



ITA
2023



ELETROMAGNETISMO

AULA 02
ELETROSTÁTICA III

Prof. João Maldonado





Sumário

Introdução	3
1. Uma breve revisão da mecânica	Error! Bookmark not defined.
1.1. Trabalho de uma força	Error! Bookmark not defined.
1.2. Trabalho da força peso	Error! Bookmark not defined.
1.3. Trabalho da força elástica	Error! Bookmark not defined.
1.4. Energia	Error! Bookmark not defined.
1.4.1. Energia potencial gravitacional	Error! Bookmark not defined.
1.4.2. Energia potencial elástica (<i>Eelas</i>)	Error! Bookmark not defined.
1.4.3. Energia cinética	Error! Bookmark not defined.
1.4.4. Teorema da energia cinética	Error! Bookmark not defined.
1.4.5. Cálculo da energia mecânica	Error! Bookmark not defined.
1.4.6. Sistema mecânico conservativo	Error! Bookmark not defined.
1.4.7. Sistemas mecânicos não-conservativos	Error! Bookmark not defined.
1.5. Quantidade de movimento	Error! Bookmark not defined.
1.5.1. Sistema isolado	Error! Bookmark not defined.
2. Potencial elétrico	4
2.1. O trabalho no campo elétrico uniforme	4
2.2. A energia potencial no campo eletrostático	5
2.3. O potencial elétrico	6
2.4. Determinação do trabalho em função da diferença de potencial (ddp)	7
2.5. Determinação do potencial elétrico caso geral	8
2.6. Cálculo do campo elétrico a partir do potencial	Error! Bookmark not defined.
2.7. O potencial elétrico de carga elétrica puntiforme	10
2.8. Potencial elétrico gerado por várias cargas puntiformes	11
2.9. As propriedades do potencial elétrico	15
2.10. Superfícies equipotenciais	16
2.10.1. As propriedades das superfícies equipotenciais	18
2.11. Espontaneidade e trabalho	24
3. Energia potencial eletrostática	25
4. Potencial elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático	29
4.1. Potencial de um condutor esférico	30
4.2. O potencial da terra	32
4.3. Aplicação do uso de potenciais para condutores em equilíbrio eletrostático	33
4.4. Aplicação do potencial elétrico na indução total	38
5. Lista de exercícios	45
6. Gabarito sem comentários	60
7. Lista de exercícios comentada	61
8. Considerações finais da aula	92
9. Referências bibliográficas	93
10. Versão de aula	Error! Bookmark not defined.



Introdução

Nesta aula, faremos uma breve revisão da mecânica, quanto aos conceitos de trabalho e energia, quantidade de movimento e sua conservação. Todos esses temas serão bem abordados mais adiante nas suas respectivas aulas.

Além da revisão na mecânica, abordaremos o conceito de potencial elétrico, energia potencial elétrica e o potencial elétrico aplicado na resolução de problemas de corpos em equilíbrio eletrostático.

Esses temas são muito bem explorados pelos nossos vestibulares de oficiais.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



2. Potencial elétrico

Já vimos os conceitos de força elétrica e campo elétrico, definições de grandezas vetoriais. Nessa aula, vamos introduzir o conceito de potencial elétrico e energia potencial elétrica, grandezas escalares, mas antes disso, vamos definir o que é o potencial de um campo, matematicamente.

Para isso, vamos estudar o trabalho da força elétrica no campo elétrico uniforme.

2.1. O trabalho no campo elétrico uniforme

Seja E a intensidade de um campo elétrico uniforme. Inicialmente, vamos tomar dois pontos quaisquer A e B , numa mesma linha de força, separados pela distância d .

Devido ao fato de a força ser constante, já que o campo elétrico é uniforme ($E = cte$), o trabalho da força elétrica \vec{F}_{ele} nesse deslocamento é dado por:

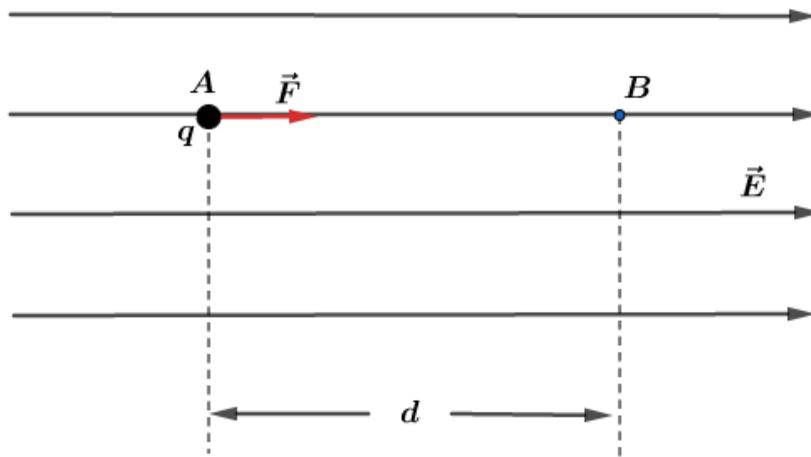


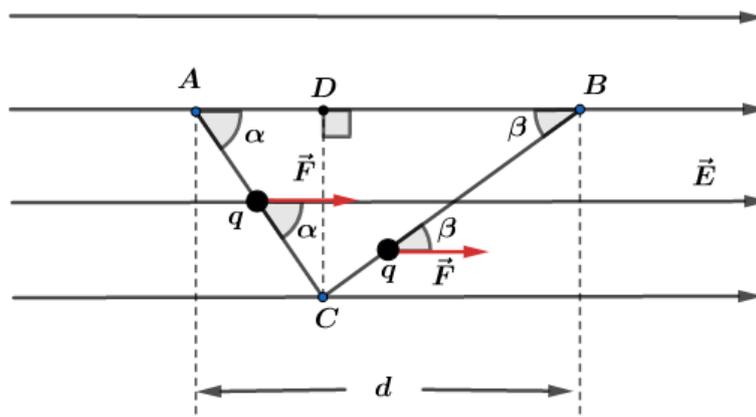
Figura 1: Carga se locomovendo ao longo de um campo elétrico uniforme.

$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d$$

Mas, como $F = q \cdot E$, temos:

$$W_{A \rightarrow B} = q \cdot E \cdot d$$

Agora, vamos tomar um terceiro ponto C , que pertence a outra linha de força, como mostra a figura abaixo:



Quando a carga q desloca-se de A para C e, depois, de C para B , temos os seguintes trabalhos em cada trecho:



$$W_{A \rightarrow C} = F \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha) = F \cdot \overline{AD}$$

$$W_{C \rightarrow B} = F \cdot \overline{CB} \cdot \cos(\beta) = F \cdot \overline{DB}$$

O trabalho total no deslocamento ACB é a soma dos trabalhos:

$$W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow B}$$

$$W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = F \cdot \overline{AD} + F \cdot \overline{DB} = F \cdot (\overline{AD} + \overline{DB}) = F \cdot \overline{AB}$$

Dessa forma, o trabalho da força elétrica tomando o deslocamento ACB é o mesmo que o trabalho no deslocamento AB .

$$W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = F \cdot d = W_{A \rightarrow B}$$

Este resultado pode ser generalizado, pois para qualquer trajetória que tomássemos entre A e B , o trabalho da força elétrica seria dado por:

$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d = q \cdot E \cdot d$$

Note que, na fórmula acima, d é a **distância entre A e B, na direção do campo**, como na figura abaixo:

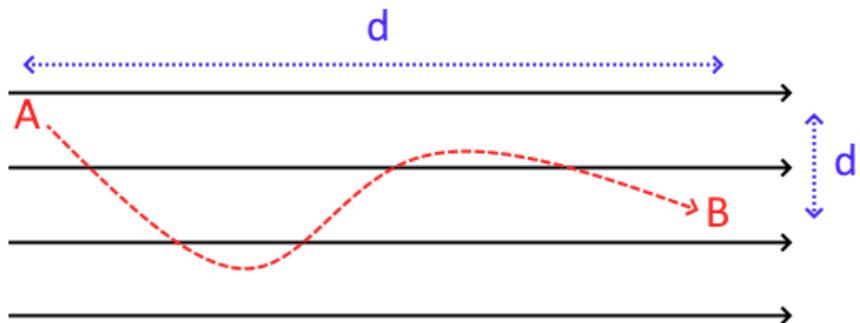


Figura 2: Carga elétrica se movendo em uma região onde o campo elétrico é uniforme.

Para o cálculo do trabalho, a distância d' (distância na direção perpendicular ao campo) pouco importa!

Desse resultado, concluímos que o trabalho da força elétrica independe da trajetória, apenas da carga elétrica e da posição dos pontos A e B na região do campo elétrico. Ainda que mostremos esse fato para uma situação particular (campo elétrico uniforme), podemos generalizar esse resultado da seguinte forma:

O trabalho realizado por uma força elétrica em um campo eletrostático para ir de A até B não depende da trajetória.

Como vimos, forças conservativas possuem como propriedade o fato do trabalho por ela realizado não depender da trajetória. Por isso, dizemos que a força elétrica é uma força conservativa.

Se o campo não for eletrostático, ele não será conservativo, mas isso é um assunto que foge do nosso escopo de curso. Sempre consideraremos campos eletrostáticos, ou seja, que não variam com o tempo.

2.2. A energia potencial no campo eletrostático

Sempre que trabalhamos com campo de forças conservativas, associamos os conceitos de **energia potencial e de potencial**. Isso ocorre com a força elétrica (energia potencial elétrica), a força



elástica (energia potencial elástica), a força gravitacional (energia potencial gravitacional) e a força magnética (energia potencial magnética), ou qualquer outra força conservativa.

Analogamente, faremos um tratamento semelhante, pois o campo eletrostático também é conservativo. Para isso, considere uma carga elétrica positiva puntiforme solta com velocidade nula num ponto A em uma região que existe um campo eletrostático qualquer.

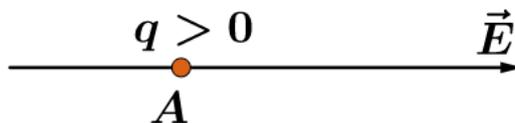


Figura 3: Carga elétrica positiva com velocidade nula em uma região do campo elétrico \vec{E} .

Nessas condições, a força elétrica tende a deslocar a carga na própria orientação do campo, promovendo um trabalho positivo. Dessa forma, a partícula ganha energia cinética. Diante disso, podemos dizer que a partícula possuía uma certa energia que se transformou em energia cinética. Essa outra forma de energia chamamos de energia potencial elétrica.

