INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

PROVAS RESOLVIDAS - 1992

- Física
- Matemática

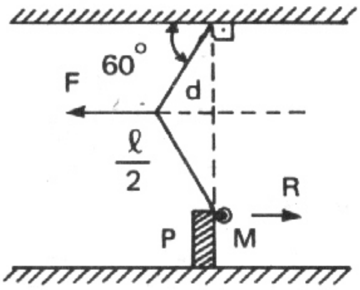
FÍSICA

QUESTÃO 01

Resposta: A

Na figura abaixo, a massa esférica M pende de um fio de comprimento ℓ mas está solicitada para a esquerda por uma força F que mantém a massa apoiada contra uma parede vertical P, sem atrito. Determine os valores de F e de R (reação da parede). (O raio da esfera $<< \ell$).

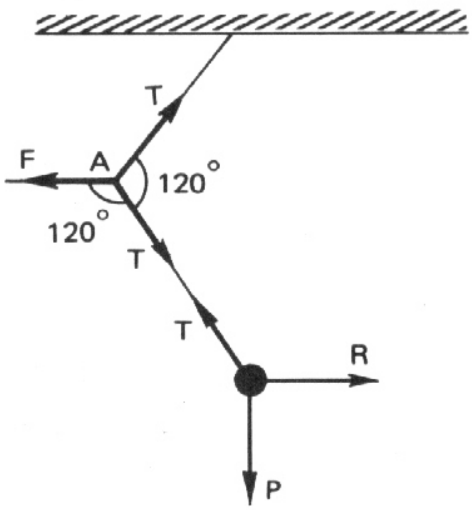
	F	R
A)	$\frac{2\,Mg\sqrt{3}}{3}$	$\frac{Mg\sqrt{3}}{3}$
B)	$\frac{8\,Mg\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\,Mg\sqrt{3}}{3}$
C)	$\frac{4\,Mg\sqrt{3}}{3}$	$\frac{Mg\sqrt{3}}{3}$
D)	$\frac{8\,Mg\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\,Mg\sqrt{3}}{3}$
E)	$Mg\sqrt{3}$	$\frac{Mg\sqrt{3}}{2}$



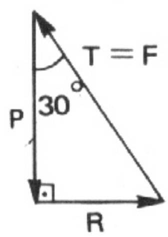
RESOLUÇÃO:

Como as forças que atuam no ponto A formam 120° entre si, a condição de equilíbrio nesse ponto é:

$$F = T$$



Para que a esfera fique em equilíbrio, as forças $\vec{T}$, $\vec{R}$ e $\vec{P}$ devem formar uma linha poligonal fechada.
Da figura obtemos:



$$\cos 30^\circ = \frac{P}{F} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2\,Mg\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\, 30^\circ = \frac{R}{P} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{Mg\sqrt{3}}{3}$$

QUESTÃO 02

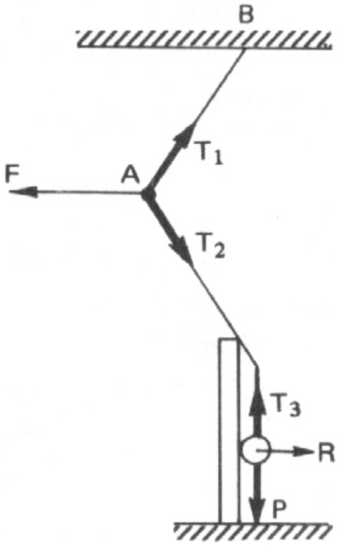
Resposta: D

Na questão Nº 1 a) Calcule o trabalho W realizado pela força F para fazer subir lentamente ($v \cong 0$) a massa M em termos da variação da energia potencial de M, desde a posição em que o fio está na vertical até a situação indicada no desenho; b) Verifique se é posssível calcular esse trabalho como o produto de F, já calculada, pelo deslocamento d. [Na resolução do problema justifique a resposta b)].

	a)	b)
A)	$0{,}29\ Mg\ell$	Não
B)	$0{,}13\ Mg\ell$	Sim
C)	$0{,}50\ Mg\ell$	Não
D)	$0{,}13\ Mg\ell$	Não
E)	$0{,}29\ Mg\ell$	Sim

RESOLUÇÃO:

a) Como não há variação de energia cinética ($v \approx 0$), o trabalho da resultante em qualquer elemento do sistema é nulo. Esse trabalho pode ser determinado, em cada caso, pela soma algébrica dos trabalhos das forças que atuam no elemento.



- *Para o ponto A:* $\mathscr{T}_{\vec{F}} + \mathscr{T}_{\vec{T}_1} + \mathscr{T}_{\vec{T}_2} = 0$

  Mas, $\mathscr{T}_{\vec{T}_1} = 0$, *pois o deslocamento do ponto A é um arco de circunferência em torno de B. Logo,* $\mathscr{T}_{\vec{F}} = -\mathscr{T}_{\vec{T}_2}$ *(1)*

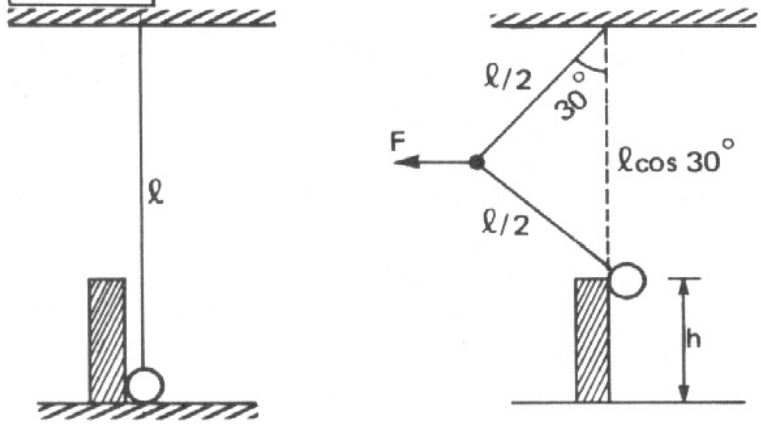
- *Para o fio:* $-\mathscr{T}_{\vec{T}_2} - \mathscr{T}_{\vec{T}_3} = 0 \Rightarrow -\mathscr{T}_{\vec{T}_2} = \mathscr{T}_{\vec{T}_3}$ *(2)*

- *Para a esfera:* $\mathscr{T}_{\vec{T}_3} + \mathscr{T}_{\vec{R}} + \mathscr{T}_{\vec{P}} = 0$

  Mas $\mathscr{T}_{\vec{R}} = 0$, *pois o deslocamento da esfera é perpendicular à força* $\vec{R}$ *e*

  $\mathscr{T}_{\vec{P}} = -\Delta\varepsilon_p$. *Logo,* $\mathscr{T}_{\vec{T}_3} = \Delta\varepsilon_p$ *(3)*

  De (1), (2) e (3) vem: $\mathscr{T}_{\vec{F}} = \Delta\varepsilon_p$ *(4)*



$$h = \ell - \ell \cos 30° \quad \Rightarrow \quad h = 0{,}13\,\ell \quad (5)$$

Das equações (4) e (5), concluímos: $\mathcal{T}_F = 0{,}13\ Mg\ell$

b) O produto mencionado **não** *corresponde ao trabalho de* $\vec{F}$*, pois essa força é variável.*

QUESTÃO 03

Resposta: C

Dois automóveis que correm em estradas retas e paralelas, têm posições a partir de uma origem comum, dadas por:

$$x_1 = (30t)\ \text{m}$$
$$x_2 = (1{,}0 \cdot 10^3 + 0{,}2\,t^2)\ \text{m}$$

Calcule o(os) instante(s) t (t') em que os dois automóveis devem estar lado a lado. [Na resposta você deverá fazer um esboço dos gráficos $x_1(t)$ e $x_2(t)$].

	t(s)	t'(s)
A)	100	100
B)	2,5	7,5
C)	50	100
D)	25	75
E)	Nunca ficarão lado a lado	

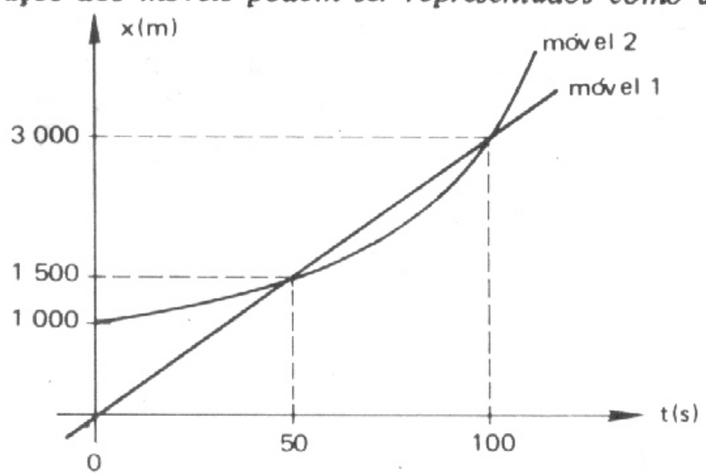
RESOLUÇÃO:

Como as estradas são retas e paralelas e os espaços são medidos a partir de uma origem comum, as posições dos automóveis serão coincidentes quando $x_1 = x_2$.

$$30\,t = 1{,}0 \cdot 10^3 + 0{,}2\,t^2$$

Daí encontramos $t = 50$ s *e* $t' = 100$ s.

Graficamente os espaços dos móveis podem ser representados como abaixo:



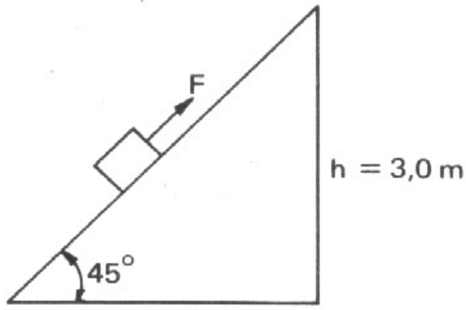
QUESTÃO 04

Resposta: D

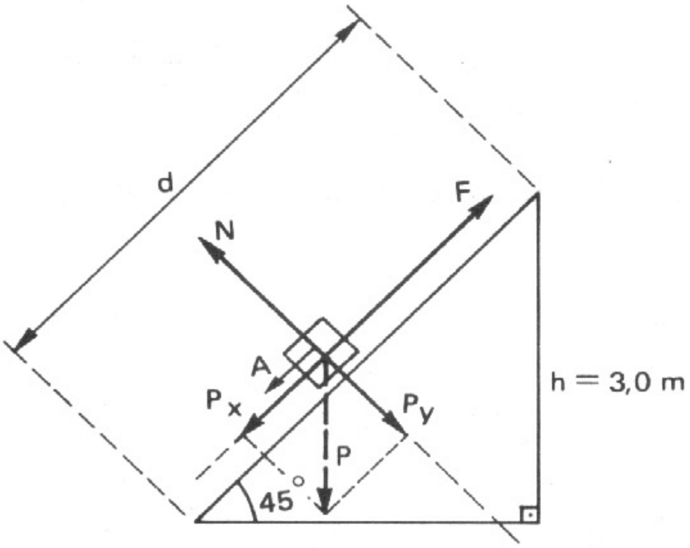
Um bloco de massa igual a 5,0 kg é puxado para cima por uma força F = 50 N sobre o plano inclinado da figura, partindo do repouso. Use $g = 10\ m/s^2$.
O coeficiente de atrito cinético plano-bloco é $\mu = 0,25$.

a) Calcule a energia cinética com que o bloco chega ao topo do plano.
b) Calcule a aceleração do bloco.
c) Escreva a velocidade do bloco em função do tempo.

	E_c(J)	a(m/s²)	v(m/s)
A)	20	1,0	$0,5\ t^2$
B)	25	1,2	$0,6\ t^2$
C)	50	2,4	1,2 t
D)	25	1,2	1,2 t
E)	15	1,0	0,4 t



RESOLUÇÃO:



$$\begin{cases} F = 50\,N \\ N = P_y = P\cos 45^\circ = 25\sqrt{2}\,N \\ A = \mu N = 6,25\sqrt{2}\,N \\ P_x = P\,\text{sen}\,45^\circ = 25\sqrt{2}\,N \\ d = \dfrac{h}{\text{sen}\,45^\circ} = 3\sqrt{2}\,m \end{cases}$$

A resultante das forças é:

$R = F - A - P_x \rightarrow R \approx 5,8\,N$

A) Pelo T.E.C. tem-se:

$$\mathcal{T}^{\vec{R}} = \Delta\varepsilon_c \rightarrow R \times d = \varepsilon_c^f - \cancel{\varepsilon_c^i}^{\,0}$$

$$\varepsilon_c^f \approx 25\,J$$

B) Pela 2ª Lei de Newton

$R = m \cdot \gamma \rightarrow \gamma \approx 1,2\ m/s^2$

C) Trata-se de um M.U.V, logo:

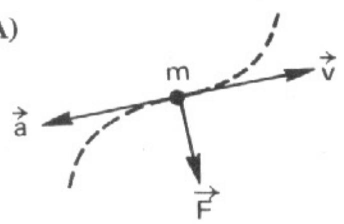
$v = v_0 + at \rightarrow v = (1,2\,t)\ m/s$

QUESTÃO 05

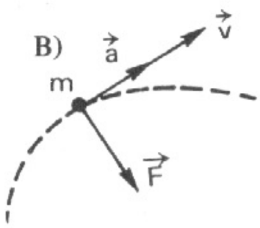
Resposta: D

Seja $\vec{F}$ a resultante das forças aplicadas a uma particula de massa m, velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$. Se a partícula descrever uma trajetória plana, indicada pela curva tracejada em cada um dos esquemas abaixo, segue-se que, aquele que relaciona corretamente os vetores coplanares $\vec{v}$, $\vec{a}$ e $\vec{F}$ é:

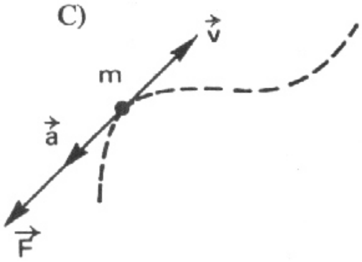
A)



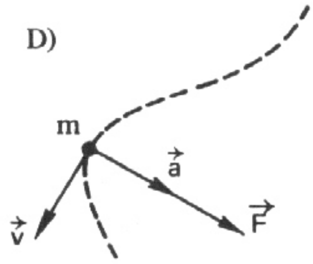
B)



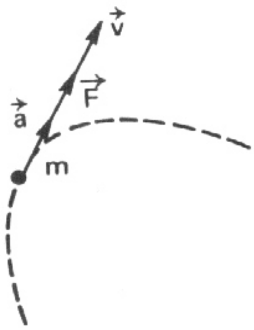
C)



D)



E)



RESOLUÇÃO:

Quando uma partícula percorre uma trajetória plana, as grandezas $\vec{F}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$ apresentam as seguintes propriedades:

1ª) $\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória.

