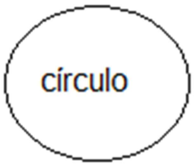
Áreas de figuras planas (círculo)

A área de uma superfície é um número ou uma relação que expressa o tamanho daquela superfície, ou seja, o seu preenchimento. É importante não confundir o conceito de área com o conceito de perímetro. Perímetro é a soma do contorno dos lados. Vejamos um exemplo onde seja possível notar com clareza essa diferença.
“O prefeito de uma cidade quer colocar arame farpado e grama sintética num terreno baldio.” A quantidade de arame farpado ao redor do terreno está associada ao perímetro e a quantidade de grama sintética na superfície do terreno está associada à área.

No caso do círculo, não devemos confundir área do círculo (preenchimento da superfície) com o comprimento da circunferência (linha que contorna o círculo e é dada por $2 . \pi . r$).



$A = \pi . r^2$

Exercícios:

1. No centro de uma praça retangular de dimensões 40 metros e 60 metros, é construída uma fonte circular de raio 8 metros, único lugar da praça em que as pessoas não podem entrar. Qual a área da praça a que as pessoas podem ter acesso? (considere $\pi = 3{,}14$)

a) 200,96 m²
b) 2.400 m²
c) 2.199,04 m²
d) 50,24 m²
e) 149,76 m²

Resolução:

O primeiro passo que devemos tomar é calcular a área da praça ($A_{PRAÇA}$) e a área da fonte (A_{FONTE})

$A_{PRAÇA} = 40 . 60 = 2400 \text{ m}^2$

$A_{FONTE} = \pi . r^2 = 3,14 . 64 = 200,96 \text{ m}^2$

Agora é só subtrair a área da fonte da área total da praça:

$2400 - 200,96 = 2199,04 \text{ m}^2$

(Alternativa C)

2. A imagem abaixo reproduz a bandeira de uma das nações mais desenvolvidas em todo o mundo, o Japão.

Sabendo que a bandeira tem formato retangular de dimensões 8 cm e 12 cm, e um círculo central de 2 cm de raio, usando $\pi = 3$ podemos afirmar que a área da bandeira pintada de branco, em centímetros quadrados, é

a) 96
b) 84
c) 12
d) 72
e) 90

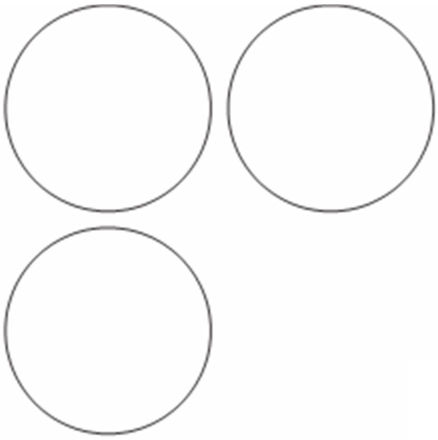
Resolução:

Para encontrarmos o resultado, primeiro devemos calcular o valor de cada área e por fim subtrair a área do círculo (Ac = $\pi \times raio^2$) da área total do retângulo (Ar = Base$\times$ Altura)

$$A = A_R - A_C$$
$$A = 8 \cdot 12 - \pi \cdot 2^2$$
$$A = 8 \cdot 12 - 3 \cdot 2^2$$
$$A = 96 - 12$$
$$A = 84 \text{ cm}^2$$

(Alternativa B)

3. Determinada Prefeitura pretende construir três canteiros em formato de círculos como ilustram as figuras abaixo.



Sabe-se que cada canteiro tem um raio de 50 metros. Sendo assim, assinale a alternativa que apresenta a área total dos 3 canteiros.
Dado: π = 3,14

a) 7850 m²

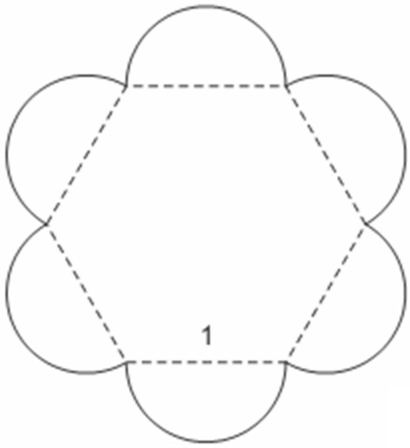
b) 15700 m²
c) 23550 m²
d) 11775 m²
e) 19625 m²

Resolução:

Área de um canteiro = π . r²
Área de um canteiro = 3,14 . 50²
Área de um canteiro = 3,14 . 2500
Área de um canteiro = 7850 m²

Como são três canteiros: 3 . 7850 = 23550 m²
(alternativa C)

4. Uma pessoa desenhou uma flor construindo semicírculos sobre os lados de um hexágono regular de lado 1 como na figura abaixo.