Assim como na mecânica, quando fomos definir a energia potencial, foi necessário atribuir um referencial para que pudéssemos determinar a energia potencial. Na elétrica não é diferente.

Define-se energia potencial de uma carga elétrica puntiforme q , em um dado ponto A , como o trabalho que a força elétrica realiza quando é levada do ponto A até o ponto de referência R . Em outras palavras:

$$U_A = W_{A \rightarrow ref}$$



2.3. O potencial elétrico

Definimos potencial elétrico associado ao ponto A , denotado por V_A , a razão entre a energia potencial elétrica da carga em A ($(E_{pot})_A$) e o valor da carga (q), ou seja:

$$V_A = \frac{U_A}{q}$$

Veja que, assim como a energia potencial elétrica, o campo elétrico necessita de um potencial para ser calculado. Além disso, note a semelhança dessa fórmula com $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. A força elétrica depende tanto da carga geradora quanto da carga de prova, mas o campo somente da carga geradora. Da mesma forma, a energia potencial elétrica depende tanto da carga de prova quanto da carga geradora, mas o potencial elétrico somente da carga geradora.

Observações:

- 1) Essa razão já é bem determinada em cada ponto do campo elétrico e independe do valor de q , isto é, independe da carga de prova. Nesse momento, parece um pouco contraditório, já que estamos vendo a carga q no denominador de V_A . Este fato ficará mais claro logo a frente.



- 2) Definimos o potencial elétrico em A como o quociente de duas grandezas escalares (energia e carga), notoriamente, o potencial também será um **escalar**.
- 3) Sua unidade no SI é o volt, indicado pela letra V .

Assim, temos que:

$$\frac{1 J}{1 C} = 1 J/C = 1 V$$

A unidade Volt é dada em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta (1745-1827).

2.4. Determinação do trabalho em função da diferença de potencial (ddp)

Dada uma carga elétrica q que se desloca de A para B , em uma região onde existe um campo elétrico qualquer. Como o campo é conservativo, vimos anteriormente que o trabalho não depende da trajetória. Dessa forma, podemos escrever que:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow ref} + W_{ref \rightarrow B}$$

Entretanto, pela definição de energia potencial elétrica:

$$W_{A \rightarrow ref} = U_A$$

$$W_{ref \rightarrow B} = -U_B$$

$$\boxed{W_{A \rightarrow B} = U_A - U_B = -\Delta U}$$

Em outras palavras, o trabalho realizado pela força elétrica entre A e B é igual a menos a variação da energia potencial elétrica.

Além disso, como $U = q \cdot V$:

$$\boxed{W_{A \rightarrow B} = q \cdot (V_A - V_B) = -q\Delta V}$$

Diante desse resultado, concluímos que o trabalho é igual a menos o produto da carga elétrica deslocada pela diferença do potencial.

Para o caso de um campo elétrico uniforme, vimos anteriormente nessa aula que:

$$W_{A \rightarrow B} = q \cdot E \cdot d$$

Onde d é a distância na direção do campo de A até B , em uma mesma linha de força. Portanto, chegamos na seguinte relação entre o campo elétrico e os potenciais:

$$q \cdot E \cdot d = -q\Delta V$$

$$\boxed{E \cdot d = -\Delta V}$$

A equação acima é extremamente importante! E vale para quaisquer campos eletrostáticos uniformes.

Com base nessa última expressão, temos a unidade oficial de campo elétrico justificada no SI como sendo:

$$[E] = \left[-\frac{\Delta V}{d} \right] = V/m$$

Dessa forma, V/m é similar a N/C , sendo ambas medidas para o campo elétrico.



INDO MAIS
FUNDO!



2.5. Determinação do potencial elétrico caso geral

No item de cima provamos que, para um campo eletrostático uniforme:

$$E \cdot d = -\Delta V$$

Chamando a distância d de Δr , o deslocamento na direção de uma linha de campo:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta r}$$

Tomando o limite quando $\Delta r \rightarrow 0$:

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

A equação acima vale para **qualquer campo** eletrostático, desde que r seja o deslocamento em uma linha de campo.

Somente por curiosidade, existe uma fórmula mais geral que calcula o campo em função do potencial elétrico, onde as coordenadas são x , y e z e não uma linha de campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

O operador $\vec{\nabla}$ se chama gradiente. Também por curiosidade, podemos definir o que é o potencial de um campo matematicamente.

Curiosidade: Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamamos essa função de campo. Se existir uma segunda função $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f = -\vec{\nabla}g$, então o campo f é um campo conservativo e g é o potencial de f .

Agora que você já sabe de onde as fórmulas vêm, vamos para o que importa. Ao percorrermos uma certa linha de campo:

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

Conseqüentemente, se plotarmos o potencial elétrico em função do deslocamento r em torno de uma linha de campo, a tangente do gráfico será igual a menos o módulo do campo elétrico.

Se integramos a expressão acima:

$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = -\int_A^B E \cdot dr$$

Conseqüentemente, se plotarmos o campo elétrico em função do deslocamento r em torno de uma linha de campo, a área do gráfico será igual a menos a variação do potencial elétrico.

Considerando B como a referência (infinito):



$$V_{\infty} - V_A = - \int_A^{\infty} E \cdot dr$$

$$V_A = \int_A^{\infty} E \cdot dr$$

Ou seja, o potencial de um ponto é calculado como a área do gráfico do campo elétrico pela distância em torno de uma linha de campo, desse ponto até o infinito.

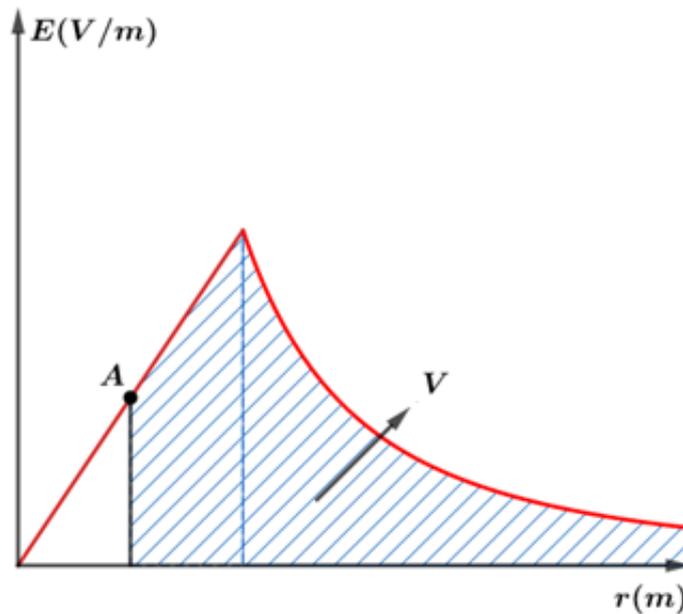


Figura 4: Gráfico auxiliar do campo elétrico em função da distância para o cálculo do potencial.

Na figura acima (campo elétrico de uma esfera isolante uniformemente carregada), a área azul seria o potencial de A.



1)

Encontre o campo elétrico para a função potencial elétrico V dada por $V = 50 - 10x$.

Comentários:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} = -10 \hat{i}$$

2)

Encontre o potencial elétrico no ponto $x = 2$ se o campo é dado por $E = \frac{3}{x^2} \hat{i}$.

Comentários:



$$V = \int_2^{\infty} E \cdot dx = \int_2^{\infty} \frac{3}{x^2} \cdot dx = -\frac{3}{x} \Big|_2^{\infty} = \frac{3}{2}$$



2.7. O potencial elétrico de carga elétrica puntiforme

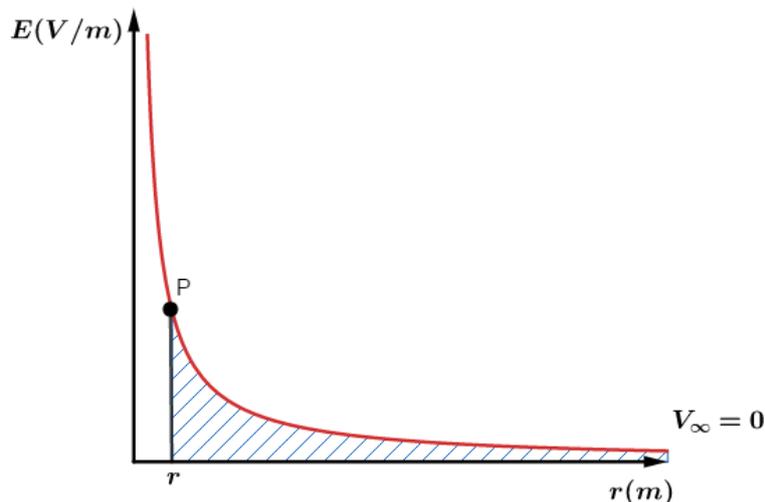
Considere uma carga Q , fixa em um certo ponto do espaço, gerando um campo elétrico à sua volta. Seja uma carga q em um certo ponto P distante r de Q

$$V_P = \int_P^{\infty} E \cdot dr$$

Sabemos que o campo elétrico de uma carga puntiforme é radial e o módulo dado por:

$$E = \frac{KQ}{r^2}$$

Portanto, podemos determinar o potencial pela área azul do gráfico abaixo:



$$V_P = \int_r^{\infty} \frac{kQ}{r^2} \cdot dr = \left[\frac{-kQ}{r} \right]_r^{\infty} = \frac{kQ}{r}$$

Isto é, o potencial elétrico de uma carga **puntiforme** Q em um ponto P que dista r da carga fonte é dado por:

$$V_P = \frac{KQ}{r}$$

Observações:



- 1) V_p é uma grandeza escalar.
- 2) O potencial é função do ponto, já que se trata de uma grandeza associada a cada um dos pontos da região do campo elétrico.
- 3) V_p não depende da carga de prova
- 4) V_p depende da carga fonte Q
- 5) O valor de $V_p(r)$ gerado pela carga puntiforme Q possui o mesmo sinal que a carga:

$$\begin{cases} Q > 0 \Rightarrow V > 0 \\ Q < 0 \Rightarrow V < 0 \end{cases}$$

Se plotarmos o gráfico do potencial elétrico em função da distância, obteremos um arco de hipérbole equilátera:

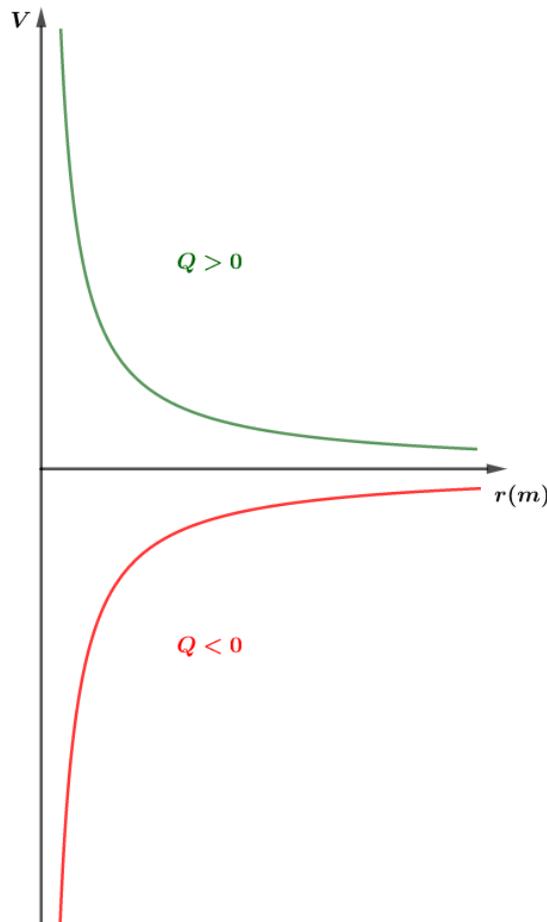


Figura 5: Gráfico do potencial elétrico gerado por uma carga puntiforme em função da distância, para os dois possíveis valores de Q .

