Livro Eletrônico

Aula Extra

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Italo Marinho Sá Barreto

Aula Extra: Resolução de questões de círculos.

Olá, meu jovem aluno. Como estão as coisas? Sei que a essa altura você deve estar começando a criar alguns pormenores mentais de cansaço e talvez até de preocupação. Mas nada menos esperado, visto que esse rumo de preocupação define o norte do seu futuro próximo, então, nada melhor que se preocupar um pouco consigo e com seus objetivos.

Mas em relação aos seus estudos, você está em boas mãos. Estamos todos muito felizes em tê-lo como estudante e muito mais feliz ainda de poder te entregar esse material recheado com as questões de círculos do livro eletrônico anterior, todas resolvidas!

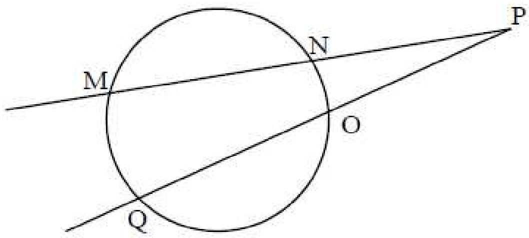
Então, nesse livro eletrônico, nos preocuparemos com a disciplina de círculos, porém, com um enfoque de resolução de questões. Vamos lá, então?

CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	CONTEÚDO
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula Extra	*Resolução de questões de círculos*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

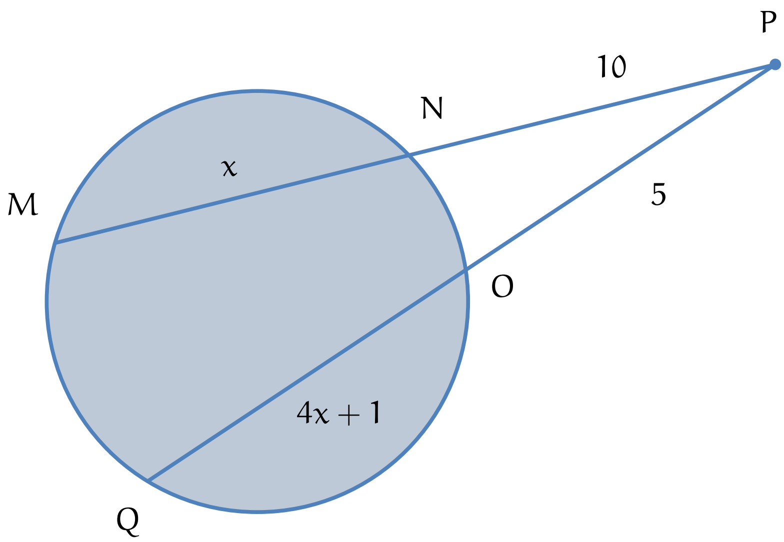
(EEAR-2002) QUESTÃO 1

Na figura, sendo $MN = x\,\text{cm}$, $NP = 10\,\text{cm}$, $PO = 5\,\text{cm}$ e $OQ = (4x + 1)\,\text{cm}$, então o valor do segmento de reta $\overline{PQ}$, em cm, é



(a) 29.
(b) 35.
(c) 12.
(d) 34.

R: Vejamos a figura com os dados distribuídos:



Utilizando potência de ponto:

$$PN \cdot PM = PO \cdot PQ$$
$$10 \cdot (10 + x) = 5 \cdot (5 + 4x + 1)$$
$$100 + 10x = 5 \cdot (4x + 6)$$
$$100 + 10x = 20x + 30$$

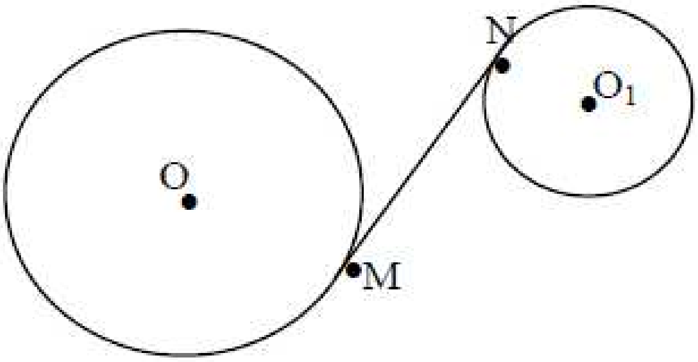
$$100 - 30 = 20x - 10x$$
$$10x = 70$$
$$x = 7\,\text{cm}.$$

Como ele pede PQ:

$$\begin{aligned} PQ &= PO + OQ \\ &= 5 + 4x + 1 \\ &= 4x + 6 \\ &= 4 \cdot 7 + 6 \\ &= 28 + 6 \\ &= 34. \end{aligned}$$

(EEAR-2002) QUESTÃO 2

Na figura, M e N são pontos de tangência.

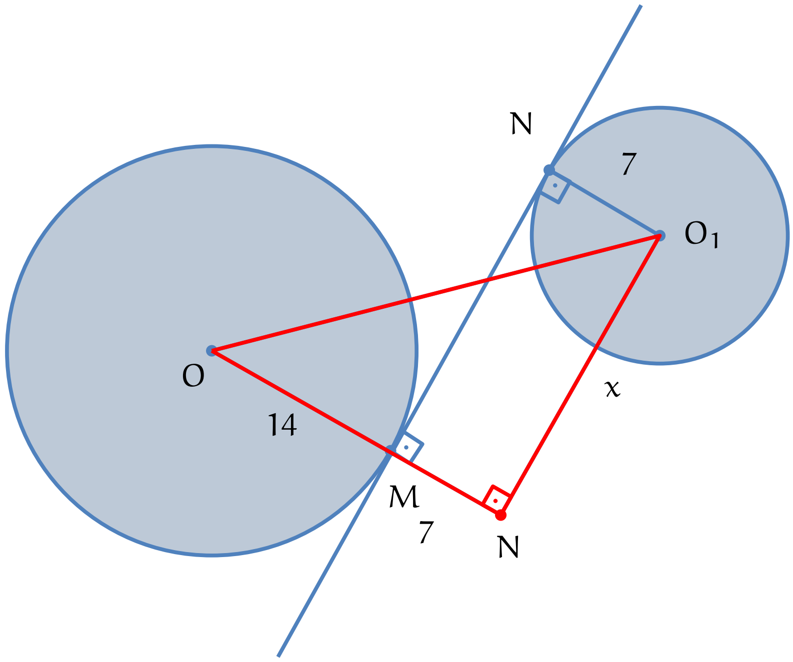


Sendo os raios, respectivamente, $14\,\text{cm}$ e $7\,\text{cm}$ e a distância dos centros $OO_1 = 24\,\text{cm}$, então o segmento MN, em cm, mede

(a) $\sqrt{527}$
(b) $\sqrt{380}$
(c) $3\sqrt{15}$
(d) 12

R: Essa é uma ótima questão para que eu faça um comentário para você, estudante.

Existe um triângulo retângulo que mata essa questão imediatamente, se construído. Geralmente, quando performo essa construção, muitos alunos começam a se auto-afirmar “eu nunca pensaria nisso”. E aqui é um ótimo momento para dizermos o seguinte: “agora você vai conseguir, porque você já vai ter visto a construção ao menos uma vez!”
Isso não quer dizer, jovem, que você não poderia ter a criatividade de fazer as questão de primeira. Não é isso. Mas em geral, toda e qualquer inspiração ou criatividade é um conjunto de conhecimento pré-adquiridos utilizados numa ordem inteligente. Então, vejamos esse triângulo retângulo escondido:



Veja que, no triângulo NOO_1:

$$\begin{aligned}
OO_1^2 &= NO + NO_1^2 \\
24^2 &= (14+7)^2 + x^2 \\
24^2 &= 21^2 + x^2 \\
576 &= 441 + x^2 \\
x^2 &= 576 - 441 \\
x^2 &= 135 \\
x &= \sqrt{135} \\
x &= \sqrt{9 \cdot 15} \\
x &= 3\sqrt{15}\,\text{cm}.
\end{aligned}$$

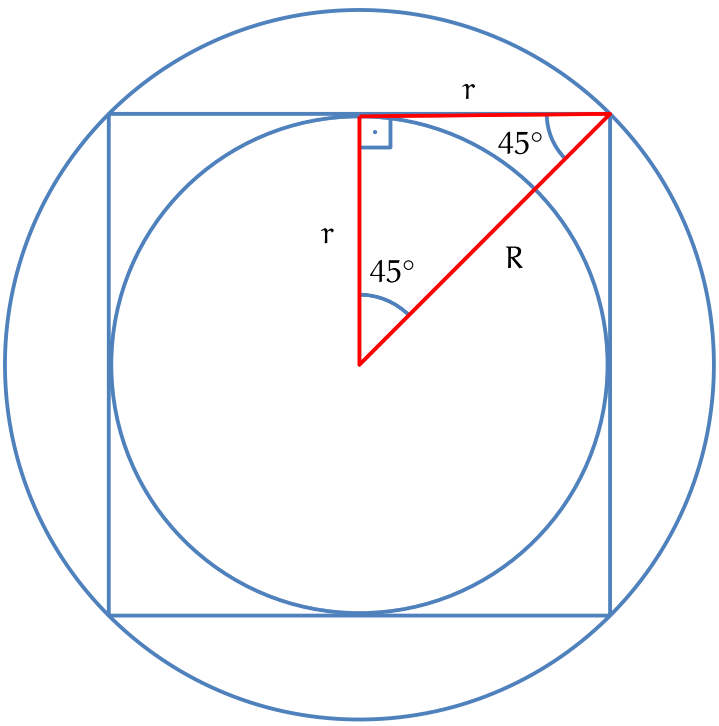
Gabarito: C

(EEAR-2002) QUESTÃO 3

A razão entre os comprimentos das circunferências circunscrita a um quadrado e inscrita no mesmo quadrado é

(a) 2
(b) $\sqrt{2}$
(c) $3\sqrt{2}$
(d) $2\sqrt{2}$

R: Vejamos, então, a figura proposta:



Veja que R é a diagonal de um quadrado de lado r. Logo, $R = r\sqrt{2}$. Outra forma de concluir isso é aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo vermelho (ou, ainda, usar trigonometria no triângulo retângulo, dado que conhecemos seus ângulos agudos internos de $45°$). Ele pede a razão entre os comprimentos da maior e a menor:

$$\frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r}$$

$$= \frac{r\sqrt{2}}{r}$$
$$= \sqrt{2}.$$

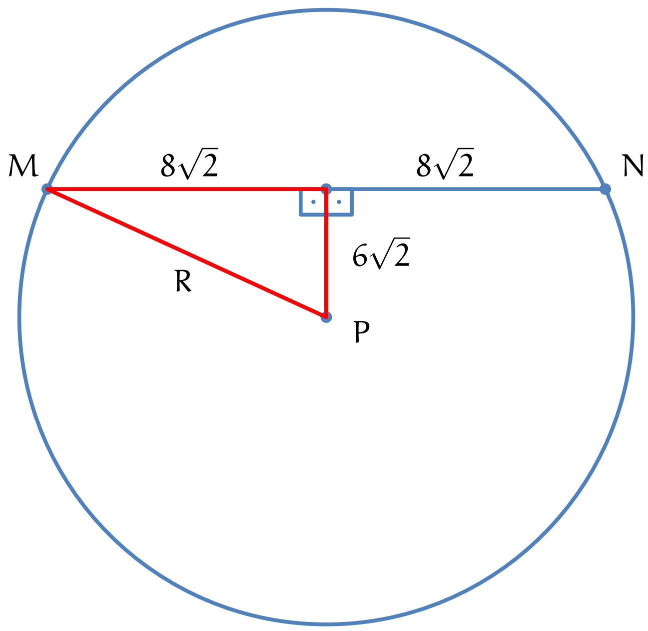
Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 4

Se em uma circunferência uma corda mede $16\sqrt{2}$cm e dista $6\sqrt{2}$cm do centro, então a medida do raio dessa circunferência, em cm, é

(a) $12\sqrt{2}$
(b) $10\sqrt{2}$
(c) $8\sqrt{2}$
(d) $6\sqrt{2}$

R: A figura fica da seguinte forma:



Veja que o ponto P dista $6\sqrt{2}$ da corda MN, que mede $16\sqrt{2}$. A distância de um ponto a uma corda tem de ser perpendicular à corda. E toda perpendicular a uma corda baixada do centro do círculo também divide a corda ao meio! Então aquela corda ficou dividida em metades, cada uma medindo $8\sqrt{2}$cm.

Aquele triângulo retângulo vermelho é um triângulo pitagórico do tipo $6, 8, 10$, só que com um fator extra $\sqrt{2}$. Então, trata-se de um triângulo retângulo $6\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$. Logo $R = 10\sqrt{2}$.