A área dessa flor é:

a) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2})$
b) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + \pi)$
c) $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2})$
d) $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \pi)$
e) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 2\pi)$

Resolução:

A flor é composta por um hexágono e seis semicírculos.
Área do hexágono =6 . $\frac{L^2.\sqrt{3}}{4}$
Área do hexágono = 6. $\frac{1^2.\sqrt{3}}{4}$
Área do hexágono = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

O diâmetro de um semicírculo corresponde ao lado do hexágono. Se o diâmetro mede 1, logo o raio medirá $\frac{1}{2}$. Se juntarmos dois semicírculos, teremos um círculo completo. Como são seis semicírculos, teremos 3 círculos completos

Área de um círculo = π . r²
Área de um círculo = π . $(\frac{1}{2})^2$
Área de um círculo = $\frac{\pi}{4}$

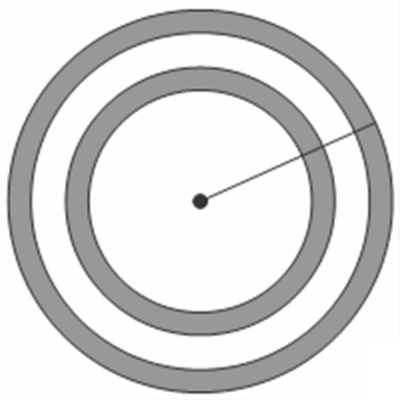
Como são três círculos = 3 . $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{3\pi}{4}$

Área da flor = $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\pi}{4}$

Colocando $\frac{3}{2}$ em evidência:
$\frac{3}{2} \cdot (\sqrt{3} + \frac{\pi}{2})$

(alternativa A)

5. Na figura a seguir, há 4 circunferências concêntricas cujos raios medem 1,0 cm, 0,9 cm, 0,8 cm, 0,7cm.



A área da região sombreada, em cm², é
(use 3 como aproximação para π)

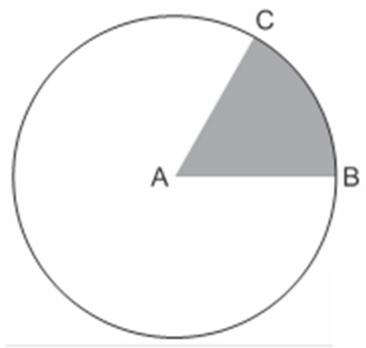
a) 1,02
b) 1,59
c) 1,92
d) 2,25

Resolução

$S_{hachurada1} = \pi \cdot (1,0)^2 - \pi \cdot (0,9)^2 = 0,19\pi = 0,19 \cdot 3 = 0,57$ cm²
$S_{hachurada2} = \pi \cdot (0,8)^2 - \pi \cdot (0,7)^2 = 0,15\pi = 0,15 \cdot 3 = 0,45$ cm²
0,57 + 0,45 = 1,02 cm²

(Alternativa A)

6. Considerando o círculo de raio 4 cm, qual a área, em cm² do setor circular determinado pelos pontos A, B e C, sabendo-se que CÂB = 60°?



a) 4π
b) 2π
c) $\frac{8\pi}{3}$
d) $\frac{4\pi}{3}$
e) $\frac{2\pi}{3}$

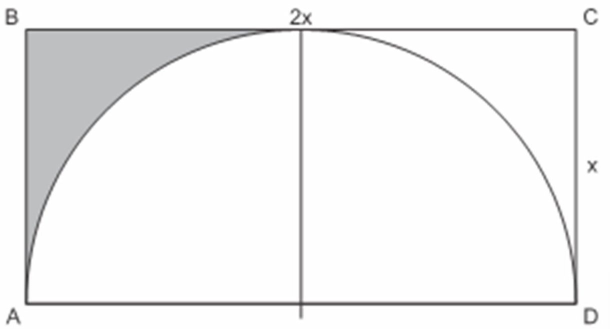
Resolução:

Sabendo que uma volta completa tem 360° e o ângulo CÂB é igual a 60°, tem-se que esse setor corresponde a $\frac{1}{6}$ da área do círculo (pois simplificando $\frac{60}{360}$, encontramos $\frac{1}{6}$)

Área do setor = $\frac{1}{6}$. π . r²
Área do setor = $\frac{1}{6}$. π . 4²
Área do setor = $\frac{1}{6}$. π . 16
Área do setor = $\frac{8\pi}{3}$ cm²

(alternativa C)

7. O retângulo ABCD representado a seguir, tem área cuja medida é de 18 cm². Qual é a razão entre a medida da área da parte pintada e a medida da área total do retângulo? Considere π = 3,0.



a) 1/4
b) 1/5
c) 1/6
d) 1/7
e) 1/8

Resolução:

Área do retângulo = base . altura
$2x \cdot x = 18$
$x^2 = 9$
$x = 3$
Esse valor corresponde ao raio do quarto de círculo e ao lado de um dos dois quadrados.

A parte pintada corresponde à diferença entre a área de um quadrado e a área de um quarto de círculo (pois o ângulo central é 90°).
Área do quadrado = L^2
Área do quadrado = 3^2
Área do quadrado = 9 cm²

Área do quarto de círculo = $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2$
Área do quarto de círculo = $\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 3^2$
Área do quarto de círculo = $\frac{27}{4}$

Área pintada = $9 - \frac{27}{4} = \frac{36}{4} - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$

Comparando a área pintada com a área do retângulo:
$\frac{\frac{9}{4}}{18} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{18} = \frac{9}{72}$
Simplificando por 9:
$\frac{9}{72} = \frac{1}{8}$

(alternativa E)

8. A moeda de R$ 1,00 consiste de dois círculos concêntricos de diâmetros de aproximadamente 2,60 cm e 1,80cm, conforme figura.

Qual a área da região dourada da moeda, em mm² considerando π = 3.,14

a) 251,2
b) 254,34
c) 276,32
d) 502,4
e) 1.105,28

Resolução

Moeda :
Diâmetro = 2,60 cm, logo o raio é igual a 1,30cm
Diâmetro = 1,80 cm, logo o raio será de 0,9cm

Área da moeda
$\pi \cdot R^2$

A_m= 3,14 . 1,3²
A_m = 3,14 . 1,69 = 5,3066

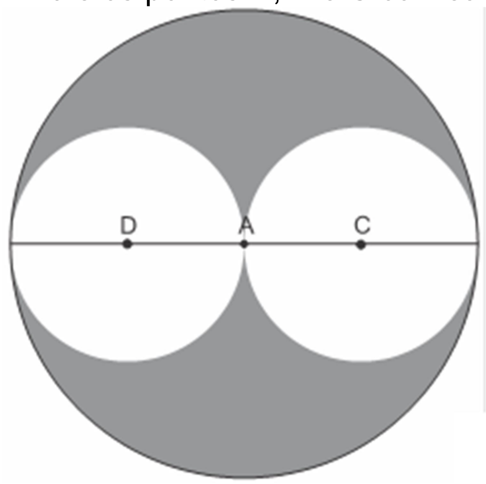
Área da parte prateada
3,14 . 0,9²
3,14 . 0,81= 2,5434

5,3066 – 2,5434 = 2,7632

Multiplicando por 100 temos, 276,32 mm²

(Alternativa C)

9. Considere o alvo mostrado na figura a seguir, construído com três circunferências tangentes duas a duas, com DA = AC = 10 e os pontos D, A e C colineares.



Um dardo é lançado e atinge o alvo. A probabilidade de o dardo atingir a região sombreada é de

a) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{2}{3}$

Resolução:

DA = AC = 10. Logo o raio de cada círculo menor mede 10 cm, e o raio do círculo maior mede 20 cm.