2.8. Potencial elétrico gerado por várias cargas puntiformes

Sejam n cargas elétricas gerando um campo elétrico em um dado ponto P do espaço.

Cada uma das cargas gera um potencial em P dado por:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{r_1}, V_2 = \frac{kQ_2}{r_2}, \dots, V_i = \frac{kQ_i}{r_i}, \dots, V_n = \frac{kQ_n}{r_n}$$

Pelo Princípio da Superposição, o potencial elétrico resultante é dado pela soma algébrica dos potenciais parciais:

$$V_{res} = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$



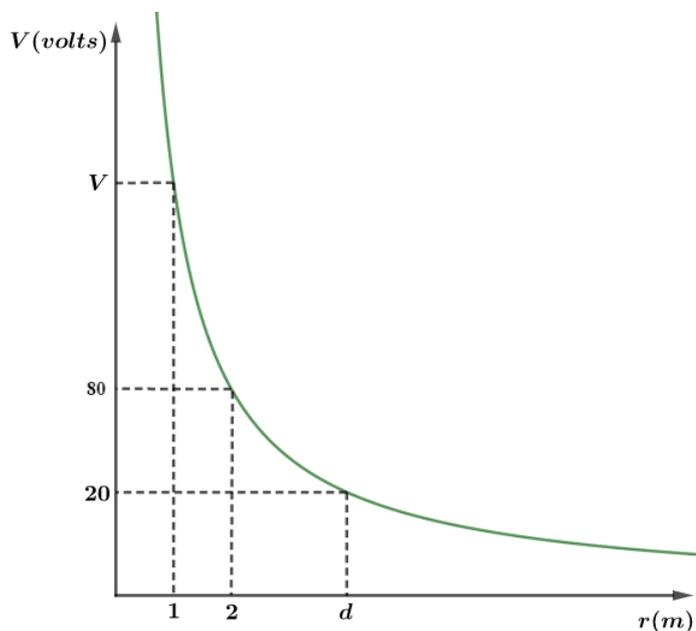
$$V_{res} = k \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \dots + \frac{Q_n}{r_n} \right)$$

$$V_{res} = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$



2)

O gráfico abaixo mostra o potencial gerado por uma carga elétrica puntiforme, em função da distância.



Calcule:

- o potencial elétrico V .
- a distância d .

Comentários:

a) vamos pegar dois pontos do gráfico de forma estratégica:

$$V(2) = \frac{kQ}{2} = 80$$

$$V(1) = \frac{kQ}{1} = V$$

Portanto:

$$\frac{V}{80} = \frac{\frac{kQ}{1}}{\frac{kQ}{2}} \Rightarrow \boxed{V = 160V}$$



b) novamente, podemos repetir a ideia e pegar dois pontos estratégicos:

$$V(2) = \frac{KQ}{2} = 80$$

$$V(d) = \frac{KQ}{d} = 20$$

Logo:

$$\frac{\frac{KQ}{2}}{\frac{KQ}{d}} = \frac{80}{20} \Rightarrow d = 8 \text{ m}$$

3)

Determine a razão $\frac{a}{b}$ para que o potencial resultante seja nulo no ponto P .



Comentários:

$$V_P = V_A + V_B$$

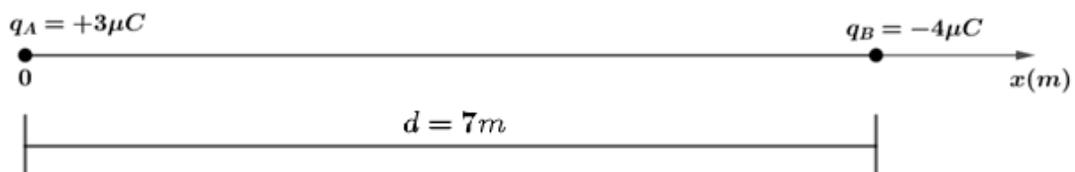
Mas queremos $V_P = 0$, então:

$$0 = K \frac{Q_A}{r_A} + K \frac{(-Q_B)}{r_B}$$

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{Q_A}{Q_B}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{3}{4}}$$

Considere duas cargas elétricas puntiformes fixas em A e B sobre um segmento orientado x , como na figura:



Determine as abscissas onde o potencial é nulo.

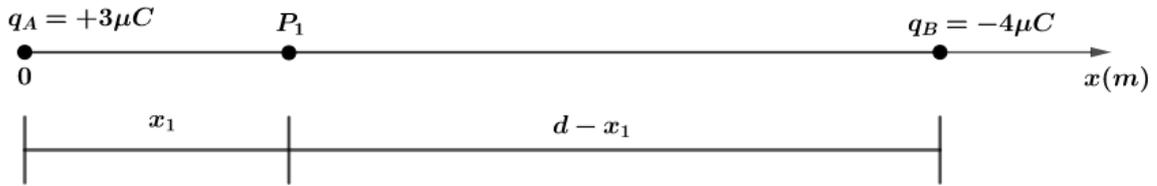
Comentários:

Podemos escrever os potenciais para cada carga da seguinte forma:

$$V_A = K \frac{Q_A}{r_A} \text{ e } V_B = K \frac{Q_B}{r_B}$$

$$V_A = K \cdot \frac{3\mu C}{r_A} \text{ e } V_B = K \cdot \frac{(-4\mu C)}{r_B}$$

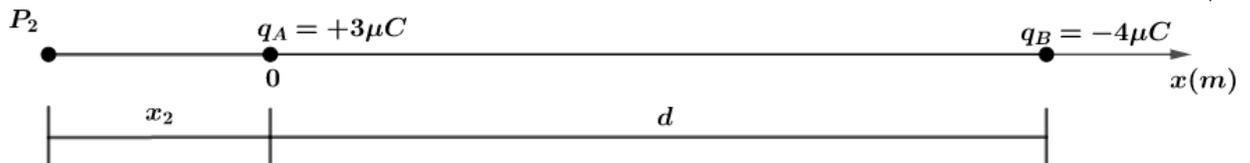
Repare que em módulo, o numerador de $V_B > V_A$, portanto, devem existir pontos próximos de Q_A , onde a distância r_A é menor, para que $V_A + V_B = 0$. Vamos supor um ponto P_1 a direita de A onde o potencial é nulo, então:



Para que o potencial elétrico no ponto P_1 seja nulo, temos:

$$V_{P_1} = 0 \Rightarrow K \cdot \frac{3\mu C}{x_1} + K \frac{(-4\mu C)}{d-x_1} = 0 \Rightarrow \frac{3}{x_1} = \frac{4}{d-x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{3d}{7} = \frac{3}{7} \cdot 7 = 3m$$

Agora, vamos procurar um ponto P_2 a esquerda de A, onde o potencial elétrico também é nulo:



Então, para que o potencial elétrico no ponto P_1 seja nulo, devemos ter:

$$V_{P_2} = 0 \Rightarrow K \cdot \frac{3\mu C}{|x_2|} + K \frac{(-4\mu C)}{d+|x_2|} = 0 \Rightarrow 3d + 3|x_2| = 4|x_2| \Rightarrow |x_2| = 3d = 21m$$

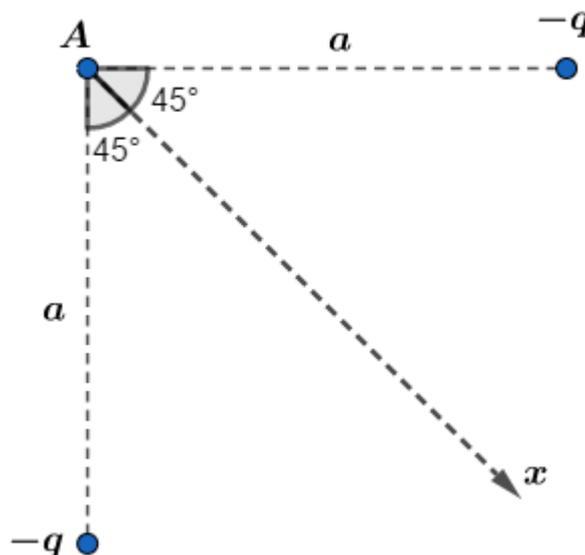
Como a abscissa x_2 está à esquerda da origem do segmento orientado, sabemos $x_2 < 0$. Portanto:

$$\boxed{x_2 = -21m}$$

4)

(FUVEST-SP)

Duas cargas $-q$ distam a do ponto A, como indicado na figura.



a) A que distância de A, sobre a reta Ax, devemos colocar uma carga $+q$ para que o potencial eletrostático em A seja nulo?

b) É este o único ponto do plano da figura em que a carga $+q$ pode ser colocada para anular o potencial em A? Justifique a resposta.