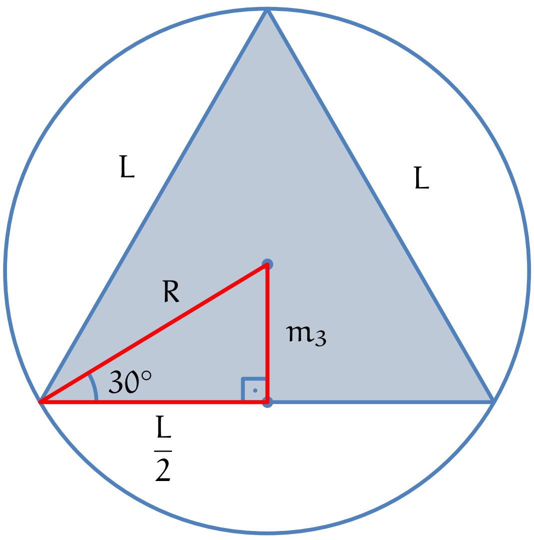
Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 5

Em uma circunferência estão inscritos um triângulo eqüilátero e um hexágono regular. O apótema do triângulo somado com o apótema do hexágono dá $12(\sqrt{3}+1)$ cm. O lado do triângulo, em cm, mede

(a) $12\sqrt{3}$
(b) $16\sqrt{3}$
(c) $20\sqrt{3}$
(d) $24\sqrt{3}$

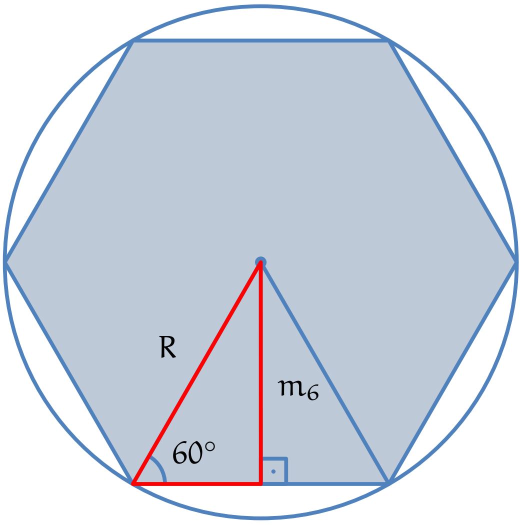
R: Façamos cada uma das figuras separadamente. Primeiro, o triângulo equilátero:



Queremos calcular L. Mas, para isso, precisamos calcular R. Usando trigonometria:

$$\text{sen}\, 30^\circ = \frac{m_3}{R}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{m_3}{R}$$
$$m_3 = \frac{R}{2}.$$

Agora vamos ao hexágono:



Usando novamente trigonometria:

$$\begin{aligned}
\text{sen}\, 60^\circ &= \frac{m_6}{R} \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{m_6}{R} \\
m_6 &= \frac{R\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ele diz que a soma dos apótemas é $12(\sqrt{3}+1)$, logo:

$$\begin{aligned}
m_3 + m_6 &= 12(\sqrt{3}+1) \\
\frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} &= 12(\sqrt{3}+1) \\
\frac{R + R\sqrt{3}}{2} &= 12(\sqrt{3}+1) \\
R + R\sqrt{3} &= 24(\sqrt{3}+1) \\
R(\sqrt{3}+1) &= 24(\sqrt{3}+1) \\
R &= 24.
\end{aligned}$$

Daí, voltando a usar trigonometria no primeiro triângulo, poderemos calcular o valor de L:

$$\begin{aligned}
\cos 30^\circ &= \frac{\frac{L}{2}}{R} \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{L}{2R}
\end{aligned}$$

$$L = R\sqrt{3}$$
$$L = 24\sqrt{3}.$$

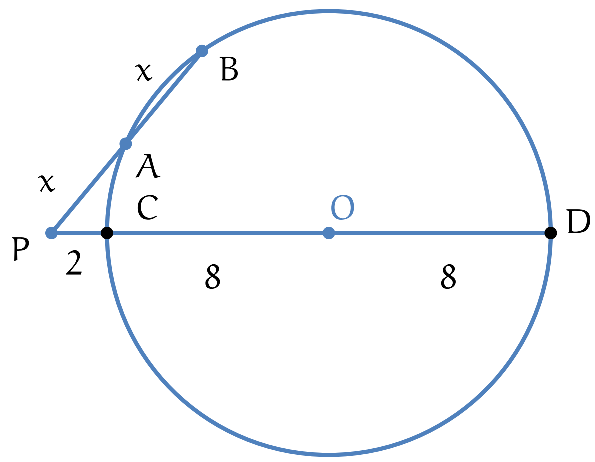
Gabarito: D

(EEAR-2003) QUESTÃO 6

Do ponto P, situado a 10cm do centro O de uma circunferência de raio igual a 8cm, traça-se uma secante PB passando por A tal que $PA = AB$, sendo A e B pontos da circunferência. A medida de PB, em cm, é

(a) $3\sqrt{2}$
(b) $6\sqrt{2}$
(c) 8
(d) 6

R: Observemos a figura:



Veja que como PO mede 10 e CO mede 8, só podemos ter $PC = 2$. Daí, por potência de ponto (duas secantes cortando o círculo):

$$PA \cdot PB = PC \cdot PB$$
$$x \cdot (x + x) = 2 \cdot (2 + 16)$$
$$2x^2 = 2 \cdot 18$$

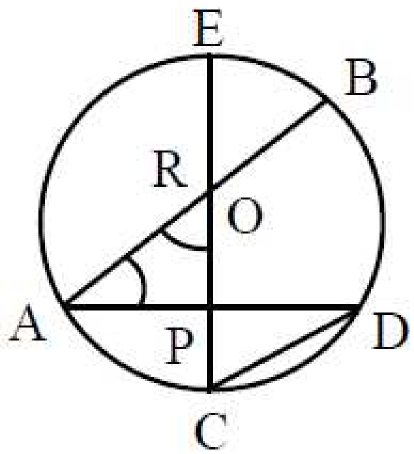
$$x^2 = 18$$
$$x = 3\sqrt{2}.$$

Tome cuidado aqui, estudante. O problema pede PB. Veja que, como a figura ilustra, $PB = 2x$; logo, $PB = 6\sqrt{2}$cm.

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 7

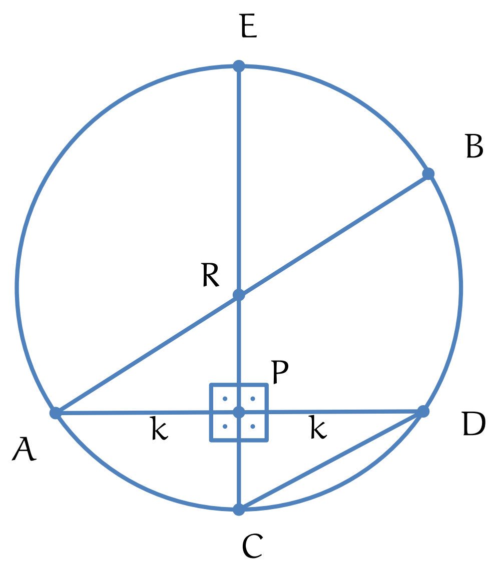
Na figura, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas.



$\overline{EC}$ é um diâmetro e P é o ponto médio da corda $\overline{AD}$. As medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{R}C$ e $P\hat{A}R$ são, respectivamente, $4x - 14°$ e $5x - 13°$. As medidas dos ângulos do triângulo PCD são

(a) $42°, 57°, 81°$
(b) $45°, 45°, 90°$
(c) $46°, 45°, 90°$
(d) $52°, 38°, 90°$

R: Essa é uma questão puramente angular. Isso faz dela uma questão razoavelmente difícil. Vamos utilizar aqui alguns conceitos relacionados a cordas. Vejamos uma boa forma de resolvermos esse exercício. Primeiro, à figura:



Vou justificar aquele perpendicularismo entre EC e AD que já coloquei na figura. Isso acontece porque quando um diâmetro divide uma corda pela metade, num mesmo círculo, esse diâmetro também será perpendicular à corda.

Ora, então, somando os ângulos internos do triângulo PAR:

$$\begin{aligned} 4x - 14^\circ + 5x - 13^\circ + 90^\circ &= 180^\circ \\ 9x - 27^\circ &= 90^\circ \\ 9x &= 90^\circ + 27^\circ \\ x &= 10^\circ + 3^\circ \\ x &= 13^\circ. \end{aligned}$$

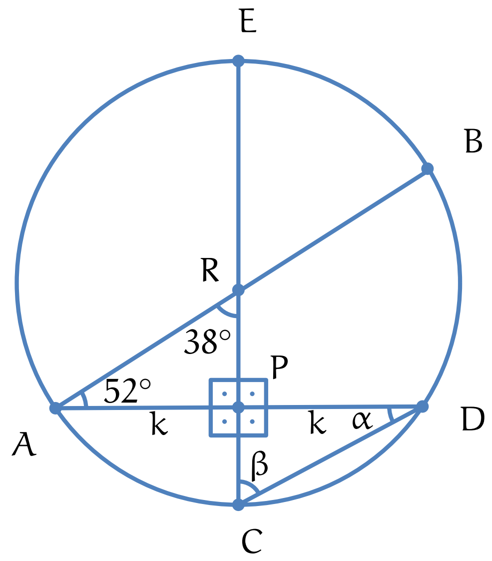
Conhecemos então os seguintes ângulos:

$$\begin{aligned} \angle ARC &= 4 \cdot 13^\circ - 14^\circ \\ &= 52^\circ - 14^\circ \\ &= 38^\circ. \end{aligned}$$

Ainda:

$$\begin{aligned} \angle PAR &= 5 \cdot 13^\circ - 13^\circ \\ &= 65^\circ - 13^\circ \\ &= 52^\circ. \end{aligned}$$

Nosso círculo fica, então, da seguinte forma:

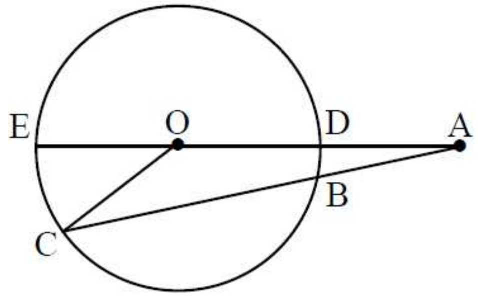


Como AB é paralelo a CD, temos que α e 52°, assim como β e 38° são *ângulos alternos internos* (consegue ver isso, jovem?). Daí, temos que, finalmente, $\alpha = 52^\circ$ e $\beta = 38^\circ$. Os ângulos do triângulo PCD são, então, 52°, 38° e 90°.

Gabarito: D

(EEAR-2003) QUESTÃO 8

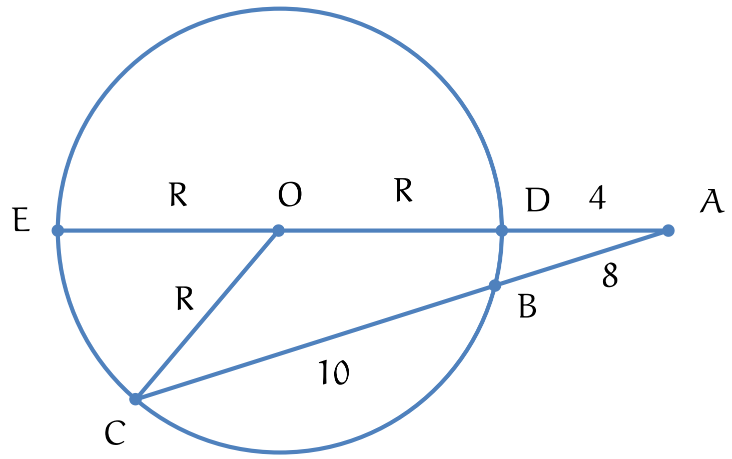
Na figura abaixo, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ e o ponto O é o centro da circunferência.



O perímetro do triângulo AOC é, em cm,

(a) 45
(b) 48
(c) 50
(d) 54

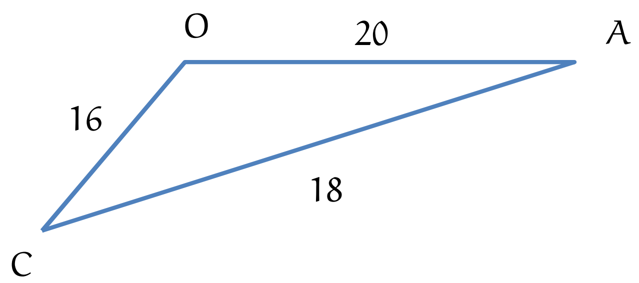
R: Observemos a figura com as informações dadas:



Aplicando potência de ponto às secantes:

$$
\begin{aligned}
AD \cdot AE &= AB \cdot AC \\
4 \cdot (4 + 2R) &= 8 \cdot (10 + 8) \\
16 + 8R &= 8 \cdot 18 \\
8R &= 8 \cdot 18 - 16 \\
R &= 18 - 2 \\
R &= 16\,\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Daí, o triângulo AOC passa a ter as seguintes medidas:



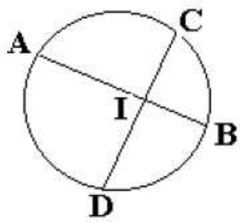
Portanto, seu perímetro será:

$$
\begin{aligned}
2p &= 16 + 18 + 20 \\
2p &= 54\,\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

(EEAR-2003) QUESTÃO 9

Na figura, as cordas são dadas em cm.