Área do círculo maior (alvo) = π . R²
Área do círculo maior = π . 20²
Área do círculo maior = 400 π

Área de um círculo menor = π . r²
Área de um círculo menor = π . 10²
Área de um círculo menor = 100 π
Como são dois círculos menores: 2 . 100 π = 200 π

Área da região sombreada = área do círculo maior – área dos círculos menores
Área da região sombreada = 400 π - 200 π = 200 π

Probabilidade = $\frac{200}{400\pi}$ = $\frac{1}{2}$

(alternativa D)

10. A figura abaixo mostra um círculo que representa uma região cuja área mede 600 m². No círculo está destacado um setor circular, definido por um ângulo central que mede 24º.

Quantos metros quadrados mede a área da região representada pelo setor circular?

a) 25
b) 40
c) 24
d) 48
e) 20

Resolução

Área = $\frac{\pi R^2 . \ 24°}{360°}$

Área = $\frac{600 \ . \ 24}{360}$

Área= $\frac{14400}{360}$

Área = 40m²

(Alternativa B)

11. Um valor aproximado da área do círculo pode ser obtido elevando-se ao quadrado $\frac{8}{9}$ do seu diâmetro. Fazer esse cálculo corresponde a substituir, na fórmula da área do círculo, o valor de π por um número racional. Esse número é igual a:

a) $\frac{128}{9}$
b) $\frac{256}{9}$
c) $\frac{128}{81}$
d) $\frac{256}{81}$

Resolução:

Se d é o diâmetro do círculo, então sua área é dada por
Área do círculo = $\pi(\frac{d}{2})^2 = \pi\frac{d^2}{4}$

Por outro lado, segundo o enunciado, a área pode ser aproximada por

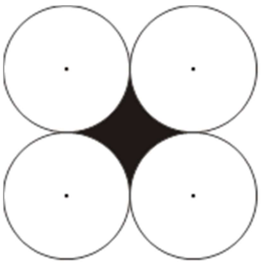
Área do círculo = $(\frac{8}{9}d)^2 = \frac{64}{81}d^2$.

Igualando as equações referentes à área do círculo:

$\frac{\pi}{4} \cong \frac{64}{81} \Rightarrow \pi \cong \frac{256}{81}$

(alternativa D)

12. Quatro círculos de raio unitário, cujos centros são os vértices de um quadrado, são tangentes exteriormente, como na figura. A área da parte em negrito é:



a) $(4 – \pi)$
b) $(\pi - 1)$
c) $(4 – 2\pi)$
d) $(4\pi - 4)$
e) $(\pi - 4)$

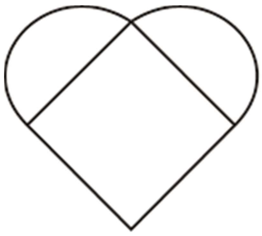
Resolução:

Raio unitário: r = 1.
Ligando os centros dos quatro círculos, formamos um quadrado de lado 2r, ou seja, lado do quadrado = 2.
A área da parte pintada será igual a área do quadrado menos 4 vezes a área de um quarto do círculo.

Área do quadrado = 2² = 4
Área de um quarto de círculo = $\frac{\pi.r^2}{4}$ = $\frac{\pi.1^2}{4}$ = $\frac{\pi}{4}$
Como são quatro quartos: 4.$\frac{\pi}{4}$ = π
Área da parte pintada = 4 - π

(alternativa A)

13. A figura representa dois semicírculos com o diâmetro em dois lados consecutivos de um quadrado. Sabendo-se que a diagonal do quadrado mede $3\sqrt{8}$ cm, a área da figura, em centímetros quadrados, é igual a
Adote π = 3



a) 72
b) 63
c) 54
d) 45
e) 30

Resolução:

Diagonal do quadrado = l.$\sqrt{2}$
$3\sqrt{8}$ = l$\sqrt{2}$
l = $\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
Racionalizando l = $\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
l = $\frac{3\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$ = 3 . $\frac{4}{2}$ = 6 cm

Lado do quadrado = diâmetro do círculo
Diâmetro = 6 cm, logo, raio = 3 cm
Área do quadrado = l² = 6² = 36
Duas vezes a área do semicírculo = área do círculo
Área do círculo = π.R² = 3.3² = 27
Área do coração = 36+27 = 63

(alternativa B)

14. Para preparar biscoitos circulares, após abrir a massa formando um retângulo de 20 cm de largura por 40 cm de comprimento, dona Maria usou um cortador circular de 4 cm de diâmetro, dispondo-o lado a lado várias vezes sobre toda a massa para cortar os biscoitos, conforme a figura.