Comentários:

a) O potencial elétrico gerado pelas cargas $-q$ em A são dados por:

$$V_1 = K \frac{(-q)}{a} \text{ e } V_2 = K \frac{(-q)}{a}$$

$$V_1 + V_2 = -2K \frac{q}{a}$$

Assim, devemos colocar uma carga $+q$ a uma distância d igual a:

$$V_A = 0$$

$$K \frac{q}{d} - 2K \frac{q}{a} = 0$$

$$\boxed{d = \frac{a}{2}}$$

b) Quando fomos encontrar a distância d sobre a reta Ax onde o potencial é nulo, nós não restringimos apenas para pontos na reta Ax . Apenas colocamos a carga $+q$ a uma distância d , pois dessa forma garantimos que o potencial em A será nulo. Dessa forma, basta que a carga $+q$ esteja a uma distância d do ponto A que o potencial em A será nulo. Em outras palavras, qualquer ponto da circunferência, com centro em A e raio $d = \frac{a}{2}$, fará com que a carga $+q$ anule o potencial elétrico em A .

Portanto, o ponto encontrado no item a) não é único. O lugar geométrico dos pontos onde podemos colocar a carga $+q$ para zerar o potencial em A é uma circunferência centrada em A e raio $d = \frac{a}{2}$.

TOME
NOTA!



2.9. Outras propriedades das linhas de força

Propriedade 1)

As linhas de força do campo elétrico orientam-se do maior para o menor potencial.

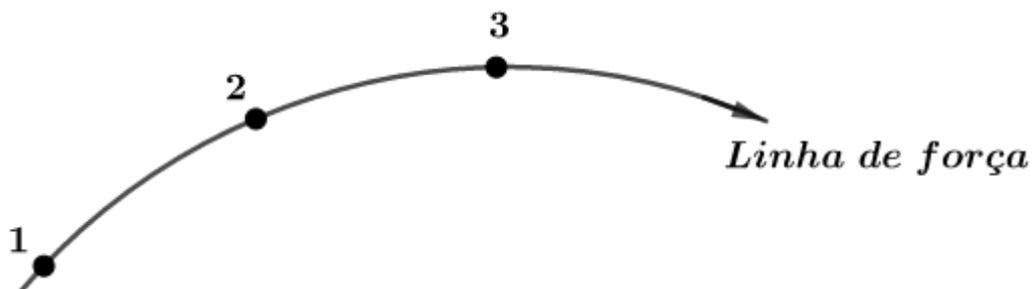


Figura 6: Linha de força de um campo elétrico qualquer.

Isso ocorre pois $\Delta V = - \int E \cdot dr$ logo o potencial diminui ao percorrer a linha de força.

Propriedade 2)



As linhas de força de um campo elétrico não podem formar loops

Imagine que uma linha de força forme um loop. Vamos começar em um ponto P percorrer esse loop e calcular a variação de potencial quando voltamos para P. Como $\int E \cdot dr \neq 0$ no loop, ao voltarmos para P o potencial será menor que o inicial, absurdo pois estamos em um campo eletrostático.



2.10. Superfícies equipotenciais

Chamamos de superfícies equipotenciais o lugar geométrico dos pontos que apresentam um mesmo potencial elétrico.

Exemplo: seja a carga puntiforme $q > 0$, em repouso, criando um campo elétrico, onde as linhas de força são representadas na figura abaixo:

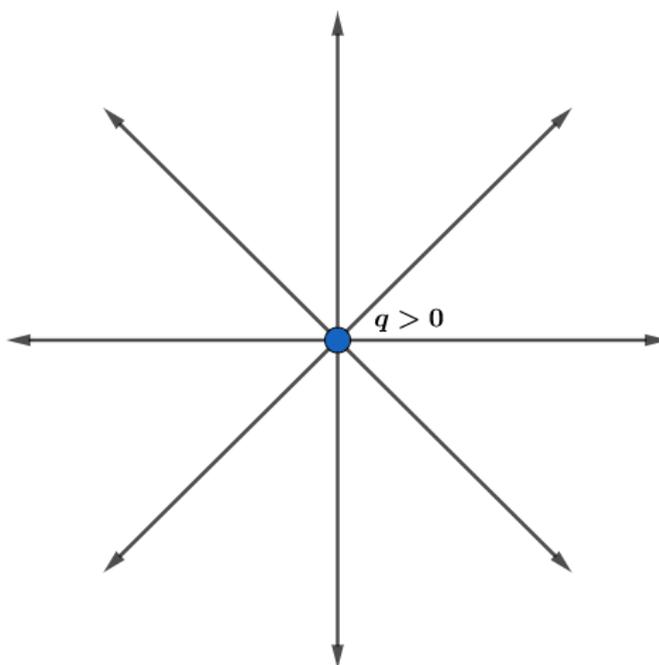


Figura 7: Campo elétrico de uma carga positiva tem direção radial, "saindo" da carga.

Dado que o potencial de uma carga puntiforme é dado por:

$$V = \frac{kq}{r}$$

Pontos equidistantes da carga irão ter o mesmo potencial. Em outras palavras, as superfícies equipotenciais são esferas concêntricas com a carga.

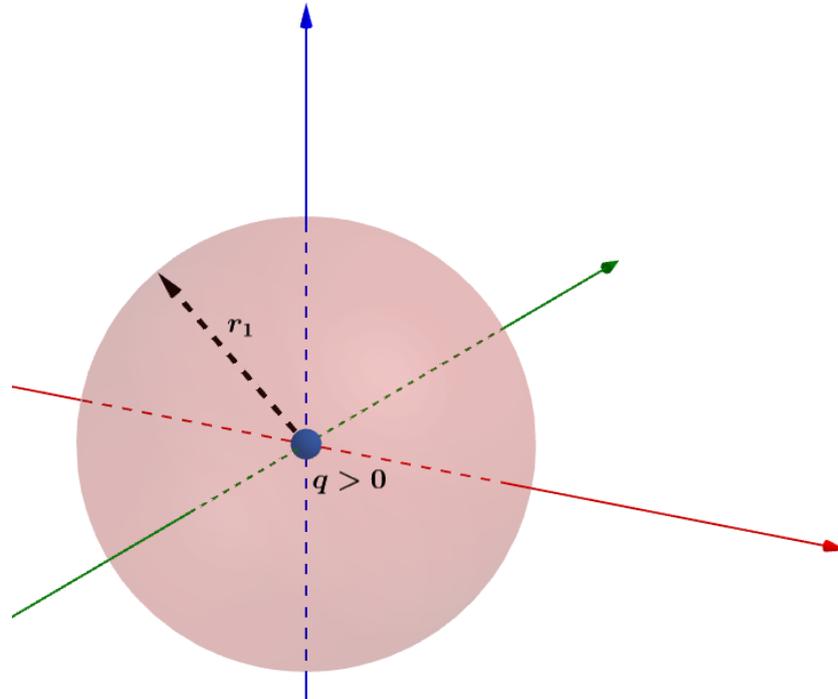


Figura 8: Superfície esférica equipotencial a uma distância r_1 .

Quando variamos a distância r em relação à carga q , estamos criando várias superfícies esféricas equipotenciais. Dizemos que geramos uma família de superfícies equipotenciais.

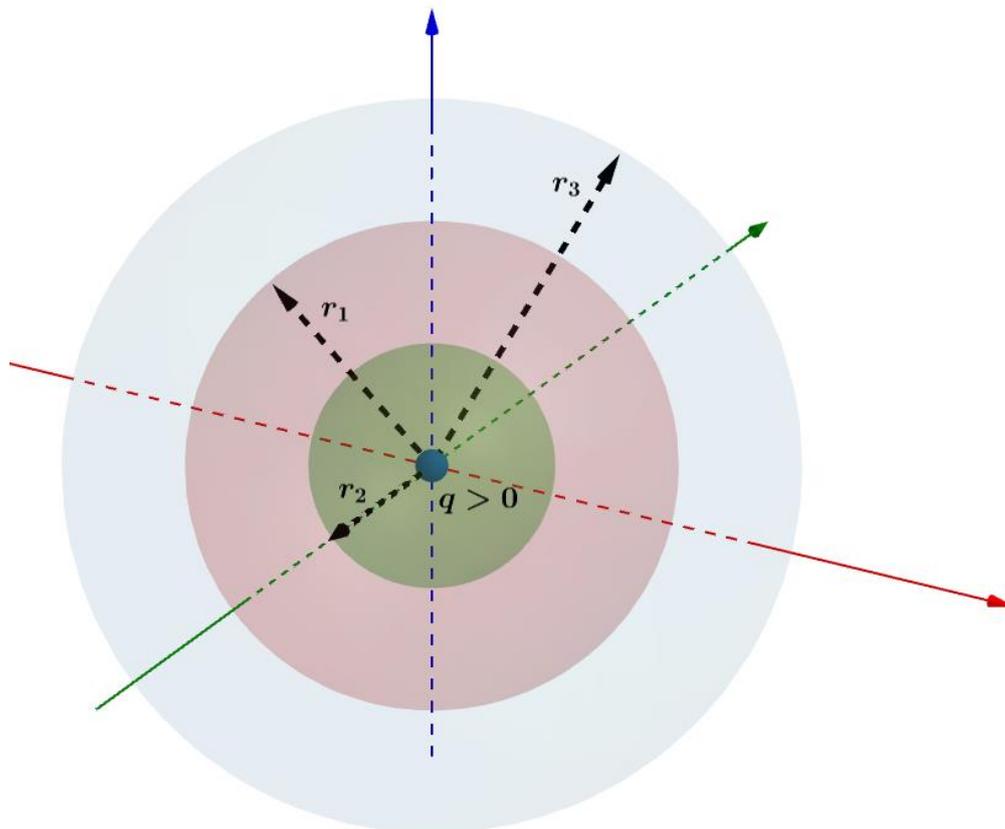


Figura 9: Família de superfícies equipotenciais.



TOME
NOTA!



2.10.1. As propriedades das superfícies equipotenciais

Propriedade 1)

Em uma superfície equipotencial, o trabalho da força elétrica ao longo de um deslocamento é nulo.

Podemos verificar essa propriedade através da equação do trabalho da força elétrica:

$$\tau_{A \rightarrow B} = q \cdot (V_A - V_B)$$

Como estamos em uma superfície equipotencial, temos que $V_A = V_B$, portanto:

$$\tau_{A \rightarrow B} = 0$$

Propriedade 2)

As superfícies equipotenciais são ortogonais ao vetor \vec{E} .

