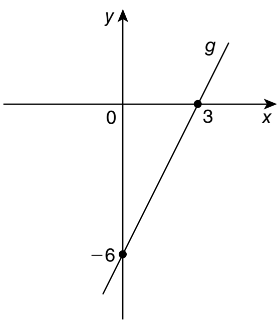


- Transladamos o gráfico anterior verticalmente 2 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de $f(x) = 2 - |2x - 4|$:

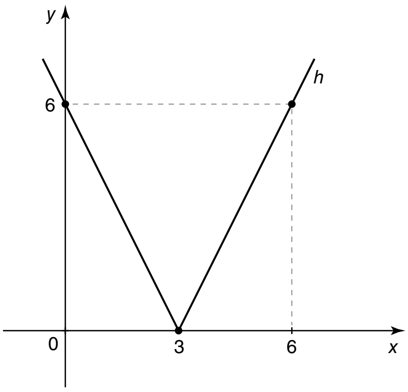


O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = 2 - |2x - 4|$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

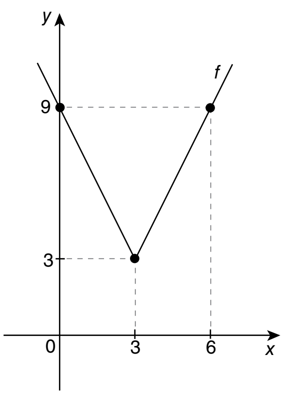
9. **a)** 1º passo: $g(x) = 2x - 6$.



2º passo: $h(x) = |2x - 6|$:



3º passo: $f(x) = |2x - 6| + 3$

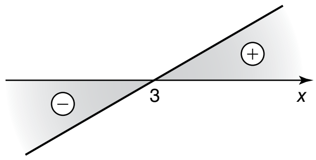


b) $|2x - 6| + 3 = 5 \Rightarrow |2x - 6| = 2$ e, portanto, $2x - 6 = 2$ ou $2x - 6 = -2$, ou seja, $x = 4$ ou $x = 2$.
Logo, os pontos do gráfico de f que têm ordenada 5 são (4, 5) e (2, 5).

c) $|2x - 6| + 3 < 5 \Rightarrow |2x - 6| < 2$ e, portanto, $-2 < 2x - 6 < 2$, ou seja, $2 < x < 4$.

10. **a)** $f(x) = |2x - 6| + 3x$

- Estudando a variação de sinal de $g(x) = 2x - 6$, temos:



Como a função g é negativa à esquerda de 3, temos:

$|2x - 6| = -2x + 6$, para $x < 3$

Como a função g é positiva à direita de 3 e se anula em 3, temos:

$|2x - 6| = 2x - 6$, para $x \geqslant 3$

Representando os valores de $|g(x)| = |2x - 6|$ por um esquema:

	$x < 3$	$x \geqslant 3$
$\|2x - 6\|$ →	**−2x + 6**	**2x − 6**

Adicionando $3x$ a cada expressão desse quadro, teremos a função f representada por duas sentenças:

	$x < 3$	$x \geqslant 3$
$\|2x - 6\|$ →	$-2x + 6$	$2x - 6$
(+) $3x$ →	$3x$	$3x$
$\|2x - 6\| + 3x$ →	**x + 6**	**5x − 6**

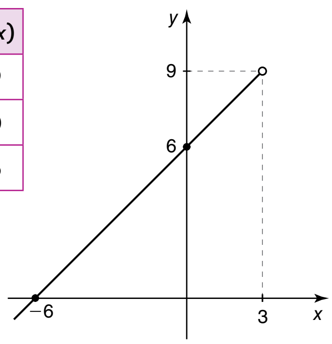
Logo:

$$f(x) = |2x - 6| + 3x \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x + 6, \text{ se } x < 3 \\ 5x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Analisando cada sentença de f, temos:

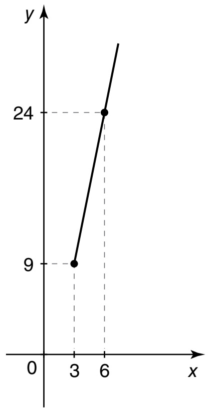
(I) $f(x) = x + 6$, para $x < 3$

x	$f(x)$
3	9
−6	0
0	6

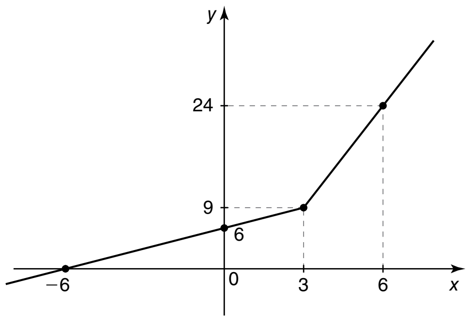


(II) $f(x) = 5x - 6$, para $x \geqslant 3$

x	$f(x)$
3	9
6	24



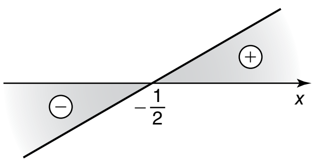
A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é o gráfico da função $f(x) = |2x - 6| + 3x$:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

b) $g(x) = |4x + 2| + 4x - 1$

- Estudando a variação de sinal de $f(x) = 4x + 2$, temos:



Como a função f é negativa à esquerda de $-\frac{1}{2}$, temos: $|4x + 2| = -4x - 2$, para $x < -\frac{1}{2}$

Como a função f é positiva à direita de $-\frac{1}{2}$ e se anula em $-\frac{1}{2}$, temos:

$|4x + 2| = 4x + 2$, para $x \geqslant -\frac{1}{2}$

Representando os valores de $|f(x)| = |4x + 2|$ por um esquema:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x \geqslant -\frac{1}{2}$
$\vert 4x + 2\vert \longrightarrow$	$\mathbf{-4x - 2}$	$\mathbf{4x + 2}$

Adicionando $4x - 1$ a cada expressão desse quadro, teremos a função g representada por duas sentenças:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x \geqslant -\frac{1}{2}$
$\vert 4x + 2\vert \longrightarrow$	$-4x - 2$	$4x + 2$
$\oplus$ $4x - 1 \longrightarrow$	$4x - 1$	$4x - 1$
$\vert 4x + 2\vert + 4x - 1 \longrightarrow$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{8x + 1}$

Logo:

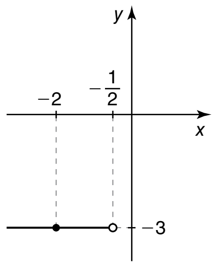
$g(x) = |4x + 2| + 4x - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -3, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \\ 8x + 1, \text{ se } x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Analisando cada sentença de g, temos:

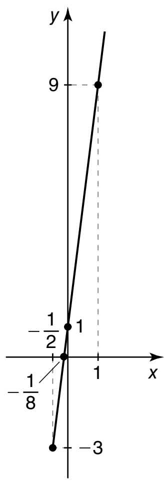
(I) $g(x) = -3$, para $x < -\frac{1}{2}$

x	$g(x)$
$-\frac{1}{2}$	3
-2	-3

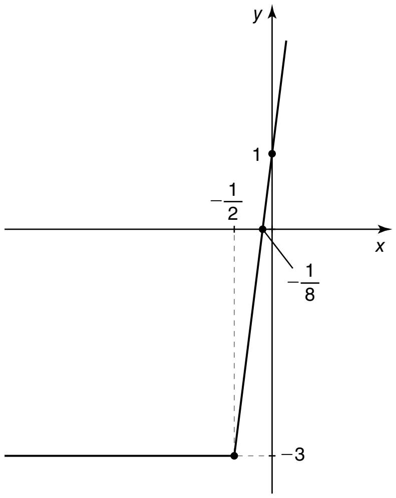


(II) $g(x) = 8x + 1$, para $x \geqslant -\frac{1}{2}$

x	$g(x)$
$-\frac{1}{2}$	-3
1	9
0	1
$-\frac{1}{8}$	0



A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é o gráfico da função $g(x) = |4x + 2| + 4x - 1$:

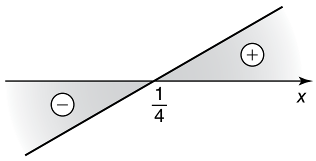


O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -3\}$.

c) $f(x) = |4x - 1| + |2x + 7|$

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = 4x - 1$ e $h(x) = 2x + 7$, temos:

Variação de sinal de $g(x) = 4x - 1$

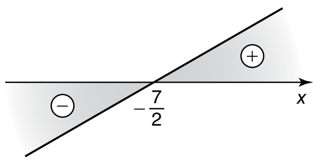


Então:

$\frac{1}{4}$

$\lvert 4x - 1 \rvert$ →	$-4x + 1$	$4x - 1$

Variação de sinal de $h(x) = 2x + 7$



Então:

$-\frac{7}{2}$

$\lvert 2x + 7 \rvert$ →	$-2x - 7$	$2x + 7$

Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$ e de $f(x) = |4x - 1| + |2x + 7|$, temos:

$-\frac{7}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$

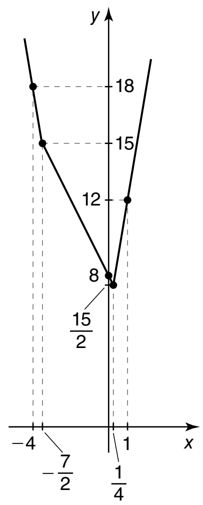
$\lvert 4x - 1 \rvert$ →	$-4x + 1$	$-4x + 1$	$4x - 1$
$\lvert 2x + 7 \rvert$ →	$-2x - 7$	$2x + 7$	$2x + 7$
$f(x)$ →	$-6x - 6$	$-2x + 8$	$6x + 6$

Logo:

$f(x) = |4x - 1| + |2x + 7| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -6x - 6, \text{ se } x \leqslant -\frac{7}{2} \\ -2x + 8, \text{ se } -\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ 6x + 6, \text{ se } x \geqslant \frac{1}{4} \end{cases}$$

Portanto, o gráfico de f é:

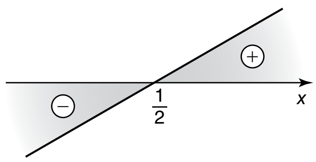


O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{15}{2}\right\}$.

d) $g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 2x - 1$ e $h(x) = x - 5$, temos:

Variação de sinal $f(x) = 2x - 1$

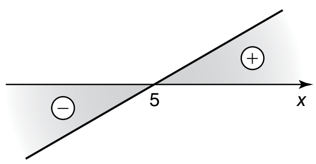


Então:

$\frac{1}{2}$

$\lvert 2x - 1 \rvert$ →	$-2x + 1$	$2x - 1$

Variação de sinal de $h(x) = x - 5$



Então:

5

$-x + 5$	$x - 5$

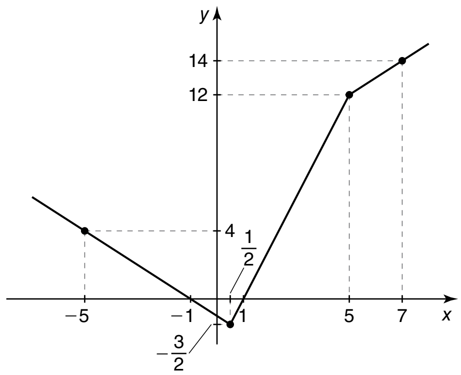
Representando no eixo real os valores de $|f(x)|$, $|h(x)|$, $k(x) = 3$ e de $g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3$, temos:

	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$	$x > 5$
$\lvert 2x - 1\rvert$	$-2x + 1$	$2x - 1$	$2x - 1$
$\ominus$ $\lvert x - 5\rvert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$\oplus$ 3	3	3	3
$g(x)$	$\mathbf{-x - 1}$	$\mathbf{3x - 3}$	$\mathbf{x + 7}$

Logo:
$g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x \leqslant \frac{1}{2} \\ 3x - 3, \text{ se } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5 \\ x + 7, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Portanto, o gráfico de g é:



O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e

$Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{3}{2}\right\}$

11. a) Como o tempo está em minuto, vamos primeiro transformar as velocidades em km/min:

Primeiro automóvel:

$\frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{90 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{3}{2}$ km/min

Segundo automóvel:

$\frac{120 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{120 \text{ km}}{60 \text{ min}} = 2$ km/min

No instante em que o segundo veículo passou por P, o primeiro veículo já havia percorrido 3 quilômetros. Assim, podemos expressar as posições dos veículos a partir desse instante, em função do tempo t por:

Primeiro automóvel: $3 + \frac{3t}{2}$

Segundo automóvel: $2t$

Igualando as duas expressões, pois ambos estarão no mesmo ponto do trajeto, temos:

$2t = 3 + \frac{3t}{2} \Rightarrow t = 6$

Portanto, o tempo decorrido do instante em que o segundo veículo passou por P até o instante em que ele alcançou o primeiro veículo foi de 6 minutos.

b) $2t = 18 \Rightarrow t = 9$

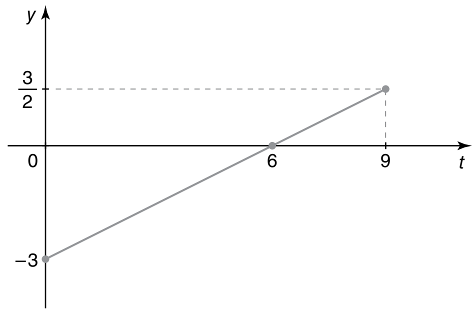
Portanto, o segundo veículo percorreu todo o trecho reto em 9 minutos.

c) $d = \left|2t - \left(3 + \frac{3t}{2}\right)\right| \Leftrightarrow d = \left|\frac{t}{2} - 3\right|$, para $0 \leqslant t \leqslant 9$.