Considere que:
– os círculos que estão lado a lado são tangentes entre si e completam todo o retângulo com o padrão apresentado;
– os círculos das bordas são tangentes aos lados do retângulo.

Com a sobra de massa, dona Maria abre um novo retângulo, de mesma espessura que o anterior, para cortar mais biscoitos. Assim sendo, desconsiderando a espessura da massa, as dimensões desse novo retângulo podem ser
Dados: área do círculo de raio r: $A = \pi r^2$; adote: $\pi = 3$

a) 8 cm x 30 cm
b) 8 cm x 25 cm
c) 9 cm x 24 cm
d) 10 cm x 22 cm
e) 10 cm x 21 cm

Resolução:

Diâmetro do biscoito = 4 cm, logo, raio = 2 cm

Total de biscoitos retirados no comprimento: 40/4 =10
Total de biscoitos retirados na largura: 20/4 =5
Total de biscoitos retirados: 5.10 = 50

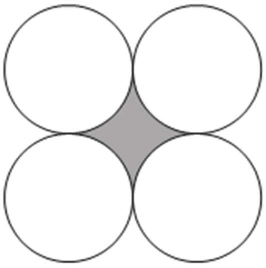
Área restante em cm²: Área restante em cm² = Área da massa retangular – 50 .área de um biscoito
$A = 40.20 - 50.3.2^2 = 200$ cm²

Analisando as alternativas:
a) 8 . 30 = 240
b) 8 . 25 = 200
c) 9 . 24 = 216
d) 10 . 22 = 220
e) 20 . 21 = 210

Com 200 cm² de massa será possível formar um retângulo de dimensões 8 por 25 cm, já que 8.25 = 200 cm².

(alternativa B)

15. Os círculos desenhados na figura abaixo são tangentes dois a dois.



A razão entre a área de um círculo e a área da região sombreada é

a) 1.
b) 2.
c) $\frac{3}{4-\pi}$.
d) $\frac{\pi}{4-\pi}$.
e) $\frac{2\pi}{4-\pi}$.

Resolução:

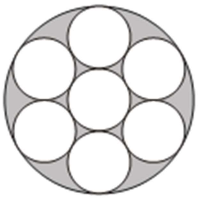
Ligando os centros dos círculos, teremos um quadrado de lado 2r. A área sombreada será dada por: área do quadrado – 4.área de $\frac{1}{4}$ de círculo

$(2r)^2 - 4 \cdot \frac{\pi r^2}{4}$
$4r^2 - \pi r^2$
$r^2.(4 - \pi)$

$$\frac{area\ do\ círculo}{área\ da\ região\ sombreada} = \frac{\pi r^2}{r^2 .(4-\pi)} = \frac{\pi}{4-\pi}$$

(alternativa D)

16. Cada um dos 7 círculos menores da figura a seguir tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande, e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.



Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm², é igual a

a) π
b) $\frac{3\pi}{2}$
c) 2π
d) $\frac{5\pi}{2}$
e) 3π

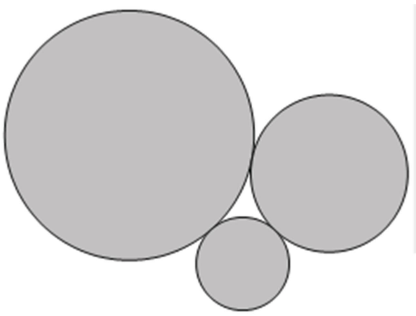
Resolução:

Seja R o raio do círculo maior.
De acordo com as informações, temos que: R = 3r, isto é, R = 3.1 = 3 cm
Portanto, como a área pedida é a área do círculo maior subtraída da área dos 7 círculos menores, segue o resultado

$\pi.3^2 - 7.\pi.1^2 = 9\pi - 7\pi = 2\pi$ cm²

(alternativa C)