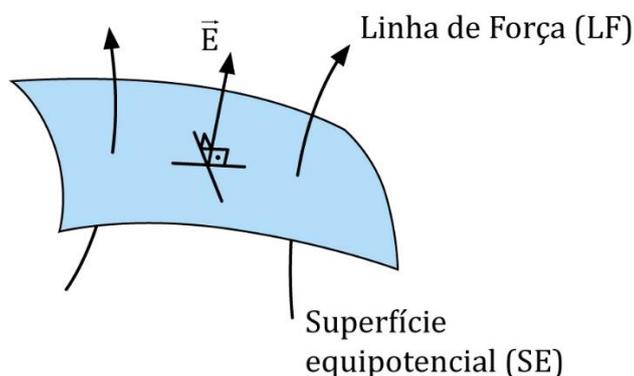


Figura 10: Superfície equipotencial ortogonal ao vetor \vec{E} .

Também podemos verificar essa propriedade por redução ao absurdo. Vamos supor que existe uma componente \vec{E}_t que não seja ortogonal à superfície equipotencial. Então, quando uma carga elétrica se deslocar nessa superfície, haverá trabalho elétrico realizado não-nulo. Tal fato é um absurdo, pois contraria a propriedade 1.

Exemplos de aplicações de superfícies equipotenciais perpendiculares as linhas de campo:

1) Campo elétrico uniforme:

Nesse caso, sabemos que as linhas de força constituem um feixe de retas paralelas e, portanto, as superfícies equipotenciais serão planos perpendiculares às retas.

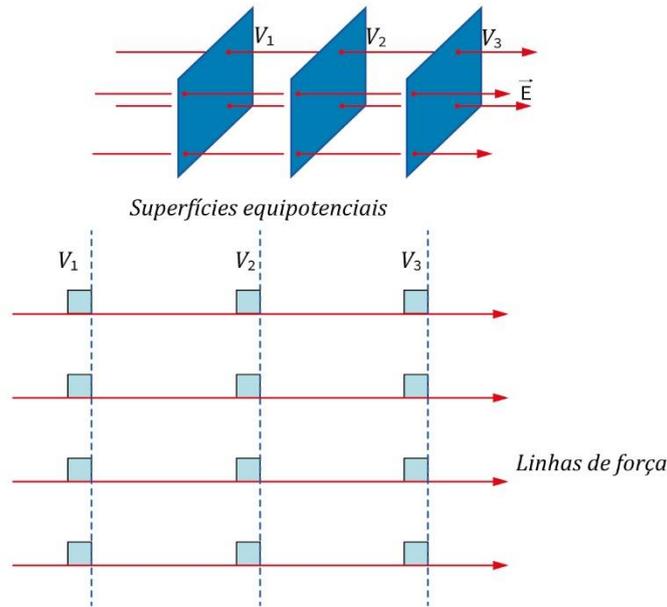


Figura 11: Linhas de campo perpendiculares às superfícies equipotenciais.

2) **Campo gerado por carga puntiforme:**

Como visto, as linhas de força nesse caso são radiais para fora, em caso de cargas positivas, e radiais para dentro, em caso de cargas negativas. Portanto, as superfícies equipotenciais são superfícies esféricas centradas na carga geradora do campo.

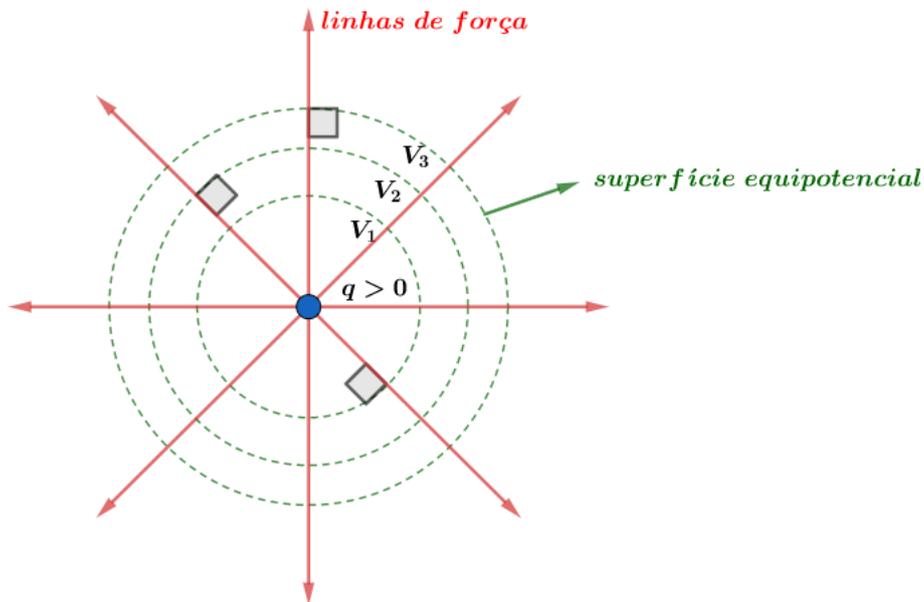


Figura 12: Superfícies equipotenciais geradas por uma carga puntiforme positiva.

3) **Dipolo elétrico:**

Considere um conjunto formado por duas cargas elétricas de valores simétricos (+q e -q), formando um dipolo elétrico.

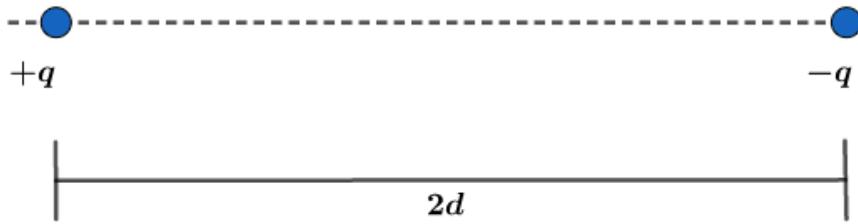


Figura 13: Dipolo elétrico a uma distância $2d$.

Se tomarmos qualquer ponto do espaço que equidista das cargas $+q$ e $-q$, ou seja, $d_{+q} = d_{-q} = r$, teremos um potencial nulo, pois:

$$V_{+q} = \frac{kq}{r} \text{ e } V_{-q} = \frac{-kq}{r} \Rightarrow \boxed{V_{+q} + V_{-q} = 0}$$

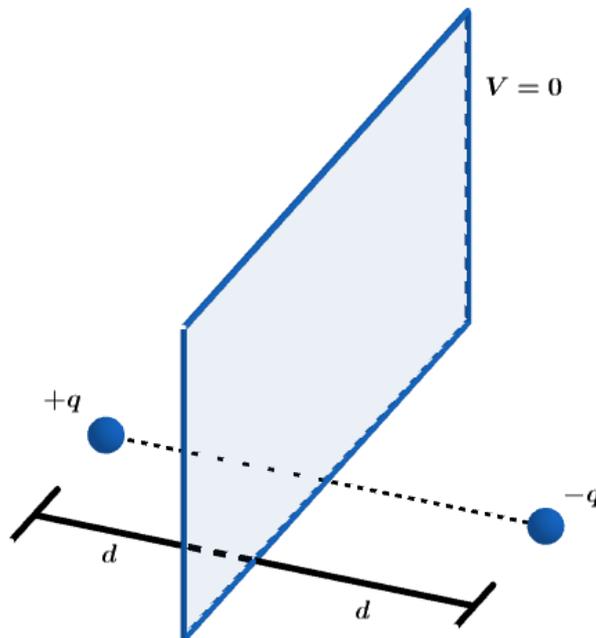


Figura 14: Plano onde o potencial elétrico das cargas é nulo.

Além disso, sabendo que as superfícies equipotenciais são ortogonais às linhas de campo, podemos desenhar as equipotenciais ao desenharmos as linhas de campo elétrico (que já sabemos como é para um dipolo).

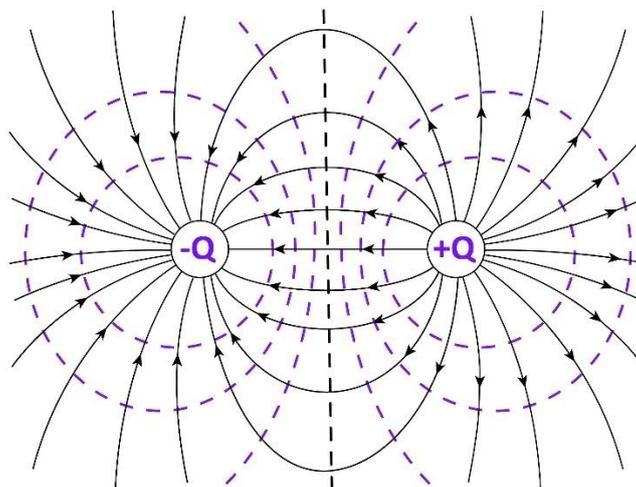


Figura 15: Representação das equipotenciais e linhas de campo para o dipolo elétrico.



Seja x a distância à direita da carga positiva, quando percorremos a reta que une as cargas, da esquerda para a direita, temos:

$$V(x) = V_1 + V_2 = \frac{Kq}{x} - \frac{Kq}{2d - x}$$

Se plotarmos o gráfico do potencial elétrico entre as cargas em função da distância, teríamos o seguinte gráfico:

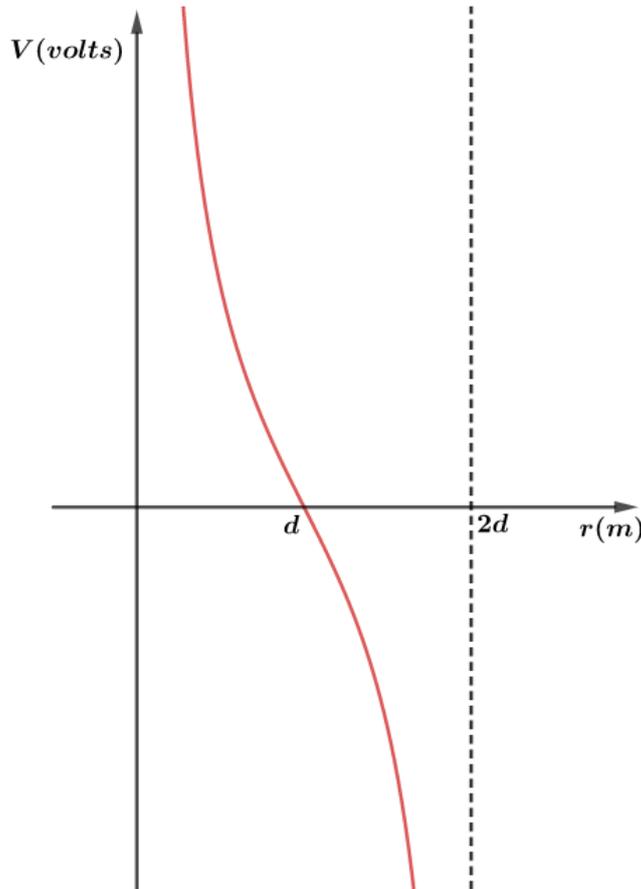
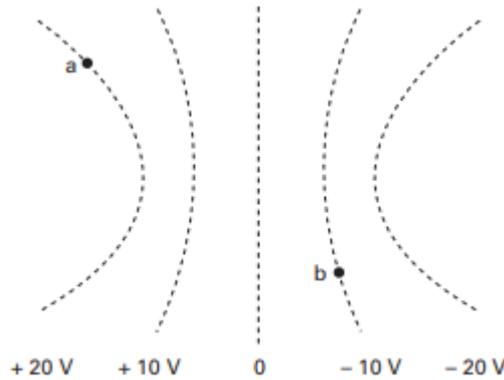


Figura 16: Potencial elétrico em função da distância para o dipolo elétrico.