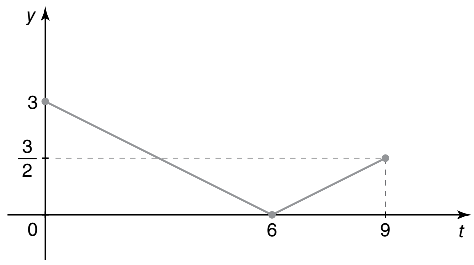
d) $d = \left|\frac{t}{2} - 3\right|$, para $0 \leqslant t \leqslant 9$

- Construímos o gráfico de $y = \frac{t}{2} - 3$, para $0 \leqslant t \leqslant 9$:

t	y
0	-3
6	0
9	$\frac{3}{2}$

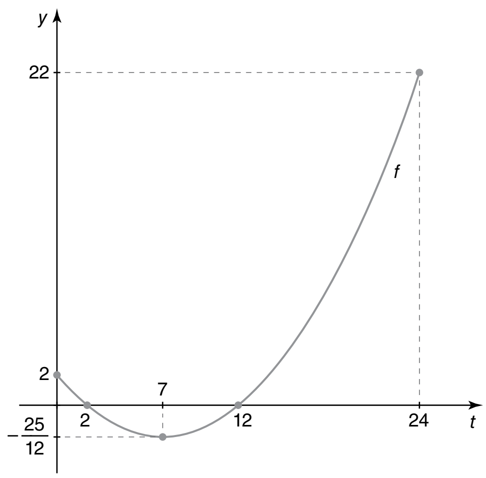


- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $d = \left|\frac{t}{2} - 3\right|$, para $0 \leqslant t \leqslant 9$:

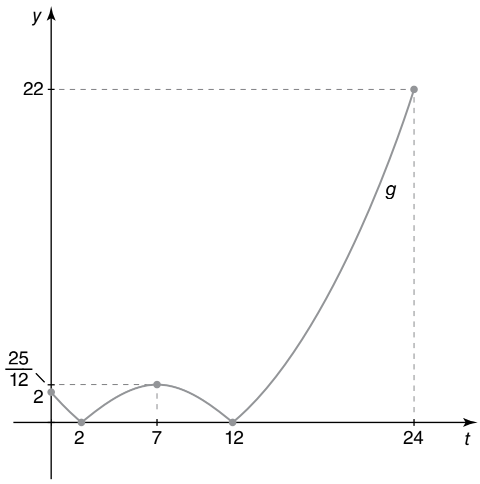


12. a) $V(t) = \left|\frac{t^2}{12} - \frac{7t}{6} + 2\right| + 1$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$

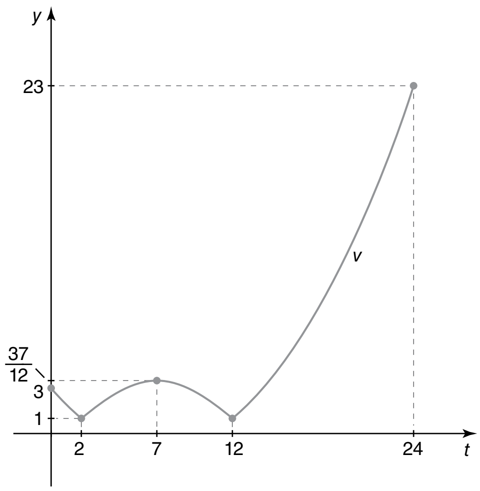
- Construímos o gráfico de $f(t) = \frac{t^2}{12} - \frac{7t}{6} + 2$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $g(t) = \left|\frac{t^2}{12} - \frac{7t}{6} + 2\right|$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$:



- Transladamos o gráfico anterior verticalmente 1 unidade para cima, obtendo assim o gráfico de $V(t) = \left|\frac{t^2}{12} - \frac{7t}{6} + 2\right| + 1$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$:

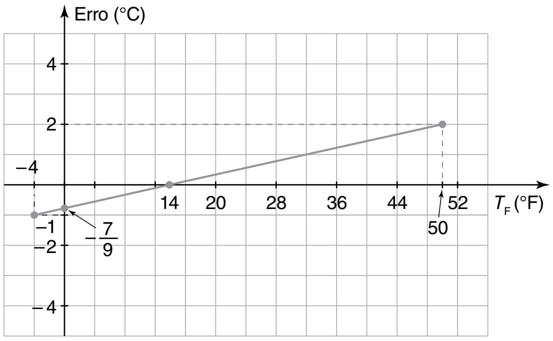


b) Observando o gráfico, concluímos que o volume atingiu o valor mínimo às 2 horas e às 12 horas.
c) Observando o gráfico, concluímos que esse volume mínimo foi de 1 quilolitro.
d) Observando o gráfico, concluímos que o volume atingiu o valor máximo às 24 horas.
e) Observando o gráfico, concluímos que esse volume máximo foi de 23 quilolitros.

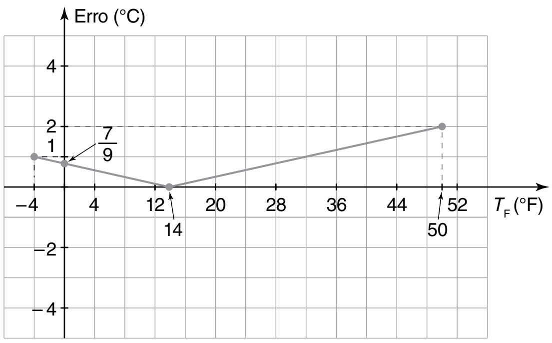
13. a) O erro cometido é nulo quando a diferença entre essas duas expressões é zero, ou seja:
$T_c - \overline{T}_c = 0 \Rightarrow T_c = \overline{T}_c$
$\therefore \frac{5}{9}(T_F - 32) = \frac{T_F}{2} - 17 \Rightarrow T_F = 14$
Logo, a temperatura em que o erro cometido por Pedro é nulo é 14 °F.

b) Erro $= |T_c - \overline{T}_c| = \left|\frac{5}{9}(T_F - 32) - \left(\frac{T_F}{2} - 17\right)\right| =$
$= \left|\frac{T_F}{18} - \frac{7}{9}\right|$
$\therefore$ Erro $= \left|\frac{T_F}{18} - \frac{7}{9}\right|$

- Construímos o gráfico de $f(T_F) = \frac{T_F}{18} - \frac{7}{9}$, para $-4 \leqslant T_F \leqslant 50$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de Erro $= \left|\frac{T_F}{18} - \frac{7}{9}\right|$, para $-4 \leqslant T_F \leqslant 50$:



c) O erro absoluto máximo de Pedro foi de 2 °C.

14. a) $|23 - x| = 4$ ou $|x - 23| = 4$
b) $|23 - x| = 4$
Pela propriedade P3, temos:
$|23 - x| = 4 \Leftrightarrow 23 - x = 4$ ou $23 - x = -4$
$\therefore x = 19$ ou $x = 27$
c) 19 e 23 anos ou 23 e 27 anos

15. a) Pela propriedade P3, temos:
$|x - 8| = 3 \Leftrightarrow x - 8 = 3$ ou $x - 8 = -3$
$\therefore x = 11$ ou $x = 5$
Assim, $S = \{5, 11\}$.
b) Pela propriedade P2, temos:
$|2x - 1| = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$
$\therefore x = \frac{1}{2}$
Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
c) Pela propriedade P1, temos $|3x - 1| \geqslant 0$; logo, a equação $|3x - 1| = -4$ não tem raízes, e, portanto, seu conjunto S é vazio.
$S = \varnothing$

d) Pela propriedade P3, temos:
$|k^2 - 5k| = 6 \Leftrightarrow k^2 - 5k = 6$ ou $k^2 - 5k = -6$
- Para $k^2 - 5k = 6$: $k = 6$ ou $k = -1$
- Para $k^2 - 5k = -6$: $k = 3$ ou $k = 2$

Logo, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

e) Pela propriedade P4, temos:
$|9x - 5| = |6x + 10| \Leftrightarrow 9x - 5 = 6x + 10$ ou
$9x - 5 = -6x - 10$
$\therefore x = 5$ ou $x = -\frac{1}{3}$
Logo, $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$.

f) Pela propriedade P6, temos:
$|t| \cdot |t - 2| = 1 \Leftrightarrow |t(t - 2)| = 1$
Então, pela propriedade P3, temos:
$|t(t - 2)| = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 1$ ou $t^2 - 2t = -1$
$\therefore t = 1 + \sqrt{2}$ ou $t = 1 - \sqrt{2}$ ou $t = 1$
Assim, $S = \{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.

g) Pela propriedade P6, temos: $|x|^2 = x^2$
Logo, $x^2 + 2|x| = 15 \Rightarrow |x|^2 + 2|x| = 15$
Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, obtemos:
$y^2 + 2y - 15 = 0$
Resolvendo essa equação, temos: $y = 3$ ou $y = -5$.
Retornando à variável original, concluímos:
- $y = 3 \Rightarrow |x| = 3$
  $\therefore x = 3$ ou $x = -3$
- $y = -5 \Rightarrow |x| = -5$
  $\therefore \nexists x$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \{3, -3\}$.

h) Pela propriedade P6, temos:
$|5p| = |5| \cdot |p| = 5|p|$ e $|p|^2 = p^2$
Logo, $p^2 - |5p| + 4 = 0 \Rightarrow |p|^2 - 5|p| + 4 = 0$.
Fazendo a mudança de variável $|p| = y$, obtemos:
$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 4$
Retornando à variável original, concluímos:
- $y = 1 \Rightarrow |p| = 1$
  $\therefore p = 1$ ou $p = -1$
- $y = 4 \Rightarrow |p| = 4$
  $\therefore p = 4$ ou $p = -4$

Assim, o conjunto solução da equação é
$S = \{1, -1, 4, -4\}$.

i) Pela propriedade P6, temos:
$|x - 1|^2 = (x - 1)^2$; logo,
$(x - 1)^2 + 4|x - 1| + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 1|^2 + 4|x - 1| + 3 = 0$
Fazendo a mudança de variável $|x - 1| = y$, obtemos:
$y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = -3$
Retornando à variável original, concluímos:
- $y = -1 \Rightarrow |x - 1| = -1$
  $\therefore \nexists x$
- $y = -3 \Rightarrow |x - 1| = -3$
  $\therefore \nexists x$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

16. a) $|2x + 3| = 3x - 6$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$3x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$
Pela propriedade P3, temos:
$|2x + 3| = 3x - 6 \Leftrightarrow 2x + 3 = 3x - 6$ ou
$2x + 3 = -3x + 6$
$\therefore x = 9$ ou $x = \frac{3}{5}$
Como $x = 9$ satisfaz a condição de existência e $x = \frac{3}{5}$ não a satisfaz, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{9\}$.

b) $|7x + 2| = 3x - 1$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$3x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{3}$
Pela propriedade P3, temos:
$|7x + 2| = 3x - 1 \Rightarrow 7x + 2 = 3x - 1$ ou
$7x + 2 = -3x + 1$
$\therefore x = -\frac{3}{4}$ ou $x = -\frac{1}{10}$
Porém, $x = -\frac{3}{4}$ e $x = -\frac{1}{10}$ não obedecem à condição de existência; então, $S = \varnothing$.

c) $|x^2 - 5x| = 9 - 5x$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$9 - 5x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{9}{5}$
Pela propriedade P3, temos:
$|x^2 - 5x| = 9 - 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 9 - 5x$ ou
$x^2 - 5x = -9 + 5x$
$\therefore x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = 9$
Porém, $x = 3$ e $x = 9$ não obedecem à condição de existência; então, $S = \{-3, 1\}$.

17.
- Transformamos a equação $|2x + 4| + |x - 5| = 2x$ na equação equivalente:
$$|2x + 4| + |x - 5| - 2x = 0$$
- Eliminamos os módulos da função $h(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 2x$:

	$x < -2$	$-2 \le x \le 5$	$x > 5$
$\lvert 2x + 4\rvert$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
(+) $\lvert x - 5\rvert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
(−) $2x$	$2x$	$2x$	$2x$
(=) $\lvert 2x + 4\rvert + \lvert x - 5\rvert - 2x$	$\mathbf{-5x + 1}$	$\mathbf{-x + 9}$	$\mathbf{x - 1}$

Assim:
$$h(x) = \begin{cases} -5x + 1, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -x + 9, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 1, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$
Para resolver a equação $h(x) = 0$, igualamos a zero cada sentença da função h:
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 1 = 0, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -x + 9 = 0, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 1 = 0, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{5}, \text{ se } x \leqslant -2 \Rightarrow \nexists x \\ x = 9, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \Rightarrow \nexists x \\ x = 1, \text{ se } x \geqslant 5 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$
Portanto, o conjunto solução S da equação é $S = \varnothing$.

18. **a)** Para $t = 4$, temos $h_A = 18$ e $h_B = 13$. Assim, o desnível entre as superfícies é de $18 - 13$, ou seja, 5 decímetros.

b) Para o desnível entre as superfícies nos tanques igual a 1 dm, temos a equação $|(t^2 + 2) - (3t + 1)| = 1$. Transformando essa equação em uma equivalente, temos: $|t^2 - 3t + 1| = 1$

c) $|t^2 - 3t + 1| = 1$

Pela propriedade P3, temos:

$|t^2 - 3t + 1| = 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 1$ ou

$t^2 - 3t + 1 = -1$

$\therefore\ t = 0$ ou $t = 3$ ou $t = 1$ ou $t = 2$

O desnível entre as superfícies será de 1 decímetro nos instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$, isto é, no instante da abertura das torneiras, uma hora depois, duas horas depois e três horas depois.

19. **a)** F, pois pela propriedade P8, $x \in [-5, 5] \Leftrightarrow |x| \leqslant 5$

b) V, pela propriedade P9

c) V, pela propriedade P10

d) V, pois pela propriedade P9, temos:

$|x - 5| < 4 \Leftrightarrow -4 < x - 5 < 4$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$x - 5 > -4$ e $x - 5 < 4$

$\therefore\ x > 1$ e $x < 9$

Logo, $x \in]1, 9[$.

e) F, tomemos um contraexemplo:

$|2| < |-3|$, porém $2 > -3$

f) V, pois como x^2 e y^2 são dois números não negativos, temos:

$x^2 < y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{y^2}$

E pela propriedade P5, temos:

$\sqrt{x^2} < \sqrt{y^2} \Leftrightarrow |x| < |y|$

20. **a)** $|5x + 7| > 13$

Pela propriedade P11, temos:

$|5x + 7| > 13 \Leftrightarrow 5x + 7 < -13$ ou $5x + 7 > 13$

$\therefore\ x < -4$ ou $x > \dfrac{6}{5}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > \dfrac{6}{5}\right\}$.

b) $|3x - 4| \leqslant 8$

Pela propriedade P8, temos:

$|3x - 4| \leqslant 8 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x - 4 \leqslant 8$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$3x - 4 \leqslant 8$ e $3x - 4 \geqslant -8$

$\therefore\ x \leqslant 4$ e $x \geqslant -\dfrac{4}{3}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$.

c) $|1 - 4x| \geqslant 5$

Pela propriedade P10, temos:

$|1 - 4x| \geqslant 5 \Leftrightarrow 1 - 4x \leqslant -5$ ou $1 - 4x \geqslant 5$

$\therefore\ x \leqslant -1$ ou $x \geqslant \dfrac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant \dfrac{3}{2}\right\}$.

d) $|3 - x| < 8$

Pela propriedade P9, temos:

$|3 - x| < 8 \Leftrightarrow -8 < 3 - x < 8$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$3 - x < 8$ e $3 - x > -8$

$\therefore\ x < 11$ e $x > -5$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 11\}$.

e) O módulo de qualquer número real é positivo ou nulo; assim, a inequação $|x - 8| \leqslant -3$ é impossível. Logo, $S = \varnothing$.

f) $\left|\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{5}$

Pela propriedade P8, temos:

$\left|\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{5}$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} \geqslant -\dfrac{1}{5}$

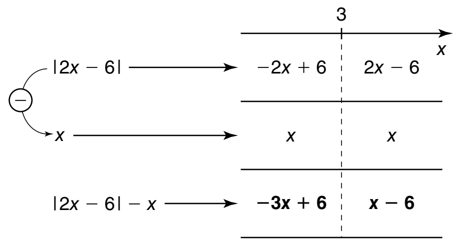
$\therefore\ x \leqslant -\dfrac{2}{5}$ e $x \geqslant -\dfrac{14}{15}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{14}{15} \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{5}\right\}$.

g) A inequação é equivalente a $|2x - 6| - x < 0$.