2ª) se a trajetória é curvilínea, $\vec{a}$ tem o sentido voltado para a concavidade da curva.

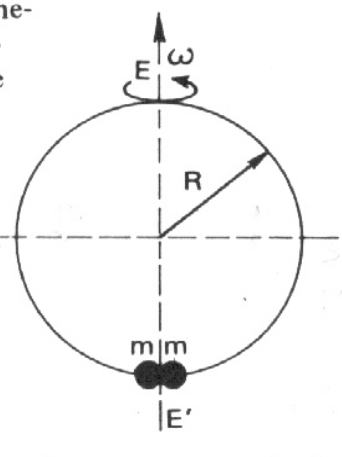
3ª) $\vec{F}$ tem sempre a mesma direção e sentido de $\vec{a}$.

A única alternativa de acordo com as propriedades citadas é a D.

QUESTÃO 06

Resposta: B

Um aro metálico circular e duas esferas são acoplados conforme ilustra a figura ao lado. As esferas dispõem de um furo diametral que lhes permite circular pelo aro. O aro começa a girar, a partir do repouso, em torno do diâmetro vertical EE', que passa entre as esferas, até atingir uma velocidade angular constante ω. Sendo R o raio do aro, m a massa de cada esfera e desprezando-se os atritos, pode-se afirmar que:



A) as esferas permanecem na parte inferior do aro porque esta é a posição de mínima energia potencial.

B) as esferas permanecem a distâncias r de EE' tal que, se 2θ for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelo centro das esferas, na posição de equilíbrio estável, então $\tan\theta = \dfrac{\omega^2 r}{g}$, estando as esferas abaixo do diâmetro horizontal do aro.

C) as esferas permanecem a distâncias r de EE' tal que, se 2θ for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelos centros das esferas, na posição de equilíbrio estável, então $\tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$, estando as esferas acima do diâmetro horizontal do aro.

D) as alternativas (B) e (C) anteriores estão corretas.

E) a posição de maior estabilidade ocorre quando as esferas estão nos extremos de um mesmo diâmetro.

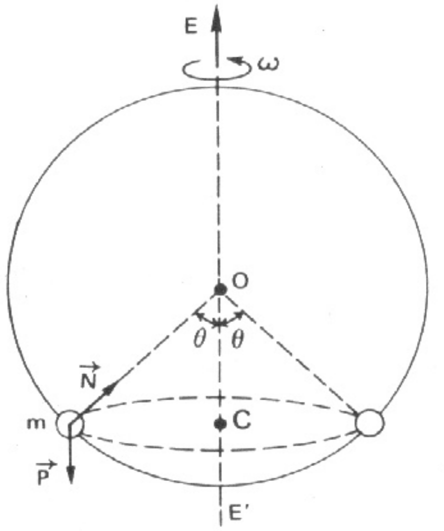
RESOLUÇÃO:

Quando as esferas atingem a velocidade ω, estarão realizando um movimento circular uniforme no plano horizontal, logo:

$$\vec{R_C} = \vec{P} + \vec{N}$$

Como a Normal tem direção que passa pelo centro (O) do aro, conclui-se que as esferas se encontram abaixo do diâmetro horizontal do aro.

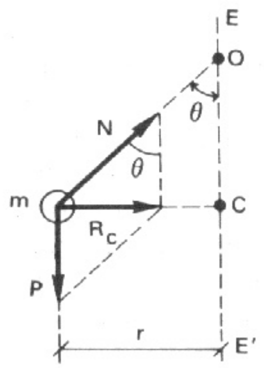
Tomando um instante em que uma das esferas se encontra "à esquerda" do centro de rotação (C), temos:



$$tg\,\theta = \frac{R_C}{P} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{m\omega^2 r}{mg}$$

logo:

$$tg\,\theta = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$



$\vec{P}$ *: peso da esfera*

$\vec{N}$*: força que o aro aplica na esfera (Normal)*

QUESTÃO 07

Resposta: C

Um objeto de massa M é deixado cair de uma altura h. Ao final do 1º segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa m e velocidade v, que nele se aloja. Calcule o desvio x que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

A) $\sqrt{2h/g}\ (M + m)\,v$.

B) $\sqrt{2h/g}\ \frac{m}{M + m}\,v$.

C) $(\sqrt{2h/g} - 1)\ \frac{m}{M + m}\,v$.

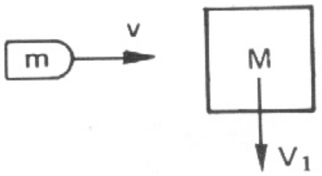
D) $(\sqrt{2h/g} - 1)\ \frac{M + m}{m}\,v$.

E) $(1 - \sqrt{2h/g})\ (M + m)v$.

RESOLUÇÃO:

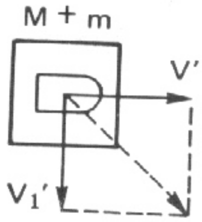
Ao final do 1º segundo e imediatamente antes da colisão, temos:

onde $V_1 = g \cdot t = g$



$$\left.\begin{array}{l}(Q_{sist})\ x = m \cdot v \\ (Q_{sist})\ y = M \cdot V_1\end{array}\right\}$$ *componentes da quantidade de movimento do sistema antes da colisão.*

Imediatamente após a colisão, temos:



$$(Q_{sist})\ x = (M + m)\ V'$$
$$(Q_{sist})\ y = (M + m)\ V_1'$$

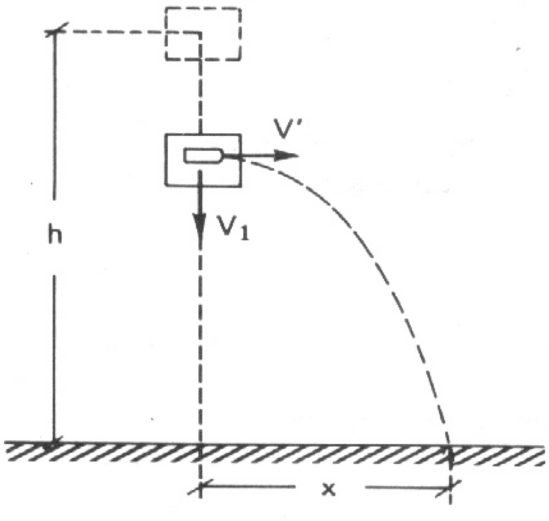
Durante a colisão o sistema pode ser tratado como isolado, portanto

$$(M + m) \cdot V' = m \cdot v \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{mv}{M + m} \quad (1)$$

$$(M + m)\ V_1' = M \cdot V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1' = \frac{M \cdot V_1}{M + m}$$ *, considerando* $m << M$ *temos*

$$V_1' = V_1$$

A partir daí, até o impacto com o solo, tem-se:



$$x = V' \cdot t' \quad (2)$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

sendo $t' = t - 1$, *vem:*

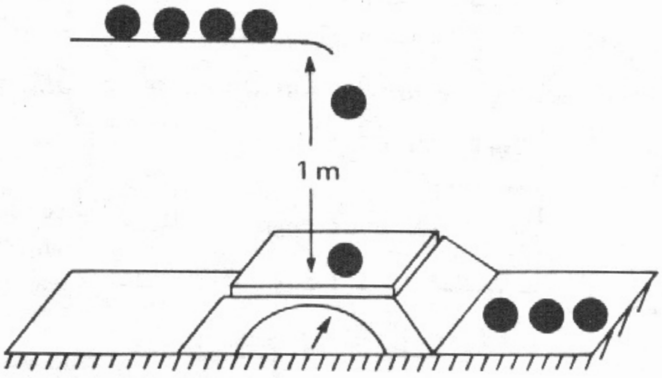
$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \quad (3)$$

Substituindo (1) *e* (3) *em* (2), *teremos* $x = \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right) \frac{m}{M + m} \cdot V$

QUESTÃO 08

Resposta: D

No dispositivo da figura, bolas de gude de 20 g cada uma estão caindo, a partir do repouso, de uma altura de 1 metro, sobre a plataforma de uma balança. Elas caem a intervalos de tempo iguais Δt e após o choque estão praticamente paradas, sendo imediatamente retiradas da plataforma.



Sabendo que o ponteiro da balança indica, em média, 20 kg, e que a aceleração da gravidade vale 10 m s^{-2}, podemos afirmar que a freqüência de queda é:

A) $\sqrt{20}$ bolas por segundo.

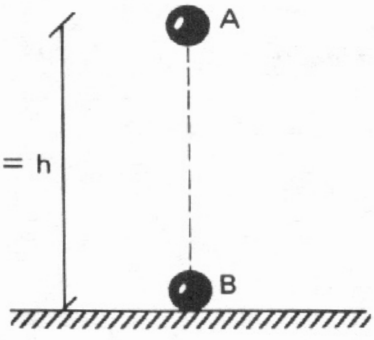
B) $20\sqrt{5}$ bolas por segundo.

C) 1/60 bolas por segundo.

D) $10^3\sqrt{5}$ bolas por segundo.

E) 10^2 bolas por segundo.

RESOLUÇÃO:



Como $\varepsilon^B_{mec} = \varepsilon^A_{mec}$, *a velocidade de cada bola ao atingir a plataforma será dada por:*

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad \therefore$$

$$v = 2\sqrt{5} \text{ m/s} \quad (1)$$

Ao atingir a plataforma, cada bola, durante a colisão sofre a aplicação de uma força $(\vec{F}_m)$ *que corresponde ao peso de um corpo de massa 20 kg, logo:*

$$F_m = mg = 20 \times 10 \Rightarrow F_m = 200 \text{ N.}$$

Usando o teorema do impulso durante a colisão:

$F_m \Delta t = m\Delta v (2)$, *onde:*

- F_m = *intensidade da força média que a plataforma aplica na bola.*
- Δt = *intervalo de tempo de cada colisão.*
- Δv = *intensidade da variação da velocidade da colisão.*

Substituindo (1) em (2), vem:

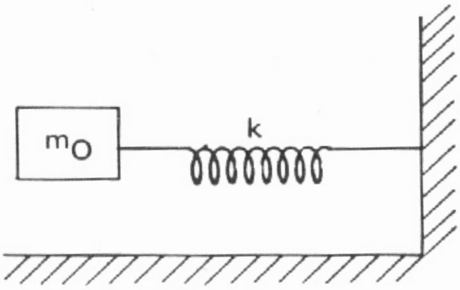
$$200 \times \Delta t = 20 \times 10^{-3} \times 2\sqrt{5} \Rightarrow \Delta t = 2 \times 10^{-4}\sqrt{5} \text{ s}$$

Portanto a freqüência de queda será: $n = \dfrac{1}{\Delta t} \Rightarrow n = 10^3\sqrt{5}$ *bolas por segundo.*

QUESTÃO 09

Resposta: C

Uma forma de medir a massa m de um objeto em uma estação espacial com gravidade zero é usar um instrumento como mostrado na figura. Primeiro o astronauta mede a freqüência f_0 de oscilação de um sistema elástico de massa m_0 conhecida. Após, a massa desconhecida é adicionada a este sistema e uma nova medida da freqüência, f, de oscilação é tomada. Como podemos determinar a massa desconhecida a partir dos dois valores de medida da freqüência?



A) $m = m_0 \dfrac{f_0^2}{f^2}$

B) $m = m_0 (f_0^2 - f^2)$

C) $m = m_0 (\dfrac{f_0^2}{f^2} - 1)$

D) $m = m_0 (\dfrac{f_0^2}{f^2} - 2)$

E) $m = m_0 (\dfrac{f_0^2}{f^2} + 1)$

RESOLUÇÃO:

O período de oscilação do sistema mostrado na figura é dado por:

$T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{k}}$ *; onde* m *é a massa oscilante e* **k** *é a constante elástica da mola.*

Assim, a freqüência de oscilação é:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aplicando a expressão acima nas experiências citadas no enunciado, têm-se:

– *para o corpo de massa* m_O: $f_O = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{k}{m_O}}$ *ou* $f_O{}^2 = \dfrac{1}{4\pi^2} \cdot \dfrac{k}{m_O}$ *(I)*

– *Após adicionar o corpo de massa* **m**: $f = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{k}{m_O + m}}$ *ou*

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{k}{(m_O + m)} \quad (II)$$

Dividindo-se (I) por (II):

$$\frac{f_O{}^2}{f^2} = \frac{\cancel{\frac{1}{4\pi^2}} \cdot \dfrac{\cancel{k}}{m_O}}{\cancel{\frac{1}{4\pi^2}} \cdot \dfrac{\cancel{k}}{m_O + m}} = \frac{m_O + m}{m_O}$$

$$\therefore \; m = m_O \left(\frac{f_O{}^2}{f^2} - 1\right)$$

QUESTÃO 10

Resposta: C

Dois vasos comunicantes contêm dois líquidos não miscíveis, I e II, de massas específicas d_1 e d_2, sendo $d_1 < d_2$, como mostra a figura. Qual é a razão entre as alturas das superfícies livres desses dois líquidos, contadas a partir da sua superfície de separação?