5) (FUVEST-SP)

A figura representa algumas superfícies equipotenciais de um campo eletrostático e os valores dos potenciais correspondentes.

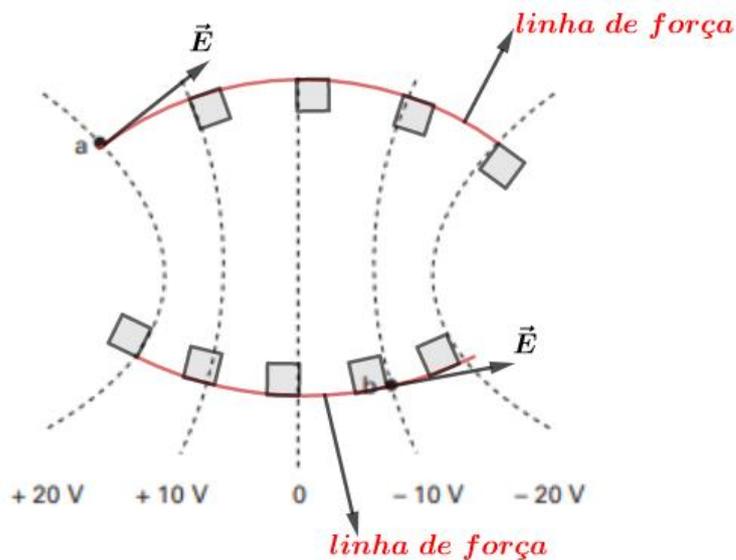


a) Copie a figura, representando o vetor campo elétrico nos pontos a e b.

b) Qual é o trabalho realizado pela força elétrica para levar uma carga q , de $2 \times 10^{-6} C$, do ponto a ao ponto b?

Comentários:

a) sabemos que em cada ponto da superfície equipotencial, o vetor campo elétrico é perpendicular ao plano tangente à superfície no ponto. Além disso, como visto em teoria orientamos o campo no sentido decrescentes dos potenciais. Logo, a representação é dada por:



b) o trabalho realizado pela carga elétrica $q = 2 \times 10^{-6} C$, conhecendo os potenciais nos pontos desejado é dado por:

$$\tau_{a \rightarrow b} = q \cdot (V_a - V_b) = 2 \times 10^{-6} C \cdot (20 - (-10)) = 6 \times 10^{-5} J$$

6) (UnB-75)

Qualquer que seja a situação física envolvendo campo elétrico e potencial elétrico, podemos afirmar que:

a) quando o campo elétrico for nulo num ponto, o potencial necessariamente também o será;

b) quando o campo elétrico for diferente de zero num ponto, o potencial necessariamente também o será;



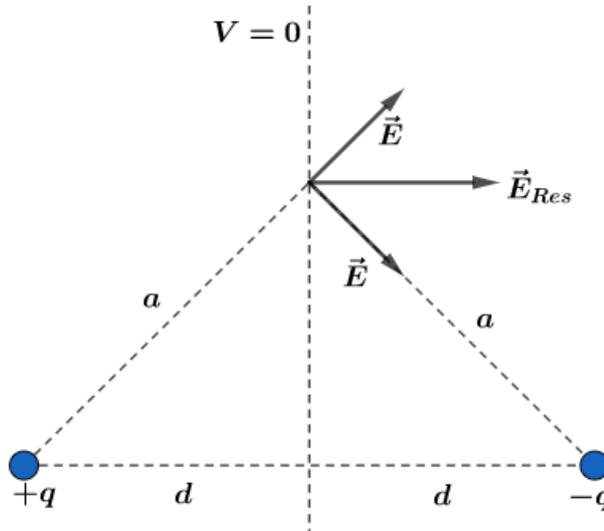
c) quando o campo elétrico for constante numa região, o potencial necessariamente também o será;

d) quando o campo elétrico for nulo numa região, o potencial será necessariamente constante nessa região.

Comentários:

a) Incorreta. Se o campo elétrico é nulo, quer dizer que o potencial é constante, basta lembrarmos que $E = -\frac{dV}{dr}$. O potencial é constante, mas não necessariamente nulo.

b) Incorreta. Basta pegarmos o exemplo do dipolo elétrico:

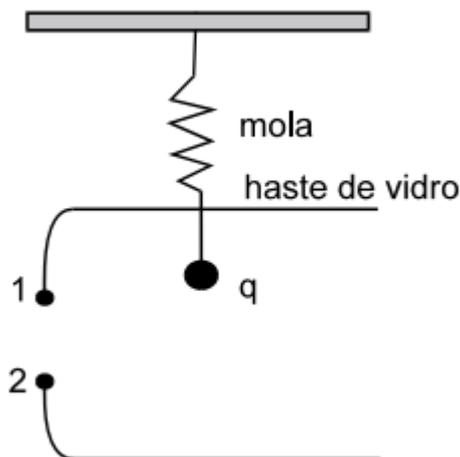


c) Incorreta. Basta lembrarmos do campo elétrico uniforme. O campo é invariante, mas os potenciais são cada vez menores a medida que caminhamos no sentido das linhas de campo.

d) Correta. Essa alternativa corrige o texto escrito na alternativa a. Quando o campo é nulo, o potencial é constante podendo ser nulo ou não.

7) (UnB-75)

Na figura ao lado vemos uma pequena esfera metálica de carga q , presa à extremidade inferior de uma haste de vidro e situada entre duas placas condutoras. A extremidade superior da haste está presa a uma mola e todo o sistema pode oscilar verticalmente. A diferença de potencial entre as placas é V_{12} . A mola fica:





- a) comprimida quando $q < 0$ e $V_1 < V_2$;
- b) comprimida quando $q = 0$ e $V_1 > V_2$;
- c) distendida quando $q > 0$ e $V_1 < V_2$;
- d) nenhuma dessas.

Comentários:

a) Incorreta. Se $V_{12} = V_1 - V_2 < 0$, então $V_1 < V_2$ ou $V_2 > V_1$. Portanto, o campo elétrico está orientado da placa 2 para a placa 1. Por isso, a força elétrica na carga $q < 0$, estará orientada para baixo, portanto, a mola está sendo alongada e não comprimida.

b) Incorreta. Se $q = 0$, não existe força elétrica atuando na carga. Como é desconsiderado o efeito da força peso, a mola não sofrerá ação de mais nenhuma força.

c) Incorreta. Semelhante ao item a, $V_2 > V_1$, campo orientado da placa 2 para a placa 1. Assim, quando colocamos uma carga positiva entre as placas, a força elétrica está orientada para cima. Portanto, a mola está sendo comprimida.

d) Correta. Nenhuma das anteriores estão corretas.

ACORDE!



2.11. Espontaneidade e trabalho

Queremos responder à pergunta: o que acontece quando soltamos uma carga q em um campo E ?

Se existe um campo elétrico, agirá na carga uma força elétrica, e espontaneamente a carga irá se mover na direção dessa força elétrica. Logo o trabalho da força elétrica é positivo, e como a carga está ganhando energia cinética, deverá estar perdendo energia potencial elétrica. Isso vem da fórmula, pois:

$$W = -\Delta U$$

Se o trabalho é positivo, a energia potencial elétrica diminui. Logo podemos enunciar:

Qualquer carga, independente do sinal, irá buscar espontaneamente regiões de energia potencial elétrica menor

Entretanto, como $U = qV$, se a carga for positiva, uma menor energia potencial irá coincidir com um menor potencial, mas para uma carga negativa será o contrário:

Espontaneamente, vemos que cargas positivas buscam potenciais menores, e cargas negativas buscam potenciais maiores



3. Energia potencial eletrostática

Seja Q uma carga colocada em um ponto A. Seja q uma carga de prova colocada em um ponto B, distante r de Q :

$$V_B = \frac{kQ}{r}$$

A energia potencial elétrica pode ser calculada por:

$$U = qV_B = \frac{kQq}{r}$$

Ou seja, a energia potencial elétrica entre duas cargas Q e q , afastadas r entre si, é diretamente proporcional às cargas e inversamente proporcional à distância entre as mesmas.

Se tivermos mais de duas cargas, devemos somar as energias potenciais **duas a duas!**

Como exemplo, se tivermos 3 cargas, A, B e C:

$$U = \frac{kq_Aq_B}{r_{A,B}} + \frac{kq_Aq_C}{r_{A,C}} + \frac{kq_Bq_C}{r_{B,C}}$$

Para o caso de n cargas:

$$U_{total} = \sum_{i \neq j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$$



8) (FUVEST – 95)

Um sistema formado por três cargas puntiformes iguais, colocadas em repouso nos vértices de um triângulo equilátero, tem energia potencial eletrostática igual a U . Substitui-se uma das cargas por outra, na mesma posição, mas com o dobro do valor. A energia potencial eletrostática do novo sistema será igual a:

- a) $\frac{4}{3}U$
- b) $\frac{3}{2}U$
- c) $\frac{5}{3}U$
- d) $2U$
- e) $3U$

Comentários:

Podemos calcular a energia potencial eletrostática para o sistema, fazendo a soma de todas as energias tomando as cargas em combinações 2 a 2, da seguinte forma:



$$U = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{a} + \frac{K \cdot q_1 \cdot q_3}{a} + \frac{K \cdot q_2 \cdot q_3}{a}$$

Onde a é o lado do triângulo equilátero.