Eliminando o módulo da função

$h(x) = |2x - 6| - x$, temos:



Assim:

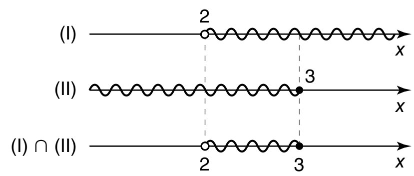
$$h(x) = \begin{cases} -3x + 6, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Então:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 6 < 0, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x - 6 < 0, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

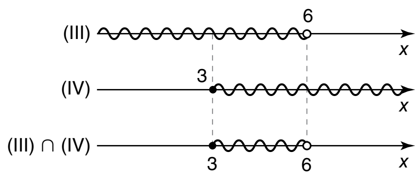
A primeira sentença exige que:

$$\underbrace{x > 2}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x \leqslant 3}_{\text{(II)}}$$



A segunda sentença exige que:

$$\underbrace{x < 6}_{\text{(III)}} \text{ e } \underbrace{x \geqslant 3}_{\text{(IV)}}$$



O conjunto solução S da inequação proposta é formado pelos números reais que satisfazem a 1ª ou a 2ª sentença, isto é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

h) A inequação é equivalente a $|5-x| - x - 1 \geqslant 0$. Eliminando o módulo da função $h(x) = |5-x| - x - 1$, temos:

	$x < 5$	$x > 5$
$\|5-x\|$	$5-x$	$-5+x$
x	x	x
1	1	1
$\|5-x\| - x - 1$	**$4-2x$**	**-6**

Assim:

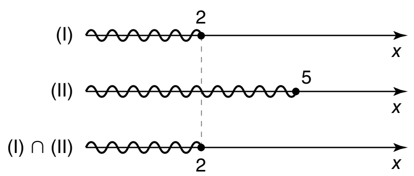
$$h(x) = \begin{cases} 4-2x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ -6, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Então:

$$h(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x \geqslant 0, \text{ se } x \leqslant 5 \\ -6 \geqslant 0, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

A primeira sentença exige que:

$$\underbrace{x \leqslant 2}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x \leqslant 5}_{\text{(II)}}$$



A segunda sentença exige que:

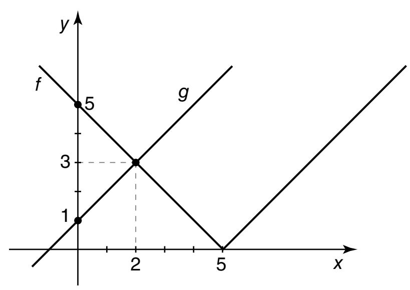
$$\underbrace{-6 \geqslant 0}_{\text{(III)}} \text{ e } \underbrace{x \geqslant 5}_{\text{(IV)}}$$

Como a condição (III) não é satisfeita para nenhum x real, temos (III) ∩ (IV) = ∅.

O conjunto solução S da inequação proposta é formado pelos números reais que satisfazem a 1ª ou a 2ª sentença, isto é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

Outra opção é a resolução gráfica:

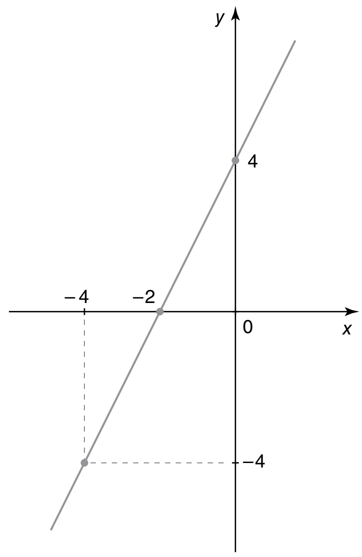
Inicialmente, construímos os gráficos das funções $f(x) = |5-x|$ e $g(x) = x + 1$, obtendo o(s) ponto(s) de intersecção a partir da equação $|5-x| = x + 1$:



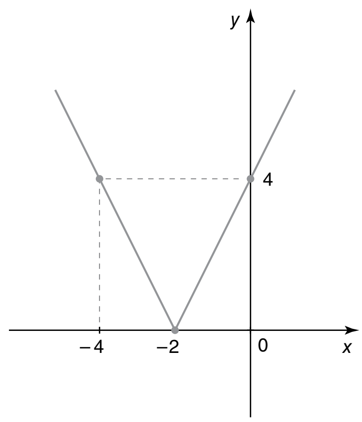
Observando os gráficos, notamos que g está abaixo de f à esquerda da abscissa 2; logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

21. a) $|2x+4| < x + 5$

- Construímos o gráfico de $h(x) = 2x + 4$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |2x+4|$.



- Determinamos os pontos de intersecção por meio da equação $|2x+5| = x + 5$:

  Devemos considerar a condição de existência do módulo:

  $$x + 5 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -5$$

  Pela propriedade P3, tem-se:

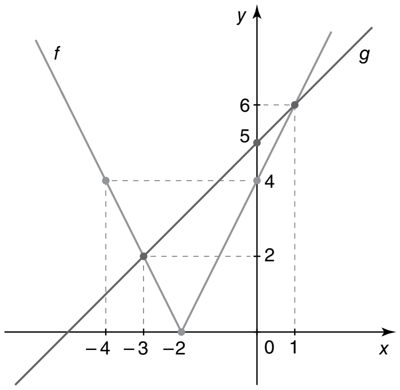
  $|2x+4| = x + 5 \Leftrightarrow 2x + 4 = x + 5$ ou

  $2x + 4 = -x - 5$

  $\therefore x = 1$ ou $x = -3$ satisfazem a condição de existência.

  Substituindo esses valores de abscissas em qualquer uma das funções, encontramos os pares (1, 6) e (−3, 2).

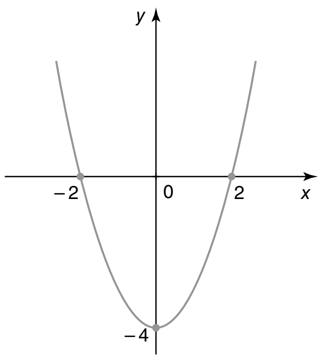
- Construímos agora o gráfico de $f(x) = |2x + 4|$ e o gráfico de $g(x) = x + 5$:



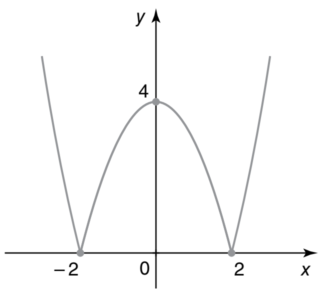
Observando os gráficos, notamos que f está abaixo de g entre as abscissas -3 e 1. Logo:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$

b) $|x^2 - 4| \leqslant 5x - 10$

- Construímos o gráfico de $h(x) = x^2 - 4$:



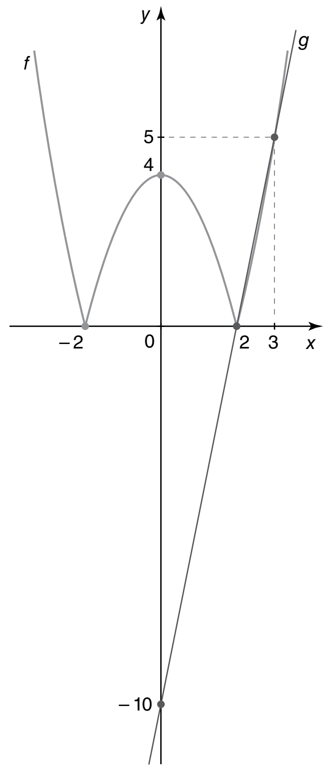
- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |x^2 - 4|$.



- Determinamos os pontos de intersecção por meio da equação $|x^2 - 4| = 5x - 10$:
Devemos considerar a condição de existência do módulo:
$$5x - 10 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$$
Pela propriedade P3, tem-se:
$|x^2 - 4| = 5x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5x - 10$ ou $x^2 - 4 = -5x + 10$
$\therefore$ $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = -7$ ou $x = 2$. Considerando-se a condição de existência, temos $x = 2$ ou $x = 3$.

Substituindo esses valores de abscissas em qualquer uma das funções, encontramos os pares (2, 0) e (3, 5).

- Construímos agora o gráfico de $f(x) = |x^2 - 4|$ com o gráfico de $g(x) = x + 5$:



Observando os gráficos, temos $f(x) \leqslant g(x)$ entre as abscissas 2 e 3. Logo:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

22. Pelo enunciado, temos: $|x - 30| \leqslant 12$
Pela propriedade P8, temos:
$|x - 30| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant x - 30 \leqslant 12$
$\therefore$ $18 \leqslant x \leqslant 42$
Logo, a máxima distância que se pode esperar entre a reta r e a esfera é 42 cm, e a mínima distância que se pode esperar entre a reta r e a esfera é 18 cm.

23. $|2x + 4| + |x - 5| > 7$
A inequação $|2x + 4| + |x - 5| > 7$ é equivalente a:
$|2x + 4| + |x - 5| - 7 > 0$
Eliminando os módulos da função
$h(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 7$, temos:

	-2		5
x			
$\lvert 2x + 4\rvert$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
$\oplus$ $\lvert x - 5\rvert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$\oplus$ -7	-7	-7	-7
$h(x)$	**$-3x - 6$**	**$x + 2$**	**$3x - 8$**

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -3x - 6, \text{ se } x \leqslant -2 \\ x + 2, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 3x - 8, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

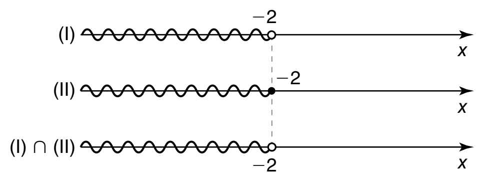
Logo:

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6 > 0, \text{ se } x \leqslant -2 \\ x + 2 > 0, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 3x - 8 > 0, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x < -2, \text{ se } x \leqslant -2 \\ x > -2, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ x > \frac{8}{3}, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

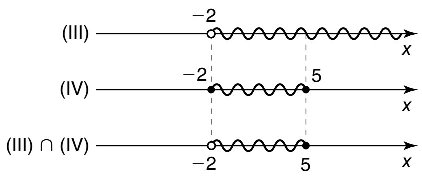
A 1ª sentença exige que:

$x < -2$ (I) e $x \leqslant -2$ (II)



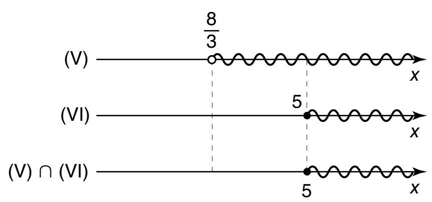
A 2ª sentença exige que:

$x > -2$ (III) e $-2 \leqslant x \leqslant 5$ (IV)



A 3ª sentença exige que:

$x > \frac{8}{3}$ (V) e $x \geqslant 5$ (VI)



O conjunto solução S da inequação proposta é o conjunto dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª ou a 3ª sentença, ou seja:

$S =]-\infty, -2[\cup]-2, 5] \cup [5, +\infty[= \mathbb{R} - \{-2\}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) $\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 2|$

Analisando o módulo $|\sqrt{5} - 2|$, temos:

$\sqrt{5} > 2 \Rightarrow \sqrt{5} - 2 > 0$

Logo:

$\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 = 2$

b) $\sqrt{2} + |\sqrt{2} - 5|$

Analisando o módulo $|\sqrt{2} - 5|$, temos:

$\sqrt{2} < 5 \Rightarrow \sqrt{2} - 5 < 0$

Logo:

$\sqrt{2} + |\sqrt{2} - 5| = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 5 = 5$

c) $|\sqrt[3]{26} - \pi| + \sqrt[3]{26}$

Analisando o módulo $|\sqrt[3]{26} - \pi|$, temos:

$\sqrt[3]{26} < \pi \Rightarrow \sqrt[3]{26} - \pi < 0$

Logo:

$|\sqrt[3]{26} - \pi| + \sqrt[3]{26} = -\sqrt[3]{26} + \pi + \sqrt[3]{26} = \pi$

d) $|\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15|$

Analisando o módulo $|\pi - 3{,}14|$, temos:

$\pi > 3{,}14 \Rightarrow \pi - 3{,}14 > 0$

Analisando o módulo $|\pi - 3{,}15|$, temos:

$\pi < 3{,}15 \Rightarrow \pi - 3{,}15 < 0$

Logo:

$|\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15| = \pi - 3{,}14 - \pi + 3{,}15 = 0{,}01$

e) $|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}| + \sqrt[4]{82}$

Analisando o módulo $|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}|$, temos:

$\sqrt[4]{82} < \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt[4]{82} - \sqrt{10} < 0$

Logo:

$|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}| + \sqrt[4]{82} = -\sqrt[4]{82} + \sqrt{10} + \sqrt[4]{82} = \sqrt{10}$

f) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}|$

Analisando o módulo $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}|$, temos:

$\sqrt[4]{9} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$

Logo:

$|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}| = |\sqrt{3} - \sqrt{3}| = 0$

2. a) F, pois: $-8 < 1$ e $|-8| > |1|$

b) F, pois: $3^2 = (-3)^2$ e $3 \neq -3$

c) V, pois:

$x^2 = y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ e, por P6:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Rightarrow |x| = |y|$

d) V, pois:

$\sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{(x \cdot y)^2} = |xy|$

e) V, pois x e $-x$ são números opostos e, portanto, são abscissas de pontos do eixo real que equidistam da origem O.

f) F, pois para $x = -3$ temos $|-(-3)| = -3$, o que é absurdo.

3. a) V, pois de $x \cdot (x - y) = 0$ temos $x = 0$ ou $x = y$. Como pelo enunciado temos $x > y$, concluímos que $x = 0$.

b) V, pois como por **a**, concluímos que $x = 0$ e, pelo enunciado, $x > y$, y tem que ser um número real negativo.

c) F, pois $x - y < 0 \Rightarrow 0 - y < 0$. Como o oposto de todo número real negativo é um número positivo, temos $-y > 0$.

d) F, pois pela propriedade P2, temos $|x| = 0$ e pela definição de módulo $|y| = -y$, que é um valor positivo. Logo, $|x| < |y|$.

e) V, pois $x - y = -y$ e o módulo de um valor real não nulo é sempre maior que zero.

4. Fatorando os radicandos, encontramos:

$9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$ e $9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$

Assim, podemos escrever y da seguinte forma:

$y = \sqrt{9 - 6x + x^2} + \sqrt{9 + 6x + x^2} =$

$= \sqrt{(3 - x)^2} + \sqrt{(3 + x)^2}$

Pela propriedade P5, temos $\sqrt{(3 - x)^2} = |3 - x|$ e $\sqrt{(3 + x)^2} = |3 + x|$.

Como $x < -3$, $3 - x > 0$ e $3 + x < 0$, logo: $|3 - x| = 3 - x$ e $|3 + x| = -3 + x$

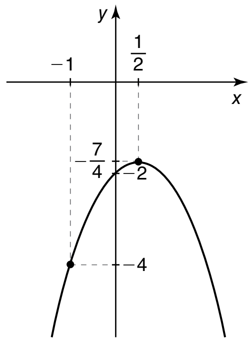
$\therefore y = \sqrt{(3 - x)^2} + \sqrt{(3 + x)^2} = |3 - x| + |3 + x| = 3 - x - 3 + x = -2x$

Alternativa **d**.

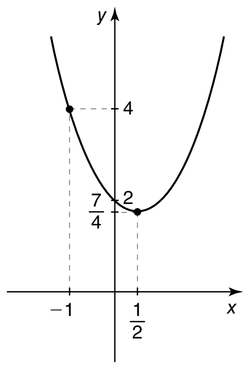
5. **a)** $f(x) = |-x^2 + x - 2|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = -x^2 + x - 2$:

x	$g(x)$
0	-2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$
-1	-4



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |-x^2 + x - 2|$:



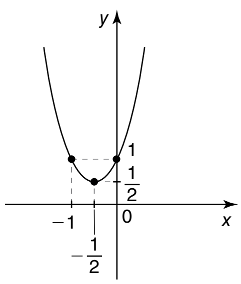
O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |-x^2 + x - 2|$ são, respectivamente,

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{7}{4}\right\}$.

b) $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$

- Construímos o gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$:

x	$f(x)$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	1



Como o gráfico de f não possui pontos com ordenada negativa, ele é o próprio gráfico de $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$.