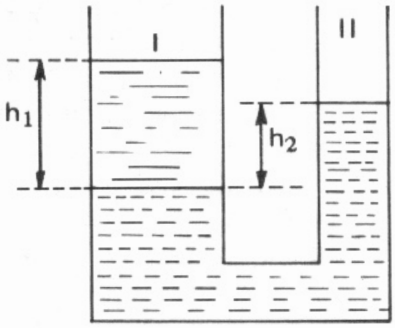
A) $h_1 = \frac{d_2}{h_2 d_1}$

B) $\frac{h_1}{h_2} = (\frac{d_2}{d_1}) - 1$

C) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1}$

D) $\frac{h_1}{h_2} = (\frac{d_2}{d_1}) + 1$

E) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2}$



RESOLUÇÃO:

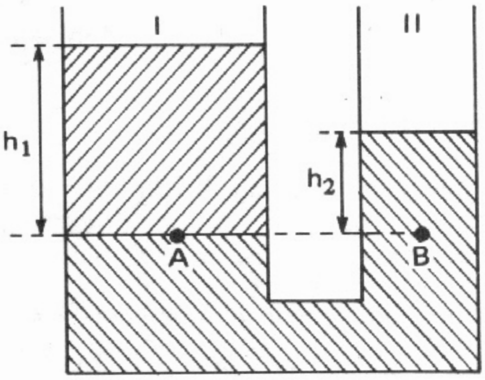
Os pontos A e B estão submetidos à mesma pressão:

$$p_A = p_B$$

Aplicando-se o Teorema de Stevin a esses pontos:

$$p_{atm} + d_1 g h_1 = p_{atm} + d_2 g h_2$$

$$d_1 h_1 = d_2 h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1}$$



QUESTÃO 11

Resposta: E

Na 3ª lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre o cubo do semi-eixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:

A) $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GMR}{4\pi^2}$

B) $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GR}{4\pi^2}$

C) $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GM}{2\pi^2}$

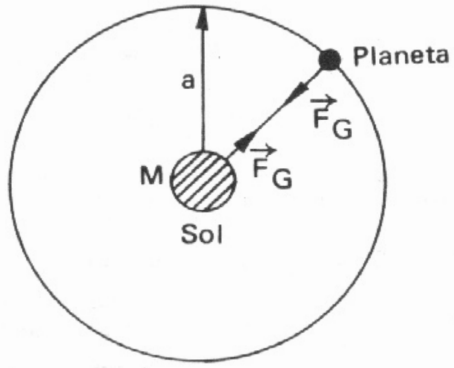
D) $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GM^2}{R}$

E) $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

RESOLUÇÃO:

A força gravitacional ($\vec{F}_G$) aplicada pelo Sol no planeta, corresponde à resultante centrípeta, logo:

$$F_G = R_C \Rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{a^2} = m \cdot a_c \ ,$$



onde: *G: constante de gravitação universal;*
M: massa do Sol;
m: massa do planeta;
a: raio da órbita circular.

$a_c = \frac{4\pi^2}{p^2} \cdot a \Rightarrow$ *aceleração centrípeta do planeta.*

Então:

$$G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{a^2} = \frac{\cancel{m} 4\pi^2}{p^2} \cdot a \Rightarrow \frac{a^3}{p^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

QUESTÃO 12

Resposta: B

Uma certa quantidade de gás expande-se adiabaticamente e quase estaticamente desde uma pressão inicial de 2,0 atm e volume de 2,0 ℓ na temperatura de 21 °C até atingir o dobro de seu volume. Sabendo-se que para este gás $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 2,0$, pode-se afirmar que a pressão final e a temperatura final são respectivamente:

A) 0,5 atm e 10,5 °C
B) 0,5 atm e − 126 °C
C) 2,0 atm e 10,5 °C
D) 2,0 atm e − 126 °C
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Numa transformação adiabática, tem-se: $p \cdot V^\gamma = cte$ *onde* $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Assim:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad \text{onde:} \quad \begin{cases} p_1 = 2{,}0\ atm \\ V_1 = 2{,}0\ \ell \\ V_2 = 4{,}0\ \ell \\ \gamma = 2{,}0 \end{cases}$$

logo: $p_2 = 0{,}5\ atm$

Pela equação do gás perfeito, vem:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \text{onde} \quad T_1 = (273 + 21)\ K$$

logo $T_2 = 147\ K$ *ou* $T_2 = -126\ °C$

QUESTÃO 13

Resposta: E

Nas afirmações abaixo

(I) a energia interna de um gás ideal depende só da pressão;
(II) quando um gás passa de um estado 1 para outro estado 2, o calor trocado é o mesmo qualquer que seja o processo;
(III) quando um gás passa de um estado 1 para outro estado 2, a variação da energia interna é a mesma qualquer que seja o processo;
(IV) um gás submetido a um processo quase-estático não realiza trabalho;
(V) o calor específico de uma substância não depende do processo como ela é aquecida;
(VI) quando um gás ideal recebe calor e não há variação de volume, a variação da energia interna é igual ao calor recebido;

(VII) Numa expansão isotérmica de um gás ideal o trabalho realizado é sempre menor do que o calor absorvido;

as duas corretas são:

A) (II) e (III)
B) (III) e (IV)
C) (III) e (V)
D) (I) e (VII)
E) (III) e (VI)

RESOLUÇÃO:

I) Errada. A energia interna é função da temperatura absoluta e, portanto, do produto $p \cdot V$.

(II) Errada. De acordo com o primeiro Princípio da Termodinâmica:

$$\Delta U = Q - \mathcal{T}$$

Logo, $$Q = \Delta U + \mathcal{T}$$

A variação de energia interna (ΔU) depende apenas dos estados 1 e 2 mas, o trabalho depende do processo.

(III) Certa. A energia interna é função exclusiva do estado do gás. Logo, a variação de energia interna depende apenas dos estados 1 e 2.

(IV) Errada. O trabalho é nulo apenas quando o processo é isométrico.

(V) Errada. Conforme citado na justificativa da afirmação II, o calor trocado depende do tipo de transformação. Assim, o calor específico depende do processo.

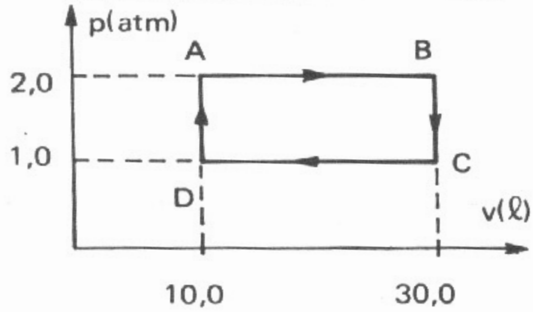
(VI) Certa. Não havendo variação de volume, o trabalho é nulo e, de acordo com o primeiro Princípio da Termodinâmica, $\Delta U = Q$.

(VII) Errada. Numa transformação isotérmica, $\Delta U = 0$ e, em conseqüência, $Q = \mathcal{T}$.

QUESTÃO 14

Resposta: A

Uma molécula-grama de gás ideal sofre uma série de transformações e passa sucessivamente pelos estados A → B → C → D, conforme o diagrama pV ao lado, onde $T_A = 300\,K$.



Pode-se afirmar que a temperatura em cada estado, o trabalho líquido realizado no ciclo e a variação da energia interna no ciclo são respectivamente:

	T_A(K)	T_B(K)	T_C(K)	T_D(K)	ΔW (atm · ℓ)	ΔU(J)
A)	300	900	450	150	20,0	0
B)	300	900	450	150	- 20,0	0
C)	300	450	900	150	20,0	0
D)	300	900	450	150	60,0	40
E)	n.d.a.					

RESOLUÇÃO:

- *Cálculo das temperaturas T_B, T_C e T_D*
  - *Transformação A - B (isobárica)*

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \quad \therefore \quad \frac{10}{300} = \frac{30}{T_B} \quad \Rightarrow \quad T_B = 900\,K \qquad (I)$$

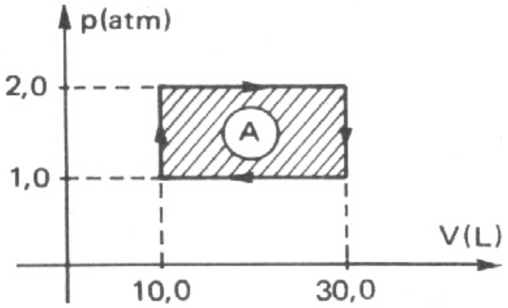
– *Transformação B – C (isométrica)*

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \therefore \frac{2}{900} = \frac{1}{T_C} \Rightarrow T_C = 450\,K \qquad (II)$$

– *Transformação C – D (isobárica)*

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D} \therefore \frac{30}{450} = \frac{10}{T_D} \Rightarrow T_D = 150\,K \qquad (III)$$

- *Cálculo da variação da energia interna (ΔU).*
  Como a transformação é cíclica: $\Delta U = 0$ *(IV)*
- *Cálculo do trabalho da força de pressão em um ciclo (ΔW).*



$$\Delta W \overset{N}{=} + A = 20 \times 1$$

$$\therefore \; \Delta W = 20\,atm \times L \quad (V)$$

De (I), (II), (III), (IV) e (V) conclui-se que a alternativa correta é A.

Comentário:

A expressão "trabalho líquido realizado no ciclo" foi entendida como "trabalho da força de pressão em um ciclo".

QUESTÃO 15

Resposta: B

Uma carga puntiforme $-Q_1$ de massa m percorre uma órbita circular de raio R em torno de outra carga $+Q_2$ fixa no centro do círculo. A velocidade angular ω de $-Q_1$ é.

A) $\omega = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

B) $\omega = \sqrt{\dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$

C) $\omega = \left[\dfrac{Q_1 Q_2 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\right]^2$

D) $\omega = \dfrac{mR}{4\pi\varepsilon_0} \; \dfrac{Q_1}{Q_2}$

E) $\omega = \dfrac{mR}{4\pi\varepsilon_0} \; \dfrac{Q_2}{Q_1}$

RESOLUÇÃO:

Considerando a força elétrica como a resultante sobre o corpo de carga $-Q_1$ *e massa m:*

$$F_{elet.} = R_c$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{Q_1 Q_2}{R^2} = m\,\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

Comentário:

a) Entendemos por "carga puntiforme $-Q_1$ de massa m", "corpo de carga $-Q_1$ e massa m".
b) Os sinais das cargas dos corpos é tal que $Q_1Q_2 > 0$.
c) Entendemos por "carga $+Q_2$", "corpo de carga $+Q_2$".

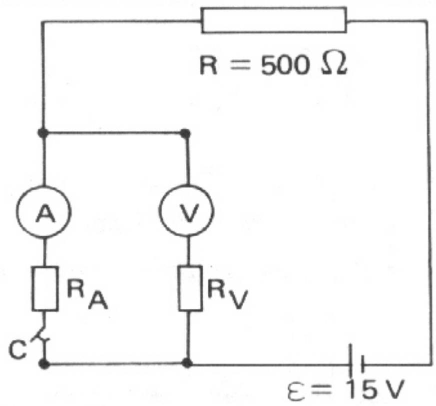
QUESTÃO 16

Resposta: E

No circuito ao lado V e A são um voltímetro e um amperímetro respectivamente, com fundos de escala (leitura máxima)

FEV = 1 V e $R_V = 1000\ \Omega$

FEA = 30 mA e $R_A = 5\ \Omega$

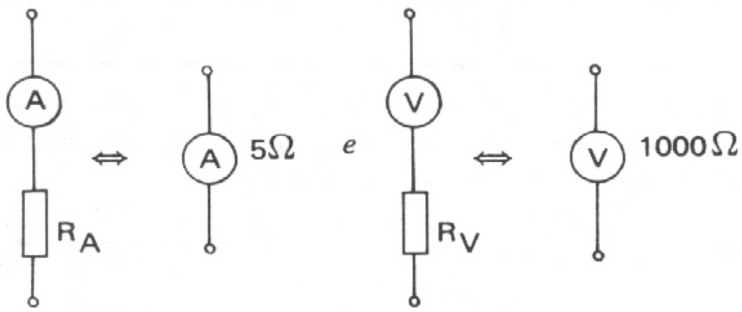


Ao se abrir a chave C:

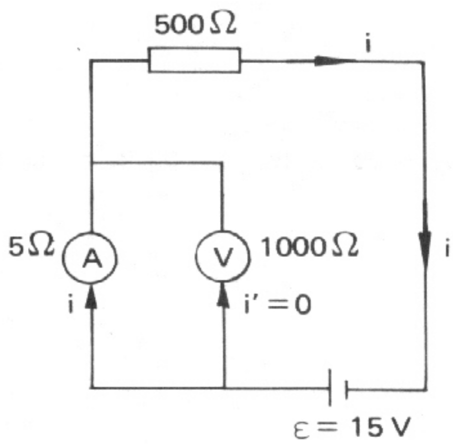
A) o amperímetro terá leitura maior que 30 mA e pode se danificar.
B) O voltímetro indicará 0 V.
C) O amperímetro não alterará sua leitura.
D) O voltímetro não alterará sua leitura.
E) O voltímetro terá leitura maior que 1 V e pode se danificar.