Se $AI = 4x + 1$, $IB = x$, $DI = x + 1$ e $IC = 3x$, então a medida da corda $\overline{AB}$ é, em cm,

(a) 9
(b) 10
(c) 11
(d) 19

R: Por potência de ponto:

$$IA \cdot IB = IC \cdot ID$$
$$(4x + 1) \cdot x = 3x \cdot (x + 1)$$

Cortando x dos dois membros:

$$4x + 1 = 3 \cdot (x + 1)$$
$$4x + 1 = 3x + 3$$
$$4x - 3x = 3 - 1$$
$$x = 2\,\text{cm}.$$

Calculando AB, então:

$$\begin{aligned} AB &= IA + IB \\ &= 4x + 1 + x \\ &= 5x + 1 \\ &= 5 \cdot 2 + 1 \\ &= 11\,\text{cm}. \end{aligned}$$

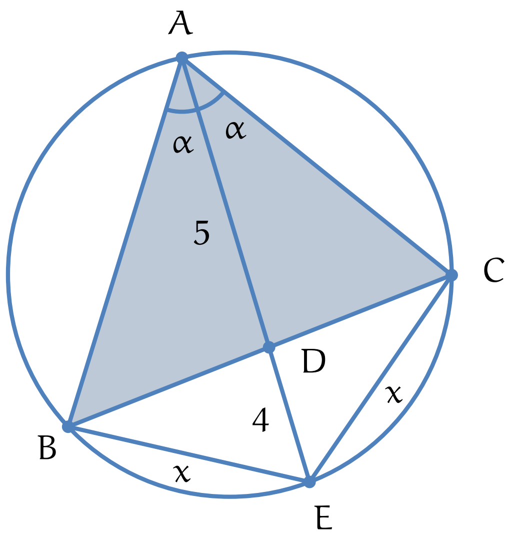
Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 10

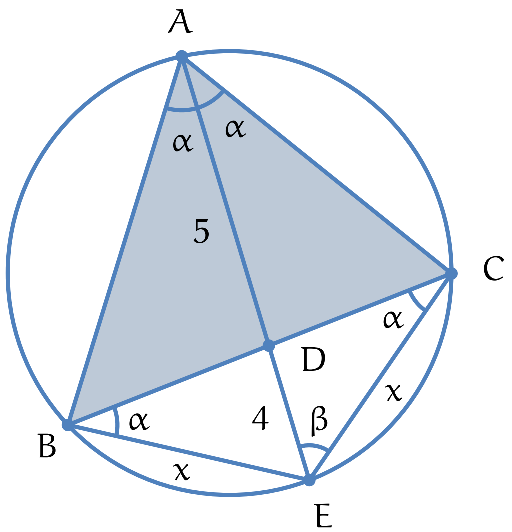
Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo A encontra BC em D, e a circunferência circunscrita, em E. Sendo $AE = 9\,\text{cm}$ e $DE = 4\,\text{cm}$, então a medida $\overline{EB}$, em cm, é

(a) 6
(b) 5
(c) $2\sqrt{5}$
(d) $3\sqrt{2}$

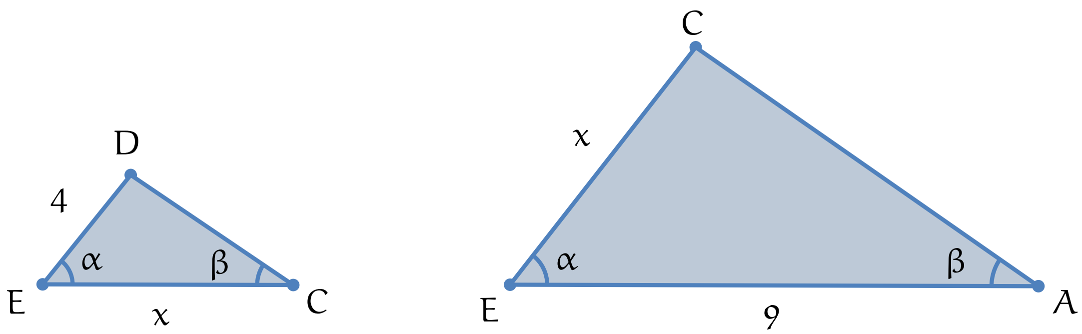
R: Eita, essa é um "soco no estômago". Questão difícil, que demonstra como questões que envolvem a pureza da semelhança podem vir a ser extremamente traiçoeiras. Vejamos a figura:



Veja que, de fato, a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ intersecta BC em D e a circunferência circunscrita ao triângulo em E.
Como os ângulos $\angle BAE$ e $\angle CAE$ são iguais, os arcos $\overset{\frown}{BE}$ e $\overset{\frown}{CE}$ também o são. Dessa forma, determinam ângulos iguais, ou seja, $BE = CE$ (daí o porquê de eu tê-los chamado de x).
Veja que os ângulos $\angle CAE$ e $\angle CBE$ são iguais, pois são ambos inscritos do arco $\overset{\frown}{CE}$.
Analogamente, temos $\angle BAE \equiv \angle BCE$. Nossa figura fica assim, então:



Essa é, inclusive, uma outra maneira de mostrarmos que o triângulo BCE é isósceles, mostrando que dois de seus ângulos são iguais a α (dei-me a liberdade de chamar o ângulo $\angle AEC = \beta$). Agora, observe os triângulos AEC e CED:



Veja que eles são semelhantes, pois têm seus ângulos correspondentemente iguais. Logo:

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$$
$$x^2 = 36$$
$$x = 6\,\text{cm}.$$

Gabarito: A

(EEAR-2003) QUESTÃO 11

Um arco mede $0,105\,\text{rad}$. Sua medida em graus é, aproximadamente, igual a

(a) 5
(b) 6
(c) 50
(d) 60

R: Para passarmos de radianos para graus, podemos fazer uma regra de três, da seguinte forma:

Graus	Radianos
$180°$	$\pi \approx 3,14$
α	$0,105$

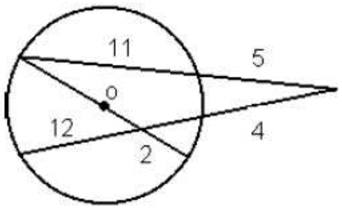
Multiplicando em cruz:

$$\frac{180°}{\alpha} = \frac{3,14}{0,105}$$
$$3,14\alpha = 0,105 \cdot 180°$$
$$\alpha = \frac{18,9°}{3,14}$$
$$\alpha \approx 6°.$$

Gabarito: B

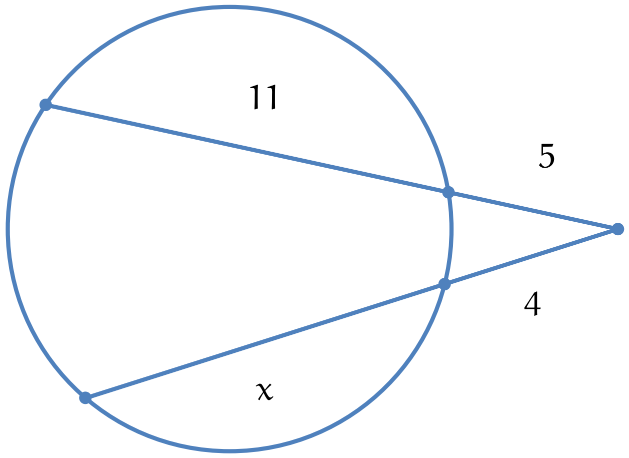
(EEAR-2004) QUESTÃO 12

Observando-se a figura e considerando-se que as medidas são dadas em cm, pode-se afirmar que a medida, em cm, do raio da circunferência de centro O é



(a) 11.
(b) 12.
(c) 13.
(d) 14.

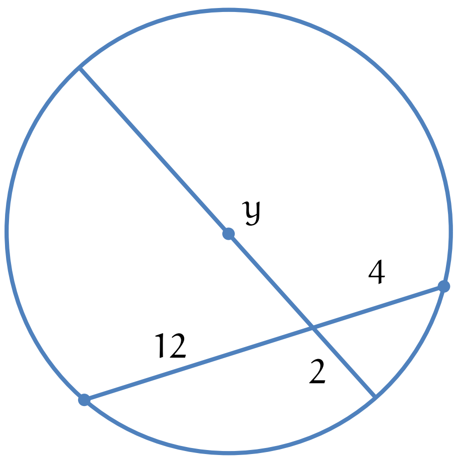
R: Essa questão fica tranquila se você olhar apenas para partes específicas da figura. Primeiro, esqueçamo-nos das cordas interiores ao círculo e demos atenção apenas às retas secantes:



Aplicando a potência de ponto:

$$
\begin{aligned}
5 \cdot (5+11) &= 4 \cdot (4+x) \\
5 \cdot 16 &= 16 + 4x \\
80 &= 16 + 4x \\
4x &= 80 - 16 \\
x &= 20 - 4 \\
x &= 16.
\end{aligned}
$$

Descoberto o valor de x, agora levamos em conta apenas as cordas internas ao círculo:



Aplicando novamente a potência de ponto:

$$y \cdot 2 = 12 \cdot 4$$

$$y = 24$$

Mas veja que $y + 2$ é a medida do diâmetro desse círculo. Logo o diâmetro desse círculo é $24 + 2 = 26\,\text{cm}$ e, com isso, esse círculo tem raio $13\,\text{cm}$.

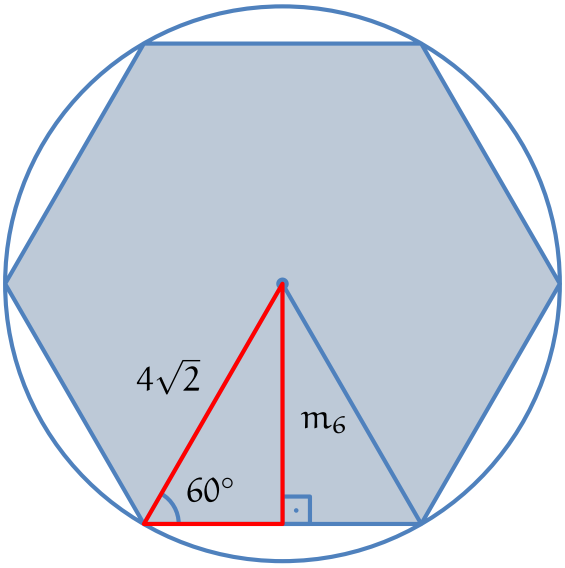
Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 13

A medida, em m, do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede $4\sqrt{2}\,\text{m}$ é

(a) $4\sqrt{3}$.
(b) $2\sqrt{2}$.
(c) $4\sqrt{6}$.
(d) $2\sqrt{6}$.

R: Inscrevendo o hexágono no círculo:



Aplicando trigonometria no triângulo retângulo vermelho formado:

$$\text{sen}\,60° = \frac{m_6}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{m_6}{4\sqrt{2}}$$
$$2m_6=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$
$$2m_6=4\sqrt{6}$$
$$m_6=2\sqrt{6}\,m.$$

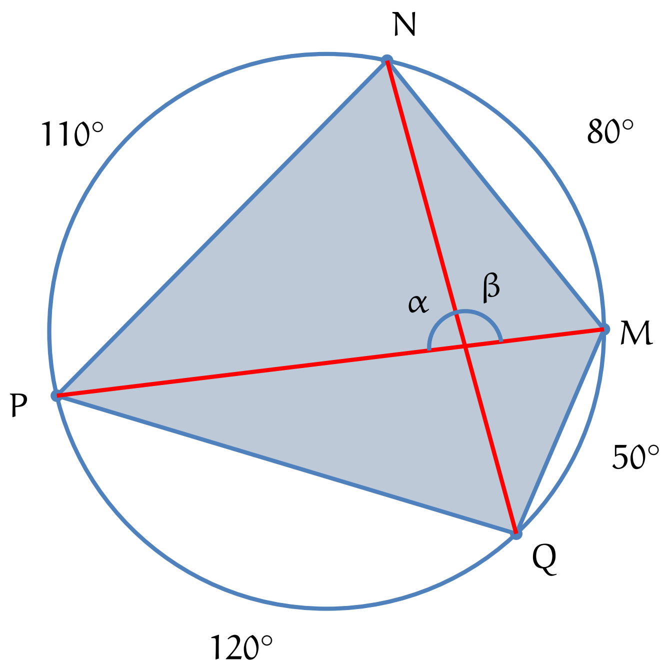
Gabarito: D

(EEAR-2004) QUESTÃO 14

Sobre uma circunferência, num mesmo sentido de percurso, marcam-se os arcos $\widehat{MN}=80°$, $\widehat{NP}=110°$ e $\widehat{PQ}=120°$. O maior dos ângulos formados pelas diagonais do quadrilátero $MNPQ$ mede

(a) $10°$.
(b) $105°$.
(c) $100°$.
(d) $80°$.

R: Vejamos a figura formada:



Já adicionei à figura o fato de que o menor arco $\widehat{MQ}$ mede $50°$. isso acontece porque a soma dos outros é: $80° + 110° + 120° = 310°$. Daí, a medida do menor arco $\widehat{MN}$ deve ser o replemento de $310°$, isto é, $50°$.

Daí podemos calcular o ângulo α, que é o ângulo excêntrico interno. Lembre-se que ele vale a média aritmética dos arcos que determinam que, nessa figura, seriam os menores arcos $\widehat{NP}$ e $\widehat{QM}$:

$$\alpha = \frac{\widehat{NP} + \widehat{QM}}{2}$$
$$\alpha = \frac{110° + 50°}{2}$$
$$\alpha = 80°.$$

O ângulo β é maior que α (trata-se do suplemento de α); logo, o maior ângulo formado pelas diagonais do quadrilátero $MNPQ$ é:

$$\begin{aligned}\beta &= 180° - \alpha \\ &= 180° - 80° \\ &= 100°.\end{aligned}$$

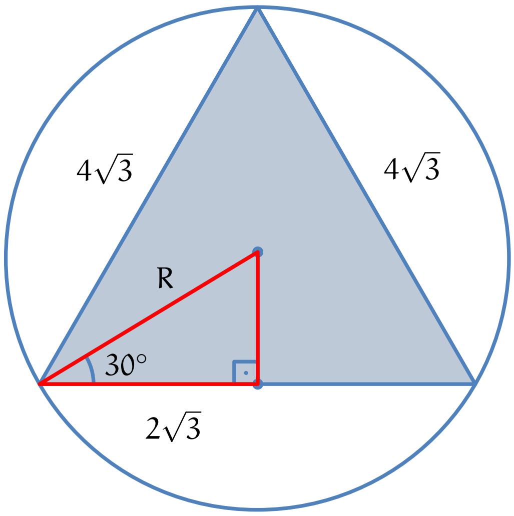
Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 15

Em um triângulo equilátero de $12\sqrt{3}$m de perímetro, a soma das medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo, em m, é

(a) 5.
(b) 6.
(c) 7.
(d) 8.