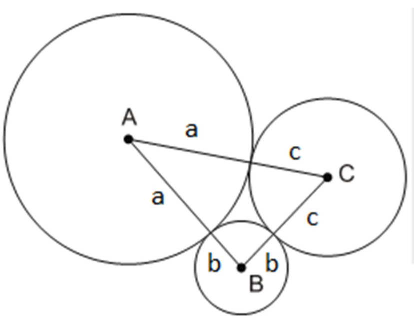
17. Alguns agricultores relataram que, inexplicavelmente, suas plantações apareceram parcialmente queimadas e a região consumida pelo fogo tinha o padrão indicado na figura a seguir, correspondendo às regiões internas de três círculos, mutuamente tangentes, cujos centros são os vértices de um triângulo com lados medindo 30, 40 e 50 metros.



Nas condições apresentadas, a área da região queimada, em m², é igual a:

a) 1100π
b) 1200π
c) 1300π
d) 1400π
e) 1550π

Resolução:



Na figura A, B e C são centros das circunferências de raios a, b e c respectivamente.
De acordo com as informações do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a + c = 50\ (I) \\ a + b = 40\ (II) \\ b + c = 30\ (III) \end{cases}$$

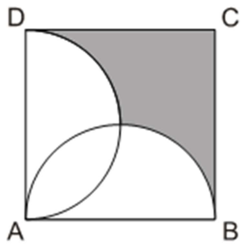
Fazendo (I) – (II), temos – 2b = -20, logo:
b = 10, a = 30 e c = 20

Portando, a área pedida será dada por:

A = π.a² + π.b² + π.c²
A = π.(30²+10²+20²)
A = 1400 π

(alternativa D)

18. Observe a figura abaixo.



No quadrado ABCD de lado 2, os lados AB e BC são diâmetros dos semicírculos. A área da região sombreada é

a) 3 - $\frac{\pi}{4}$
b) 4 - $\frac{\pi}{2}$
c) 3 – π
d) 4 – π
e) 3 - $\frac{\pi}{2}$

Resolução:

Podemos dividir o quadrado ABCD em quatro quadrados menores, cujo o lado será a metade do lado do quadrado ABCD, isto é, 1 cm.
No canto superior direito, há um quadrado menor com a área totalmente sombreada. A área desse quadrado será igual a: 1² = 1 cm² .
Há outros dois quadrados onde a área sombreada será igual a área do quadrado menor menos a área de um quarto de círculo.
1² - $\frac{\pi.r^2}{4}$ = 1² - $\frac{\pi.1^2}{4}$ = 1 - $\frac{\pi}{4}$
Como são dois quadrados: 1 - $\frac{\pi}{4}$ + 1 - $\frac{\pi}{4}$ = 2 - $\frac{\pi}{2}$

Área total da região sombreada: 1+2 - $\frac{\pi}{2}$ = 3 - $\frac{\pi}{2}$

(alternativa E)

19. Em ano de Copa do Mundo, a bandeira brasileira se torna famosa. É possível construí-la com várias figuras geométricas. Suponha que você queira pintar a figura abaixo da seguinte maneira: a parte dos triângulos, da cor verde; a parte do losango, de amarelo e a do círculo, de azul.

O retângulo possui 8 cm de altura e 12 cm de comprimento; já o círculo, possui 3 cm de raio. Assinale a alternativa que apresenta a medida da área CORRETA a ser pintada de verde e de azul, respectivamente:

a) 24 cm² e 9π cm²
b) 96 cm² e 9π cm²
c) 48 cm² e 3π cm²
d) 24 cm² e 3π cm²
e) 48 cm² e 9π cm²

Resolução:

Como os vértices do losango estão nos pontos médios dos lados do retângulo, as dimensões de cada triângulo retângulo menor são 4 cm e 6 cm.
A área de um triângulo menor: $\frac{4.6}{2}$ = 12 cm²
Como são quatro triângulos: 4.12 = 48 cm²
Área do círculo: $\pi r^2 = \pi .3^2 = 9\pi$

(alternativa E)

20. A área do círculo, em cm², cuja circunferência mede 10π cm, é:

a) 10π
b) 36 π
c) 64 π
d) 50 π
e) 25 π

Resolução:

2π .r = 10 π cm,
Logo, r = 5 cm

Portanto, sua área será dada por: A = π .5² = 25 π cm².

(alternativa E)