Como as cargas são iguais, a energia U pode ser escrita como:

$$U = \frac{3kq^2}{a}$$

Se uma das cargas dobra de valor, por exemplo a carga q_1 passa a ser $2q$, então temos a nova energia potencial eletrostática dada por:

$$U' = \frac{K \cdot q'_1 \cdot q_2}{a} + \frac{K \cdot q'_1 \cdot q_3}{a} + \frac{K \cdot q_2 \cdot q_3}{a}$$

$$U' = \frac{K \cdot 2q \cdot q}{a} + \frac{K \cdot 2q \cdot q}{a} + \frac{K \cdot q \cdot q}{a}$$

$$U' = \frac{5Kq^2}{a}$$

Fazendo $\frac{U'}{U}$, vem:

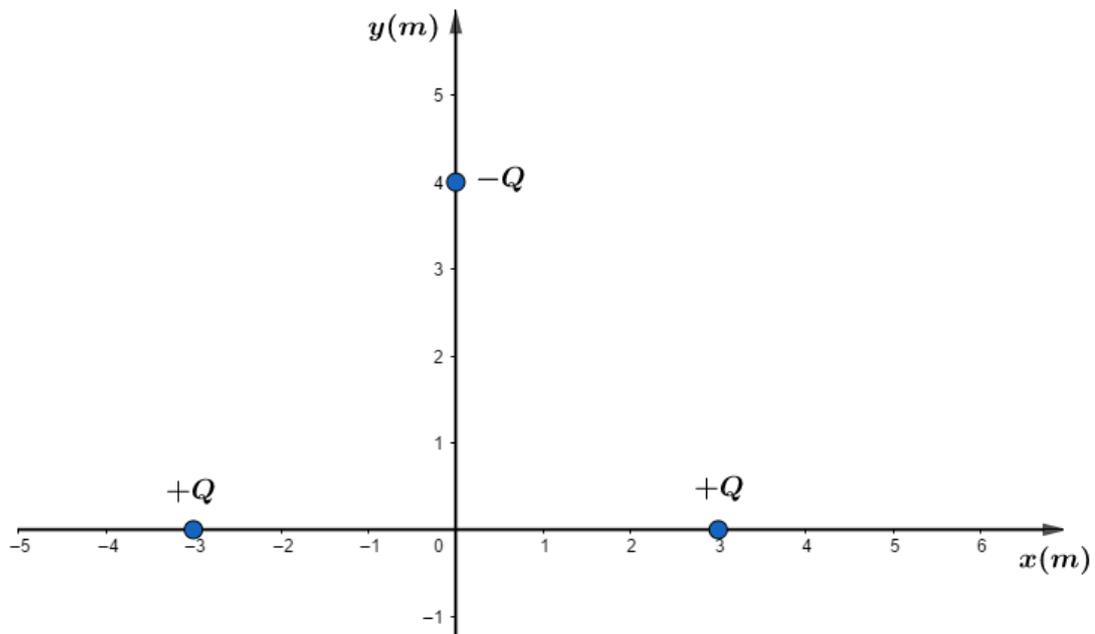
$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{5Kq^2}{a}}{\frac{3Kq^2}{a}}$$

$$\therefore U' = \frac{5}{3}U$$

Gabarito: C

9) (UFCE)

Considere três partículas de mesma massa M , eletricamente carregadas e dispostas no plano $X - Y$, como mostra a figura.



Duas delas, ambas com carga positiva $+Q$, estão fixadas, uma na posição $(-3,0)$ e a outra na posição $(3,0)$. A terceira, de carga negativa $-Q$ e originalmente na posição $(0,4)$, quando abandonada desloca-se ao longo do eixo Y devido à ação das partículas fixas, positivamente carregadas. Sabendo que $|+Q| = |-Q| = 5 \times 10^{-6}C$, $M = 1,2 \times 10^{-3}kg$ e $K_0 = 9 \times 10^9 Nm^2 /$



C^2 , determine o módulo da velocidade, em m/s , com a qual a partícula de carga $-Q$ passa pela origem $(0,0)$. Despreze atritos e efeitos de forças gravitacionais.

Comentários:

Devido ao fato de somente agir no corpo a força elétrica e sabendo que essa força é conservativa, podemos utilizar o teorema da enérgica cinética.

$$\tau_{F_{Res}} = \Delta E_c$$

Como a resultante é a força elétrica, temos que:

$$\tau_{F_{ele}} = (-Q) \cdot (V_{(0,4)} - V_{(0,0)})$$

Os potenciais nos pontos $(0,4)$ e $(0,0)$ são dados por:

$$V_{(0,4)} = K_0 \frac{q}{\sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2}} + K_0 \frac{q}{\sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}}$$

$$V_{(0,4)} = 2.9 \times 10^9 \cdot \frac{5 \times 10^{-6}}{5} = 18 \times 10^3 V$$

$$V_{(0,0)} = 2.9 \times 10^9 \cdot \frac{5 \times 10^{-6}}{3} = 30 \times 10^3 V$$

Portanto, utilizando o teorema, lembrando que a carga é abandonada no ponto $(0,4)$, temos:

$$(-5 \times 10^{-6}) \cdot (18 \times 10^3 - 30 \times 10^3) = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \times 10^{-3} \cdot v^2$$

$$v^2 = 100$$

$$\therefore \boxed{v = 10 \text{ m/s}}$$

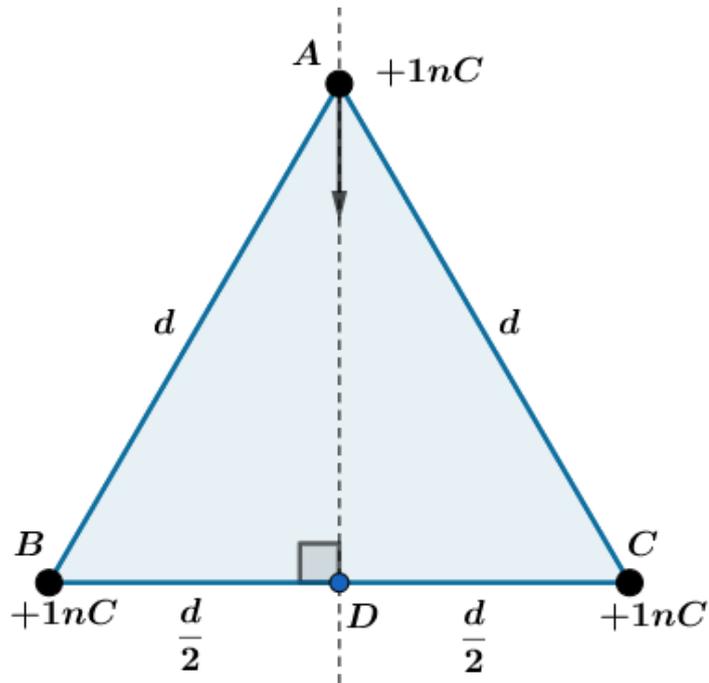
10) (E. Naval)

A , B e C são os vértices de um triângulo equilátero de 3 metros de lado e D é o ponto médio do lado BC . Em cada um dos vértices B e C há uma carga elétrica puntiforme, positiva, fixa, de 1,0 nanocoulomb ($1 \text{ nano} = 10^{-9}$). Uma terceira carga, puntiforme, positiva, de 1,0 nanocoulomb é lançada, com energia cinética de 10 nanojoules, do vértice A em direção ao ponto D . Considerando que a constante eletrostática do meio (vácuo) seja $9 \times 10^9 \text{ uSI}$ e que as únicas forças atuantes na carga móvel sejam as decorrentes da interação elétrica com as duas cargas fixas mencionadas, a energia cinética da carga móvel, em nanojoules, ao passar pelo ponto D é:

- a) 0
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 16

Comentários:

Vamos construir uma figura que representa a disposição física das cargas:



Novamente, devido ao fato de as forças atuantes serem apenas da interação elétrica, podemos utilizar o teorema da energia cinética:

$$\tau_{F_{res}} = \Delta E_c$$

$$\tau_{F_{ele}} = (E_c)_D - (E_c)_A$$

$$q \cdot (V_A - V_D) = (E_c)_D - (E_c)_A$$

Calculamos os potenciais em A e em D pela expressão:

$$V_A = K_0 \frac{q_B}{d} + K_0 \frac{q_C}{d} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 2 \times 10^{-9}}{3} = 6 \text{ V}$$

$$V_D = K_0 \frac{q_B}{\frac{d}{2}} + K_0 \frac{q_C}{\frac{d}{2}} = 2 \left(K_0 \frac{q_B}{d} + K_0 \frac{q_C}{d} \right) = 2V_A = 12 \text{ V}$$

Logo, a energia cinética no ponto D, em nanojoules (nJ), é de:

$$(E_c)_D = q \cdot (V_A - V_D) + (E_c)_A$$

$$(E_c)_D = 1 \times 10^{-9}(6 - 12) + 10 \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-9} = 4 \text{ nJ}$$

Gabarito: b.



ESCLARECENDO!



4. Potencial elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático

Veja que, como $E = -\frac{dV}{dr}$ e o campo é nulo dentro de um condutor, então $\frac{dV}{dr}$ é zero, e o potencial é constante. De outra forma, dizemos que o potencial elétrico é o mesmo em todos pontos de um condutor, inclusive em sua superfície.

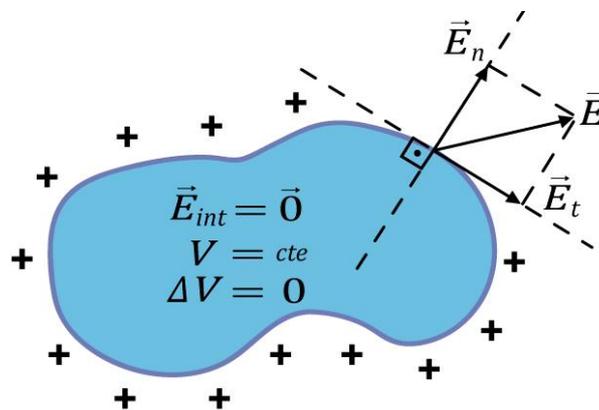
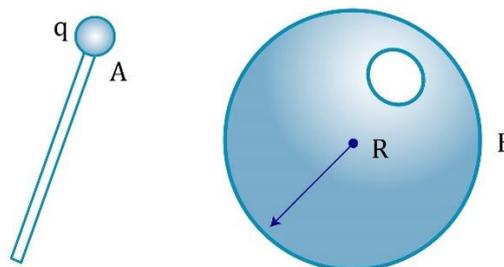


Figura 17: Propriedades de um condutor em equilíbrio eletrostático.

Além disso, quando todos os pontos da superfície do condutor possuem o mesmo potencial, dizemos que ela é uma superfície equipotencial e, conforme vimos, o campo elétrico é ortogonal a equipotencial, o que prova que o campo na superfície de um condutor deve ser perpendicular a ela.

