Dado o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, calcule:

1. $P(2)$

$P(2) = 2^3 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 4$
$P(2) = 8 + 2\cdot 4 + 6 + 4$
$P(2) = 8 + 8 + 6 + 4$
$P(2) = 26$

$\boxed{26}$

2. $P(-1)$

$P(-1) = (-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 4$
$P(-1) = -1 + 2\cdot 1 - 3 + 4$
$P(-1) = -1 + 2 - 3 + 4$
$P(-1) = 2$

$\boxed{2}$

3. $P(i)$

$P(i) = i^3 + 2\cdot i^2 + 3\cdot i + 4$
$P(i) = -i + 2\cdot(-1) + 3i + 4$
$P(i) = 4 - 2 + 3i - i$
$P(i) = 2 + 2i$

$\boxed{2 + 2i}$

4. $P(\sqrt{2})$

$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + 2\cdot(\sqrt{2})^2 + 3\cdot(\sqrt{2}) + 4$
$P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2\cdot 2 + 3\sqrt{2} + 4$
$P(\sqrt{2}) = 4 + 4 + \sqrt{2}\cdot(2+3)$
$P(\sqrt{2}) = 8 + 5\sqrt{2}$

$\boxed{8 + 5\sqrt{2}}$

Dado o polinômio $P(x) = 2x^4 + 2ix^3 + x + i$, verifique se são raízes de $P(x)$:

5. i

Para ser raíz, $P(i) = 0$

$P(i) = 2\cdot i^4 + 2\cdot i\cdot i^3 + i + i$
$P(i) = 2\cdot(1) + 2\cdot i^4 + 2i$
$P(i) = 2 + 2\cdot 1 + 2i$
$P(i) = 4 + 2i$

$\boxed{4 + 2i \neq 0 \Rightarrow \text{Não é uma raiz!}}$

6. $-i$

Para ser raíz, $P(-i) = 0$

$P(-i) = 2\cdot(-i)^4 + 2\cdot i\cdot(-i)^3 + (-i) + i$
$P(-i) = 2\cdot 1 + 2\cdot i\cdot i + 0$
$P(-i) = 2 - 2$
$P(-i) = 0$

$\boxed{\text{É uma raíz!}}$

7. -1

Para ser raíz, $P(-1) = 0$

$P(-1) = 2\cdot(-1)^4 + 2\cdot i(-1)^3 - 1 + i$
$P(-1) = 2\cdot 1 - 2\cdot i - 1 + i$
$P(-1) = 2 - 1 - 2i + i$
$P(-1) = 1 - i$

$\boxed{1 - i \neq 0 \Rightarrow \text{Não é uma raiz!}}$

8. Qual é o termo constante (independente de x) do polinômio obtido desenvolvendo $(2x+1)^4 + (2x-1)^2 + 4$?

Sabendo que:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + \underline{b^2}$ $\qquad$ $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + \underline{b^4}$

Estes são os únicos termos constantes obtidos desenvolvendo as equações!

Desta forma, sabendo que o termo b das duas equações é 1, temos que:

termo constante $= b^4 + b^2 + 4$
termo constante $= 1^4 + 1^2 + 4$
termo constante $= 6$

$\boxed{6}$

Dê o grau do polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$ nos casos em que:

9. $a \neq 0, b = c = 0$

$P(x) = ax^2 + 0\cdot x + 0$
$P(x) = ax^2$

$\boxed{2^\circ \text{ grau}}$

10. $b \neq 0, a = c = 0$

$P(x) = 0\cdot x^2 + bx + 0$
$P(x) = bx = bx^1$

$\boxed{1^\circ \text{ grau}}$

11. $c \neq 0, a = b = 0$

$P(x) = ax^2 + 0\cdot x + 0$
$P(x) = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + c$
$P(x) = c$

$\boxed{\text{grau } 0}$

12. Discuta, para $m \in \mathbb{C}$, o grau do polinômio $P(x) = \underline{mx^3} + \underline{(m-1)x^2} + x + m$.

$m \neq 0$
GRAU 3

$m = 0$ e $m - 1 \neq 0$
$m \neq 1$ X
GRAU 2

mas veja que $P(x)$ só poderá ser de grau 2 quando $m = 0$, pois qualquer valor de m diferente de 1 que não zero, não anula o termo x^3.

Por isso: $\boxed{\begin{array}{l} m \neq 0 \Rightarrow gr(P) = 3 \\ m = 0 \Rightarrow gr(P) = 2 \end{array}}$

13. Calcule a, b e c de modo que o polinômio $P(x) = (a+b+c)x^2 + (b-c)x + (c-1)$ seja identicamente nulo.

Todos os termos do polinômio devem ser nulos!

$a + b + c = 0$
$a + 1 + 1 = 0$
$a + 2 = 0$
$a = -2$

$b - c = 0$
$b - 1 = 0$
$b = 1$

$c - 1 = 0$
$c = 1$

$\boxed{(a = -2, b = 1, c = 1)}$

Calcule a, b, c e d nas identidades.

14. $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 3x^2 - 7x + 1$

$\underline{ax^3} + \underline{bx^2} + \underline{cx} + \underline{d} \equiv \underline{3x^2} - \underline{7x} + \underline{1}$

$a = 0$ $\qquad$ $b = 3$ $\qquad$ $c = -7$ $\qquad$ $d = 1$

$\boxed{(a = 0, b = 3, c = -7, d = 1)}$

15. $ax^3 + (b+1)x^2 + (2c+1)x + (3d+2) \equiv x^3 - 1$

$\underline{ax^3} + \underline{(b+1)x^2} + \underline{(2c+1)x} + \underline{(3d+2)} \equiv \underline{x^3} - \underline{1}$

$a = 1$

$b + 1 = 0$
$b = -1$

$2c + 1 = 0$
$2c = -1$
$c = -\frac{1}{2}$

$3d + 2 = -1$
$3d = -1 - 2$
$d = \frac{-3}{3}$
$d = -1$

$\boxed{(a = 1, b = -1, c = -1/2, d = -1)}$

16. $(a+b-c-d)x^3 + (b-2c)x^2 + (c-d)x + (2c-6) \equiv 0$

$\underline{(a+b-c-d)x^3} + \underline{(b-2c)x^2} + \underline{(c-d)x} + \underline{(2c-6)} \equiv 0$

$a + b - c - d = 0$
$a + 6 - 3 - 3 = 0$
$a = 0$

$b - 2c = 0$
$b - 2\cdot 3 = 0$
$b - 6 = 0$
$b = 6$

$c - d = 0$
$3 - d = 0$
$d = 3$

$2c - 6 = 0$
$2c = 6$
$c = \frac{6}{2}$
$c = 3$

$\boxed{(a = 0, b = 6, c = 3, d = 3)}$