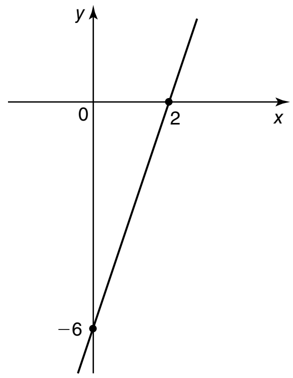
O domínio e o conjunto imagem de $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$ são, respectivamente:

$D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

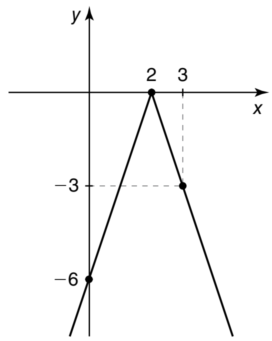
c) $r(x) = -|3x - 6|$

- Construímos o gráfico de $y = 3x - 6$:

x	y
0	-6
2	0



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não positivas e transformamos os de ordenadas positivas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $r(x) = -|3x - 6|$:

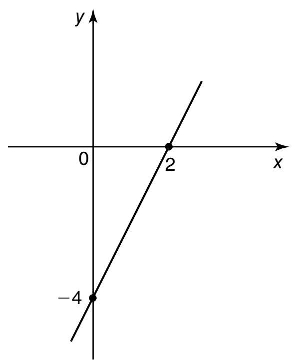


O domínio e o conjunto imagem de $r(x) = -|3x - 6|$ são, respectivamente, $D(r) = \mathbb{R}$ e $Im(r) = \mathbb{R}_-$.

d) $f(x) = |2x - 4| + 3$

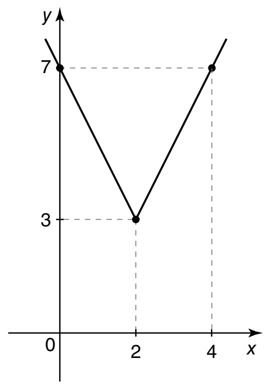
- Construímos o gráfico de $y = 2x - 4$:

x	y
0	-4
2	0



- Do gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas;

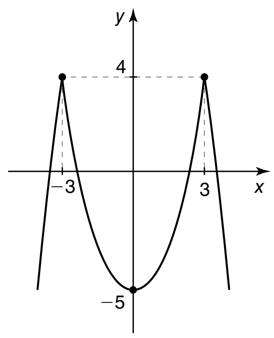
em seguida, transladamos esse gráfico verticalmente 3 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |2x - 4| + 3$:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$.

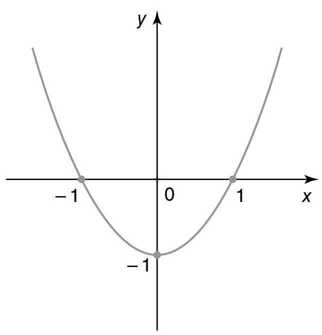
e) $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$

Primeiro construímos o gráfico de $y = x^2 - 9$; em seguida transformamos os pontos de ordenadas positivas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas para obter o gráfico de $y = -|x^2 - 9|$. Por fim, transladamos esse gráfico verticalmente 4 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$:

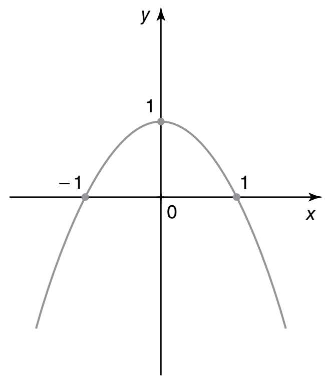


O domínio e o conjunto imagem de $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$ são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$.

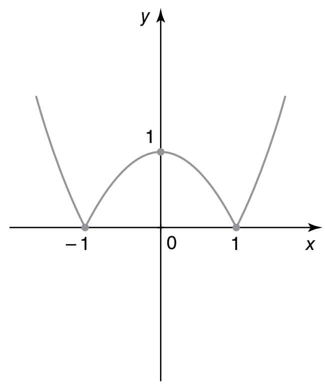
6. Para $f(x) = x^2 - 1$, tem-se o gráfico:



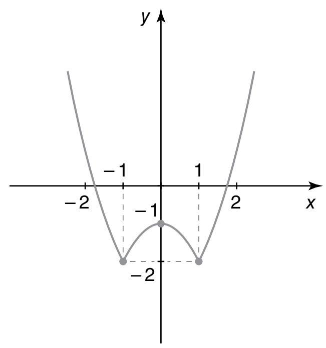
No gráfico de f, transformamos os pontos de ordenadas positivas e negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $h(x) = -f(x)$:



No gráfico de $h(x)$, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |-f(x)|$:



E, por último, transladamos verticalmente, em 2 unidades para baixo, o gráfico anterior, obtendo o gráfico da função $g(x) = |-f(x)| - 2$:



Alternativa **a**.

7. $|2x^2 - 4x| = \sqrt{x^2}$

Pela propriedade P5, temos $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim, temos a equação:

$|2x^2 - 4x| = |x|$

Pela propriedade P4, temos:

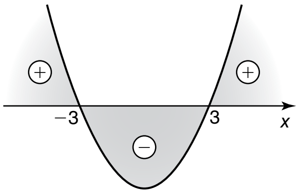
$2x^2 - 4x = x$ ou $2x^2 - 4x = -x$

$\therefore\ x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{5}{2}$

Alternativa **d**.

8. a) $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$

Estudando a variação de sinal de $g(x) = x^2 - 9$, temos:



Então:

	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$\|x^2 - 9\|$	$x^2 - 9$	$-x^2 + 9$	$x^2 - 9$

Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $h(x) = x^2 + 1$ e de $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$, temos:

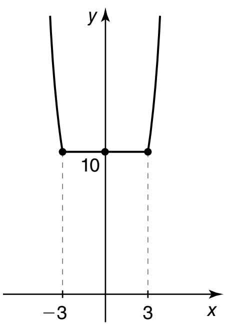
	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$\|x^2 - 9\|$	$x^2 - 9$	$-x^2 + 9$	$x^2 - 9$
$x^2 + 1$	$x^2 + 1$	$x^2 + 1$	$x^2 + 1$
$\|x^2 - 9\| + x^2 + 1$	$2x^2 - 8$	10	$2x^2 - 8$

Logo:

$f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8, \text{ se } x \leqslant -3 \\ 10, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x^2 - 8, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

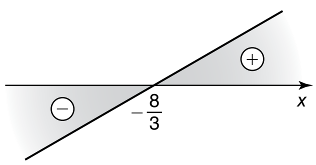
Finalmente, o gráfico de $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$ é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 10\}$.

b) $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$

Estudando a variação de sinal de $g(x) = 3x + 8$, temos:



Então:

	$x < -\frac{8}{3}$	$x > -\frac{8}{3}$
$\|3x + 8\|$	$-3x - 8$	$3x + 8$

Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $h(x) = x^2 + 3x$ e de $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$, temos:

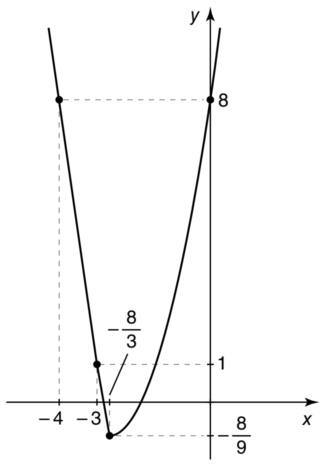
	$x < -\frac{8}{3}$	$x > -\frac{8}{3}$
$\|3x + 8\|$	$-3x - 8$	$3x + 8$
$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x$
$\|3x + 8\| + x^2 + 3x$	$x^2 - 8$	$x^2 + 6x + 8$

Logo:

$f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, \text{ se } x \leqslant -\frac{8}{3} \\ x^2 + 6x + 8, \text{ se } x \geqslant -\frac{8}{3} \end{cases}$$

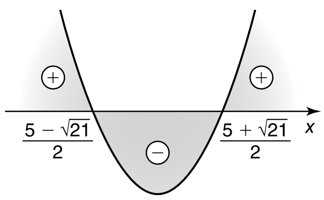
Finalmente, o gráfico de $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$ é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{8}{9}\right\}$.

c) $f(x) = |x^2 - 5x + 1| + x^2 + 2x - 3$

Estudando a variação de sinal de $g(x) = x^2 - 5x + 1$, temos:



Então:

	$x < \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$	$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$	$x > \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$
$\|x^2 - 5x + 1\|$	$x^2 - 5x + 1$	$-x^2 + 5x - 1$	$x^2 - 5x + 1$

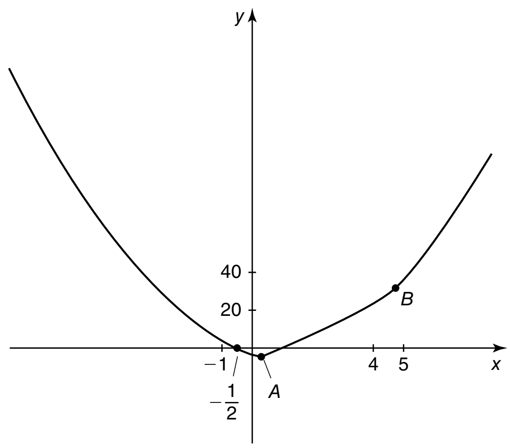
Representando no eixo real os valores de $\lvert g(x)\rvert$, de $h(x) = x^2 + 2x - 3$ e de $f(x) = \lvert x^2 - 5x + 1\rvert + x^2 + 2x - 3$, temos:

		$\frac{5-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$		x
$\lvert x^2 - 5x + 1\rvert$	$x^2 - 5x + 1$		$-x^2 + 5x - 1$		$x^2 - 5x + 1$	
$x^2 + 2x - 3$	$x^2 + 2x - 3$		$x^2 + 2x - 3$		$x^2 + 2x - 3$	
$\lvert x^2 - 5x + 1\rvert + x^2 + 2x - 3$	$\mathbf{2x^2 - 3x - 2}$		$\mathbf{7x - 4}$		$\mathbf{2x^2 - 3x - 2}$	

Logo:
$f(x) = \lvert x^2 - 5x + 1\rvert + x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2, \text{ se } x \leqslant \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \\ 7x - 4, \text{ se } \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ 2x^2 - 3x - 2, \text{ se } x \geqslant \dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

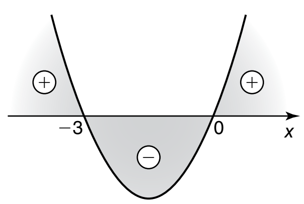
Finalmente, o gráfico de $f(x) = \lvert x^2 - 5x + 1\rvert + x^2 + 2x - 3$ é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



em que $A\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{27-7\sqrt{21}}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}, \dfrac{27+7\sqrt{21}}{2}\right)$; assim, o domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \dfrac{27-7\sqrt{21}}{2}\right\}$

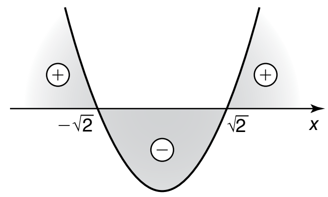
d) $h(x) = \lvert x^2 + 3x\rvert + \lvert x^2 - 2\rvert$
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x^2 - 2$, temos:
Variação de sinal de $f(x) = x^2 + 3x$



Então:

		-3		0		x
$\lvert x^2 + 3x\rvert$	$\mathbf{x^2 + 3x}$		$\mathbf{-x^2 - 3x}$		$\mathbf{x^2 + 3x}$	

Variação de sinal de $g(x) = x^2 - 2$



Então:

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		x
$\lvert x^2 - 2\rvert$	$\mathbf{x^2 - 2}$		$\mathbf{-x^2 + 2}$		$\mathbf{x^2 - 2}$	

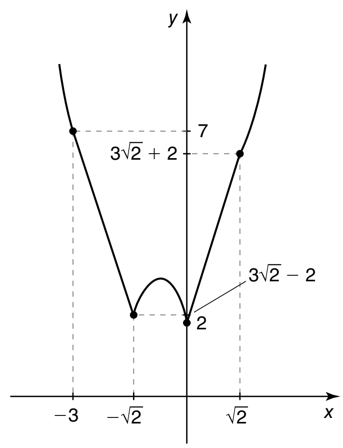
Representando no eixo real os valores de $\lvert f(x)\rvert$, de $\lvert g(x)\rvert$ e de $h(x) = \lvert x^2 + 3x\rvert + \lvert x^2 - 2\rvert$, temos:

		-3		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		x
$\lvert x^2 + 3x\rvert$	$x^2 + 3x$		$-x^2 - 3x$		$-x^2 - 3x$		$x^2 + 3x$		$x^2 + 3x$	
$\lvert x^2 - 2\rvert$	$x^2 - 2$		$x^2 - 2$		$-x^2 + 2$		$-x^2 + 2$		$x^2 - 2$	
$h(x)$	$\mathbf{2x^2 + 3x - 2}$		$\mathbf{-3x - 2}$		$\mathbf{-2x^2 - 3x + 2}$		$\mathbf{3x + 2}$		$\mathbf{2x^2 + 3x - 2}$	

Logo:
$h(x) = \lvert x^2 + 3x\rvert + \lvert x^2 - 2\rvert \Leftrightarrow$

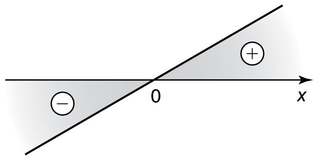
$$\Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 2, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -3x - 2, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2} \\ -2x^2 - 3x + 2, \text{ se } -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ 3x + 2, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ 2x^2 + 3x - 2, \text{ se } x \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de $h(x) = \lvert x^2 + 3x\rvert + \lvert x^2 - 2\rvert$ é a reunião dos gráficos das sentenças obtidas acima:



O domínio e o conjunto imagem de $h(x) = \lvert x^2 + 3x\rvert + \lvert x^2 - 2\rvert$ são, respectivamente, $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

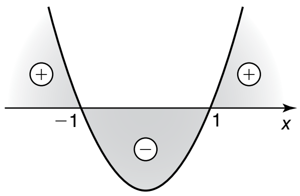
e) $f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1|$
Estudando a variação de sinal de
$g(x) = x$, $h(x) = x^2 - 1$ e $k(x) = x - 1$, temos:
Variação de sinal de $g(x) = x$



Então:

		0	
$\lvert x \rvert$	→	$-x$	x

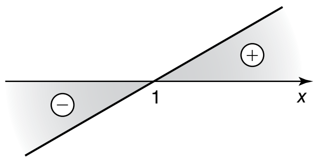
Variação de sinal $h(x) = x^2 - 1$



Então:

		−1	1	
$\lvert x^2 - 1 \rvert$	→	$x^2 - 1$	$-x^2 + 1$	$x^2 - 1$

Variação de sinal de $k(x) = x - 1$



Então:

		1	
$\lvert x - 1 \rvert$	→	$-x + 1$	$x - 1$

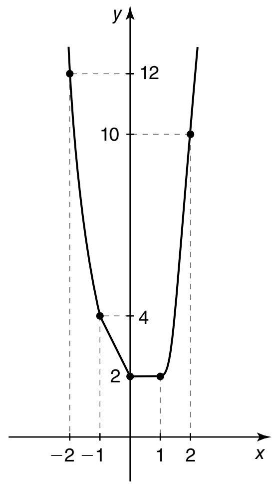
Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$, $|k(x)|$, $t(x) = x^2$ e
$f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1|$, temos:

	−1	0	1	x
x^2 →	x^2	x^2	x^2	x^2
$\lvert x \rvert$ →	$-x$	$-x$	x	x
$\lvert x^2 - 1 \rvert$ →	$x^2 - 1$	$-x^2 + 1$	$-x^2 + 1$	$x^2 - 1$
$\lvert x - 1 \rvert$ →	$-x + 1$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$
$f(x)$ →	**$2x^2 - 2x$**	**$-2x + 2$**	**2**	**$2x^2 + 2x - 2$**

Logo:
$f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant -1 \\ -2x + 2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x^2 + 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

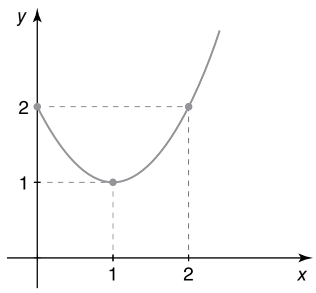
Finalmente, o gráfico de f é a reunião dos gráficos das sentenças obtidas acima:



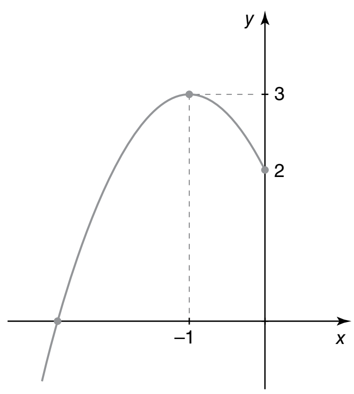
O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente,
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 2x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

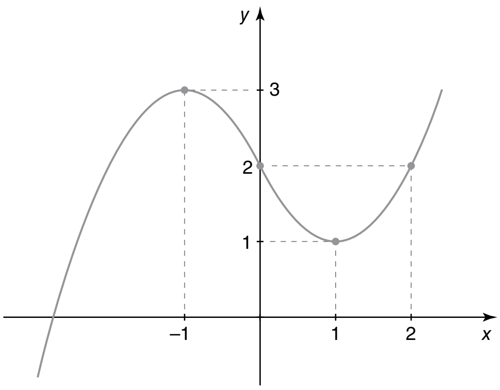
(I) Construindo o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$, para $x \geqslant 0$, temos:



(II) Construindo o gráfico de $f(x) = -x^2 - 2x + 2$, para $x < 0$, temos:



Da reunião dos gráfico obtidos em (I) e (II), temos:

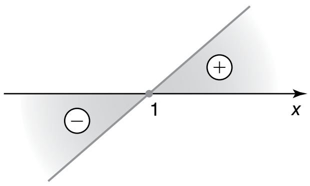


Alternativa **e**.

10. $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = x - 1$, $h(x) = x - 2$ e $k(x) = x - 3$, temos:

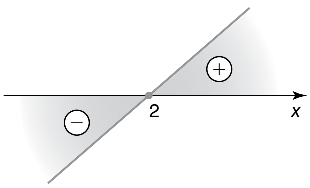
Variação de sinal de $g(x) = x - 1$:



Então:

	$x < 1$	$x > 1$
$\|x - 1\| \rightarrow$	$-x + 1$	$x - 1$

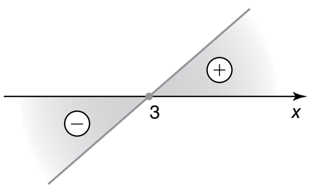
Variação de sinal de $h(x) = x - 2$



Então:

	$x < 2$	$x > 2$
$\|x - 2\| \rightarrow$	$-x + 2$	$x - 2$

Variação de sinal de $k(x) = x - 3$



Então:

	$x < 3$	$x > 3$
$\|x - 3\| \rightarrow$	$-x + 3$	$x - 3$

Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$, $|k(x)|$ e $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$, temos:

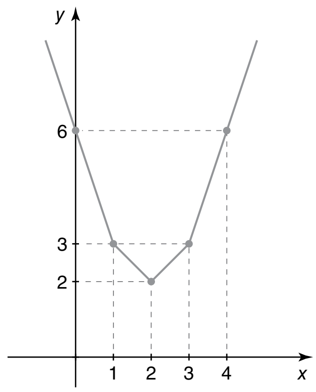
	$x \leq 1$	$1 \leq x \leq 2$	$2 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$\|x - 1\| \rightarrow$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\oplus$ $\|x - 2\| \rightarrow$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$	$x - 2$
$\oplus$ $\|x - 3\| \rightarrow$	$-x + 3$	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$
$f(x) \rightarrow$	$-3x + 6$	$-x + 4$	x	$3x - 6$

Logo:

$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 6, \text{ se } x \leqslant 1 \\ -x + 4, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x, \text{ se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de f é:



Pelo gráfico, percebemos que o valor mínimo de $f(x)$ é 2.

Alternativa **d**.

11. **a)** $|5x - 7| = 1 \Rightarrow 5x - 7 = 1$ ou $5x - 7 = -1$;

logo, $x = \frac{8}{5}$ ou $x = \frac{6}{5}$.

Portanto, $S = \left\{\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right\}$.

b) $|x^2 - 5x| = 6 \Rightarrow x^2 - 5x = 6$ ou $x^2 - 5x = -6$; logo, $x = 6$ ou $x = -1$ ou $x = 3$ ou $x = 2$.

Portanto, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

c) $|x^2 + x| = 2x - 4$

Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:

$2x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$

Pela propriedade P3, temos:

$|x^2 + x| = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x = 2x - 4$ ou $x^2 + x = -2x + 4$

Seja (I) $x^2 + x = 2x - 4$; então:

$x^2 - x + 4 = 0$

Como $\Delta < 0$, não existem raízes reais para $x^2 - x + 4 = 0$.

Seja (II) $x^2 + x = -2x + 4$; então:

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\therefore x = 1$ ou $x = -4$

Porém, $x = 1$ e $x = -4$ não convêm, pois não obedecem à condição de existência.

Logo, $S = \varnothing$.

d) $n^2 - 2 \cdot |n| - 8 = 0 \Rightarrow |n|^2 - 2|n| - 8 = 0$
Fazendo $|n| = t$, temos: $t^2 - 2t - 8 = 0$, ou seja, $t = 4$ ou $t = -2$.
Retornando à variável original, chegamos a:
$|n| = 4$ ou $|n| = -2$ (não convém); logo, $n = \pm 4$.
Portanto, $S = \{-4, 4\}$.

e) $k^2 - |5k| + 4 = 0 \Rightarrow |k|^2 - 5|k| + 4 = 0$
Fazendo $|k| = t$, temos:
$t^2 - 5t + 4 = 0$, ou seja, $t = 4$ ou $t = 1$.
Retornando à variável original, chegamos a:
$|k| = 4$ ou $|k| = 1$.
Logo, $k = \pm 4$ ou $k = \pm 1$.
Portanto, $S = \{-4, -1, 1, 4\}$.

12. $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$
Pela propriedade P4, temos:
$|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3| \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 3$ ou $x^2 - 3x + 2 = -2x + 3$

$\therefore\ x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Calculando o produtos das raízes, temos:

$$\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -5$$

Alternativa **a**.

13. $|5x - 6| = x^2$
Pela propriedade P3, temos:
$|5x - 6| = x^2 \Leftrightarrow 5x - 6 = -x^2$ ou $5x - 6 = -x^2$
$\therefore\ x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 1$ ou $x = -6$
Note que não precisamos nos preocupar com a condição de existência de módulo, pois $x^2 \geqslant 0$, para todo x real.
Assim, temos uma solução negativa.
Alternativa **b**.

14. $\left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1}\right| = \frac{2}{x}$

Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:

$\frac{2}{x} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$

Por se tratar de uma equação fracionária, impomos a condição de existência:
$x \neq 0$ e $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $x \neq -1$
Reunindo as duas condições de existência, temos $x > 0$.
Pela propriedade P3, temos:

$\left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1}\right| = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1} = -\frac{2}{x}$ ou

$\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1} = \frac{2}{x}$

$\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1} = -\frac{2}{x} \Rightarrow x = -3$

$\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Porém, $x = -3$ e $x = -\frac{1}{3}$ não convêm, pois não obedecem à condição de existência.
Logo, a equação não possui raiz real.
Alternativa **d**.

15. Substituindo $2x$ por uma variável auxiliar t, temos:

$$2x = t \Rightarrow x = \Rightarrow \frac{t}{2}$$

Sendo assim, a função $f(2x) = |1 - x|$ é equivalente à função $f(t) = \left|1 - \frac{t}{2}\right|$ para todo t real, ou seja, $f(x) = \left|1 - \frac{x}{2}\right|$

Para $f(x) = 2$, temos $\left|1 - \frac{x}{2}\right| = 2$

Pela propriedade P3, temos:

$\left|1 - \frac{x}{2}\right| = 2 \Rightarrow 1 - \frac{x}{2} = 2$ ou $1 - \frac{x}{2} = -2$

$\therefore\ x = -2$ ou $x = 6$

16. $|x^2| - 4|x| - 5 = 0$
Sabemos que $|x^2| = |x|^2$. Assim, podemos transformar a equação dada em uma equivalente.
$|x^2| - 4|x| - 5 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| - 5 = 0$
Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, obtemos:
$y^2 - 4y - 5 = 0$
Resolvendo a equação, temos $y = -1$ ou $y = 5$.
Retornando à variável original, concluímos:

- $y = -1 \Rightarrow |x| = -1$
  $\therefore\ \nexists x$
- $y = 5 \Rightarrow |x| = 5$
  $\therefore\ x = 5$ ou $x = -5$
  Assim, o conjunto solução da equação é $S = \{-5, 5\}$.
  Dessa forma, -5 é um número inteiro e 5 um número natural.

Alternativa **a**.

17. **a)** $|3x + 6| + |2x + 6| = x$

- $|3x + 6| + |2x + 6| = x$ é equivalente a:
  $|3x + 6| + |2x + 6| - x = 0$
- Eliminando o módulo da função
  $h(x) = |3x + 6| + |2x + 6| - x$, temos:

$-3 \qquad -2 \qquad x$

$\|3x + 6\|$ →	$-3x - 6$	$-3x - 6$	$3x + 6$
$\|2x + 6\|$ →	$-2x - 6$	$2x + 6$	$2x + 6$
x →	x	x	x
$h(x)$ →	$\mathbf{-6x - 12}$	$\mathbf{-2x}$	$\mathbf{4x + 12}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -6x - 12, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -2x, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ 4x + 12, \text{ se } x \geqslant -2 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 12 = 0, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -2x = 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ 4x + 12 = 0, \text{ se } x \geqslant -2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -2, \text{ se } x \leqslant -3 \Rightarrow \nexists x \\ x = 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -2 \Rightarrow \nexists x \\ x = -3, \text{ se } x \geqslant -2 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.
Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \varnothing$.

b) $|3x - 4| + |6 - x| = x + 10$

- $|3x - 4| + |6 - x| = x + 10$ é equivalente a:
  $|3x - 4| + |6 - x| - x - 10 = 0$
- Eliminando o módulo da função
  $h(x) = |3x - 4| + |6 - x| - x - 10$, temos:

$\frac{4}{3}$ $\quad 6 \quad x$

$\lvert 3x - 4 \rvert$	$-3x + 4$	$3x - 4$	$3x - 4$
$\lvert 6 - x \rvert$	$6 - x$	$6 - x$	$-6 + x$
$x + 10$	$x + 10$	$x + 10$	$x + 10$
$h(x)$	$\mathbf{-5x}$	$\mathbf{x - 8}$	$\mathbf{3x - 20}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -5x, \text{ se } x \leqslant \frac{4}{3} \\ x - 8, \text{ se } \frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 6 \\ 3x - 20, \text{ se } x \geqslant 6 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 0, \text{ se } x \leqslant \frac{4}{3} \\ x - 8 = 0, \text{ se } \frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 6 \\ 3x - 20 = 0, \text{ se } x \geqslant 6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 0, \text{ se } x \leqslant \frac{4}{3} \Rightarrow x = 0 \\ x = 8, \text{ se } \frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 6 \Rightarrow \nexists x \\ x = \frac{20}{3}, \text{ se } x \geqslant 6 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{0, \frac{20}{3}\right\}$.

c) $|x^2 - x| - |2x - 4| = x$

- $|x^2 - x| - |2x - 4| = x$ é equivalente a:
  $|x^2 - x| - |2x - 4| - x = 0$
- Eliminando o módulo da função
  $h(x) = |x^2 - x| - |2x - 4| - x$, temos:

$0 \quad 1 \quad 2 \quad x$

$\lvert x^2 - x \rvert$	$x^2 - x$	$-x^2 + x$	$x^2 - x$	$x^2 - x$
$\lvert 2x - 4 \rvert$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$2x - 4$
x	x	x	x	x
$h(x)$	$\mathbf{x^2 - 4}$	$\mathbf{-x^2 + 2x - 4}$	$\mathbf{x^2 - 4}$	$\mathbf{x^2 - 4x + 4}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 2x - 4, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 4, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 4x + 4, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \text{ se } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 2x - 4 = 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 4 = 0, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -2 \text{ ou } x = 2, \text{ se } x \leqslant 0 \Rightarrow x = -2 \\ \text{não existem raízes reais} \Rightarrow \nexists x \\ x = -2 \text{ ou } x = 2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x = 2 \\ x = 2, \text{ se } x \geqslant 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \{-2, 2\}$.

d) $|x^2 - 2x| + |x + 3| = x^2$

- $|x^2 - 2x| + |x + 3| = x^2$ é equivalente a:
  $|x^2 - 2x| + |x + 3| - x^2 = 0$
- Eliminando o módulo da função
  $h(x) = |x^2 - 2x| + |x + 3| - x^2$, temos:

$-3 \quad 0 \quad 2 \quad x$

$\lvert x^2 - 2x \rvert$	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$
$\lvert x + 3 \rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$	$x + 3$
x^2	x^2	x^2	x^2	x^2
$h(x)$	$\mathbf{-3x - 3}$	$\mathbf{-x + 3}$	$\mathbf{-2x^2 + 3x + 3}$	$\mathbf{-x + 3}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -3x - 3, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -x + 3, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -2x^2 + 3x + 3, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3 = 0, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -x + 3 = 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -2x^2 + 3x + 3 = 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 3 = 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -1, \text{ se } x \leqslant -3 \Rightarrow \nexists x \\ x = 3, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow \nexists x \\ x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{-4} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{-4}, \\ \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow \nexists x \\ x = 3, \text{ se } x \geqslant 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \{3\}$.

18. $|x - 2| + |x + 1| - 5x = 0$

- Eliminamos os módulos da função
  $h(x) = |x - 2| + |x + 1| - 5x$

	$x \leqslant -1$	$-1 \leqslant x \leqslant 2$	$x \geqslant 2$
$\lvert x - 2\rvert \rightarrow$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$
$\lvert x + 1\rvert \rightarrow$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$5x \rightarrow$	$5x$	$5x$	$5x$
$h(x) \rightarrow$	$-7x + 1$	$3 - 5x$	$-3x - 1$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -7x + 1, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 3 - 5x, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3x - 1, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Para resolver a equação $h(x) = 0$, igualamos a zero cada sentença da função h:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 1 = 0, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 3 - 5x = 0, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3x - 1 = 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{7}, \text{ se } x \leqslant -1 \Rightarrow \nexists x \\ x = \frac{3}{5}, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \\ x = -\frac{1}{3}, \text{ se } x \geqslant 2 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$.