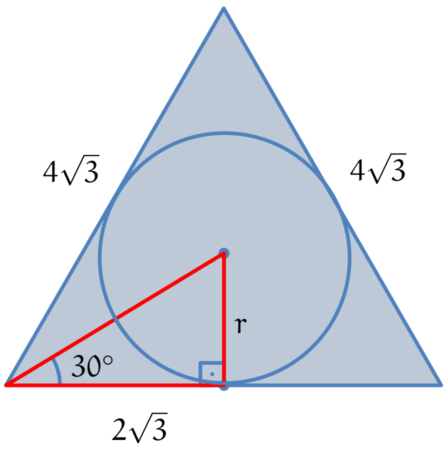
R: Há duas formas de fazermos esse exercício. Façamos, inicialmente, da forma mais longa. Lidemos primeiro com o triângulo equilátero inscrito na circunferência:



Veja que podemos deduzir que o lado do triângulo é $4\sqrt{3}$ dividindo o perímetro informado por 3 (podemos fazer isso porque, claro, os três lados de um triângulo **equi**látero são iguais). Aplicando trigonometria no triângulo vermelho:

$$\cos 30° = \frac{2\sqrt{3}}{R}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{R}$$
$$R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$
$$R = 4\,\text{m}.$$

Agora, lidemos com a circunferência inscrita no triângulo:



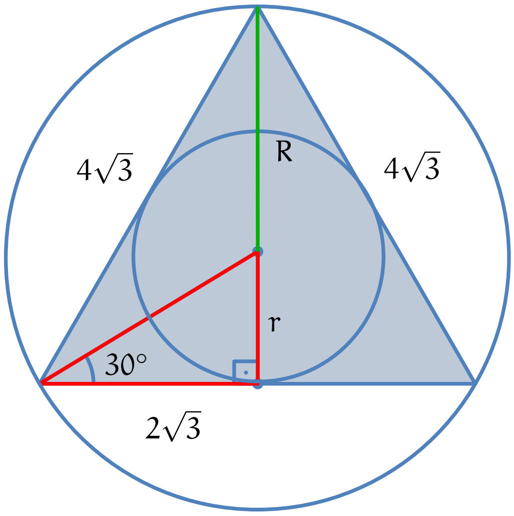
Aplicando trigonometria no triângulo vermelho:

$$\text{sen}\,30° = \frac{r}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{2\sqrt{3}}$$
$$3r = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$
$$3r = 3 \cdot 2$$
$$r = 2\text{m}.$$

A soma entre os dois raios fica, então, igual a: $4 + 2 = 6\text{m}$.

Essa é a primeira forma de resolvermos esse exercício. A segunda forma poderia ser feita da seguinte forma. Observe as duas circunferências numa mesma figura:



Podemos afirmar que esses círculos são concêntricos (têm mesmos centros, isto é, centros coincidentes) porque em um triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis são coincidentes. Podemos ver na figura acima que formamos, somando R e r, a *altura* do triângulo equilátero. A altura de um triângulo equilátero qualquer de lado L pode ser calculada pela fórmula a seguir:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

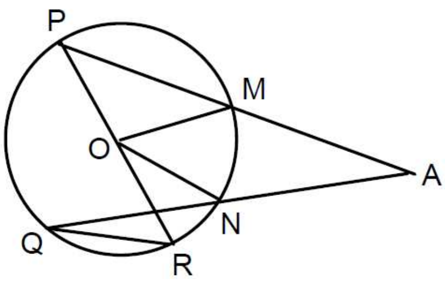
Como o lado desse triângulo é $L = 4\sqrt{3}$, temos:

$$\begin{aligned} R + r &= h \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \\ &= 6\text{m}. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2004) QUESTÃO 16

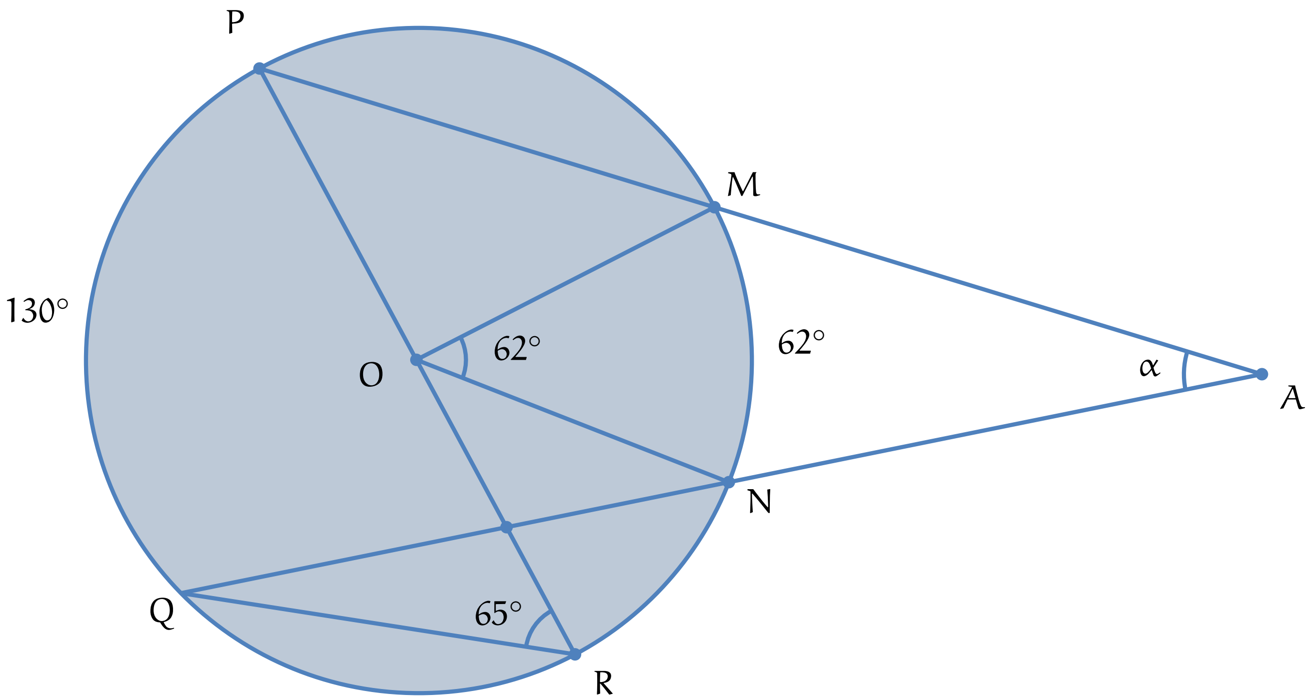
Na figura, O é o centro da circunferência, $M\hat{O}N = 62°$, e $P\hat{R}Q = 65°$.



O ângulo $M\hat{A}N$ mede

(a) $34°$.
(b) $36°$.
(c) $38°$.
(d) $40°$.

R: Observemos a figura com os ângulos representados:



Veja que o menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ mede o dobro do ângulo $\angle PRQ$, pois este é um ângulo inscrito daquele arco. Logo, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ é de $130°$. O arco $\overset{\frown}{MN}$[1] mede exatamente $62°$, visto que tal

[1] Não vou mais utilizar o termo *menor arco*, a partir desse ponto falarei apenas arco, deixando sempre subentendido que tratar-se-á sempre do menor. Quando for necessário deixar claro que se trata do maior, falarei isso no próprio texto da teoria, tudo bem, jovem?

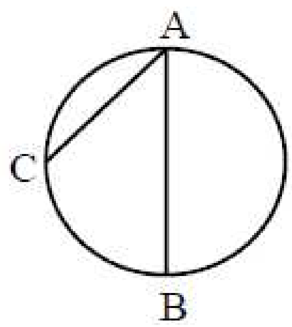
arco tem o ângulo $\angle MON = 62$ como ângulo central (e se lembre sempre de que a medida de um arco é sempre igual à medida de seu ângulo central).

Daí, como o ângulo α é um ângulo excêntrico externo, temos que:

$$\alpha = \frac{\widehat{PQ} - \widehat{MN}}{2}$$
$$\alpha = \frac{130° - 62°}{2}$$
$$\alpha = \frac{68°}{2}$$
$$\alpha = 34°.$$

Gabarito: A

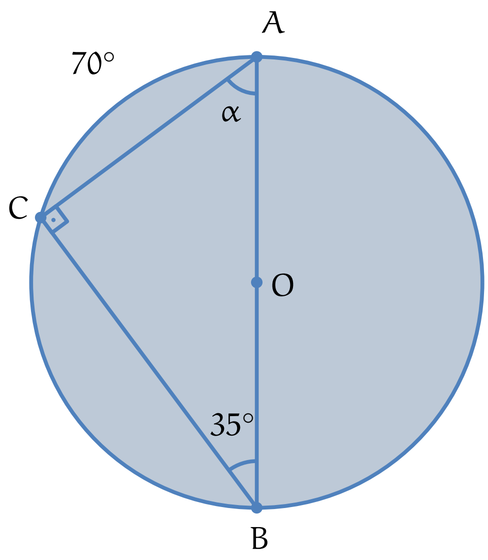
(EEAR-2005) QUESTÃO 17



Na figura, $\overline{AB}$ é diâmetro. Se o arco agudo AC mede $70°$, a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é

(a) $50°$.
(b) $55°$.
(c) $60°$.
(d) $65°$.

R: Façamos essa questão de duas formas. Primeiro, observemos a figura abaixo, onde já fiz algumas conclusões acerca da figura dada:

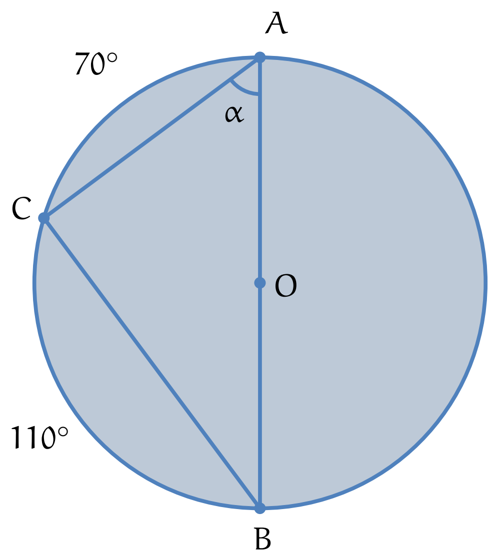


Veja que o ângulo $\angle CBA$ é um ângulo inscrito do arco $\widehat{AC}$. Logo, como o ângulo inscrito mede a metade da medida do arco, temos que $\angle CBA = 35°$. Perceba também que o ângulo $\angle ACB$ mede $90°$. Isso pode ser justificado de duas maneiras diferentes. Uma delas é utilizarmos o fato de que sempre que um triângulo encontrar-se inscrito em um círculo de tal forma que um de seus lado seja diâmetro, o ângulo oposto àquele diâmetro sempre será reto.

Uma outra forma de concluirmos isso é percebermos que o ângulo $\angle ACB$ mede a metade do ângulo $\angle AOB$, que mede $180°$ (trata-se de um *ângulo raso*). Então $\angle ACB$ mede a metade de $180°$, que é $90°$.

Daí o triângulo ABC é retângulo e, dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, podemos concluir que $\alpha = 55°$.

Uma outra forma de fazermos essa questão seria pensar assim. Observe novamente a nossa figura:



Veja que o arco $\widehat{BC}$ tem de medir o suplemento de $\widehat{AC}$, pois $\widehat{AB}$ é um semicírculo. logo, $\widehat{BC}$ mede

$110°$. Como α é o ângulo inscrito de $\widehat{BC}$, temos que $\alpha = \frac{110°}{2} = 55°$.

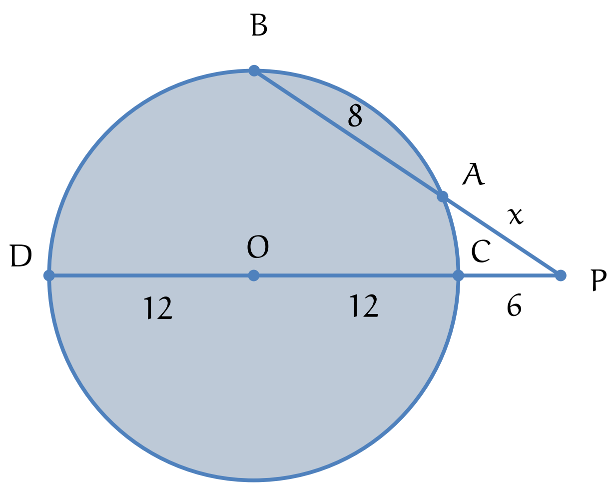
Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 18

Por um ponto P, distante 18cm do centro de uma circunferência de raio 12cm, conduz-se um "segmento secante" que determina na circunferência uma corda de 8cm. A medida da parte exterior desse segmento, em cm, é

(a) 18.
(b) 10.
(c) 8.
(d) 6.