RESOLUÇÃO:

- *Para facilidade de representação utilizaremos as equivalências:*



- *Com a chave C fechada:*

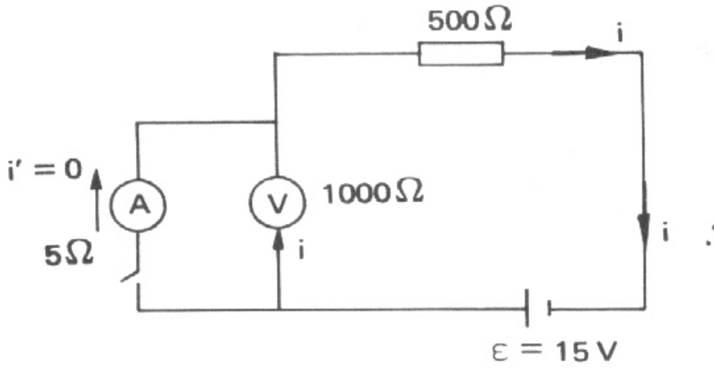


$$i \approx \frac{15}{500} \approx 0{,}03\,A$$

$\therefore$ (A) *indica 0,03 A*

(V) *indica praticamente zero.*

- *Com a chave C aberta:*



$$i = \frac{15}{1500} = 0{,}01\ A$$

$\therefore$ Ⓐ *indica zero*

Ⓥ *indica* $U = 1000 \times 0{,}01 = 10\ V$

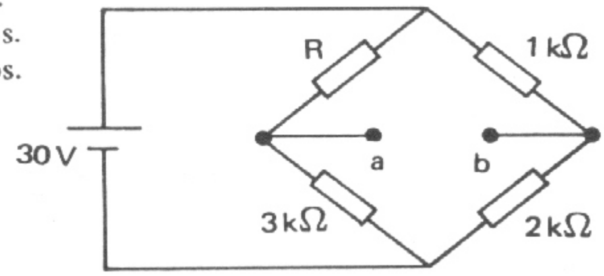
Logo, ao fechar C a leitura do amperímetro cai de 0,03 A para zero e a do voltímetro sobe de zero para 10 V podendo, portanto, danificar o voltímetro.

QUESTÃO 17

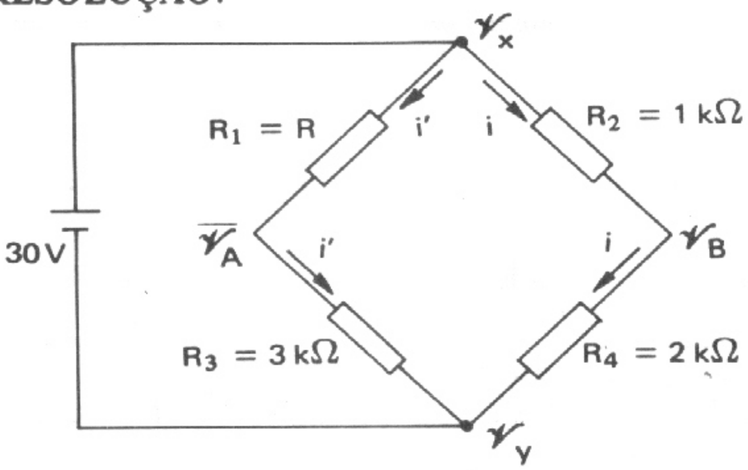
Resposta: B

A ponte de resistores da figura abaixo apresenta na temperatura ambiente, uma tensão $V_a - V_b = 2{,}5$ V entre seus terminais a e b. Considerando que a resistência R está imersa em um meio que se aquece a uma taxa de 10 graus centígrados por minuto, determine o tempo que leva para que a tensão entre os terminais a e b da ponte se anule. Considere para a variação da resistência com a temperatura um coeficiente de resistividade de $4{,}1 \times 10^{-3}\,K^{-1}$.

A) 8 minutos e 10 segundos.
B) 12 minutos e 12 segundos.
C) 10 minutos e 18 segundos.
D) 15,5 minutos.
E) n.d.a.



RESOLUÇÃO:



Adontando-se $\mathcal{V}_y = 0$
tem-se $\mathcal{V}_x = 30\ V$

Situação inicial: $\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B = 2{,}5\ V$

I. Cálculo de i:

$$i = \frac{\mathcal{V}_x - \mathcal{V}_y}{R_2 + R_4} = \frac{30}{3 \times 10^3} \Rightarrow i = 10\ mA$$

II. *Cálculo de* $\mathcal{V}_B$:

$$\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_y = R_4 \cdot i = 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_B = 20\ V$$

III. *Cálculo de* $\mathcal{V}_A$:

$$\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B = 2{,}5\ V \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_A = 22{,}5\ V$$

IV. *Cálculo de* i':

$$i' = \frac{\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_y}{R_3} = \frac{22{,}5}{3 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad i' = 7{,}5\ mA$$

V. *Cálculo de* R:

$$R = \frac{\mathcal{V}_x - \mathcal{V}_A}{i'} = \frac{30 - 22{,}5}{7{,}5 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad R = 1\ k\Omega$$

Situação final: $\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B = 0$

Quando a diferença de potencial entre os pontos A e B do circuito é nula, tem-se:

$$R \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

Assim: $$R = \frac{1 \times 10^3 \times 3 \times 10^3}{2 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad R = 1{,}5\ K\Omega$$

Sendo: ρ *a resistividade,*
α *o coeficiente de variação da resistividade com a temperatura,*
$\Delta\theta$ *a variação de temperatura*

tem-se: $\Delta\rho = \rho_0 \cdot \alpha\Delta\theta$

Mas, pela 2ª Lei de Ohm, a resistência é diretamente proporcional à resistividade. Dessa forma:

$$\Delta R = R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$$

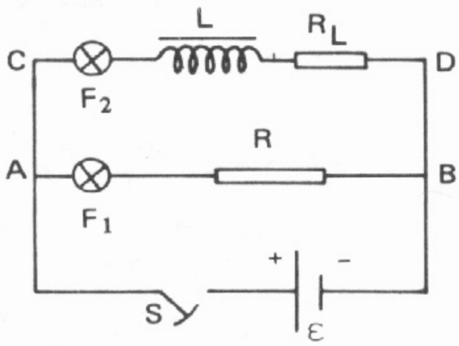
$$0{,}5 \cdot 10^3 = 1 \times 10^3 \cdot 4{,}1 \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{500}{41} \approx 122\ k$$

O intervalo de tempo necessário para que a variação acima ocorra, a uma taxa de 10 k por minuto, é de 12 minutos e 12 segundos.

QUESTÃO 18

Resposta: D

No circuito ao lado ε é uma bateria de 3,0 V, L é um indutor com resistência própria $R_L = R$, F_1 e F_2 são duas lâmpadas iguais para 3,0 V e S é uma chave interruptora. Ao fechar S:



A) F_1 acende primeiro que F_2 pois a corrente elétrica passa primeiro no ramo AB.
B) F_1 e F_2 acendem ao mesmo tempo pois as resistências R e R_L são iguais.
C) F_1 e F_2 não acendem pois a voltagem de 3,0 V se divide entre os ramos AB e CD.
D) F_1 acende primeiro que F_2 pois o ramo CD tem indutor que tende a impedir, inicialmente, o estabelecimento da corrente elétrica por CD.
E) F_2 nunca se acenderá pois o indutor impede o estabelecimento da voltagem no ramo CD.

RESOLUÇÃO:

- *Supondo a bateria ideal, fechando-se S tanto a ddp entre A e B como a ddp entre C e D ficam iguais a 3 V.*
- *Assim, a lâmpada F_1 acende instantaneamente pois está ligada em série com um resistor.*
- *A lâmpada F_2 não acende imediatamente pois está em série com o indutor L, que no instante inicial se comporta como circuito aberto.*

QUESTÃO 19

Resposta: C

Um catálogo de fábrica de capacitores descreve um capacitor de 25 V de tensão de trabalho e de capacitância 22.000 μF. Se a energia armazenada neste capacitor se descarrega num motor sem atrito arranjado para levantar um tijolo de 0,5 kg de massa, a altura alcançada pelo tijolo é: $(g = 10\ m/s^2)$

A) 1 km.
B) 10 cm.
C) 1,4 m.
D) 20 m.
E) 2 mm.

RESOLUÇÃO:

A energia potencial elétrica armazenada no capacitor é integralmente transformada em energia potencial gravitacional. Assim:

$$\frac{CU^2}{2} = mgh \quad \therefore \quad h = \frac{CU^2}{2mg} = \frac{22.000 \times 10^{-6} \times (25)^2}{2 \times 0,5 \times 10} \quad \Rightarrow \quad h \approx 1,4\ m$$

QUESTÃO 20

Resposta: A

Consideremos uma carga elétrica q entrando com velocidade $\vec{v}$ num campo magnético $\vec{B}$. Para que a trajetória de q seja uma circunferência é necessário e suficiente que:

A) $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$ e que $\vec{B}$ seja uniforme e constante.
B) $\vec{v}$ seja paralela a $\vec{B}$.
C) $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$.
D) $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$ e que $\vec{B}$ tenha simetria circular.
E) Nada se pode afirmar pois não é dado o sinal de q.

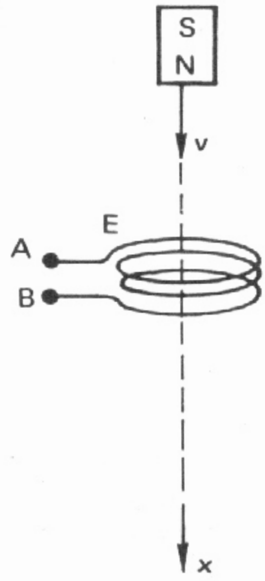
RESOLUÇÃO:

- *Supondo que a força magnética seja única, para o movimento ser circular e uniforme é necessário e suficiente que:*
  1) *a velocidade seja perpendicular ao campo $\vec{B}$. Com isto se garante a existência da força magnética e movimento plano;*
  2) *o campo seja uniforme na região e constante no tempo. Isto é garante um raio de curvatura constante.*

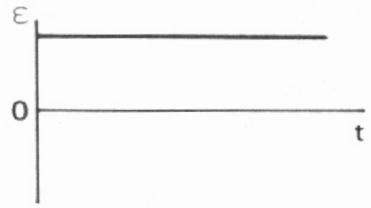
QUESTÃO 21

Resposta: E

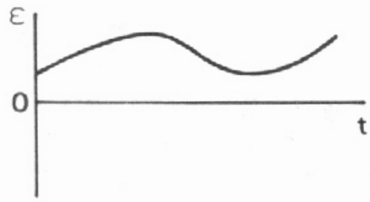
Um ímã se desloca com velocidade constante ao longo do eixo x da espira E, atravessando-a. Tem-se que a f.e.m. ε induzida entre A e B varia em função do tempo mais aproximadamente, de acordo com a figura:



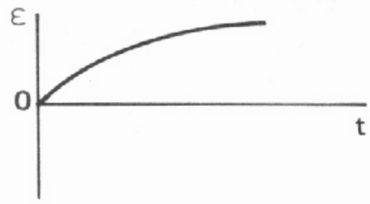
A)



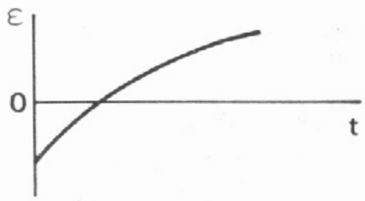
B)



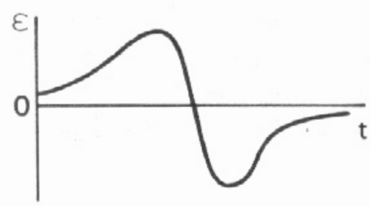
C)



D)



E)



RESOLUÇÃO:

A fem induzida nos terminais da espira pode ser obtida pela taxa de variação do fluxo magnético através dela (Lei de Faraday). Quando o ímã se encontra muito distante da espira, seu deslocamento ocasiona pequenas variações no fluxo magnético, portanto, a fem induzida assume baixos valores e varia lentamente. Nas proximidades da espira a aproximação e o afastamento do ímã ocasionam grandes variações no fluxo magnético, portanto, a fem induzida assume valores elevados em módulo e varia com rapidez. No entanto, as fem induzidas na aproximação e no afastamento possuem sinais opostos (Lei de Lenz).

O gráfico que representa a situação descrita acima é o apresentado na alternativa **E.**

QUESTÃO 22

Resposta: D

Qual dos conjuntos de cores está em ordem decrescente de comprimentos de onda?

A) Verde, azul, vermelho.
B) Amarelo, laranja, vermelho.
C) Azul, violeta, vermelho.
D) Verde, azul, violeta.
E) Violeta, azul, verde.

RESOLUÇÃO:

No vácuo, todas as radiações eletromagnéticas têm a mesma velocidade.
Sendo $v = c = \lambda \cdot f = const.$, conclui-se que a freqüência da radiação (f) e seu correspondente comprimento de onda (λ) são inversamente porporcionais.
A freqüência determina a coloração da radiação e aumenta do vermelho para o violeta.
Portanto, o comprimento de onda (λ) diminui do vermelho para o violeta.

– *VERMELHO*
– *ALARANJADO*
– *AMARELO*
– *VERDE*
– *AZUL*
– *ANIL*
– *VIOLETA*

λ *diminui*

QUESTÃO 23

Resposta: B

Um jovem estudante para fazer a barba mais eficientemente, resolve comprar um espelho esférico que aumente duas vezes a imagem do seu rosto quando ele se coloca a 50 cm dele. Que tipo de espelho ele deve usar e qual o raio de curvatura?