Esse número encontra-se entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

Alternativa **a**.

19. $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = x^2 + 4x - 5$

a) Temos:

$f(g(x)) = |g(x) - 1| = |x^2 + 4x - 5 - 1|$

$\therefore f(g(x)) = |x^2 + 4x - 6|$

Como queremos saber o valor das raízes para $f(g(x)) = 6$, fazemos:

$|x^2 + 4x - 6| = 6$

Pela propriedade P3, temos:

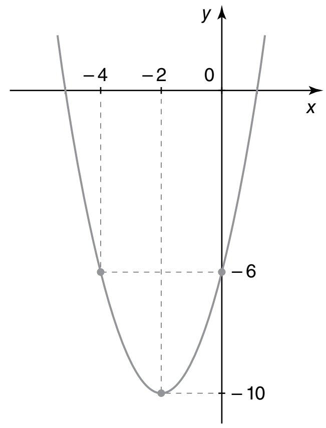
$|x^2 + 4x - 6| = 6 \Rightarrow x^2 + 4x - 6 = -6$ ou $x^2 + 4x - 6 = 6$

- $x^2 + 4x - 6 = -6 \Rightarrow x^2 + 4x = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $x = -4$
- $x^2 + 4x - 6 = 6 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$
  $\therefore x = -6$ ou $x = 2$
  Assim, para $f(g(x)) = 6$, temos as raízes $-6, -4, 0$ e 2.

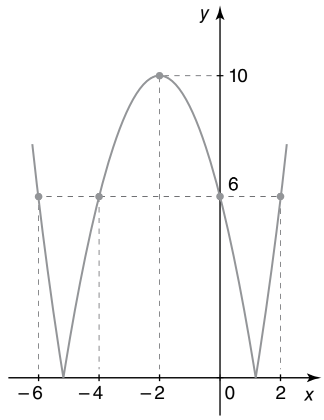
b) $f(g(x)) = |x^2 + 4x - 6|$

- Construímos o gráfico da função
  $h(x) = x^2 + 4x - 6$:

x	$h(x)$
0	-6
-2	-10
-4	-6



- No gráfico de h, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(g(x)) = |x^2 + 4x - 6|$:



20. Para obter as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:

$f(x) = g(x)$

Então:

$|2x - 6| + 2 = x^2 + 5$

- $|2x - 6| + 2 = x^2 + 5$ é equivalente a:
  $|2x - 6| - x^2 - 3 = 0$
- Eliminando o módulo da função
  $h(x) = |2x - 6| - x^2 - 3$, temos:

	$x \leqslant 3$	$x \geqslant 3$
$\lvert 2x - 6\rvert \longrightarrow$	$-2x + 6$	$2x - 6$
$x^2 + 3 \longrightarrow$	$x^2 + 3$	$x^2 + 3$
$\lvert 2x - 6\rvert - x^2 - 3 \longrightarrow$	$\mathbf{-x^2 - 2x + 3}$	$\mathbf{-x^2 + 2x - 9}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, \text{ se } x \leqslant 3 \\ -x^2 + 2x - 9, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 = 0, \text{ se } x \leqslant 3 \\ -x^2 + 2x - 9 = 0, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -3, \text{ se } x \leqslant 3 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3 \\ \text{não existem raízes reais} \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Para encontrar os valores das ordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e g, basta substituirmos os valores das abscissas encontradas acima, que são $x = 1$ e $x = -3$, em $f(x)$ ou $g(x)$.

Neste caso, substituímos $x = 1$ e $x = -3$ em $g(x)$. Então, temos:

Para $x = 1 \Rightarrow g(1) = 1^2 + 5 = 6$

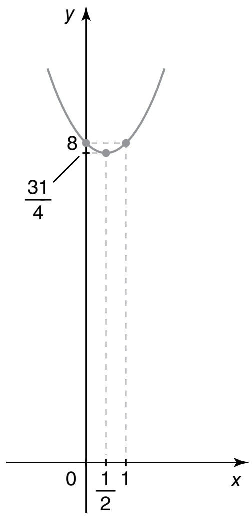
Para $x = -3 \Rightarrow g(-3) = (-3)^2 + 5 = 14$

Logo, as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e g são $(1, 6)$ e $(-3, 14)$.

21. a) $f(x) = |x^2 - x + 8|$

- gráfico de $y = x^2 - x + 8$

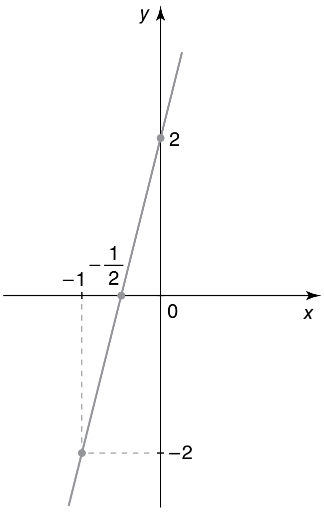
x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{31}{4}$
0	8
1	8



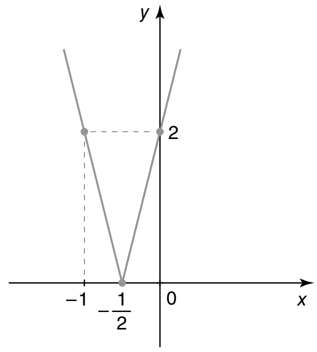
Como não há ordenadas negativas, o gráfico de $f(x) = |x^2 - x + 8|$ será o mesmo que o acima.

$g(x) = |4x + 2|$

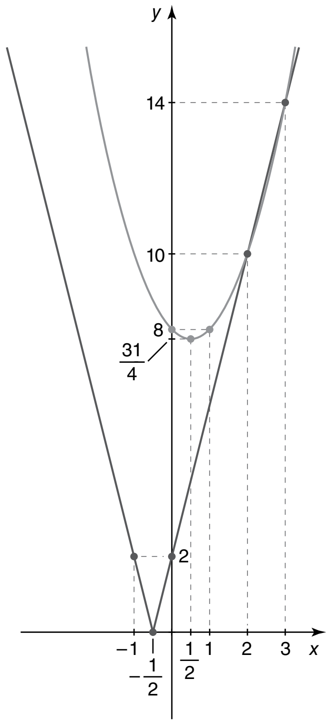
- gráfico de $y = 4x + 2$



- No gráfico de y, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $g(x) = |4x + 2|$:



- Então, construindo os gráficos de f e g no mesmo plano cartesiano, temos:



Para encontrar as coordenadas nos pontos comuns dos gráficos f e g, basta fazer $f(x) = g(x)$; então:

$|x^2 - x + 8| = |4x + 2|$

Pela propriedade P4, temos:

$|x^2 - x + 8| = |4x + 2| \Rightarrow x^2 - x + 8 = 4x + 2$ ou $x^2 - x + 8 = -4x - 2$

$\therefore x = 2$ ou $x = 3$

Logo, os valores das abscissas dos pontos comuns a f e g são $x = 2$ ou $x = 3$.

Para obter os valores das ordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e g, substituímos os valores das abscissas encontradas em $g(x)$; então:

se $x = 2 \Rightarrow |4x + 2| = |4 \cdot 2 + 2| = 10$

se $x = 3 \Rightarrow |4x + 2| = |4 \cdot 3 + 2| = 14$

Logo, os pontos comuns a f e g são $(2, 10)$ e $(3, 14)$.

Pela construção do gráfico percebemos que os gráficos interceptam o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ e o eixo Oy nos pontos $(0, 2)$ e $(0, 8)$.

b) A partir dos gráfico de f e de g obtidos no item **a** deste exercício e também conhecendo as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g, podemos concluir que $f(x) < g(x)$ para $2 < x < 3$.

22. Pelo enunciado, temos que A pertence ao gráfico da função f e A pertence ao gráfico da função g; então:

$f(1) = |1^2 + k| + 1 \Leftrightarrow |1 + k| + 1 = 4$

$g(1) = 1^2 - k - 1 \Leftrightarrow 1 - k - 1 = 4 \therefore k = -4$

Logo:

$f(x) = |x^2 - 4| + x$ e $g(x) = x^2 + 3$

Para encontrar as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g, temos:

$f(x) = g(x)$

$|x^2 - 4| + x = x^2 + 3 \Leftrightarrow |x^2 - 4| = x^2 - x + 3$

Observando que $x^2 - x + 3 > 0$ para qualquer x real, pois $\Delta < 0$, temos, pela propriedade P3,

$|x^2 - 4| = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - x + 3$ ou $x^2 - 4 = -x^2 + x - 3$

$\therefore x = 7$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Logo, os valores das abscissas dos pontos comuns a f e g são $x = 7$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

Para obter os valores das ordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e de g, substituímos os valores das abscissas encontradas em $g(x)$; então:

se $x = 7 \Rightarrow x^2 + 3 = 7^2 + 3 = 52$

se $x = 1 \Rightarrow x^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$

se $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{13}{4}$

Logo, os pontos comuns a f e g são $(7, 52)$, $(1, 4)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$.

23. x pertence ao intervalo $]5, 19[\Rightarrow 5 < x < 19$

Subtraindo 12 de cada membro, obtemos:

$5 - 12 < x - 12 < 19 - 12 \Rightarrow -7 < x < 7$

Assim, pela propriedade P9, concluímos que $|x - 12| < 7$.

Alternativa **b**.

24. Determinando os elementos de A, temos:

$|x + 1| < 5 \Rightarrow -5 < x + 1 < 5$

Subtraindo 1 de cada membro, obtemos:

$-5 - 1 < x + 1 - 1 < 5 - 1 \Rightarrow -6 < x < 4$

Assim, os números inteiros que pertencem a esse intervalo são $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3, ou seja, $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Determinando os elementos de B, temos:

$|x| > 3 \Rightarrow x < -3$ ou $x > 3$

Assim, os números inteiros que satisfazem tais sentenças são ..., $-6, -5, -4$ ou $4, 5, 6$, ..., ou seja, $B = \{..., -6, -5, -4, 4, 5, 6, ...\}$

Observando os dois conjuntos, concluímos que os elementos pertencentes aos dois conjuntos são -5 e -4, logo, $A \cap B = \{-5, -4\}$. Então, $A \cap B$ tem dois elementos.

Alternativa **a**.

25. $\left|1 - \frac{(x-1)}{2}\right| \leqslant 4$

Pela propriedade P8, temos:

$\left|1 - \frac{(x-1)}{2}\right| \leqslant 4 \Leftrightarrow -4 \leqslant 1 - \frac{(x-1)}{2} \leqslant 4$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$1 - \frac{(x-1)}{2} \geqslant -4$ e $1 - \frac{(x-1)}{2} \leqslant 4$

$\therefore x \leqslant 11$ e $x \geqslant -5$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 11\}$.

Alternativa **b**.

26. **a)**
- $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x - 2}}$

  Por ser uma função fracionária e racional, temos:

  $\sqrt{x - 2} \neq 0$ e $x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x - 2 > 0$

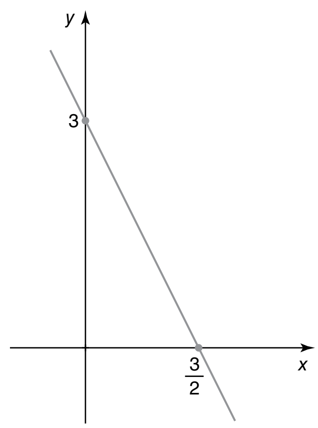
  Logo,

  $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

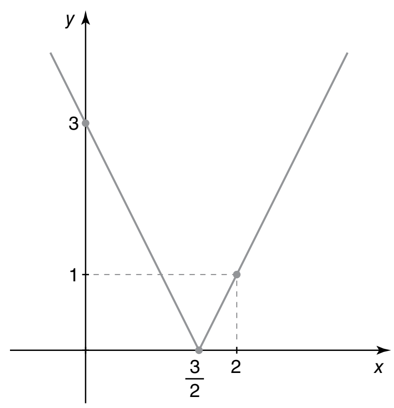
  Portanto, o domínio da função f é

  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
- $g(x) = |3 - 2x| + 1$

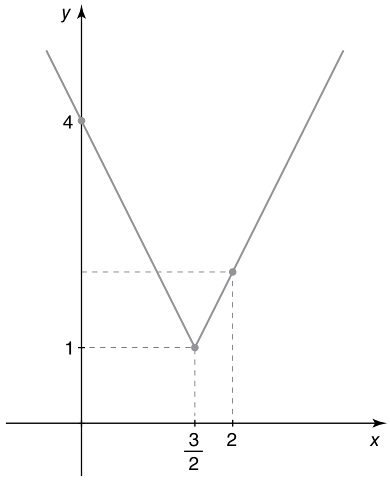
  Para determinar a imagem da função g, precisamos construir o gráfico de $y = 3 - 2x$:



No gráfico de y, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $g(x) = |3 - 2x|$:



Transladamos verticalmente, em 1 unidade para cima o gráfico anterior, obtendo o gráfico da função $g(x) = |3 - 2x| + 1$:



Portanto, a imagem da função g é
$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$

b) $f(g(x)) = \dfrac{g(x) - 2}{\sqrt{g(x) - 2}} = \dfrac{|3 - 2x| + 1 - 2}{\sqrt{|3 - 2x| + 1 - 2}} =$

$= \dfrac{|3 - 2x| - 1}{\sqrt{|3 - 2x| - 1}}$

Por ser uma função fracionária e racional, temos:
$|3 - 2x| - 1 > 0 \Rightarrow |3 - 2x| > 1$
Pela propriedade P11, temos:
$|3 - 2x| > 1 \Rightarrow 3 - 2x < -1$ ou $3 - 2x > 1$
$\therefore\ x > 2$ ou $x < 1$
Portanto, o domínio de $f(g(x))$ é $D(f(g(x))) =$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ ou } x < 1\}$.

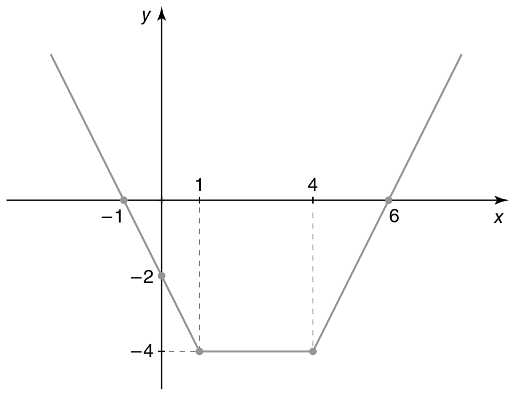
27. Como todos os pontos estão sobre o eixo das abscissas, para saber as distâncias entre A e B e A e C, podemos fazer:
$d_{AB} = |x - 1|$ e $d_{AC} = |x - 4|$
Assim, queremos que:
$d_{AB} + d_{AC} \leqslant 7 \Rightarrow |x - 1| + |x - 4| \leqslant 7$
$\therefore\ |x - 1| + |x - 4| - 7 \leqslant 0$
Eliminando os módulos da função
$h(x) = |x - 1| + |x - 4| - 7$, temos:

		1	4 x
$\lvert x - 1\rvert \rightarrow$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\oplus$ $\lvert x - 4\rvert \rightarrow$	$-x + 4$	$-x + 4$	$x - 4$
$\ominus$ $7 \rightarrow$	7	7	7
$h(x) \rightarrow$	$-2x - 2$	-4	$2x - 12$

Logo:

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ -4, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2x - 12, \text{ se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

O gráfico de h é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



Pelo gráfico de $h(x)$, podemos concluir que $h(x) \leqslant 0$ quando $-1 \leqslant x \leqslant 6$.
Portanto, a soma das distâncias de A e B com a distância de A e C é menor ou igual a 7 para $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

28. Se $x \in (]3, 6] \cup]5, 9[)$, temos:
$x \in]3, 9[\Rightarrow 3 < x < 9$
Subtraindo 6 de cada membro, obtemos:
$3 - 6 < x - 6 < 9 - 6 \Rightarrow -3 < x - 6 < 3$
Assim, pela propriedade P9, concluímos que $|x - 6| < 3$.
Alternativa **d**.