R: Vejamos a figura proposta:



Aplicando a potência de ponto:

$$x \cdot (x+8) = 6 \cdot (6+24)$$
$$x \cdot (x+8) = 180.$$

Veja que $x = 10$ resolve o exercício. Mas caso não conseguíssemos, poderíamos continuar as contas:

$$x^2 + 8x = 180$$

$$x^2 + 8x - 180 = 0.$$

Calculando Δ:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180)\\ &= 64 + 720\\ &= 784.\end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{2 \cdot 1}\\ &= \frac{-8 \pm 28}{2}\\ &= -4 \pm 14.\end{aligned}$$

Daí obtemos duas raízes, $x = -28$ (não convém), e $x = 10$.

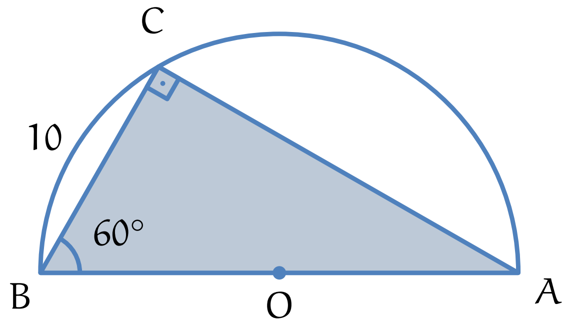
Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 19

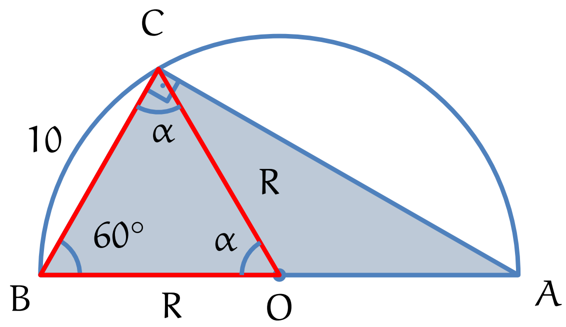
Num triângulo ABC, $BC = 10\,\text{cm}$ e $A\hat{B}C = 60°$. Se esse triângulo está inscrito numa semicircunferência e $\overline{BC}$ é seu menor lado, então o raio dessa semicircunferência mede, em cm,

(a) 5.
(b) 10.
(c) $10\sqrt{2}$.
(d) $10\sqrt{3}$.

R: Desenhando a figura:



Vamos a algumas justificativas do que desenhei. Em primeiro lugar, podemos concluir que o ângulo em C é reto porque todo triângulo inscrito num semicírculo é retângulo no vértice oposto ao diâmetro daquele semicírculo. Poderíamos verificar isso também percebendo que $\angle BOA = 180°$; daí, como $\angle BCA$ é inscrito desse ângulo central, temos que $\angle BCA = \frac{180°}{2} = 90°$.
Agora, basta traçarmos o raio OC e o problema estará resolvido. Consegue ver isso, jovem? Veja:



O triângulo BCO é isósceles, pois dois de seus lados são raios. Então:

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha + 60° &= 180°\\ 2\alpha &= 180° - 60°\\ 2\alpha &= 120°\\ \alpha &= 60°.\end{aligned}$$

Veja então que esse triângulo é equilátero e, com isso, $R = 10\,\text{cm}$.

Gabarito: B

(EEAR-2006) QUESTÃO 20

A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado inscrito e do quadrado circunscrito numa circunferência de raio R é

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) 2
(d) $2\sqrt{3}$

R: Como vimos nas fórmulas de polígonos regulares inscritos e circunscritos, o apótema do quadrado inscrito no circulo de raio R é $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Já o apótema do quadrado circunscrito numa circunferência de raio R é o próprio R. Assim, a razão pedida é:

$$\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

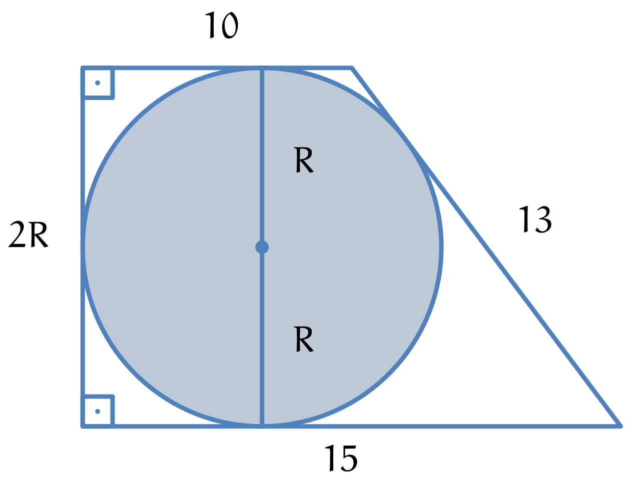
Gabarito: A

(EEAR-2006) QUESTÃO 21

Um trapézio retângulo está circunscrito a uma circunferência. Se as bases desse trapézio medem $10\,\text{cm}$ e $15\,\text{cm}$, e o lado oblíquo às bases mede $13\,\text{cm}$, então o raio da circunferência, em cm, mede

(a) $4,5.$
(b) $5.$
(c) $5,5.$
(d) $6.$

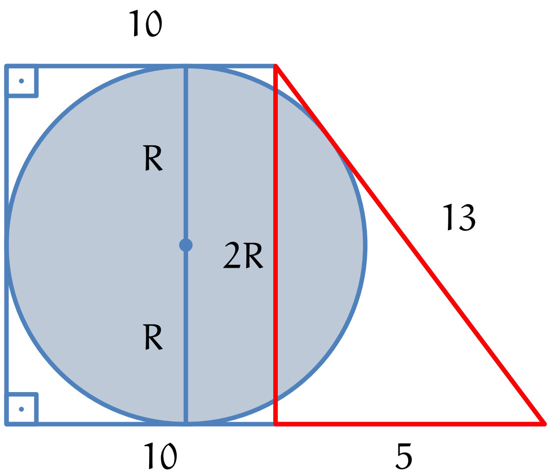
R: Existem duas formas de resolvermos essa questão. Para a primeira forma, precisaremos utilizar o teorema de Pitot. Se não se lembra dele, vá lá dar uma olhada antes de continuar a leitura. Bom, vamos dar uma olhada na figura proposta:



O teorema de Pitot nos diz que *a soma dos lados opostos de um quadrilátero circunscritível é igual*. Então:

$$
\begin{aligned}
2R + 13 &= 10 + 15 \\
2R &= 25 - 13 \\
2R &= 12 \\
R &= 6\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Outra forma de resolvermos essa questão é utilizarmos o teorema de Pitágoras. Veja:



Podemos utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar o cateto restante, que mede justamente $2R$ (ou podemos também verificar que trata-se de um triângulo pitagórico do tipo $5, 12, 13$). Vejamos:

$$
\begin{aligned}
13^2 &= 5^2 + (2R)^2 \\
(2R)^2 &= 169 - 25
\end{aligned}
$$

$$(2R)^2 = 144$$
$$2R = 12$$
$$R = 6\,\text{cm}.$$

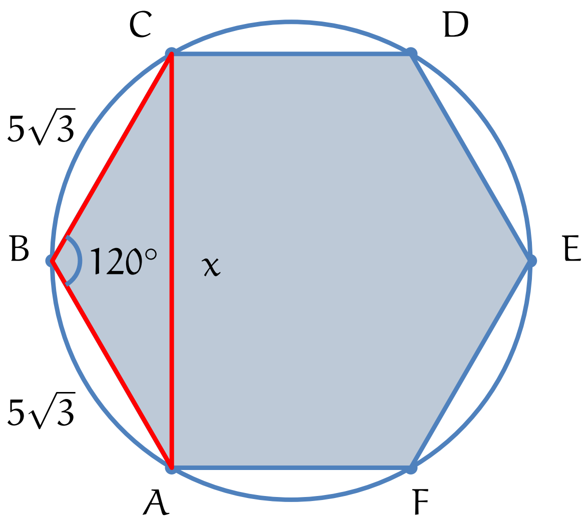
Gabarito: D

(EEAR-2006) QUESTÃO 22

Um hexágono regular $ABCDEF$, de $30\sqrt{3}$cm de perímetro, está inscrito em um círculo de raio R. A medida de sua diagonal $\overline{AC}$, em cm, é

(a) $5\sqrt{3}$
(b) 5
(c) $15\sqrt{3}$
(d) 15

R: Vejamos a figura com a diagonal requerida:



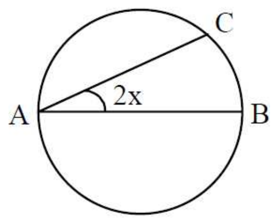
existem algumas formas de prosseguirmos aqui. Poderíamos, por exemplo, baixar a altura do triângulo ABC relativa a AC. Isso dividiria o ângulo de $120°$ em metades, permitindo aplicar trigonometria em triângulos retângulos. Poderíamos também ter decorado o triângulo notável ABC. Aqui, faremos por uma terceira forma. Aplicando a lei dos cossenos (veremos essa teoria na aula de trigonometria):

$$x^2 = (5\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} \cos 120^\circ$$
$$x^2 = 25 \cdot 3 + 25 \cdot 3 - 2 \cdot 25 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x^2 = 150 + 75$$
$$x^2 = 225$$
$$x = 15.$$

Gabarito: D

(EEAR-2007) QUESTÃO 23

Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência e o arco AC mede 100°.



O valor de x é

(a) 20°.
(b) 35°.
(c) 45°.
(d) 50°.

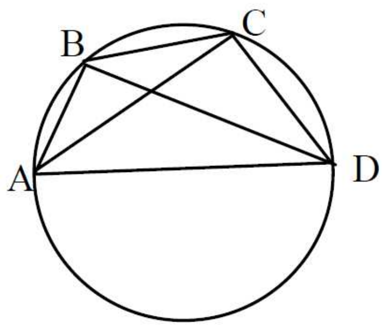
R: Se $\angle CAB$ mede $2x$, então o arco $\widehat{CB}$ mede $4x$ (pois o arco mede sempre o sobro de seu inscrito). Como AB é diâmetro, define dois arcos de 180°. Assim, temos:

$$\widehat{AC} + \widehat{CB} = 180^\circ$$
$$100^\circ + 4x = 180^\circ$$
$$4x = 80^\circ$$
$$x = 20^\circ.$$

Gabarito: A

(EEAR-2007) QUESTÃO 24

Na figura, $\overline{AD}$ é o diâmetro da circunferência, $C\hat{A}D$ mede $35°$ e $B\hat{D}C$, $25°$.



A medida de $A\hat{C}B$ é

(a) $30°$.
(b) $35°$.
(c) $40°$.
(d) $45°$.

R: Como $\angle CAD = 35°$, o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede $70°$. Como $\angle BDC = 25°$, temos que $\overset{\frown}{BC}$ mede $50°$. Dessa forma, como AD é diâmetro:

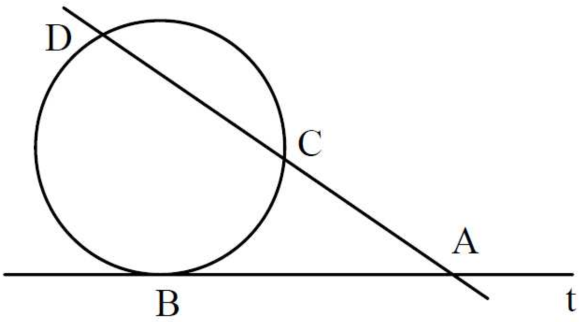
$$\begin{aligned} \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB} &= 180° \\ 70° + 50° + \overset{\frown}{AB} &= 180° \\ 120° + \overset{\frown}{AB} &= 180° \\ \overset{\frown}{AB} &= 180° - 120° \\ \overset{\frown}{AB} &= 60°. \end{aligned}$$

O ângulo pedido, $angleACB$, é um ângulo inscrito do arco $\overset{\frown}{AB}$. Logo, $\angle ACB = \dfrac{60°}{2} = 30°$.

Gabarito: A

(EEAR-2007) QUESTÃO 25

Na figura, t é tangente à circunferência em B.



Se $AC = 8\,\text{cm}$ e $CD = 12\,\text{cm}$, então a medida de AB, em cm, é

(a) $4\sqrt{10}$.
(b) $2\sqrt{5}$.
(c) $\sqrt{10}$.
(d) $\sqrt{5}$.