A) Convexo com r = 50 cm.
B) Côncavo com r = 200 cm.
C) Côncavo com r = 33,3 cm.
D) Convexo com r = 67 cm.
E) Um espelho diferente dos mencionados.

RESOLUÇÃO:

O espelho deve formar uma imagem ampliada duas vezes e direita.

Assim $A = +2 = \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{p'}{p}$

Como $p = +50$ *cm (Objeto real):*

$$+2 = \frac{-p'}{50} \Rightarrow p' = -100 \text{ cm (Imagem virtual)}$$

De acordo com equação dos pontos conjugados:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \quad \therefore \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{50} - \frac{1}{100}$$

$\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{100} \Rightarrow f = +100$ *cm, o que corresponde a um espelho côncavo de distância focal 100 cm, portanto, de raio de curvatura* $R = 200$ *cm.*

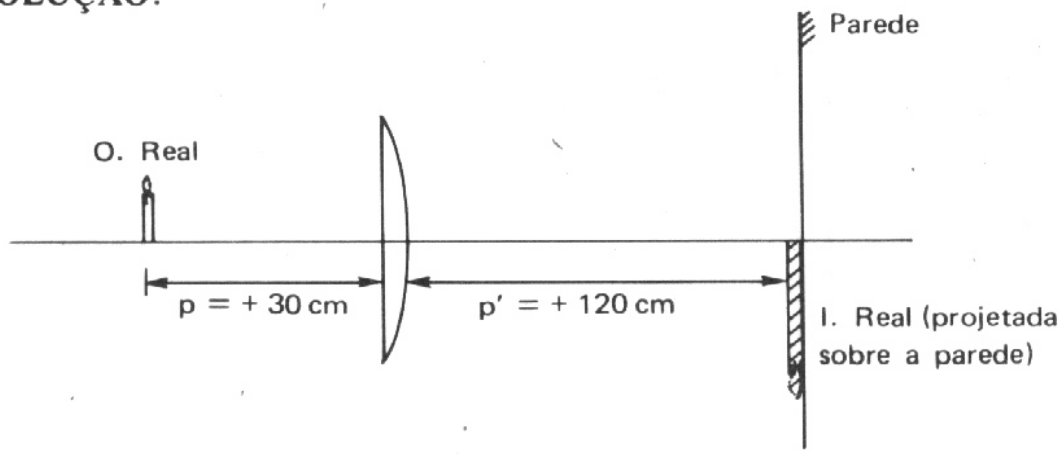
QUESTÃO 24

Resposta: D

Uma vela se encontra a uma distância de 30 cm de uma lente planoconvexa que projeta uma imagem nítida de sua chama em uma parede a 1,2 m de distância da lente. Qual é o raio de curvatura da parte curva da lente se o índice de refração da mesma é 1,5?

A) 60 cm.
B) 30 cm.
C) 24 cm.
D) 12 cm.
E) É outro valor diferente dos anteriores.

RESOLUÇÃO:



- *Da equação dos pontos conjugados:*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{30} + \frac{1}{120} \Rightarrow f = +24\ cm$$

- *A equação do fabricante relaciona a geometria da lente com os índices de refração da lente e do meio externo.*

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_{meio}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$ *onde R_1 e R_2 são valores associados aos raios de curvatura das faces. Como uma das faces é plana $R_1 \to \infty$.*

- *Assim:* $$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_{meio}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{24} = \left(\frac{1,5}{1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\therefore R_2 = 12\ cm$$

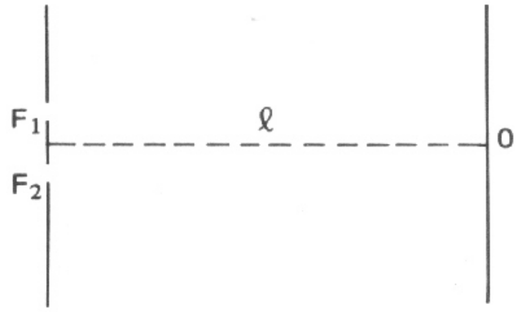
Logo, o raio de curvatura da segunda face é 12 cm.

QUESTÃO 25

Resposta: E

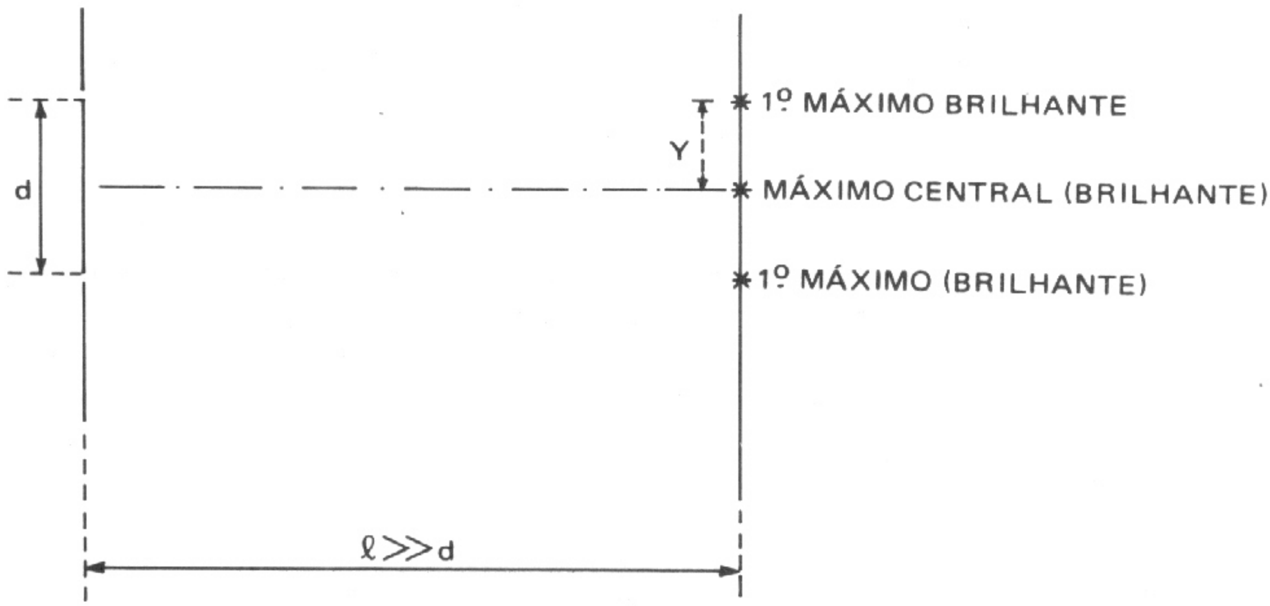
Numa experiência de interferência de Young, os orifícios são iluminados com luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 6 \times 10^{-5}$ cm, a distância d entre eles é de 1 mm e a distância ℓ deles ao anteparo é 3 m. A posição da primeira franja brilhante, em relação ao ponto 0 (ignorando a franja central) é:

A) + 5 mm
B) − 5 mm
C) ± 3 cm
D) ± 6,2 mm
E) ± 1,8 mm



RESOLUÇÃO:

A experiência de Young é esquematizada da seguinte forma:



Para que haja franja brilhante, deve haver interferência construtiva.
Para o primeiro máximo a partir do máximo central é possível demonstrar que:

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{Y}{\ell} \therefore \frac{6 \times 10^{-5}\ cm}{1 \times 10^{-1}\ cm} = \frac{Y}{3\ m}$$

$\Rightarrow Y = 1{,}8 \times 10^{-3}\ m = 1{,}8\ mm$

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

R: conjunto dos números reais.

R*: conjunto dos números reais não nulos.

i: unidade imaginária.

$[a, b] = \{x \in R: a \leqslant x \leqslant b\}$

$[a, b) = \{x \in R: a \leqslant x < b\}$

$[a, +\infty) = \{x \in R: x \geqslant a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$

$(a, b); (a, b]; (a, +\infty); (-\infty, a]$ são definidos analogamente.

$M_{m\times n}$: conjunto das matrizes reais de m linhas e n colunas.

Se $A \in M_{n\times n}$, det A denota o determinante da matriz A.

$\binom{n}{k}$: combinação de n elementos tomados k a k.

QUESTÃO 01

Resposta: C

Considere as funções f: R* → R, g: R → R e h: R* → R definidas por:

$$f(x) = 3^{x + \frac{1}{x}}, \; g(x) = x^2; \; h(x) = \frac{81}{x}$$

O conjunto dos valores de x em R* tais que (fog) (x) = (hof) (x), é subconjunto de:

A) $[0, 3]$
B) $[3, 7]$
C) $[-6, 1]$
D) $[-2, 2]$
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Dado que $f(x) = 3^{x + \frac{1}{x}}$, $g(x) = x^2$ *e* $h(x) = \frac{81}{x}$, *então, para todo* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, *vem:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3^{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \frac{81}{3^{x + \frac{1}{x}}} \; ;$$

portanto, $$3^{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{81}{3^{x + \frac{1}{x}}} \qquad (I)$$

Fazendo $x + \frac{1}{x} = t$, *resulta* $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; *então:*

de (I) vem: $3t^2 - 2 = \frac{81}{3^t}$

ou seja: $3^{t^2 - 2} = 3^{4 - t}$

que é o mesmo que $t^2 - 2 = 4 - t$

ou ainda que $t^2 + t - 6 = 0.$

Resolvendo, temos: $t = -3$ *ou* $t = 2$

Logo: $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \therefore x = 1$

Então o conjunto solução S é:

$S = \{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, 1\}$, *que é subconjunto de* $[-6, 1]$

QUESTÃO 02 O domínio da função $f(x) = \log_{2x^2 - 3x + 1}(3x^2 - 5x + 2)$ é:

Resposta: A

A) $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

B) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

C) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

É dado que $f(x) = \log_{(2x^2 - 3x + 1)}(3x^2 - 5x + 2)$; *aplicando as condições de existência de logaritmos, temos:*

$3x^2 - 5x + 2 > 0 \therefore x < \frac{2}{3}$ *ou* $x > 1$ (I)

e

$2x^2 - 3x + 1 > 0 \therefore x < \frac{1}{2}$ *ou* $x > 1$ (II)

e

$2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \therefore x \neq 0$ *e* $x \neq \frac{3}{2}$ (III)

O domínio de f(x) é (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III) ; *portanto:*

$x < \frac{1}{2}$ *ou* $x > 1$ *e* $x \neq 0$ *e* $x \neq \frac{3}{2}$

ou ainda:

$(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

QUESTÃO 03

Resposta: A

Dadas as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere h = fog. Então podemos afirmar que:

A) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
B) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
C) h é estritamente crescente mas não é necessariamente inversível.
D) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Dados:

I f *é estritamente decrescente*
II g *é estritamente decrescente*
III f *é sobrejetora*
IV g *é sobrejetora*
V $h = fog$

e sabendo-se que:

VI *Toda função real de variável real que é estritamente crescente ou estritamente decrescente é uma função injetora.*

Então:

De V *podemos escrever que, se* $\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$ *com* $x_1 > x_2$, *então* $h(x_1) = f(g(x_1))$ *e* $h(x_2) = f(g(x_2))$; *fazendo* $g(x_1) = y_1$ *e* $g(x_2) = y_2$, *de* II *conclui-se que* $y_1 < y_2$ *e, portanto,* $h(x_1) = f(y_1)$ *e* $h(x_2) = f(y_2)$; *de* I *concluímos que* $h(x_1) > h(x_2)$, *pois* $f(y_1) > f(y_2)$.

CONCLUSÃO 1: $x_1 > x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$. *Logo h é estritamente crescente e, portanto, de* VI *segue-se que h é injetora.*

De IV *temos:*

$\forall y,\ y \in \mathbb{R},\ \exists\, x,\ x \in \mathbb{R} \mid y = g(x) \qquad (\cdot)$

logo: $h(x) = f(g(x)) = f(y)$

De III *temos:*

$\forall z,\ z \in \mathbb{R}, \exists\, y,\ y \in \mathbb{R} \mid z = f(y) \qquad (\cdot\,\cdot)$

Logo: $h(x) = z$

de $(\cdot)$ *e* $(\cdot\,\cdot)$ *conclui-se que*

$\forall z,\ z \in \mathbb{R},\ \exists\, x,\ x \in \mathbb{R} \mid z = h(x)$,

portanto h é função sobrejetora

CONCLUSÃO 2. Sendo h uma função sobrejetora e injetora (conclusão 1), então h é bijetora; logo, é inversível.

Seja h^{-1} *a função inversa de h; pela definição de função inversa, para* x_1, x_2, y_1 *e* y_2 *reais, vem*

$y_1 = h(x_1) \Rightarrow x_1 = h^{-1}(y_1)$

$y_2 = h(x_2) \Rightarrow x_2 = h^{-1}(y_2)$

$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad h(x_1) > h(x_2)$ *(CONCLUSÃO 1),*
então:

$$h^{-1}(y_1) > h^{-1}(y_2) \quad \Rightarrow y_1 > y_2$$

CONCLUSÃO 3. h^{-1} *é estritamente crescente; portanto, das conclusões 1, 2 e 3, resulta que a alternativa correta é A.*

QUESTÃO 04

Resposta: A

Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Sendo S o conjunto dos valores de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

A) 4

B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

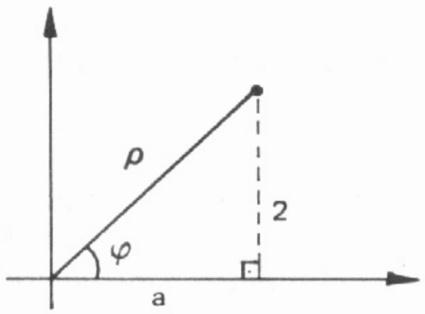
C) 8

D) $\frac{8}{\sqrt{3}}$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Sejam ρ *e* φ *respectivamente o módulo e o argumento de z e suponhamos* $a \in \mathbb{R}$*.*
Assim:



$$z^6 = \rho^6 \cdot [\cos(6\varphi) + i \operatorname{sen}(6\varphi)]$$

Para z^6 *ser número real:* $\operatorname{sen}(6\varphi) = 0 \quad \therefore \quad 6\varphi = h\pi \quad \therefore \quad \varphi = \frac{h\pi}{6}, \quad h \in \mathbb{Z}.$

Como $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$ *ou* $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Portanto:

$$tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{2}{a} \quad \therefore \quad a = \frac{2}{tg\,\pi/6}$$

ou

$$tg\,\frac{\pi}{3} = \frac{2}{a} \quad \therefore \quad a = \frac{2}{tg\,\pi/3}$$

Logo o produto dos valores de a é:

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{2}{tg\,\pi/6} \cdot \frac{2}{tg\,\pi/3} = 4$$

QUESTÃO 05

Resposta: D

Sabe-se que $2(\cos\frac{\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{20})$ é uma raiz quíntupla de w.

Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}\,i}{8\sqrt{2}} = 0$.

Um subconjunto de S é:

A) $\{2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{7\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{8}),\ 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{8} + i \text{ sen}\frac{\pi}{8})\}$

B) $\{2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{9\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{9\pi}{8}),\ 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{8})\}$

C) $\{2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{7\pi}{4} + i \text{ sen}\frac{7\pi}{4}),\ 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4} + i \text{ sen}\frac{\pi}{4})\}$

D) $\{2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{7\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{8}),\ 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{\pi}{8})\}$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Do enunciado: $w = 2^5 \cdot (\cos\frac{5\pi}{20} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{20}) = 32 \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi}{4}) =$
$= 16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} \cdot i$

A equação fica: $z^4 - 2z^2 + \dfrac{16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}\, i - 16\sqrt{2}\, i}{8\sqrt{2}} = 0$

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 \qquad \therefore \quad z^2 = \frac{2 \pm 2i}{2} \begin{cases} z^2 = 1 + i \\ \text{ou} \\ z^2 = 1 - i \end{cases}$$

$$z^2 = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi}{4}) \begin{cases} z = 2^{1/4} \cdot (\cos\frac{\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{\pi}{8}) \\ \text{ou} \\ z = 2^{1/4} \cdot (\cos\frac{9\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{9\pi}{8}) \end{cases}$$

ou

$$z^2 = 1 - i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{4}) \begin{cases} z = 2^{1/4} \cdot (\cos\frac{7\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{8}) \\ \text{ou} \\ z = 2^{1/4} \cdot (\cos\frac{15\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{15\pi}{8}) \end{cases}$$

QUESTÃO 06

Resposta: E

Considere a equação:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0$$

onde $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2}$ e $G(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Sobre as raízes reais dessa equação, temos:

A) Duas delas são negativas.
B) Uma delas é um número irracional.
C) Uma delas é um número par.
D) Uma delas é positiva e outra negativa.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

A equação dada é equivalente à seguinte:

$$2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0,$$

onde o determinante obtido é um determinante de Vandermonde. Portanto:

$2 \cdot (G(x) - 2x) \cdot (G(x) - F(x)) \cdot (2x - F(x)) = 0$ *ou seja:*

$G(x) = 2x$ *ou* $G(x) = F(x)$ *ou* $F(x) = 2x$ *ou ainda:*

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 2x \text{ ou } \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2} \text{ ou } \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2} = 2x.$$

Logo:

$x^2 - 1 = 2x^2$ *ou* $x^3 - x = x^4 + x^3 - x + 1$ *ou* $x^4 + x^3 - x + 1 = 2x^3$, *obtendo:*

$x^2 = -1$ *ou* $x^4 = -1$ *ou* $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$, *isto é* $(x - 1)(x^3 - 1) = 0$,

cuja única solução real é 1.

QUESTÃO 07

Resposta: C

Sejam a e b constantes reais. Sobre a equação

$$x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$$

podemos afirmar que:

A) Não possui raiz real se $a \leq b < -3$.
B) Não possui raiz real se $a > b > 3$.
C) Todas as raízes são reais se $|a| \geq 2$ e $|b| \geq 2$.
D) Possui pelo menos uma raiz real se $-1 < a \leq b < 1$.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Na equação dada:

$x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$,

$x = 0$ *não é solução; então, dividindo cada termo por* x^2 *e agrupando convenientemente, temos:* $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (a + b)(x + \frac{1}{x}) + ab + 2 = 0.$

Fazendo $x + \frac{1}{x} = m \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2$; *resulta:* $m^2 - (a + b)m + ab = 0$,

donde: $m = a$ *ou* $m = b$.

Então:

$$x + \frac{1}{x} = a \quad \therefore \quad x^2 - ax + 1 = 0$$

ou

$$x + \frac{1}{x} = b \quad \therefore \quad x^2 - bx + 1 = 0.$$

Estas equações terão soluções reais se, e somente se, $a^2 - 4 \geq 0$ *e* $b^2 - 4 \geq 0$, *ou seja:*
$a \leq -2$ *ou* $a \geq 2$ *e* $b \leq -2$ *ou* $b \geq 2$, *que é o mesmo que:* $|a| \geq 2$ *e* $|b| \geq 2$.

QUESTÃO 08

Resposta: C

Numa progressão geométrica de razão inteira $q > 1$, sabe-se que $a_1 a_n = 243$, $\log_q a_n = 6$ e $\log_q P_n = 20$, onde a_n é o n-ésimo termo da progressão geométrica e P_n é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

A) $\dfrac{3^9 - 1}{6}$

B) $\dfrac{3^{10} - 1}{6}$

C) $\dfrac{3^8 - 1}{6}$

D) $\dfrac{3^9 - 1}{3}$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Podemos escrever:

$$P_n = (a_1 \cdot a_n)^{n/2} \therefore \log_q P_n = \log_q (a_1 \cdot a_n)^{n/2}$$

$$\therefore \log_q P_n = \frac{n}{2}(\log_q a_1 + \log_q a_n) \therefore 20 = \frac{n}{2}(\log_q a_1 + 6)$$

$$\therefore n \log_q a_1 = 40 - 6n \qquad (I)$$

$$P_n = a_1{}^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad \therefore \log_q P_n = n \log_q a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \log_q q$$

$$\therefore 20 = n \log_q a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \qquad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$20 = 40 - 6n + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$n^2 - 13n + 40 = 0 \quad \begin{cases} n = 8 \\ ou \\ n = 5 \end{cases}$$

Para $n = 8$ em (I), temos:

$$8 \cdot \log_q a_1 = 40 - 48 \quad \therefore \quad a_1 = \frac{1}{q}$$

É dado que: $a_1 \cdot a_8 = 243 \therefore \dfrac{1}{q} \cdot \dfrac{1}{q} \cdot q^7 = 243$

$$\therefore q = 3 \text{ e } a_1 = \frac{1}{3}$$

Para $n = 5$ em (I), temos:

$$5 \log_q a_1 = 40 - 30 \quad \therefore \quad a_1 = q^2$$

Ora, $a_1 \cdot a_5 = 243 \therefore q^2 \cdot q^2 \cdot q^4 = 243 \therefore q = \sqrt[8]{3^5}$ *(não convém)*

logo $n = 8$, $q = 3$ *e* $a_1 = \dfrac{1}{3}$. *Sendo assim a soma S_8 será:*

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} \quad \therefore \quad S_8 = \frac{\frac{1}{3}(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^8 - 1}{6}$$

QUESTÃO 09

Resposta: E

Sejam a, b, c, d números reais não nulos que estão, nesta ordem, em progressão aritmética. Sabendo que o sistema abaixo

$$\begin{cases} 4 \cdot 2^a \cdot x + 2^c \cdot y = \frac{2}{3} \cdot 2^b \\ 3^d \cdot x + 9 \cdot 3^b \cdot y = 81 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, podemos afirmar que a soma desta progressão aritmética é:

A) 13
B) 16
C) 28
D) 30
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} 2^{a+2} \cdot x + 2^c \cdot y = \dfrac{2^{b+1}}{3} & \longrightarrow \cdot \left(\dfrac{-3^d}{2^{a+2}}\right) \\ 3^d \cdot x + 3^{b+2} \cdot y = 3^4 & \xleftarrow{+} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{a+2} \cdot x + 2^c \cdot y = \dfrac{2^{b+1}}{3} \\ \left(3^{b+2} - \dfrac{2^c \cdot 3^d}{2^{a+2}}\right) \cdot y = \left(3^4 - \dfrac{2^{b+1} \cdot 3^d}{3 \cdot 2^{a+2}}\right) \end{cases}$$

Sendo o sistema possível e indeterminado:

$$3^{b+2} \cdot 2^{a+2} = 2^c \cdot 3^d \qquad (I)$$

e

$$3^5 \cdot 2^{a+2} = 2^{b+1} \cdot 3^d \qquad (II)$$

Como (a, b, c, d) é PA: $\begin{cases} b = a + r \\ c = a + 2r \\ d = a + 3r \end{cases}$

Assim:

De (I): $3^{a+r+2} \cdot 2^{a+2} = 2^{a+2r} \cdot 3^{a+3r} \therefore 3^{-2r+2} \cdot 2^{-2r+2} = 1$

$\therefore 6^{-2r+2} = 1 \therefore -2r + 2 = 0 \therefore r = 1$

Em (II): $3^5 \cdot 2^{a+2} = 2^{a+r+1} \cdot 3^{a+3r}$

substituindo r = 1, vem:

$3^5 \cdot \cancel{2^{a+2}} = \cancel{2^{a+2}} \cdot 3^{a+3} \therefore a = 2.$

Logo: $a = 2,\ b = 3,\ c = 4,\ d = 5.$

$a + b + c + d = 14$

QUESTÃO 10

Resposta: B

Seja $A \in M_{3 \times 3}$ tal que det A = 0. Considere as afirmações:

I – Existe $X \in M_{3 \times 1}$ não nula tal que **AX** é identicamente nula.

II – Para todo $Y \in M_{3 \times 1}$, existe $X \in M_{3 \times 1}$ tal que AX = Y.

III – Sabendo que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

então a primeira linha da transposta de A é [5 1 2].

Temos que:

A) Todas são falsas.
B) Apenas (II) é falsa.
C) Todas são verdadeiras.
D) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Sendo $A \in M_{3 \times 3}$, a equação matricial $AX = B$, onde X, $X \in M_{3 \times 1}$ (matriz incógnita) e B, $B \in M_{3 \times 1}$, é equivalente a um sistema linear em que A é a matriz dos coeficientes e B a matriz dos termos independentes.
Assim:
A afirmação I é **verdadeira,** *pois:*
Sendo $B = 0$ e $\det A = 0$, o sistema obtido de $AX = B$ é homogêneo, possível e indeterminado. Portanto $\exists X$, $X \in M_{3 \times 1}$ não nula tal que AX é identicamente nula.
A afirmação II é **falsa,** *pois:*
Sendo $\det A = 0$, o sistema obtido de $AX = B$, pode ser possível e indeterminado ou impossível, **dependendo de B.** *Portanto podemos afirmar que, para um dado Y, nem sempre existe X tal que $AX = Y$.*
A afirmação (III) é **verdadeira,** *pois:*

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{; segue-se que:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t A^t = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^t \quad \text{, ou seja:}$$

$$[1 \quad 0 \quad 0]\, A^t = [5 \quad 1 \quad 2]$$ *; indicando o 1º membro por $[a \quad b \quad c]$,*

temos: $[a \quad b \quad c] = [5 \quad 1 \quad 2]$

Assim $[a \quad b \quad c]$ com $a = 5$, $b = 1$ e $c = 2$ é uma matriz linha cujos elementos, nesta ordem, coincidem com os elementos da 1ª linha de A^t.
Das análises, conclui-se que a alternativa B é a correta.

QUESTÃO 11

Resposta: C

Seja $C = \{X \in M_{2 \times 2}\,;\ X^2 + 2X = O\}$. Dadas as afirmações:

(I) Para todo $X \in C$, $(X + 2I)$ é inversível.

(II) Se $X \in C$ e $\det (X + 2I) \neq 0$ então X não é inversível.

(III) Se $X \in C$ e $\det X \neq 0$ então $\det X > 0$,

podemos dizer que:

A) Todas são verdadeiras.
B) Todas são falsas.
C) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.
D) Apenas (I) é verdadeira.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Temos:

$X^2 + 2X = O$, **onde** O **é a matriz nula.**

ou seja, $X(X + 2I) = O$

Pelo teorema de Binet, podemos escrever:

$$\det X \cdot \det (X + 2I) = 0 \qquad (\bullet)$$

Nestas condições temos que:

A afirmação (I) é **falsa**, *pois:*

De $(\bullet)$ podemos ter uma matriz X, $X \in C$, tal que $\det (X + 2I) = 0$, donde conclui-se que nem sempre $X + 2I$ é inversível.

A afirmação (II) é **verdadeira**, *pois:*

Sendo $\det (X + 2I) \neq 0$, de $(\bullet)$ conclui-se que $\det X = 0$, ou seja, X não é inversível.

A afirmação (III) é **verdadeira**, *pois:*

$X^2 + 2X = O$ *isto é:*

$X^2 = -2X$

Assim: $(\det X)^2 = (-2)^2 \cdot \det X = 4 \cdot \det X$

e, como $\det X \neq 0$, conclui-se que $\det X = 4$, ou seja, $\det X > 0$.

Das análises, conclui-se que a alternativa correta é C.