29. a) $|x - 1| + |6x + 3| > x \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 1| + |6x + 3| - x > 0$
Eliminando os módulos da função
$h(x) = |x - 1| + |6x + 3| - x$, temos:

		$-\frac{1}{2}$	1 x
$\lvert x - 1\rvert \rightarrow$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$
$\oplus$ $\lvert 6x + 3\rvert \rightarrow$	$-6x - 3$	$6x + 3$	$6x + 3$
$\ominus$ $x \rightarrow$	x	x	x
$h(x) \rightarrow$	$\mathbf{-8x - 2}$	$\mathbf{4x + 4}$	$\mathbf{6x + 2}$

Logo:

$$h(x) = \begin{cases} -8x - 2, \text{ se } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 4x + 4, \text{ se } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 6x + 2, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

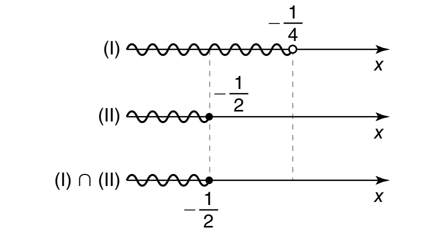
Então:

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 2 > 0, \text{ se } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 4x + 4 > 0, \text{ se } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 6x + 2 > 0, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x < -\frac{1}{4}, \text{ se } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ x > -1, \text{ se } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ x > -\frac{1}{3}, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

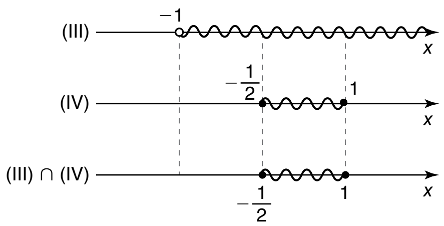
A 1ª sentença exige que:

$x < -\frac{1}{4}$ (I) e $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (II)



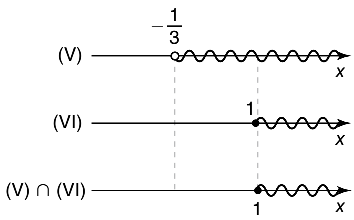
A 2ª sentença exige que:

$x > -1$ (III) e $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ (IV)



A 3ª sentença exige que:

$x > -\frac{1}{3}$ (V) e $x \geqslant 1$ (VI)



O conjunto solução S da inequação proposta é o conjunto dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª ou a 3ª sentença.

Logo, $S = \mathbb{R}$.

b) $|8x - 16| + |5x + 15| < 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow |8x - 16| + |5x + 15| - 10 < 0$

Eliminando os módulos da função

$h(x) = |8x - 16| + |5x + 15| - 10$, temos:

	−3	2	x
$\lvert 8x - 16\rvert$	$-8x + 16$	$-8x + 16$	$8x - 16$
⊕ $\lvert 5x + 15\rvert$	$-5x - 15$	$5x + 15$	$5x + 15$
⊖ 10	10	10	10
$h(x)$	$\mathbf{-13x - 9}$	$\mathbf{-3x + 21}$	$\mathbf{13x - 11}$

Logo:

$$h(x) = \begin{cases} -13x - 9, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -3x + 21, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ 13x - 11, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

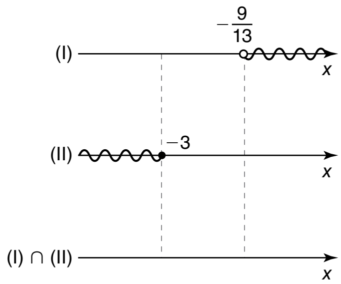
Então:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -13x - 9 < 0, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -3x + 21 < 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ 13x - 11 < 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x > -\frac{9}{13}, \text{ se } x \leqslant -3 \\ x > 7, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ x < \frac{11}{13}, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

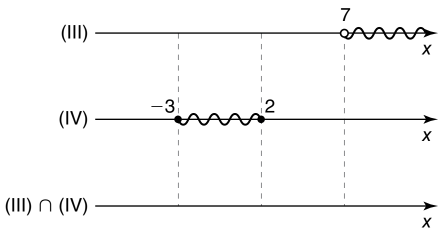
A 1ª sentença exige que:

$x > \frac{9}{13}$ (I) e $x \leqslant -3$ (II)



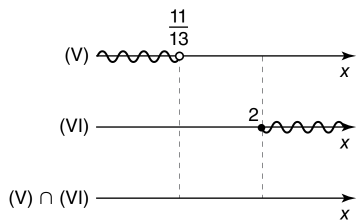
A 2ª sentença exige que:

$x > 7$ (III) e $-3 \leqslant x \leqslant 2$ (IV)



A 3ª sentença exige que:

$x < \frac{11}{13}$ (V) e $x \geqslant 2$ (VI)



O conjunto solução S da inequação proposta é o conjunto solução dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª ou a 3ª sentença.

Logo, $S = \varnothing$.

30. $|x - 2| < |x - 5|$

Seguindo a sugestão dada na nota, vamos quadrar ambos os membros:

$|x - 2| < |x - 5| \Rightarrow |x - 2|^2 < |x - 5|^2$

Como $|x|^2 = x^2$, temos:

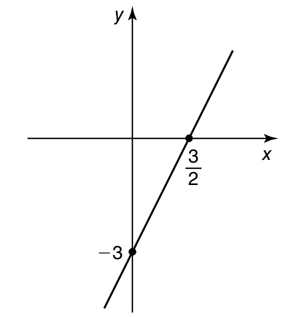
$|x - 2|^2 < |x - 5|^2 \Rightarrow (x - 2)^2 < (x - 5)^2$

$\therefore x^2 - 4x + 4 < x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$

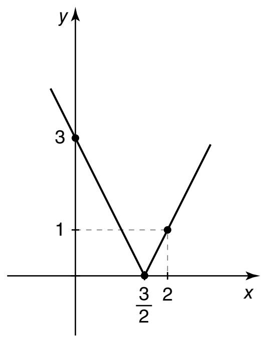
Alternativa **c**.

31. a) Para obter o gráfico de $f(x) = |2x - 3| + 2$, temos:

- gráfico de $y = 2x - 3$

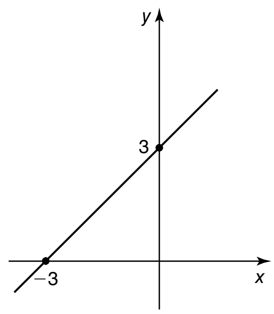


- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |2x - 3|$:

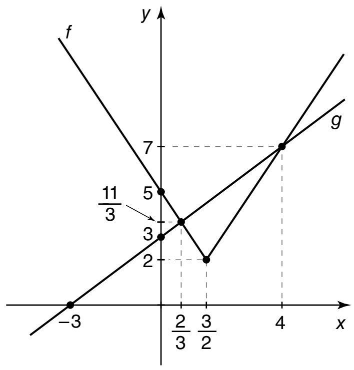


Finalmente, transladamos o gráfico anterior verticalmente 2 unidades para cima, obtendo o gráfico de f.

O gráfico de $g(x) = x + 3$ é:



Então, construindo os gráficos de f e g no mesmo plano cartesiano, temos:



Para encontrar as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g, basta fazer $f(x) = g(x)$; então:

$|2x - 3| + 2 = x + 3$

A equação $|2x - 3| + 2 = x + 3$ é equivalente a:

$|2x - 3| + 2 - x - 3 = 0 \Rightarrow |2x - 3| - x - 1 = 0$

Eliminando o módulo da função

$h(x) = |2x - 3| - x - 1$, temos:

	$x < \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
$\lvert 2x - 3 \rvert$	$-2x + 3$	$2x - 3$
$-x - 1$	$-x - 1$	$-x - 1$
$\lvert 2x - 3 \rvert - x - 1$	$\mathbf{-3x + 2}$	$\mathbf{x - 4}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -3x + 2, \text{ se } x < \frac{3}{2} \\ x - 4, \text{ se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2 = 0, \text{ se } x < \frac{3}{2} \\ x - 4 = 0, \text{ se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \text{ se } x < \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x = 4, \text{ se } x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Logo, o valor das abscissas dos pontos comuns aos gráficos de f e de g são $\frac{2}{3}$ e 4.

Substituindo esses valores encontrados em $g(x)$, temos:

- $x + 3 = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$
- $x + 3 = 4 + 3 = 7$

Logo, o valor das ordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e de g são $\frac{11}{3}$ e 7.

Então, os pontos comuns têm coordenadas: $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e $(4, 7)$

b) A partir dos gráficos de f e de g obtidos no item **a** deste exercício e também conhecendo as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e de g, podemos concluir que $f(x) > g(x)$ para $x < \frac{2}{3}$ ou $x > 4$.

32. a) Pelo gráfico dado no enunciado, temos que o gráfico de g é uma reta, portanto, sua lei é da forma $g(x) = ax + b$. Como os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ pertencem à reta do gráfico de g, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 1 \\ a \cdot (-1) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 1$$

$\therefore g(x) = x + 1$

Para determinar as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos, temos:

$g(x) = f(x)$

Resolvendo, obtemos:

$x + 1 = |2x - 4| + x \Rightarrow |2x - 4| = 1$

Pela propriedade P3, temos:

$|2x - 4| = 1 \Leftrightarrow 2x - 4 = 1$ ou $2x - 4 = -1$

$\therefore x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

Logo, os valores das abscissas dos pontos comuns aos dois gráficos são $x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Para encontrar os valores das ordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos, basta substituir os valores das abscissas encontradas em $f(x)$ ou $g(x)$.

Neste caso, substituímos $x = \frac{5}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$ em $g(x)$; então:

- para $x = \frac{5}{2}$, temos $x + 1 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$
- para $x = \frac{3}{2}$, temos $x + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

Portanto, as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos são $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

b) Pelo item **a**, observamos que o gráfico de g está abaixo do gráfico de f à esquerda da abscissa $\frac{3}{2}$ e à direita da abscissa $\frac{5}{2}$.

Assim, concluímos que o conjunto solução da inequação $g(x) \leqslant f(x)$ é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$

33. Para que $|x - 3|$ seja menor que qualquer número positivo, devemos ter $|x - 3| = 0$; portanto, $x = 3$.

34. $\left|x - \left(\frac{a + b}{2}\right)\right| < \frac{b - a}{2}$

Pela propriedade P9, temos:

$-\left(\frac{b - a}{2}\right) < x - \left(\frac{a + b}{2}\right) < \frac{b - a}{2}$

Adicionando $\frac{a + b}{2}$ aos membros da desigualdade, obtemos:

$\frac{a + b}{2} - \left(\frac{b - a}{2}\right) < x < \frac{b - a}{2} + \frac{a + b}{2}$

Portanto: $a < x < b$.

Alternativa **e**.

35. $(1 + x) \cdot (1 - |x|) \geqslant 0$

Eliminando o módulo da função

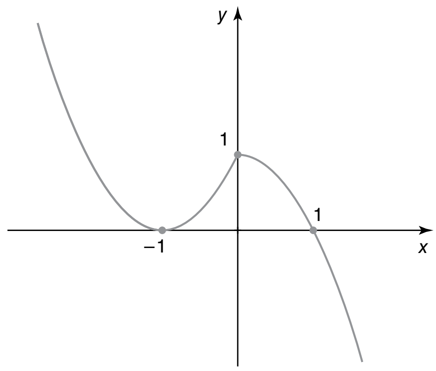
$h(x) = (1 - x) \cdot (1 - |x|)$, temos:

$$h(x) = \begin{cases} (1 - x) \cdot (1 - x), \text{ se } x \geqslant 0 \\ (1 - x) \cdot (1 + x), \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x + x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 1 - x^2, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Construindo o gráfico de h através da reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima, temos:



Pelo gráfico de $h(x)$, podemos concluir que $h(x) \geqslant 0$ quando $x \leqslant 1$.

Alternativa **b**.

36. Resolvendo $|x - 7| > |x + 2| + |x - 2| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x - 7| - |x + 2| - |x - 2| > 0$

Eliminando os módulos da função

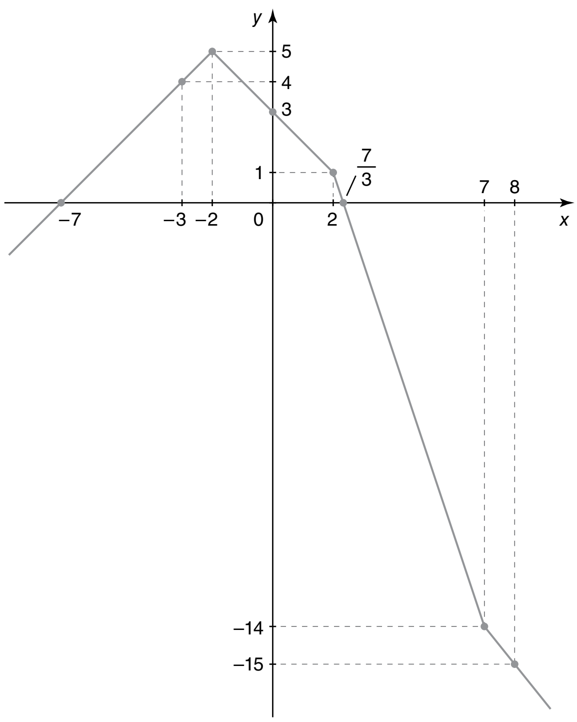
$h(x) = |x - 7| - |x + 2| - |x - 2| > 0$, temos:

	−2	2	7	x
$\lvert x - 7\rvert \rightarrow$	$-x + 7$	$-x + 7$	$-x + 7$	$x - 7$
$\lvert x + 2\rvert \rightarrow$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\lvert x - 2\rvert \rightarrow$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$	$x - 2$
$h(x) \rightarrow$	$x + 7$	$-x + 3$	$-3x + 7$	$-x - 7$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} x + 7, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -x + 3, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3x + 7, \text{ se } 2 \leqslant x \leqslant 7 \\ -x - 7, \text{ se } x \geqslant 7 \end{cases}$$

O gráfico de h é a reunião dos gráficos das sentenças acima:



Pelo gráfico, podemos concluir que

$|x - 7| - |x + 2| - |x - 2| > 0$, quando $-7 < x < \frac{7}{3}$.

Os números inteiros que pertencem a esse intervalo são: $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ e 2.

Somando esses valores obtemos -18.

Alternativa **e**.

Exercícios contextualizados

37. Para saber a distância entre P e Q, podemos fazer $|4{,}7 - x|$ ou $|x - 4{,}7|$.

Alternativa **c**.

38. Saber o quanto uma temperatura mais elevada é superior à outra é equivalente a saber a diferença entre essas duas temperaturas. Para isso, podemos fazer $|-1 - x|$ ou $|x - (-1)|$ e neste último caso ficaríamos com $|x + 1|$. Portanto, $|-1 - x|$ ou $|x + 1|$.