R: Basta utilizarmos a potência do ponto A em relação ao círculo:

$$AB^2 = AC \cdot AD$$
$$AB^2 = 8 \cdot (8 + 12)$$
$$AB^2 = 8 \cdot 20$$
$$AB^2 = 160$$
$$AB = \sqrt{160}$$
$$AB = \sqrt{16 \cdot 10}$$
$$AB = 4\sqrt{10}.$$

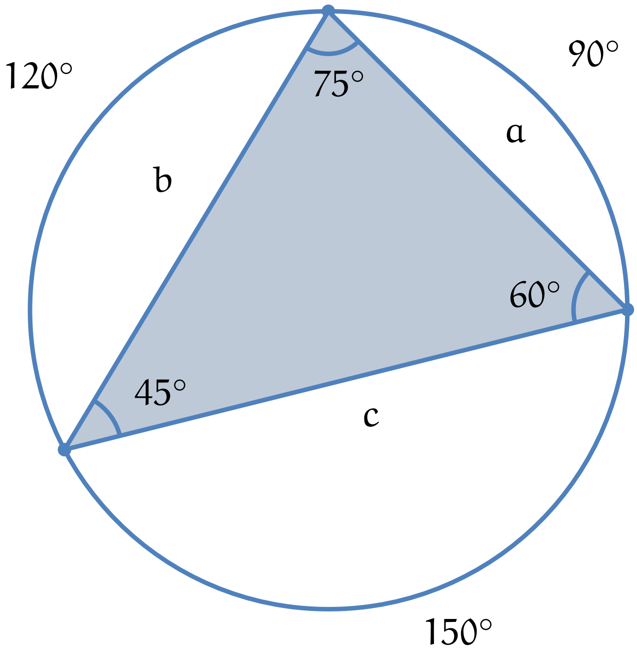
Gabarito: A

(EEAR-2007) QUESTÃO 26

Um triângulo, inscrito numa circunferência de $10\,\text{cm}$ de raio, determina nesta três arcos, cujas medidas são $90°$, $120°$ e $150°$. A soma das medidas dos menores lados desse triângulo, em cm, é

(a) $10\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
(b) $10\left(1+\sqrt{3}\right)$
(c) $5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
(d) $5\left(1+\sqrt{3}\right)$

R: Precisaremos da lei dos senos nessa questão. Veremos sobre essa lei na aula de trigonometria em triângulos. Vejamos, então, a figura formada pelo enunciado:



Veja que já desenhei os ângulos internos, ângulos correspondentemente iguais à metade dos arcos que compreendem. Ele quer a soma dos menores lados. Queremos então a soma dos lados a e b, pois são os lados opostos aos menores ângulos. Usando a lei dos senos para o lado a:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}45^\circ} = 2R$$
$$\frac{a}{\operatorname{sen}45^\circ} = 2\cdot 10$$
$$a = 20\cdot \operatorname{sen}45^\circ$$
$$a = 20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$a = 10\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Fazendo o mesmo para o lado b:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}60^\circ} = 2R$$

$$\begin{aligned}\frac{b}{\operatorname{sen}60^\circ} &= 2\cdot 10\\ b &= 20\cdot\operatorname{sen}60^\circ\\ a &= 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a &= 10\sqrt{3}\,\text{cm}.\end{aligned}$$

Somando esses dois lados, obtemos:

$$\begin{aligned}a+b &= 10\sqrt{2}+10\sqrt{3}\\ &= 10\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2008) QUESTÃO 27

Dada uma circunferência de diâmetro a, o comprimento de um arco, cujo ângulo central correspondente é 30°, é

(a) $\frac{\pi a}{2}$
(b) $\frac{\pi a}{4}$
(c) $\frac{\pi a}{10}$
(d) $\frac{\pi a}{12}$

R: O comprimento ℓ de um arco de ângulo central α, em radianos, e raio R é dado pela fórmula a seguir:

$$\ell = \alpha R.$$

O ângulo central desse arco é 30°. Passando isso para radianos:

$$\begin{aligned}30^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{30^\circ\pi}{180^\circ}\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

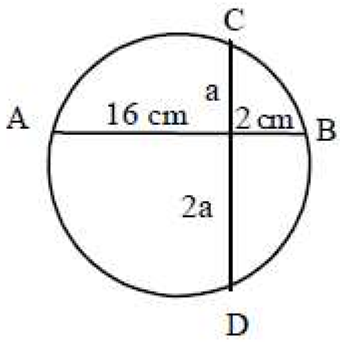
Já o raio R é tal que $2R = a$, pois a é o diâmetro desse círculo. Logo, $R = \frac{a}{2}$. Logo, substituindo na expressão do comprimento de um arco:

$$\begin{aligned} \ell &= \alpha R \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a}{2} \\ &= \frac{\pi a}{12} \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2008) QUESTÃO 28

Seja a circunferência e duas de suas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



A medida de $\overline{CD}$, em cm, é

(a) 10.
(b) 12.
(c) 14.
(d) 16.

R: Aplicando potência de ponto:

$$\begin{aligned} a \cdot 2a &= 16 \cdot 2 \\ 2a^2 &= 32 \\ a^2 &= 16 \end{aligned}$$

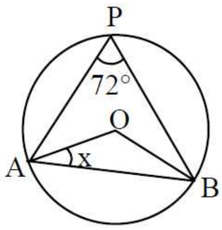
$$a = 4.$$

Veja que $CD = a + 2a = 3a$, logo, $CD = 3 \cdot 4 = 12\text{cm}$.

Gabarito: B

(EEAR-2009) QUESTÃO 29

Na figura, O é o centro da circunferência.



O valor de x é

(a) $18°$.
(b) $20°$.
(c) $22°$.
(d) $24°$.

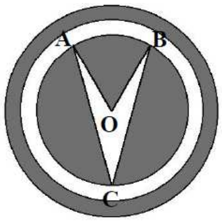
R: Como $\angle APB = 72°$ é o ângulo inscrito do arco $\overset{\frown}{AB}$, esse arco deverá medir $144°$. Daí, o ângulo $\overset{\frown}{AOB}$ deve medir $144°$ e, como o triângulo AOB é isósceles:

$$x + x + 144° = 180°$$
$$2x = 36°$$
$$x = 18°.$$

Gabarito: A

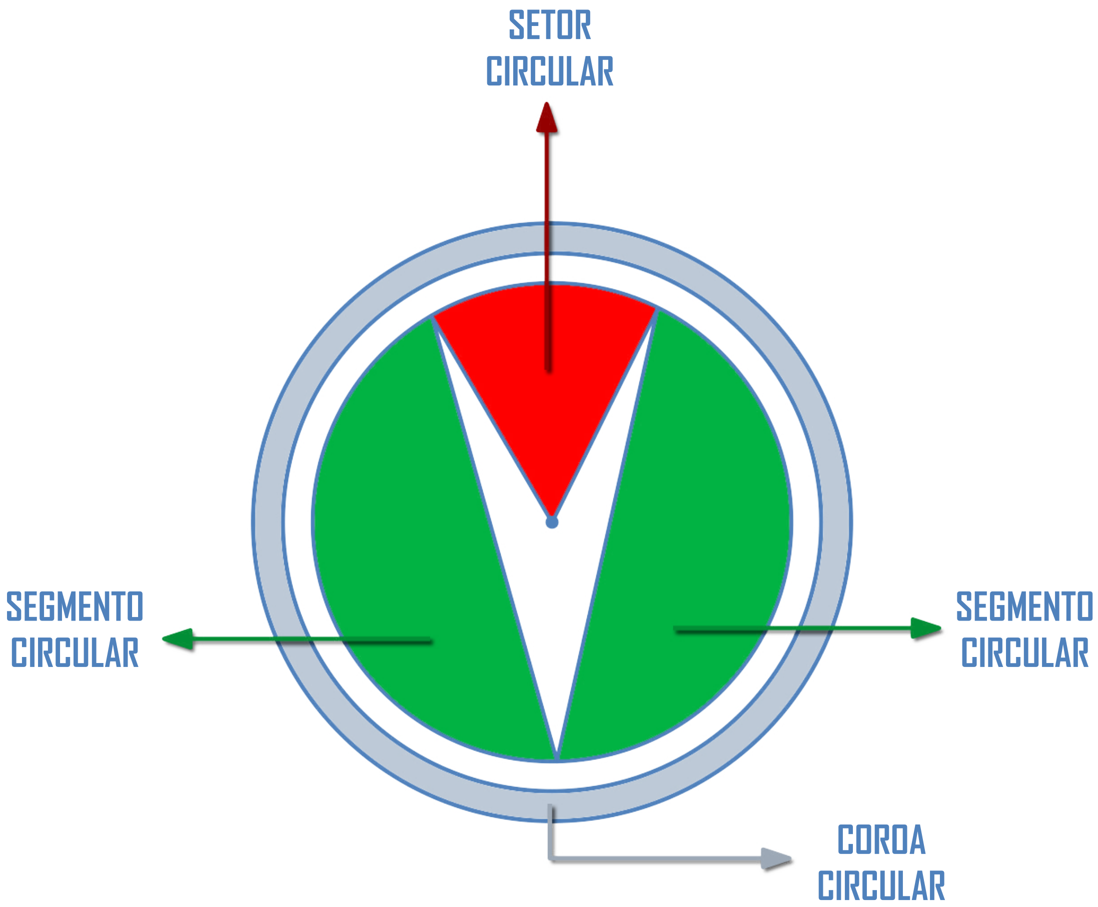
(EEAR-2009) QUESTÃO 30

No logotipo, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são raios da menor das três circunferências concêntricas. A região acinzentada desse logotipo é composta de



(a) dois setores circulares, duas coroas circulares e dois segmentos circulares.
(b) um setor circular, uma coroa circular e dois segmentos circulares.
(c) um setor circular, duas coroas circulares e um segmento circular.
(d) dois setores circulares, uma coroa circular e um segmento circular.

R: Vejamos uma análise detalhada da figura em questão:



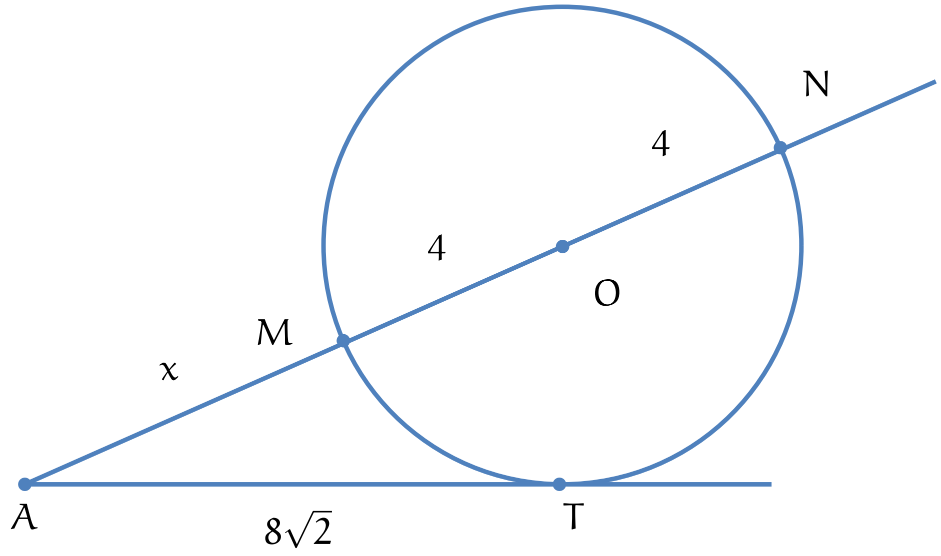
Vemos então que há um setor circular, uma coroa circular e dois segmentos circulares acizentados.

(EEAR-2009) QUESTÃO 31

Sejam uma circunferência de centro O e um ponto A exterior a ela. Considere $\overline{AT}$ um segmento tangente à circunferência, em T. Se o raio da circunferência mede 4 cm e $AT = 8\sqrt{2}$cm, então a medida de $\overline{AO}$, em cm, é

(a) 10.
(b) 12.
(c) 13.
(d) 15.

R: Observemos a figura proposta:



Aplicando a potência do ponto A em relação à circunferência:

$$AT^2 = AM \cdot AN$$
$$(8\sqrt{2})^2 = x \cdot (x+8)$$
$$x^2 + 8x = 64 \cdot 2$$
$$x^2 + 8x - 128 = 0$$

Aplicando a fórmula resolutiva das equações de segundo grau:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-128)$$

$$
\begin{aligned}
&= 64 + 512 \\
&= 576.
\end{aligned}
$$

Daí:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-8 \pm \sqrt{576}}{2} \\
&= \frac{-8 \pm 24}{2}.
\end{aligned}
$$

Excluindo a raiz negativa:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-8 + 24}{2} \\
&= \frac{16}{2} \\
&= 8.
\end{aligned}
$$

Daí, calculando AO:

$$
\begin{aligned}
AO &= AM + MO \\
&= 8 + 4 \\
&= 12\,\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

(EEAR-2010) QUESTÃO 32

Numa circunferência, a soma das medidas de dois arcos é $315°$. Se um desses arcos mede $\frac{11\pi}{12}$ rad, a medida do outro é

(a) $150°$.
(b) $125°$.
(c) $100°$.

(d) $75°$.

R: Primeiro, devemos traduzir $\frac{11\pi}{12}$ para radianos. Vejamos:

$$\begin{aligned}\frac{11\pi}{12} &= \frac{11 \cdot 180°}{12}\\ &= 11 \cdot 15\\ &= 165°.\end{aligned}$$

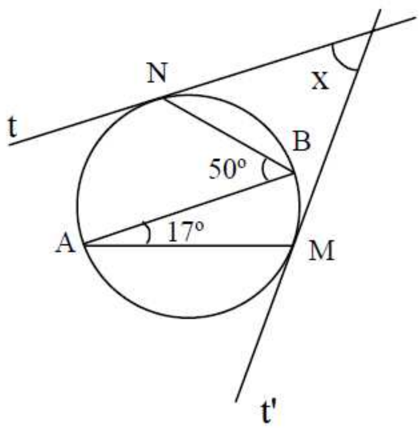
Um dos arcos mede, então, $165°$. O outro, desconhecido, mede α. Como a soma dos dois é $315°$:

$$\begin{aligned}\alpha + 165° &= 315°\\ \alpha &= 315° - 165°\\ \alpha &= 150°.\end{aligned}$$

Gabarito: A

■■■(EEAR-2010) QUESTÃO 33

Sejam $\overline{AB}$ o diâmetro da circunferência, e as retas t e t' tangentes a ela nos pontos N e M, respectivamente.



