DOMÍNIO E IGUALDADE DE FUNÇÕES

ESTUDO DO DOMÍNIO DAS FUNÇÕES

Muitas vezes as funções vêm explicitadas apenas pela lei de formação. Nesses casos, o contradomínio da função é $\mathbb{R}$ e o domínio é o conjunto de todos os números reais x que fazem com que a função esteja bem definida. Em outras palavras, é o conjunto de todos os números reais x que fazem com que a função exista.

Em várias funções, dependendo da lei de formação, como por exemplo, $y = x$, não precisamos nos preocupar com o domínio, mas em outras funções, como por exemplo $y = \frac{1}{x}$, precisamos restringir o domínio, já que o denominador de uma fração não pode ser zero.

Mas então, quais são os casos em que precisamos nos preocupar com a função estar bem definida? Vamos voltar nossa atenção aos casos de: lei de formação com fração, lei de formação com raiz de índice par e lei de formação com raiz de índice par no denominador.

Lei de formação com fração

Nesse caso precisamos lembrar que o denominador de uma fração não pode ser igual a zero.

Exemplo: $f(x) = \dfrac{7}{x - 10}$

Temos que impor a seguinte restrição para o domínio: $x - 10 \neq 0$

$$x - 10 \neq 0 \Rightarrow x \neq 10$$

Note que para a função dada, o único valor real que impede com que essa função exista é o 10, sendo assim, dizemos que seu domínio é:

$$Dm(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 10\}$$

Também podemos escrever o domínio acima da forma: $Dm(f) = \mathbb{R} - \{10\}$, ou ainda, pela notação de intervalo: $Dm(f) = (-\infty, 10) \cup (10, +\infty)$.

Observações:

- Todas as formas mencionadas acima dizem a mesma coisa. Todas nos dizem que o domínio da função é o conjunto de todos os números reais, exceto o número 10.

- Em $Dm(f) = \mathbb{R} - \{10\}$, lemos como "o domínio da função é o conjunto de todos os números reais, exceto o conjunto unitário formado pelo número 10".

- Em $Dm(f) = (-\infty, 10) \cup (10, +\infty)$, lemos como "o domínio da função é o conjunto de todos os números reais menores que 10 unido com todos os números reais maiores que 10".

Lei de formação com raiz de índice par

Nesse caso precisamos lembrar que o radicando não pode ser negativo.

Exemplo: $g(x) = \sqrt{2x - 7}$

Temos que impor a seguinte restrição para o domínio: $2x - 7 \geq 0$

$$2x - 7 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2}$$

Sendo assim, o domínio dessa função é dado por $Dm(g) = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$. Agora você pode tentar escrever esse domínio das outras formas!

Lei de formação com raiz de índice par no denominador

Nesse caso precisamos lembrar que o denominador da fração tem que ser diferente de zero e não pode ser negativo.

Exemplo: $h(x) = \dfrac{20}{\sqrt{x - 9}}$

Temos que impor a seguinte restrição para o domínio: $x - 9 > 0$

$$x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$$

Sendo assim, o domínio dessa função é dado por $Dm(h) = \{x \in \mathbb{R} / x > 9\}$. Novamente, você pode tentar escrever o domínio das outras formas!

Lembre-se: o problema do domínio é com raízes de **índice par!** Raízes com índice ímpar no numerador não temos problemas de restrição de domínio.

Observação: se a raiz de índice ímpar aparecer no denominador, precisamos garantir que o radicando não seja zero.

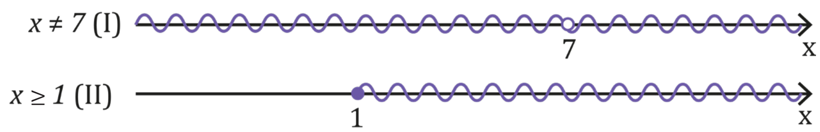
Mistura dos casos anteriores e funções sem problemas de restrição

Agora, e se os casos anteriores aparecerem juntos na mesma lei de formação, como faremos? Nesse caso precisamos aplicar todas as restrições necessárias e considerá-las simultaneamente.

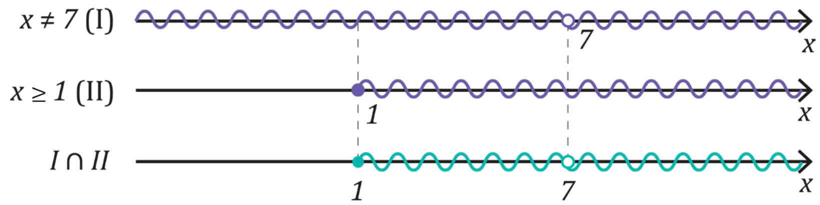
Exemplo: $f(x) = \dfrac{30}{x - 7} - \sqrt{x - 1}$

Temos que impor duas restrições: $x - 7 \neq 0$ e $x - 1 \geq 0$. Note que essas duas restrições precisam ocorrer ao mesmo tempo para que a função exista.

Representando na reta real cada restrição como intervalos temos:



E assim, fazendo a intersecção das duas restrições para elas ocorrerem simultaneamente temos:



Com isso concluímos que $Dm(f) = [1,7) \cup (7,\infty)$.

Ainda, existem funções em que não precisamos nos preocupar com as restrições de seus domínios. Por exemplo, funções como $f(x) = x; g(x) = x^2; h(x) = \dfrac{7}{x^4 + 5}$ e por aí vai.

As funções f e g são polinômios e por isso seus domínios sempre são $\mathbb{R}$, já a função h não tem problema de restrição porque seu denominador é composto por x^4 que sempre será um valor maior ou igual a zero, mas esse valor está somado com 5, então não ocorre do denominador ser igual a zero.

Para essas funções em que não ocorre restrição de domínio, seus domínios são os reais.

IGUALDADE DE FUNÇÕES

Se vamos trabalhar com várias funções, faz sentido nos perguntarmos quando duas funções são iguais ou não.

> Dizemos que duas funções f e g são iguais se, e somente se, possuem a mesma lei de formação e o mesmo domínio.

As funções vão aparecer com leis de formação diferentes em um primeiro momento. Para verificarmos a igualdade entre as duas leis, precisamos partir de uma entre as duas leis, manipulá-la através de operações matemáticas e tentarmos chegar na outra. Se isso for possível, ambas as funções terão a mesma lei de formação, caso contrário, a igualdade não ocorre.

Se as leis de formação forem iguais, precisamos também verificar a igualdade dos domínios das funções. Nesse caso, pegamos as leis de formação das duas funções e fazemos a análise de seus domínios. Caso elas tenham o mesmo domínio, podemos garantir que as funções são iguais. Caso contrário, mesmo as funções apresentando leis de formação iguais, as funções serão diferentes.

Exemplo: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$

Primeiro analisemos as leis de formação das funções. Partindo de f temos que:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

Note então que partimos da lei de formação de f e chegamos na lei de formação de g. As duas funções têm, então, a mesma lei de formação.

Agora, podemos partir para a análise do domínio.

Para f temos que: $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$, ou seja $Dm(f)=\mathbb{R}-\{1\}$.

Já, para g, temos que $Dm(g)=\mathbb{R}$.

Logo, elas possuem domínios diferentes. Consequentemente, as funções não são iguais.

ANOTAÇÕES