Alternativa **d**.

39. De acordo com o gráfico, concluímos que o automóvel 1 tem uma variação de velocidade de $(140 - 80)$ km/h em 2 horas, ou seja, 60 km/h em 2 horas. Logo, sua variação de velocidade será de 30 km/h. Sua velocidade v_1 em função do tempo t será $v_1 = 80 + 30t$.

Já o automóvel 2 está com velocidade constante, ou seja, sua velocidade v_2 em função do tempo t será $v_2 = 100$.

Para representar a diferença entre as velocidades, podemos fazer $|80 + 30t - 100|$ ou $|100 - (80 + 30t)|$.

Portanto, $|30t - 20|$ ou $|20 - 30t|$.

Alternativa **b**.

40. $f(x) = 9 + |x - 6|$

a) Abril: mês 4

$f(4) = 9 + |4 - 6| = 9 + |-2| = 9 + 2 = 11$

Portanto, o preço médio por unidade no mês de abril foi R$ 11,00.

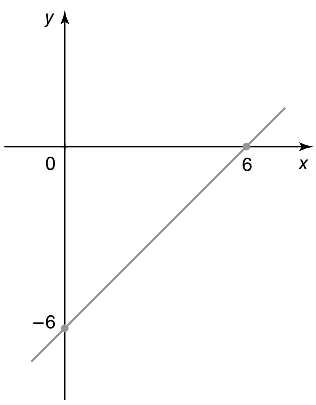
b) Novembro: mês 11

$f(11) = 9 + |11 - 6| = 9 + |5| = 14$

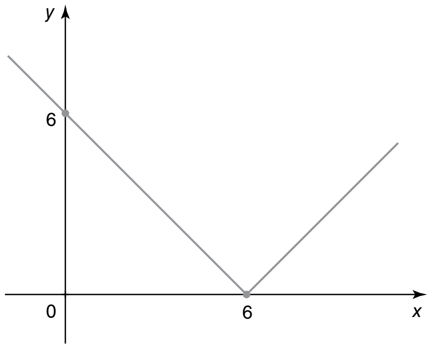
Portanto, o preço médio por unidade no mês de novembro foi R$ 14,00.

c) Para saber o preço médio mínimo, precisamos analisar o gráfico.

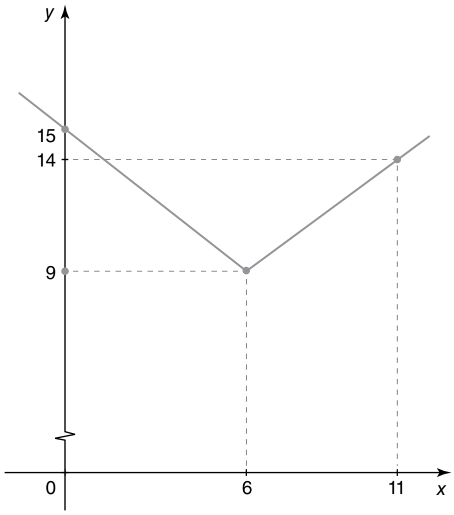
Construindo o gráfico de $h(x) = x - 6$, temos:



No gráfico de h, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $i(x) = |x - 6|$:



Transladamos verticalmente, em 9 unidades para cima, o gráfico anterior, obtendo o gráfico da função $f(x) = 9 + |x - 6|$.

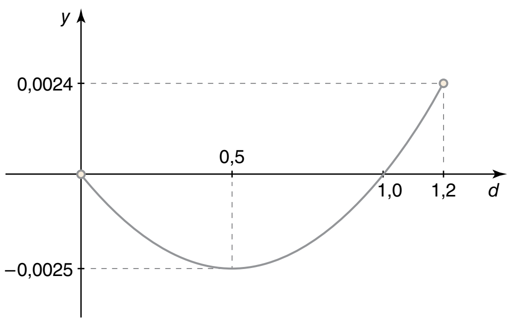


Pelo gráfico de $h(x)$, podemos concluir que esse produto atingiu o preço mínimo no mês 6, ou seja, junho.

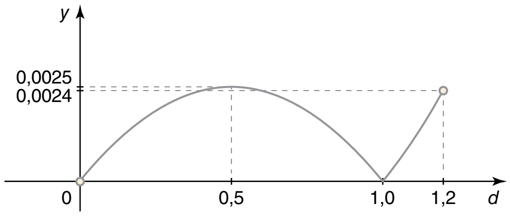
d) Pelo gráfico de $h(x)$ construído no item **c** concluímos que o preço mínimo desse produto foi R$ 9,00.

41. **a)** $f(d) = \left|\frac{d^2 - d}{100}\right|$, com $0 < d < 1{,}2$

- Construímos o gráfico de $y = \frac{d^2 - d}{100}$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f:



b) Como podemos observar no gráfico de $f(d)$ no item **a**, o erro é máximo para $d = 0{,}5$.

c) Para obter o valor do erro máximo, em metro, produzido pela máquina para $0 < d < 1{,}2$, basta analisar o gráfico de $f(d)$ do item **a**. Assim, podemos concluir que o erro máximo é $f(0{,}5)$.
Logo, o erro máximo é 0,0025 m.

42. Para calcular a diferença entra as altitudes, podemos fazer $|h - 2.000|$ ou $|2.000 - h|$. No entanto, sabemos que essa diferença foi de 500 m, logo, $|h - 2.000| = 500$ ou $|2.000 - h| = 500$.
Alternativa **b**.

43. $p = |d^2 - 3{,}32d|$

a) Para $d = 3{,}14$, podemos fazer:
$p = |3{,}14^2 - 3{,}32 \cdot 3{,}14| = 0{,}5652$
Logo, o percentual máximo de erro que pode ter apresentado uma esfera cujo diâmetro deveria ter 3,14 mm é de 0,5652%.

b) Para $p = 0{,}624$, podemos fazer:
$|d^2 - 3{,}32d| = 0{,}624 \Rightarrow d^2 - 3{,}32d = 0{,}624$ ou $d^2 - 3{,}32d = -0{,}624$
$\therefore\ d \approx 3{,}498$ ou $d \approx -0{,}178$ ou $d = 3{,}12$ ou $d = 0{,}4$
Como $3 \leqslant d \leqslant 3{,}2$, concluímos que o diâmetro da esfera deve ser 3,12 mm.

44. Pelo enunciado, temos que a variação de preço da caixa de canetas hidrográficas da marca A é de até 3 reais; então as canetas podem ser tanto até 3 reais mais caras quanto mais baratas. Assim, temos:
$0 \leqslant x - y \leqslant 3$ ou $0 \leqslant y - x \leqslant 3$, que equivale a:
$0 \leqslant x - y \leqslant 3$ ou $0 \geqslant x - y \geqslant -3$
$\therefore\ |x - y| \leqslant 3$
Alternativa **e**.

45. Se a margem de erro foi de 2 pontos percentuais para mais ou para menos, a diferença entre o percentual do número de votos efetivos e de intenção deve ser de no máximo 2 pontos. Logo, podemos fazer $|a - 35| \leqslant 2$ ou $|35 - a| \leqslant 2$.
Alternativa **d**.

46. $|x - 50| \leqslant 2 \Rightarrow -2 \leqslant x - 50 \leqslant 2$
Essa dupla desigualdade é equivalente a:
$x - 50 \geqslant -2$ e $x - 50 \leqslant 2$
$\therefore\ x \geqslant 48$ e $x \leqslant 52$
Logo, $48 \leqslant x \leqslant 52$.
Portanto, o peso mínimo é de 48 gramas. Para 100 pãezinhos, esse peso seria de $100 \cdot 48$ g ou seja, 4.800 g, o que corresponde a 4,8 kg.
Alternativa **b**.

47. $\left|\dfrac{h - 153}{22}\right| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \dfrac{h - 153}{22} \leqslant 1$
Essa dupla desigualdade é equivalente a:
$\dfrac{h - 153}{22} \geqslant -1$ ou $\dfrac{h - 153}{22} \leqslant 1$
$\therefore\ x \geqslant 131$ e $x \leqslant 175$
Logo, $131 \leqslant x \leqslant 175$.
Portanto, a altura máxima de uma mulher dessa ilha é 175 cm, ou seja, 1,75 metros.
Alternativa **d**.

48. **a)** Para que P seja um ponto na margem do lago, a distância de P ao centro do lago deve ser igual ao raio do lago artificial em forma de círculo; então:
$|150 - x| = 120$
Pela propriedade P3, temos:
$|150 - x| = 120 \Leftrightarrow 150 - x = 120$ ou
$150 - x = -120$
$\therefore\ x = 30$ ou $x = 270$
Logo, os possíveis valores de x para que P seja um ponto na margem do lago são 30 m e 270 m.

b) Para que P não esteja nem dentro do lago nem na margem, a distância de P ao centro precisa ser maior que a medida do raio do lago; então:
$|150 - x| > 120$
Pela propriedade P11, temos:
$|150 - x| > 120 \Leftrightarrow 150 - x < -120$ ou
$150 - x > 120$
$\therefore\ x > 270$ ou $x < 30$
Logo, os possíveis valores de x, em metro, para que P não esteja nem dentro do lago nem na margem são $x > 270$ ou $x < 30$.

49. $d(x) = |x - 100|$

a) Para $d = 50$, temos:
$|x - 100| = 50 \Rightarrow x - 100 = 50$ ou $x - 100 = -50$
$\therefore\ x = 150$ ou $x = 50$
Logo, o meteoroide estava a 50 km ou 150 km da Terra.

b) Para $d = 200$, temos:
$|x - 100| = 200 \Rightarrow x - 100 = -200$ ou
$x - 100 = 200$
$\therefore\ x = -100$ ou $x = 300$
Como x representa uma distância, podemos concluir que o meteoroide estava a 300 km da Terra.

c) $d \leqslant 20 \Rightarrow |x - 100| \leqslant 20$
Assim, temos:
$|x - 100| \leqslant 20 \Rightarrow -20 \leqslant x - 100 \leqslant 20$
Essa dupla desigualdade é equivalente a:
$x - 100 \geqslant -20$ ou $x - 100 \leqslant 20$
$\therefore\ x \geqslant 80$ e $x \leqslant 120$
Logo, $80 \leqslant x \leqslant 120$.
Portanto, a máxima distância entre o meteoroide e a superfície da Terra foi 120 km.

d) $d \geqslant 30 \Rightarrow |x - 100| \geqslant 30$
Assim, temos:
$|x - 100| \geqslant 30 \Rightarrow x - 100 \leqslant -30$ ou $x - 100 \geqslant 30$
$\therefore\ x \leqslant 70$ e $x \geqslant 130$
Portanto, a máxima distância, no interior da atmosfera terrestre, entre o meteoroide e a superfície da Terra quando $d \geqslant 30$ foi 70 km.

50. $s_A = 16t - 20$ e $s_B = 10 - 12t$

A distância entre as bicicletas é dada por:

$|s_A - s_B| = |16t - 20 - (10 - 12t)| = |28t - 30|$

A distância entre B e O é dada por: $|s_B - 0| = |10 - 12t|$

Devemos ter:

$|s_A - s_B| < |s_B - 0| \Rightarrow |28t - 30| < |10 - 12t|$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$|28t - 30|^2 < |10 - 12t|^2 \Rightarrow (28t - 30)^2 < (10 - 12t)^2$

$\therefore\ 784t^2 - 1.680t + 900 < 100 - 240t + 144t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 640t^2 - 1.440t + 800 < 0$

Dividindo por 160 ambos os membros dessa inequação chegamos a:

$4t^2 - 9t + 5 < 0$

Resolvendo essa inequação obtemos $1 < t < 1{,}25$.

Pré-requisitos

1. a) V, porque $\frac{6}{2} = 3$

b) V, porque $\frac{1}{4} = 0{,}25$

c) F, porque $\frac{81}{18} = \frac{9}{2}$ e $\frac{9}{2} \neq \frac{9}{4}$

d) V

e) V, porque $0{,}75 = \frac{75}{100}$

f) F, porque $1{,}3 = \frac{13}{10}$ e $\frac{13}{10} \neq \frac{13}{100}$

2. $\frac{21}{4} = \frac{105}{x} \Rightarrow x = 20$

Logo, a massa de cobre dessa peça é de 20 gramas.

3. a) Das 50 rãs, 12 estão marcadas, mas ele havia marcado 90 rãs. Desse modo, podemos fazer:

$\frac{12}{50} = \frac{90}{x} \Rightarrow x = 375$

Logo, estima-se que há 375 rãs no charco.

b) $\frac{90}{375} = \frac{18}{75} = \frac{36}{150} = \frac{2{,}4}{10} = \frac{24}{100}$

4. "Capital" é uma quantia, em dinheiro.

5. a) Remuneração: aquilo que é dado como retribuição por um serviço ou favor.

b) Renda: é a remuneração dos fatores de produção: salários (remuneração do fator trabalho), aluguéis (remuneração do fator terra), juros e lucros (remuneração do capital).

c) Valor monetário: é o valor em dinheiro.

d) Capitalização: é transformar algo em capital.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. $r = \left|\frac{x - x_V}{x_V}\right|$

$x = 1{,}4$ cm e $x_V = \sqrt{2}$

$r = \left|\frac{1{,}4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| \approx 0{,}01005$

Logo, o erro relativo percentual cometido por essa medição foi de 1,005%.

2. Agora, calculando com um erro de 0,08%, temos:

$r = \left|\frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = 0{,}08\% = \frac{0{,}08}{100}$

$\frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}0008$

$x - \sqrt{2} = \pm 0{,}0008 \cdot \sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} \pm 0{,}0008 \cdot \sqrt{2}$

Assim,

$x = \sqrt{2} + 0{,}0008 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}415$ cm

ou

$x = \sqrt{2} - 0{,}0008 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}413$ cm

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno não considerou a possibilidade de k assumir um valor negativo.

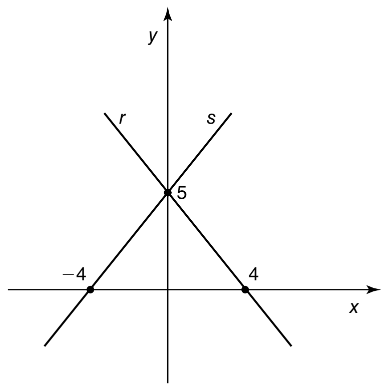
Resolução correta:

Sendo k a abscissa do ponto comum à reta e ao eixo das abscissas, temos:

$\frac{|k| \cdot 5}{2} = 10 \Rightarrow |k| = 4$

$\therefore\ k = 4$ ou $k = -4$

Assim, há duas retas possíveis, conforme mostram os gráficos a seguir:



A reta r passa pelos pontos (0, 5) e (4, 0), e sua equação é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Logo:

$\begin{cases} 5 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 4 + b \end{cases} \Rightarrow b = 5$ e $a = -\frac{5}{4}$

Assim, a equação da reta r é $y = -\frac{5x}{4} + 5$.

A reta s passa pelos pontos (0, 5) e (−4, 0), e sua equação é da forma $y = cx + d$, com $\{c, d\} \subset \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. Logo:

$\begin{cases} 5 = c \cdot 0 + d \\ 0 = c \cdot (-4) + d \end{cases} \Rightarrow d = 5$ e $c = \frac{5}{4}$

Assim, a equação da reta s é $y = \frac{5x}{4} + 5$.