O valor de x é

(a) $66°$.

(b) $60°$.
(c) $55°$.
(d) $50°$.

R: Como $\angle ABM = 50°$, temos que $\overset{\frown}{AN}$ mede $100°$. Como AB é diâmetro, temos:

$$\begin{aligned}
\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{NB} &= 180° \\
100° + \overset{\frown}{NB} &= 180° \\
\overset{\frown}{NB} &= 180° - 100° \\
\overset{\frown}{NB} &= 80°.
\end{aligned}$$

Prosseguindo, veja que $\angle BAM = 17°$. Logo, $\overset{\frown}{BM}$ mede $34°$.
Ainda, visto que $\overset{\frown}{AN}$, $\overset{\frown}{NB}$, $\overset{\frown}{BM}$ e $\overset{\frown}{MA}$ cobrem a circunferência, temos:

$$\begin{aligned}
\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{NB} + \overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{MA} &= 360° \\
100° + 80° + 34° + \overset{\frown}{MA} &= 360° \\
214° + \overset{\frown}{MA} &= 360° \\
\overset{\frown}{MA} &= 146°.
\end{aligned}$$

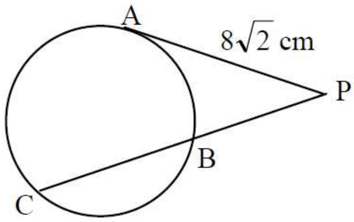
O ângulo x é um ângulo excêntrico exterior, enmtão, podemos calculá-lo utilizando o que aprendemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\overset{\frown}{MN} - \overset{\frown}{NM}}{2} \\
&= \frac{\overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AN} - (\overset{\frown}{NB} + \overset{\frown}{BM})}{2} \\
&= \frac{146° + 100° - (80° + 34°)}{2} \\
&= \frac{246° - 114°}{2} \\
&= \frac{132}{2} \\
&= 66°.
\end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2010) QUESTÃO 34

Na figura, $\overline{PA}$ é tangente à circunferência em A, e B é ponto médio de $\overline{PC}$.



A medida de $\overline{PC}$, em cm, é

(a) $12\sqrt{2}$.
(b) $14\sqrt{2}$.
(c) 16.
(d) 20.

R: Como B é ponto médio de PC, temos $PB = PC = x$. Logo, por potência de ponto:

$$PA^2 = PB \cdot PC$$
$$(8\sqrt{2})^2 = x \cdot 2x$$
$$2x^2 = 8^2 \cdot 2$$
$$x^2 = 8^2$$
$$x = 8.$$

Logo, $PC = 2x = 2 \cdot 8 = 16$cm.

Gabarito: C

(EEAR-2010) QUESTÃO 35

Um ângulo central α determina, em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento $\ell = \frac{2\pi r}{3}$. A medida desse ângulo é:

(a) $150°$
(b) $120°$

(c) 100°
(d) 80°

R: Basta substituirmos esse comprimento na nossa conhecida fórmula de comprimento de arcos:

$$\begin{aligned}\ell &= \alpha R\\ \frac{2\pi r}{3} &= \alpha r\\ \alpha &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Passando para graus:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2\cdot 180^\circ}{3}\\ \alpha &= 120^\circ.\end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2011) QUESTÃO 36

Um quadrado e um triângulo equilátero estão inscritos em uma circunferência de raio R. A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado e do triângulo é

(a) $\sqrt{2}$
(b) $\sqrt{3}$
(c) $2\sqrt{3}$
(d) $3\sqrt{2}$

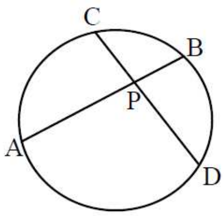
R: O apótema do quadrado inscrito num círculo de raio R mede $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Já o apótema do triângulo equilátero inscrito num círculo de raio R mede $\frac{R}{2}$, como vimos na teoria. Fazendo a razão:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R}{2}} &= \frac{R\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{R}\\ &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2011) QUESTÃO 37

Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas tais que $AP = 2PB$, $CD = 10\text{cm}$, e $\dfrac{CP}{2} = \dfrac{PD}{3}$.



A medida de $\overline{AB}$, em cm, é

(a) $6\sqrt{3}$
(b) $7\sqrt{3}$
(c) $8\sqrt{2}$
(d) $9\sqrt{2}$

R: Começaremos tentando encontrar as medidas de CP e PD. Podemos igualar a proporção dada pelo problema a k, veja:

$$\frac{CP}{2} = \frac{PD}{3} = k.$$

Isso nos diz que:

$$\frac{CP}{2} = k$$
$$CP = 2k.$$

Ainda:

$$\frac{PD}{3} = k$$
$$PD = 3k.$$

Como $CP + PD = CD = 10$, temos:

$$\begin{aligned} CP + PD &= 10 \\ 2k + 3k &= 10 \\ 5k &= 10 \\ k &= 2. \end{aligned}$$

Daí, temos que $CP = 2k = 2 \cdot 2 = 4\,\text{cm}$ e $PD = 3k = 3 \cdot 2 = 6\,\text{cm}$.

Agora, faça $PB = x$. Então $AP = 2x$. Daí, aplicando potência de ponto:

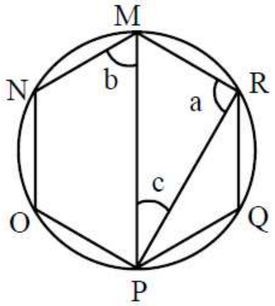
$$\begin{aligned} AP \cdot PB &= CP \cdot PD \\ 2x \cdot x &= 4 \cdot 6 \\ 2x^2 &= 24 \\ x^2 &= 12 \\ x &= \sqrt{12} \\ x &= 2\sqrt{3}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Veja finalmente que $AB = AP + PB = 2x + x = 3x$. Logo:

$$\begin{aligned} AB &= 3x \\ &= 3 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

(EEAR-2011) QUESTÃO 38

Se $MNOPQR$ é um hexágono regular inscrito na circunferência, então $a + b - c$ é igual a



(a) $150°$.
(b) $120°$.
(c) $100°$.
(d) $90°$.

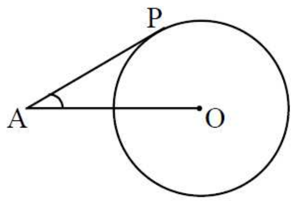
R: Um hexágono regular determina, quando inscrito num círculo, arcos de $60°$. O arco $\widehat{NP}$ mede, portanto, $120°$. Daí, o ângulo b mede a metade, pois está inscrito nesse arco. Daí, $b = 60°$ (também poderíamos ter verificado isso percebendo que esse ângulo é a metade do ângulo interno desse hexágono). O ângulo a mede $90°$, pois está inscrito num diâmetro do círculo. Finalmente, visto que o arco $\widehat{MR}$ mede $60°$, podemos afirmar que o ângulo c mede a metade, isto é, $30°$ (pois é um ângulo inscrito desse arco). Efetuando o cálculo que a questão pede:

$$\begin{aligned} a + b - c &= 90° + 60° - 30° \\ &= 120°. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2011) QUESTÃO 39

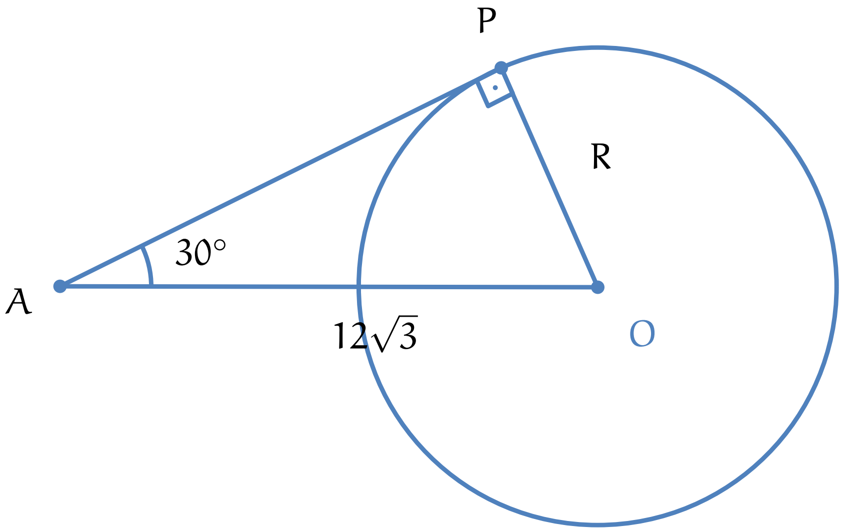
Na figura, O é o centro da circunferência e $\overline{PA}$ é tangente a ela, em P.



Se $P\hat{A}O = 30°$ e $OA = 12\sqrt{3}$cm, então a medida do raio da circunferência, em cm, é

(a) $8\sqrt{3}$
(b) $8\sqrt{2}$
(c) $6\sqrt{3}$
(d) $6\sqrt{2}$

R: O segmento tangente deverá ser perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência, dessa forma:



Podemos utilizar então trigonometria no triângulo retângulo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{OP}{OA} \\ \frac{1}{2} &= \frac{R}{12\sqrt{3}} \\ 2R &= 12\sqrt{3} \\ R &= 6\sqrt{3}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2011) QUESTÃO 40

Para dar 10 voltas completas em volta de um jardim circular, uma pessoa percorrerá $2198\,\text{m}$. Considerando $\pi = 3,14$, a medida, em metros, do diâmetro desse jardim é

(a) 70.
(b) 65.
(c) 58.
(d) 52.

R: O comprimento desse jardim é:

$$
\begin{aligned}
C &= d\pi \\
&= 3,14d.
\end{aligned}
$$

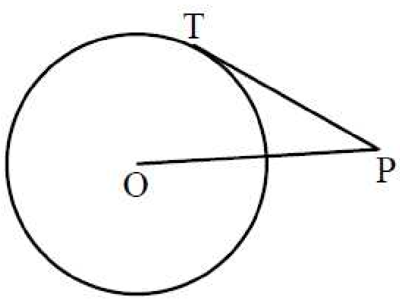
Sabemos que 10 voltas equivalem a $2198\,\text{m}$, logo:

$$
\begin{aligned}
10 \cdot 3,14d = 2198 \\
d = \frac{2198}{31,4}d \qquad &= 70\,\text{m}
\end{aligned}
$$

Gabarito: A

(EEAR-2012) QUESTÃO 41

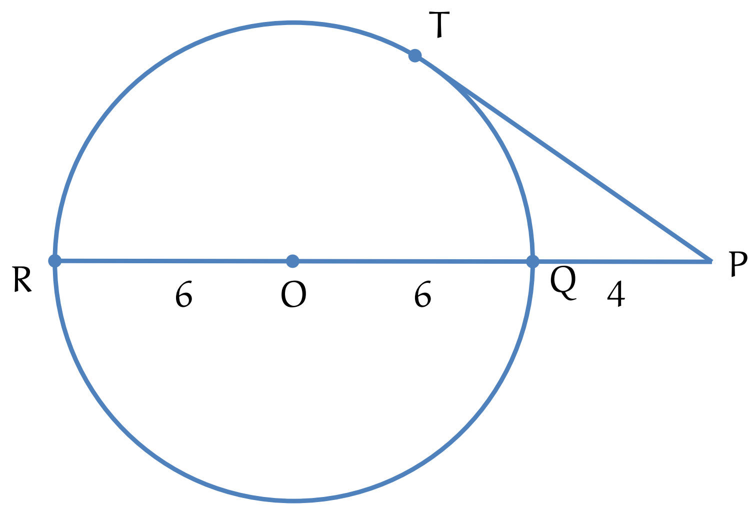
Na figura, $\overline{PT}$ é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio $6\,\text{m}$.



Sabendo que P está situado a $10\,\text{m}$ de O, então $PT =$ ____ m.

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8

R: Podemos utilizar a potência do ponto P:



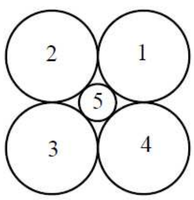
Efetuando os cálculos:

$$\begin{aligned} PT^2 &= PQ \cdot PR \\ PT^2 &= 4 \cdot (4+12) \\ PT^2 &= 4 \cdot 16 \\ PT &= \sqrt{4 \cdot 16} \\ PT &= 2 \cdot 4 \\ PT &= 8\text{m}. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2012) QUESTÃO 42

Na figura, as circunferências 1, 2, 3 e 4 são congruentes entre si e cada uma delas tangencia duas das outras.



Se a circunferência 5 tem apenas um ponto em comum com cada uma das outras quatro, é correto afirmar que

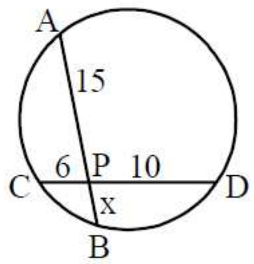
(a) a circunferência 5 é secante às outras quatro circunferências.
(b) a circunferência 5 é tangente exterior às outras quatro circunferências.
(c) todas as circunferências são tangentes interiores entre si.
(d) todas as circunferências são tangentes exteriores entre si.