QUESTÃO 12

Resposta: B

A igualdade

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 7^n + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} 2^m = 64,$$

é válida para:

A) Quaisquer que sejam n e m naturais positivos.
B) Qualquer que seja n natural positivo e m = 3.
C) n = 13 e m = 6.
D) n ímpar e m par.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 7^n + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} 2^m = 64$$

$$\therefore\ 7^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} + 2^m \cdot \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{m-j} = 64$$

Pela fórmula do binômio de Newton, podemos escrever:

$$7^n \cdot (-1+1)^n + 2^m \cdot (1+1)^m = 64$$

$$\therefore\ 7^n \cdot 0 + 2^m \cdot 2^m = 64 \text{ (supondo } n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\therefore\ 2^{2m} = 2^6$$

$$\therefore\ 2m = 6$$

$$\therefore\ m = 3$$

QUESTÃO 13

Resposta: C

No desenvolvimento de $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, a soma do 2º termo com $\frac{1}{10}$ do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = (\frac{1}{4})^{z-\frac{1}{2}}$, então:

A) $z \in [0, 1]$

B) $z \in (20, 50)$

C) $z \in (-\infty, 0]$

D) $z \in [1, 15]$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

O termo geral do desenvolvimento de $(x + y)^6$, segundo expoentes decrescentes de x, é:

$$T = \binom{6}{p} y^p x^{6-p}$$

Fazendo $p = 1$, temos como 2º termo: $\binom{6}{1} y^1 x^5$.

Fazendo $p = 3$, temos como termo de maior coeficiente: $\binom{6}{3} y^3 x^3$.

A soma dos coeficientes de $(x + y)^6$ é obtida fazendo-se $x = y = 1$. Logo, tal soma é $(1 + 1)^6 = 64$.

Pelo enunciado, devemos ter:

$$\binom{6}{1} yx^5 + \frac{1}{10} \cdot \binom{6}{3} y^3x^3 = 8 \cdot 64 \Rightarrow$$

$$6yx^5 + \frac{1}{10} \cdot 20y^3x^3 = 512$$

$$\therefore\ 6yx^5 + 2y^3x^3 = 512$$

$$\therefore\ 3yx^5 + y^3x^3 = 256$$

Como $x = 2^{z+1}$ e $y = (\frac{1}{4})^{z-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}-z} = 2^{1-2z}$

resulta:

$$3 \cdot (2^{1-2z})(2^{z+1})^5 + (2^{1-2z})^3 \cdot (2^{z+1})^3 = 256$$

$$\therefore\ 3 \cdot 2^{1-2z} \cdot 2^{5z+5} + 2^{3-6z} \cdot 2^{3z+3} = 256$$

$\therefore\ 3 \cdot 2^{6+3z} + 2^{6-3z} = 256$; *dividindo ambos os membros por* 2^6:

$$3 \cdot 2^{3z} + 2^{-3z} = 4$$

Fazendo $2^{3z} = t$, *temos:*

$$3t + \frac{1}{t} = 4$$

$$\therefore\ 3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\therefore\ t = 1 \text{ ou } t = \frac{1}{3}$$

Logo:

$$2^{3z} = 1 \Rightarrow z = 0 \quad (I)$$

ou

$2^{3z} = \frac{1}{3}$; *como* $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, *temos que*

$$2^{-2} < 2^{3z} < 2^{-1} \Rightarrow -2 < 3z < -1$$

$$\therefore\ -\frac{2}{3} < z < -\frac{1}{3} \quad (II)$$

Assim, temos que $z \in \left]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right[\cup \{0\}$.

Como o conjunto $\left]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right[\cup \{0\}$ *é subconjunto de* $]-\infty, 0]$, *podemos afirmar que* $z \in]-\infty, 0]$.

QUESTÃO 14

Resposta: D

Seja $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. O conjunto solução da desigualdade $2^{\text{sen } x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

A) $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, 2\pi)$

B) $[0, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$

C) $[0, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$

D) $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log 2 - \log 3} = \frac{\log 2}{2 \cdot \log (2/3)}$$

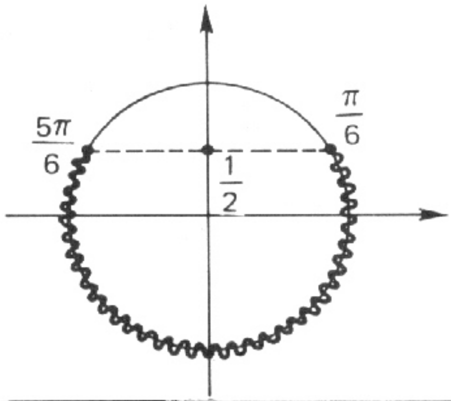
$$2^{\text{sen } x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \log 2^{\text{sen } x} \leqslant \log \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \therefore\ \text{sen } x \cdot \log 2 \leqslant \alpha \cdot \log \left(\frac{2}{3}\right)$$

Substituindo o valor de α:

$$\text{sen } x \cdot \log 2 \leqslant \frac{\log 2}{2 \cdot \log (2/3)} \cdot \log (2/3) \therefore\ \text{sen } x \leqslant \frac{1}{2}$$

Na circunferência trigonométrica:

$$S = [0,\ \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6},\ 2\pi)$$



QUESTÃO 15 Sabendo-se que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que $\cos x = \frac{5}{6}$ e $\cos y = \frac{4}{5}$, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} + sen^2\alpha}$, temos:

Resposta: E

A) α está no 4º quadrante e $T = \frac{2}{3}$.

B) α está no 1º quadrante e $T = \frac{2}{3}$.

C) α está no 1º quadrante e $T = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10}$.

D) α está no 4º quadrante e $T = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{11}}{10}$.

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

$$T = \sqrt{\frac{1 - tg^2\alpha}{sec^2\alpha} + sen^2\alpha} = \sqrt{\frac{1 - tg^2\alpha + sen^2\alpha \cdot sec^2\alpha}{sec^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cancel{tg^2\alpha} + \cancel{tg^2\alpha}}{sec^2\alpha}} = \sqrt{cos^2\alpha} = |cos\,\alpha|$$

Temos ainda que:

$$\alpha = x - y \quad \therefore \begin{cases} cos\,\alpha = cos\,x\ cos\,y + sen\,x\ sen\,y \\ sen\,\alpha = sen\,x\ cos\,y - sen\,y\ cos\,x \end{cases}$$

Pela relação fundamental e os dados:
$$\begin{cases} cos\,x = \frac{5}{6} \Rightarrow sen\,x = \frac{\sqrt{11}}{6} \\ cos\,y = \frac{4}{5} \Rightarrow sen\,y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Assim:

$$cos\,\alpha = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10} > 0$$

e

$$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4\sqrt{11} - 15}{30} < 0$$

Logo:

$$T = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10} \text{ e } \alpha \text{ está no } 4^{\circ} \text{ quadrante.}$$

QUESTÃO 16

Resposta: B

Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60^{\circ}$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

A) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ cm

B) $1 + \sqrt{3}$ cm

C) $2 + \sqrt{3}$ cm

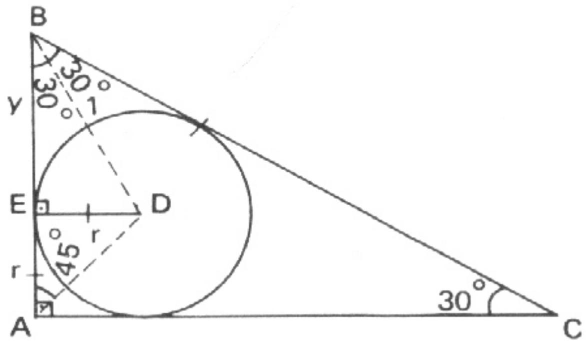
D) $1 + 2\sqrt{2}$ cm.

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC.

No triângulo retângulo BED, temos:



$$sen\ 30^{\circ} = \frac{r}{1} \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30^{\circ} = \frac{y}{1} \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo retângulo ABC, temos $\hat{C} = 30^{\circ}$ *e* $\overline{AB} = r + y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Sendo $sen\ 30^{\circ} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$; $\frac{1}{2} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{\overline{BC}} \therefore \overline{BC} = (1 + \sqrt{3})$ *em cm.*

QUESTÃO 17

Resposta: D

A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta

$$y = mx,\ m > 0$$

forma com o eixo dos x, é

A) $y = \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} x$

B) $y = \frac{1 - \sqrt{1 + m^2}}{m} x$

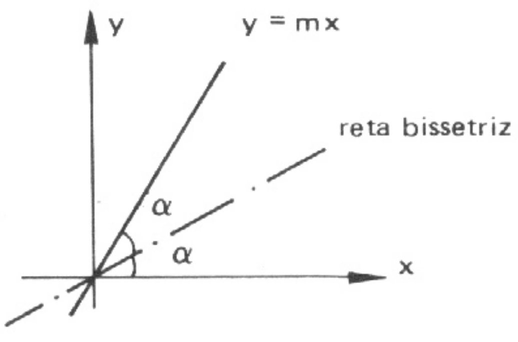
C) $y = \frac{-1 - \sqrt{1 + m^2}}{m} x$

D) $y = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} x$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

De acordo com o enunciado, temos:



Sendo tg α o coeficiente angular da reta bissetriz, tem-se que tg α > 0.

Como tg 2α = m, podemos escrever:

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha} = m$$

$$\therefore\ m \cdot tg^2\alpha + 2\ tg\ \alpha - m = 0$$

Resolvendo, obtêm-se: $tg\ \alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$

ou

$$tg\ \alpha = \frac{-1 - \sqrt{1 + m^2}}{m} \quad \textit{(não convém)}$$

Assim, uma equação da reta bissetriz é:

$$y - 0 = tg\ \alpha\ (x - 0), \text{ ou seja:}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \cdot x$$

QUESTÃO 18

Resposta: D

A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:

A) $\frac{1}{2}$

B) 1

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{3}{8}$

E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

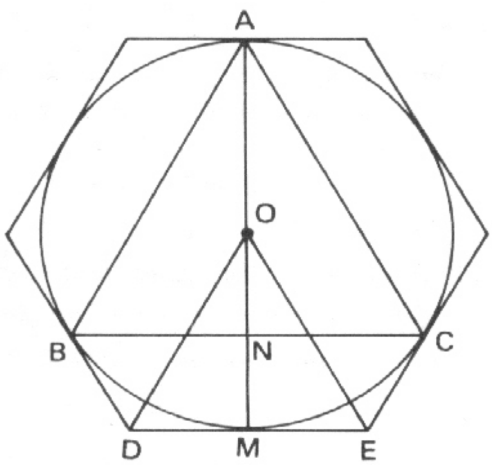
Temos que:

$\overline{MN} = \overline{ON} = \dfrac{\overline{AO}}{2} = 5$ *cm (pois "O" é baricentro do triângulo ABC).*

Logo, $\overline{AN} = 15$ *cm*

Sejam:

- *S a área do hexágono*
- S_1 *a área do triângulo ABC*
- S_2 *a área do triângulo ODE*



A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim sendo, como os triângulos ABC e ODE são equiláteros, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$$

Comentário:

Como a área S do hexágono é igual a $6S_2$, *temos:*

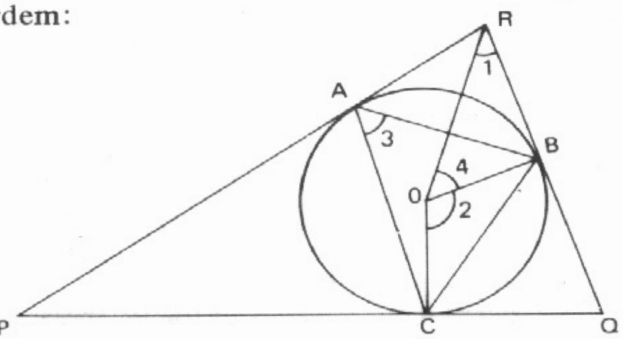
$$\frac{S_1}{S} = \frac{S_1}{6S_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{8}$$

QUESTÃO 19

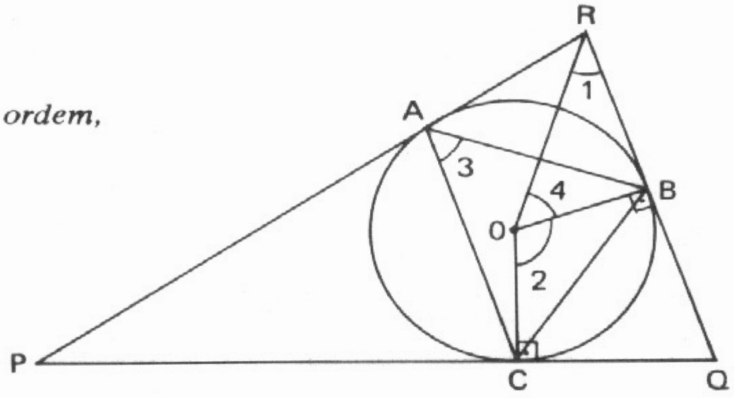
Resposta: A

Considere o triângulo **PQR** abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangência são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:

A) 40°, 120°, 60°, 50°
B) 40°, 100°, 50°, 40°
C) 60°, 140°, 60°, 40°
D) 60°, 120°, 40°, 50°
E) n.d.a.



RESOLUÇÃO:



Se os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em P.A. de razão 20°, então:

$\hat{P} = \hat{Q} - 20^\circ$ *e* $\hat{R} = \hat{Q} + 20^\circ$ *(1)*

Sendo $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180^\circ$ *resulta*

$$\hat{Q} - 20^\circ + \hat{Q} + \hat{Q} + 20^\circ = 180^\circ$$

$$3\hat{Q} = 180^\circ \quad \therefore \quad \hat{Q} = 60^\circ$$

Em (1), $\hat{R} = 80^\circ$.