R: O correto é dizer que a circunferência 5 é exterior, visto que não tem pontos em comum com o interior de nenhuma outra. Também é correto dizermos que ela tange exteriormente as outras circunferências.

Gabarito: B

(EEAR-2013) QUESTÃO 43

Utilizando a Potência do Ponto P em relação à circunferência dada, calcula-se que o valor de x é



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

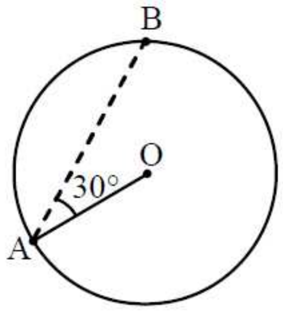
R: Pela potência do ponto P, temos:

$$15 \cdot x = 6 \cdot 10$$
$$15x = 60$$
$$x = 4.$$

Gabarito: D

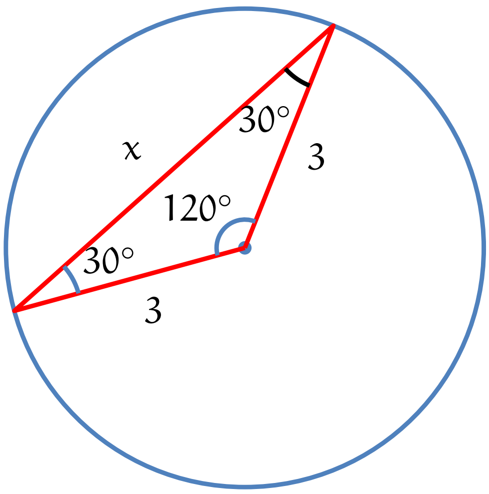
(EEAR-2015) QUESTÃO 44

O ponto O é o centro da circunferência da figura, que tem 3m de raio e passa pelo ponto B. Se o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ forma um ângulo de 30° com o raio $\overline{\mathrm{OA}}$, então a medida de $\overline{\mathrm{AB}}$, em m, é



(a) $6\sqrt{3}$
(b) $3\sqrt{3}$
(c) $6\sqrt{2}$
(d) $3\sqrt{2}$

R: Podemos formar um triângulo dentro do círculo e utilizarmos a lei dos cossenos:



Fazendo as contas:

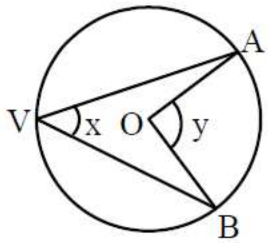
$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 9 + 9 - 2 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x^2 = 18 + 9$$
$$x^2 = 27$$
$$x = 3\sqrt{3}.$$

Gabarito: B

(EEAR-2015) QUESTÃO 45

Na circunferência da figura, O é o seu centro e V, A e B são três de seus pontos.



Se x e y são, respectivamente, as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{V}A$, então sempre é correto afirmar que

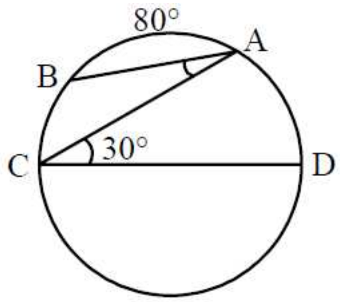
(a) $x = 2y$.
(b) $y = 2x$.
(c) $x + y = 90°$.
(d) $x - y = 90°$.

R: O ângulo x é inscrito do arco $\widehat{AB}$. Isso faz com que $\widehat{AB}$ meça $2x$. Como $\widehat{AB}$ tem y como ângulo central, temos $y = 2x$.

Gabarito: B

(EEAR-2015) QUESTÃO 46

Na figura, A e B são pontos da circunferência e $\overline{CD}$ é seu diâmetro.



Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede

(a) $20°$.
(b) $30°$.
(c) $50°$.
(d) $60°$.

R: Veja que o arco $\widehat{AD}$ mede $60°$ (o dobro do inscrito). Como CD é diâmetro:

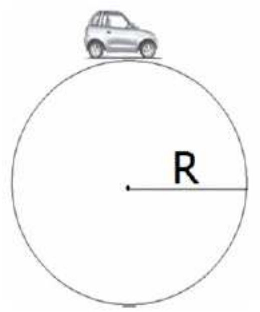
$$\begin{aligned} \widehat{CB} + \widehat{BA} + \widehat{AD} &= 180° \\ \widehat{CB} + 80° + 60° &= 180° \\ \widehat{CB} + 140° &= 180° \\ \widehat{CB} &= 40°. \end{aligned}$$

Como $\angle BAC$ é um ângulo inscrito, mede a metade do arco, isto é, $20°$.

Gabarito: A

(EEAR-2016) QUESTÃO 47

Um carrinho de brinquedo que corre em uma pista circular completa 8 voltas, percorrendo um total de $48\,\text{m}$.



Desprezando a largura da pista e considerando $\pi = 3$, o seu raio é, em metros, igual a

(a) $0,8$
(b) $1,0$
(c) $1,2$
(d) $2,0$

R: O comprimento dessa pista é:

$$C = \frac{48}{8}$$
$$C = 6\text{m}$$

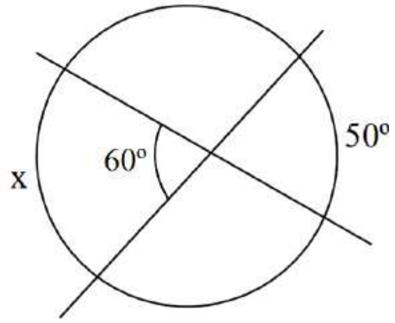
Daí, aplicando a fórmula:

$$C = 2\pi R$$
$$6 = 2 \cdot 3 \cdot R$$
$$R = 1\,\text{m}.$$

Gabarito: B

(EEAR-2016) QUESTÃO 48

Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

(a) $40°$
(b) $70°$
(c) $110°$
(d) $120°$

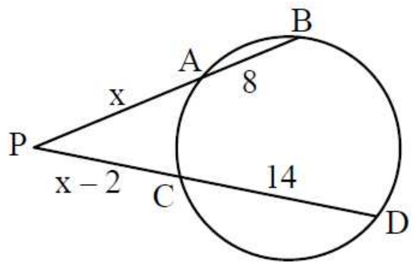
R: A partir desse conceito, de ângulo escêntrico interior, temos que:

$$60° = \frac{x + 50°}{2}$$
$$120° = x + 50°$$
$$x = 70°.$$

Gabarito: B

(EEAR-2017) QUESTÃO 49

Se A, B, C e D são pontos da circunferência, o valor de x é múltiplo de



(a) 5

(b) 6
(c) 7
(d) 8

R: Basta aplicar potência de ponto:

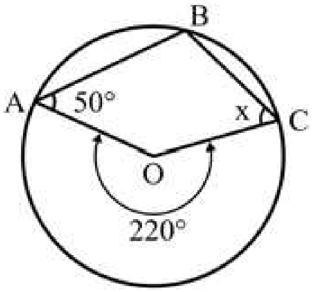
$$
\begin{aligned}
PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\
x \cdot (x+8) &= (x-2) \cdot (x-2+14) \\
x^2 + 8x &= (x-2) \cdot (x+12) \\
x^2 + 8x &= x^2 + 12x - 2x - 24 \\
12x - 8x - 2x &= 24 \\
2x &= 24 \\
x &= 12.
\end{aligned}
$$

Veja que 12 é um número múltiplo de 6, que nos permite achar a alternativa correta.

Gabarito: B

(EEAR-2018) QUESTÃO 50

Considere o quadrilátero $ABCO$, de vértices A, B e C na circunferência e vértice O no centro dela. Nessas condições x mede



(a) $30°$
(b) $45°$
(c) $55°$

(d) $60°$

R: O ângulo $\angle ABC$ mede a metade do arco que subscreve. Logo, $\angle ABC = 110°$. Veja que $\angle AOC$ é o replemento de $220°$, isto é, é o que falta para $220°$ chegar a $360°$. Logo, $\angle AOC = 360° - 220° = 140°$. Fazendo então a soma dos ângulos internos do quadrilátero informado:

$$\begin{aligned} 50° + 110° + 140° + x &= 360° \\ 300° + x &= 360° \\ x &= 60°. \end{aligned}$$

Gabarito: D

■■■(EEAR-2018) QUESTÃO 51

Considere uma roda de 20cm de raio que gira, completamente e sem interrupção, 20 vezes no solo. Assim, a distância que ela percorre é ____ πm.

(a) 100
(b) 80
(c) 10
(d) 8

R: O comprimento dessa roda é:

$$\begin{aligned} C &= 2\pi R \\ &= 2\pi \cdot 20 \\ &= 40\pi \text{cm}. \end{aligned}$$

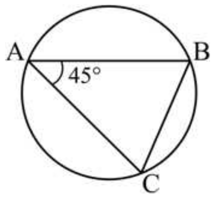
Girando 20 vezes percorrerá $20 \cdot 40\pi = 800\pi$cm. Passando para metros:

$$800\pi \text{cm} = 8\pi \text{m}.$$

Gabarito: D

(EEAR-2018) QUESTÃO 52

O triângulo ABC está inscrito na circunferência.



Se $BC = 8$, a medida do raio é

(a) $4\sqrt{2}$
(b) $2\sqrt{2}$
(c) 4
(d) 2

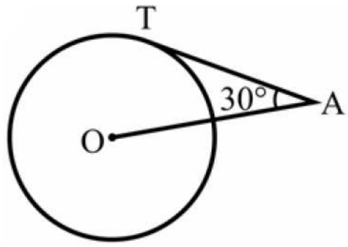
R: Basta aplicarmos a lei dos senos:

$$\frac{8}{\text{sen}\,45^\circ} = 2R$$
$$8 = 2R \cdot \text{sen}\,45^\circ$$
$$8 = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$8 = R\sqrt{2}$$
$$R = \frac{8}{\sqrt{2}}$$
$$R = 4\sqrt{2}.$$

Gabarito: A

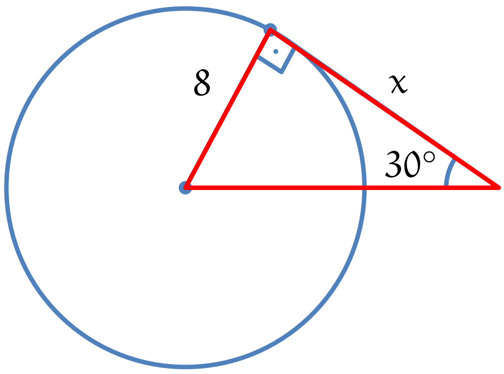
(EEAR-2019) QUESTÃO 53

O segmento $\overline{AT}$ é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio $R = 8\,\text{cm}$. A potência de A em relação à circunferência é igual a ____ cm^2.



(a) 16
(b) 64
(c) 192
(d) 256

R: Vejamos a figura com o raio traçado:



Podemos, então, encontrar x usando trigonometria no triângulo destacado em vermelho:

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{8}{x}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{x}$$
$$x = 8\sqrt{3}.$$

A potência de um ponto em relação ao círculo, conhecido um segmento tangente pode ser calculado por x^2:

$$x^2 = (8\sqrt{3})^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 64 \cdot 3 \\
&= 192.
\end{aligned}
$$

Gabarito: C

(EEAR-2019) QUESTÃO 54

Com um fio de arame, deseja-se cercar dois jardins: um circular, de raio $3\,\text{m}$, e o outro triangular, cujo perímetro é igual ao comprimento da circunferência do primeiro. Considerando $\pi = 3,14$, para cercar totalmente esses jardins, arredondando para inteiros, serão necessários ____metros de arame.

(a) 29
(b) 30
(c) 35
(d) 38

R: O jardim circular terá perímetro possível de calcular da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
C &= 2\pi R \\
&= 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \\
&= 18,84\,\text{m}
\end{aligned}
$$

O jardim triangular deverá ter o mesmo comprimento, isto é, $18,84\,\text{m}$. dessa forma, serão necessários, para cercar ambos:

$$
\begin{aligned}
18,84 + 18,84 &= 37,68\,\text{m} \\
&\approx 38\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

0.1– GABARITO

Q. 1: D	**Q. 12**: C	**Q. 23**: A	**Q. 34**: C	**Q. 45**: B
Q. 2: C	**Q. 13**: D	**Q. 24**: A	**Q. 35**: B	**Q. 46**: A
Q. 3: B	**Q. 14**: C	**Q. 25**: A	**Q. 36**: A	**Q. 47**: B
Q. 4: B	**Q. 15**: B	**Q. 26**: A	**Q. 37**: A	**Q. 48**: B
Q. 5: D	**Q. 16**: A	**Q. 27**: D	**Q. 38**: B	**Q. 49**: B
Q. 6: B	**Q. 17**: B	**Q. 28**: B	**Q. 39**: C	**Q. 50**: D
Q. 7: D	**Q. 18**: B	**Q. 29**: A	**Q. 40**: A	**Q. 51**: D
Q. 8: D	**Q. 19**: B	**Q. 30**: B	**Q. 41**: D	**Q. 52**: A
Q. 9: C	**Q. 20**: A	**Q. 31**: B	**Q. 42**: B	**Q. 53**: C
Q. 10: A	**Q. 21**: D	**Q. 32**: A	**Q. 43**: D	**Q. 54**: D
Q. 11: B	**Q. 22**: D	**Q. 33**: A	**Q. 44**: B	