Sendo o triângulo PQR circunscrito à circunferência de centro O, então os pontos A, B e C são os respectivos pontos de tangência dos lados PR, RQ e PQ, e O é o incentro do triângulo PQR.

Como $\overrightarrow{RO}$ *é bissetriz do ângulo* $P\hat{R}Q$, *resulta* $m(\hat{1}) = 40^\circ$.

Do triângulo ROB, retângulo em $\hat{B}$, $m(\hat{4}) = 50^\circ$.

O quadrilátero BOCQ é inscritível numa circunferência, porque $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$. *Assim,* $m(\hat{2}) + \hat{Q} = 180^\circ$, *ou seja,* $m(\hat{2}) + 60^\circ = 180^\circ \therefore m(\hat{2}) = 120^\circ$.

O ângulo $B\hat{A}C$ *está inscrito na circunferência de centro O e seu ângulo central* $B\hat{O}C$ *mede* 120°, *logo* $m(\hat{3}) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

Portanto, $m(\hat{1}) = 40^\circ$, $m(\hat{2}) = 120^\circ$, $m(\hat{3}) = 60^\circ$ *e* $m(\hat{4}) = 50^\circ$.

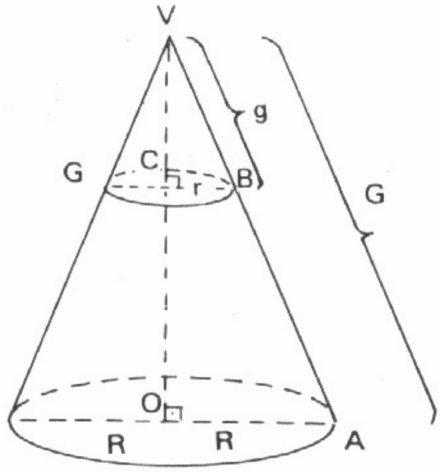
QUESTÃO 20

Resposta: B

Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288°. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:

A) $16\pi \text{ cm}^2$
B) $\frac{308\pi}{9} \text{ cm}^2$
C) $\frac{160\pi}{3} \text{ cm}^2$
D) $\frac{100\pi}{9} \text{ cm}^2$
E) n.d.a.

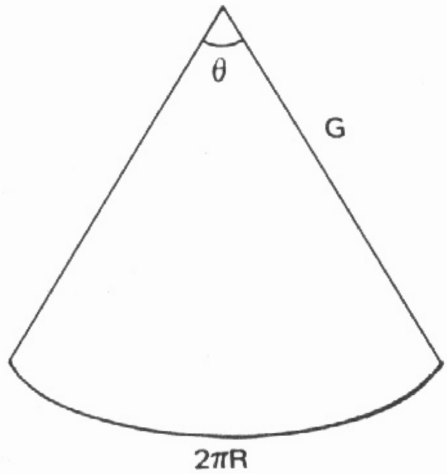
RESOLUÇÃO:



O ângulo central θ da superfície lateral desenvolvida sobre um plano mede 288° e, em radianos, $\frac{8\pi}{5}$.

Por outro lado, $\theta = \frac{2\pi R}{G}$

$$\therefore \frac{2\pi R}{G} = \frac{8\pi}{5} \qquad (1)$$



Do enunciado:

$2R + 2G = 18$

$\therefore R + G = 9$

$\therefore G = 9 - R \qquad (2)$

De (1) e (2), vem:

$$\frac{2\pi R}{9 - R} = \frac{8\pi}{5} \quad \therefore \quad R = 4$$

Em (2), $G = 5$

Considerando-se o tronco, temos: $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4}{9} \quad \therefore \quad \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

Logo, $\frac{r}{4} = \frac{2}{3} \therefore r = \frac{8}{3}$.

$$\triangle VCB \sim \triangle VOA \Rightarrow \frac{g}{G} = \frac{2}{3} \therefore \frac{g}{5} = \frac{2}{3} \therefore g = \frac{10}{3}$$

Portanto, a área lateral A_ℓ do tronco é:

$$A_\ell = \pi RG - \pi rg = \pi \cdot 4 \cdot 5 - \pi \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{10}{3} \therefore A_\ell = \frac{308\pi}{9} \ cm^2$$

QUESTÃO 21

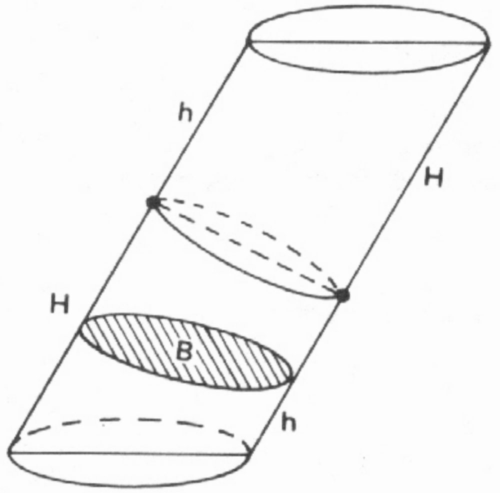
Resposta: B

Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente, h cm e H cm. Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de $\frac{1}{3}$ em relação ao seu volume original. Deste modo,

A) $2H = 3h$
B) $H = 2h$
C) $H = 3h$
D) $2H = 5h$
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

O volume V de um tronco de cilindro é a metade do volume de um cilindro cuja seção plana que contém o eixo é um paralelogramo cujas bases medem H + h, ou seja,



$V = \frac{1}{2} B \cdot (H + h)$, *onde B é a área de uma seção reta.*

Duplicando a base menor, temos:

$$V' = V + \frac{1}{3} V = \frac{4}{3} V$$

Logo, $\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{B} \cdot (H + 2h) = \frac{4}{3} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{B} \cdot (H + h)$

$\therefore\ 3(H + 2h) = 4(H + h)$

$\therefore\ 3H + 6h = 4H + 4h \ \therefore\ H = 2h.$

QUESTÃO 22

Resposta: B

Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio R cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:

A) $\frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{5})^2 R^2 \text{ cm}^2$

B) $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}(1 + \sqrt{5})^2 R^2 \text{ cm}^2$

C) $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}(1 + \sqrt{5}) R^2 \text{ cm}^2$

D) $\pi\sqrt{5}(1 + \sqrt{5}) R^2 \text{ cm}^2$

E) n.d.a.

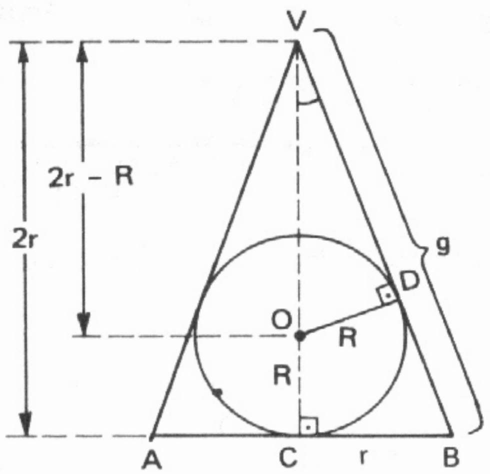
RESOLUÇÃO:

Seja a seção meridiana VAB da circunscrição considerada.
No triângulo retângulo VCB, temos pelo teorema de Pitágoras:

$$g^2 = (2r)^2 + r^2$$

$\therefore\ g = r\sqrt{5} \quad (1)$

$\Delta VOD \sim \Delta VBC$, *logo*



$$\frac{R}{r} = \frac{2r - R}{g} \ \therefore\ g = \frac{(2r - R)\,r}{R} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem:

$$\frac{(2r - R)r}{R} = r\sqrt{5} \quad \therefore \quad r = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot R \qquad (3)$$

De (1) e (3), resulta

$$g = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot R$$

A área lateral A_ℓ desse cone é

$$A_\ell = \pi r g = \pi \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} R \cdot \sqrt{5}$$

$$\therefore \quad A_\ell = \frac{\pi\sqrt{5}}{4} \cdot (1 + \sqrt{5})^2 R^2$$

QUESTÃO 23

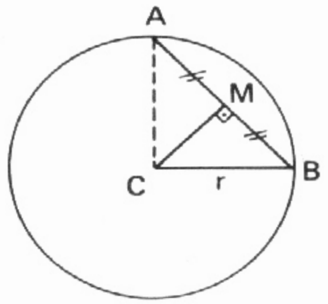
Resposta: D

Seja C a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é M:(2, 2). O comprimento de AB (em unidade de comprimento) é igual a:

A) $2\sqrt{6}$
B) $\sqrt{3}$
C) 2
D) $2\sqrt{3}$
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \quad \begin{cases} \text{centro: } C(1,\ 3) \\ \text{raio: } r = \sqrt{5} \end{cases}$$



Do triângulo retângulo CMB, temos:

$$\overline{CM}^2 + \overline{MB}^2 = r^2$$

$$\therefore \quad (\sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - 2)^2})^2 + \overline{MB}^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\therefore \quad 2 + \overline{MB}^2 = 5$$

$$\therefore \quad \overline{MB} = \sqrt{3}$$

Como $\overline{AB} = 2\,\overline{MB}$, temos que: $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$
Portanto o comprimento da corda AB é $2\sqrt{3}$

QUESTÃO 24

Resposta: A

Dados os pontos A:(0, 8), B:(−4, 0) e C:(4, 0), sejam r e s as retas tais que A, B $\in$ r, B, C $\in$ s. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de P: (5, 3) às retas r e s, respectivamente. Então a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:

A) $y + x = 5$
B) $y + 2x = 5$
C) $3y - x = 15$
D) $x + y = 2$
E) n.d.a.

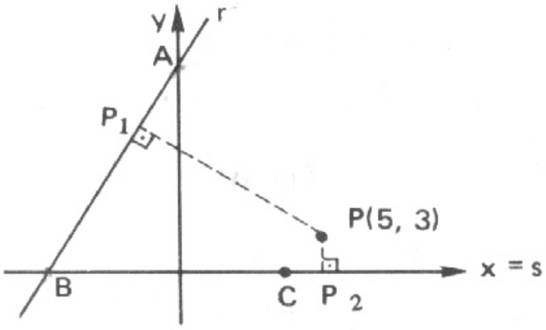
RESOLUÇÃO:

Uma equação de r é

$y = 2x + 8$

Uma equação de s é

$y = 0$



Sendo P_2 projeção ortogonal de P(5, 3) sobre S, segue-se que $P_2(5, 0)$

Sendo P_1 a projeção ortogonal de P(5, 3) sobre r, a reta $\overleftrightarrow{PP_1}$ é perpendicular à reta r e, como conseqüência, a equação de $\overleftrightarrow{PP_1}$ é

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 5)$$

O ponto P_1 é a interseção de r com $\overleftrightarrow{PP_1}$; portanto, P_1 é determinado pelo sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 8 \\ y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 5) \end{cases}$$

Resolvendo, obtém-se: $x = -1$ e $y = 6$, ou seja, $P_1(-1, 6)$

Equação de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$:

$$\left.\begin{array}{l} P_2(5, 0) \\ m = \dfrac{6 - 0}{-1 - 5} = -1 \end{array}\right\} y - 0 = -1(x - 5) \text{ ou ainda: } y + x = 5$$

QUESTÃO 25

Resposta: C

Considere as afirmações:

I – Uma elipse tem como focos os pontos $F_1:(-2, 0)$, $F_2:(2, 0)$ e o eixo maior 12. Sua equação é $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

II – Os focos de uma hipérbole são $F_1:(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2:(\sqrt{5}, 0)$ e sua excentricidade é $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Sua equação é $3x^2 - 2y^2 = 6$.

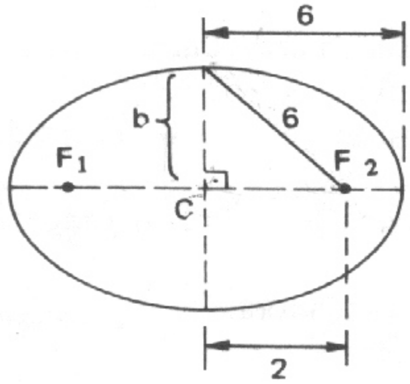
III – A parábola $2y = x^2 - 10x - 100$ tem como vértice o ponto $P:(5, \frac{125}{2})$

Então:

A) Todas as afirmações são falsas.
B) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
C) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
D) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
E) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

(I)

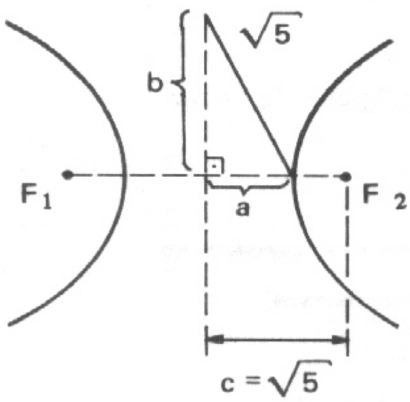


centro: (0, 0)

$b^2 + 2^2 = 6^2 \quad \therefore \quad b = \sqrt{32}$

Uma equação da elipse é: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1$

(II)



excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$

$\therefore \quad \dfrac{\sqrt{10}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{a} \quad \therefore \quad a = \sqrt{2}$

$b^2 + a^2 = c^2$, *segue-se que* $b^2 = 3$

Uma equação da hipérbole é: $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} = 1$

ou ainda: $3x^2 - 2y^2 = 6$

(III) $2y = x^2 - 10x - 100$, *ou seja:*

$2y = x^2 - 10x + 25 - 125$, *isto é:*

$2y + 125 = (x - 5)^2$ *e finalmente:*

$(x - 5)^2 = 2\left(y + \dfrac{125}{2}\right)$

Portanto a parábola tem como vértice o ponto $P\left(5, -\dfrac{125}{2}\right)$.

Das análises, conclui-se que a alternativa correta é C.