11)

Considere uma pequena esfera metálica de raio r carregada com carga $+q$. Uma outra esfera metálica de raio R , tal que $R > r$, inicialmente neutra. Coloca-se a esfera menor no interior da esfera maior por um orifício, sem que ache contato entre as esferas. Em seguida, faz-se o contato da esfera menor com o interior da casca da esfera maior. Em seguida, retira-se a esfera menor de dentro da outra, sem haver qualquer outro contato. Determine as cargas finais de cada esfera.



Comentários:

Quando colocamos a esfera menor em contato com o interior da esfera maior, os dois corpos passam a ser apenas um. Dessa forma, a carga tende a se distribuir na superfície da esfera maior,



que envolve todo o conjunto. Após a retirada da esfera menor, temos que a esfera menor se tornará neutra, já que seu excesso de cargas foi transferido para a superfície externa da esfera maior.

Portanto:

$$q_{menor} = 0 \text{ e } q_{maior} = +q$$

Notamos aqui um processo para neutralização de cargas.

TOME
NOTA!



4.1. Potencial de um condutor esférico

Vamos calcular agora o potencial elétrico de um condutor esférico. Para pontos fora da esfera, como o campo elétrico é similar ao da carga pontual, o potencial também será igual ao de uma carga pontual, ou seja:

$$V_{fora} = \frac{kq}{r}$$

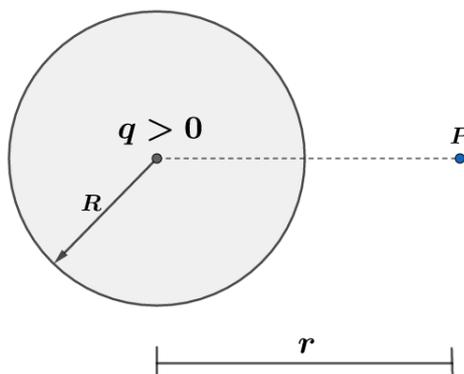


Figura 18: Potencial elétrico de um condutor esférico em função da distância ao centro dela.

Como não existe descontinuidade para o potencial como existe para o campo elétrico, na superfície o potencial vale:

$$V_{superficie} = \frac{kq}{R}$$

Além disso, como se trata de um condutor, o potencial para pontos internos é constante e igual da superfície:

$$V_{dentro} = V_{superficie} = \frac{kq}{R}$$

Assim, temos os seguintes gráficos para os potenciais das esferas condutoras em função da distância:

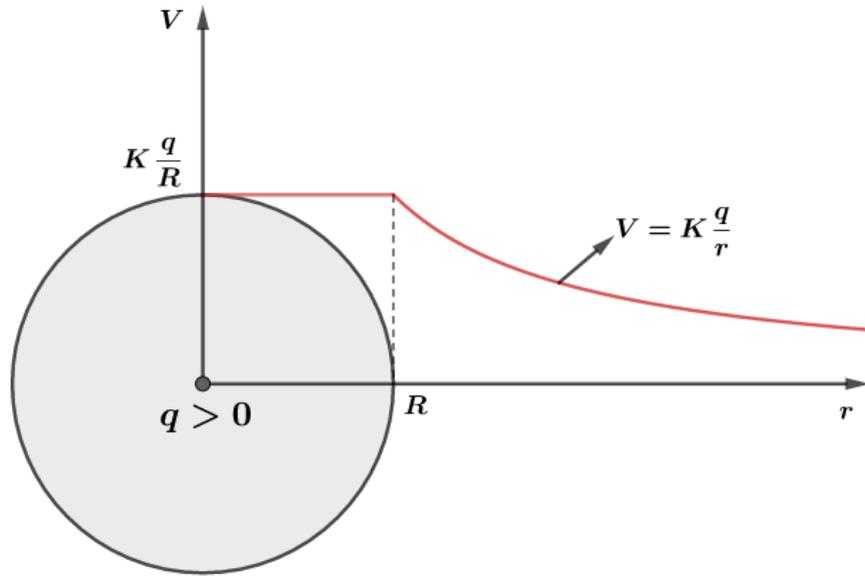


Figura 19: Potencial elétrico de um condutor esférico carregado com carga elétrica positiva em função da distância.

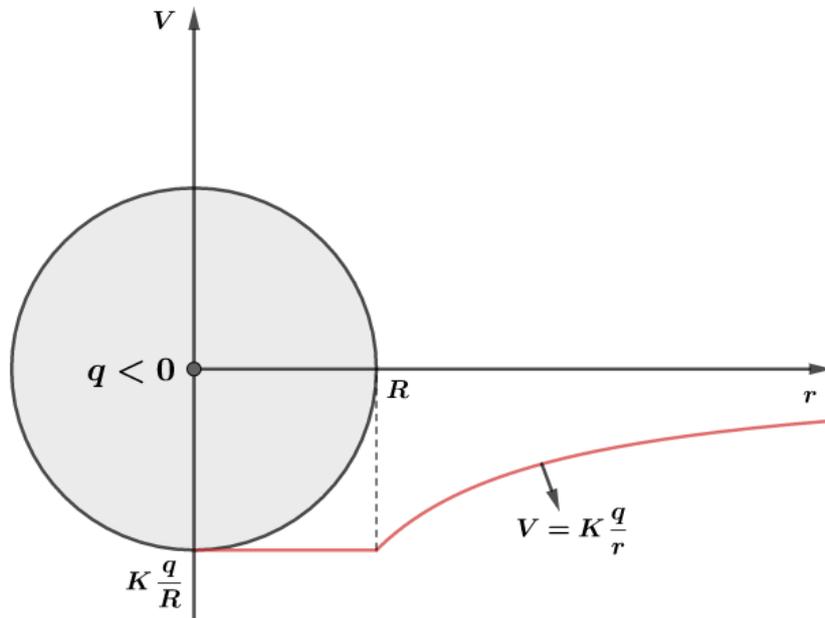


Figura 20: Potencial elétrico de um condutor esférico carregado com carga elétrica negativa em função da distância.

Não podemos esquecer que o campo elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático é dado por:

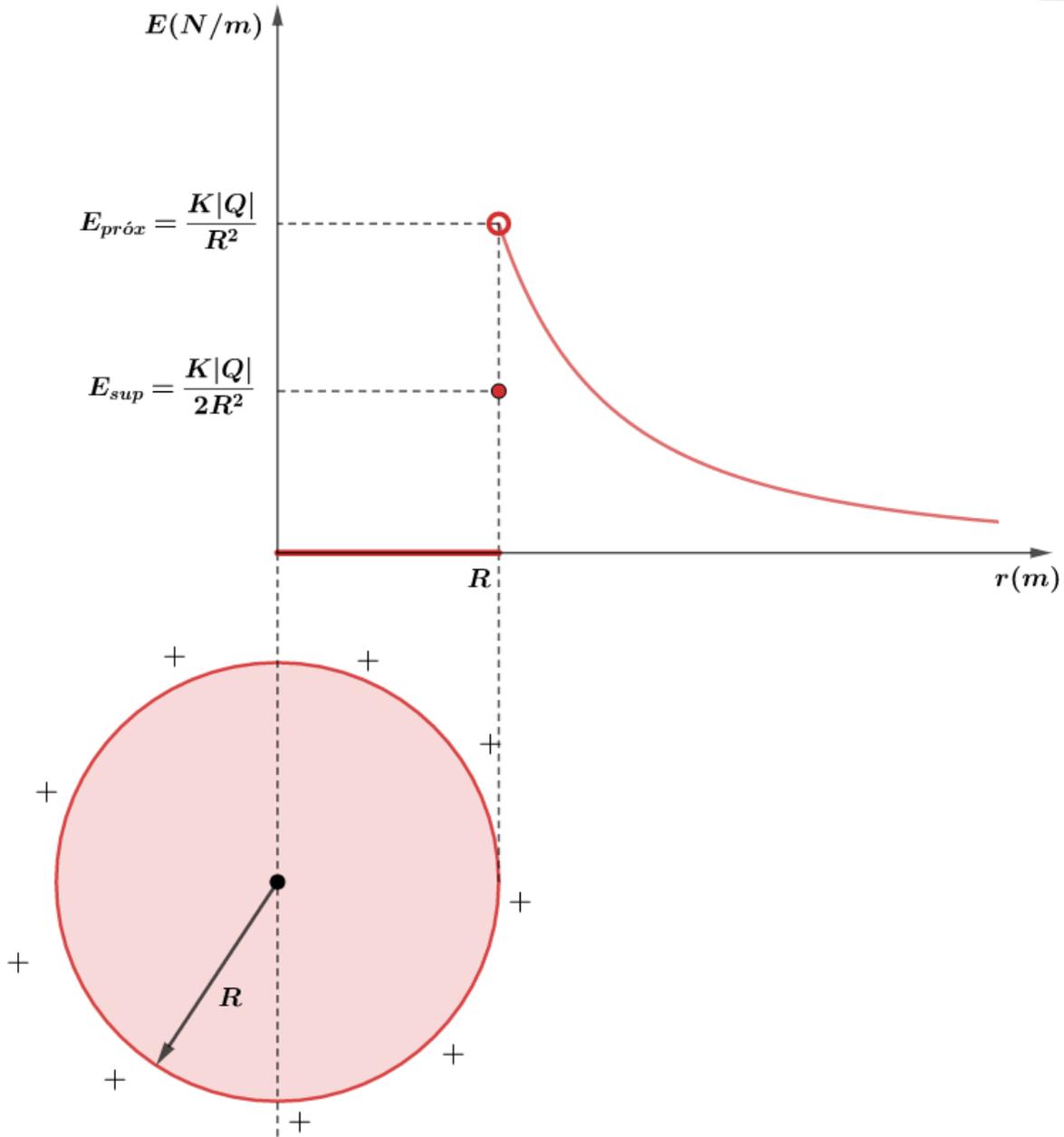


Figura 21: Campo elétrico em função da distância de um condutor carregado e em equilíbrio eletrostático.

CURIOSIDADE



4.2. O potencial da terra

A Terra pode ser considerada um grande condutor esférico negativamente eletrizada com carga próxima de $-580\ 000\ C$ e potencial elétrico de $-400\ 000\ V$, se comparado ao infinito. Isso quer dizer que todos os corpos em contato com a Terra estão a um potencial aproximadamente igual a $-400\ 000\ V$ caso a referência seja o infinito. Mas faz sentido a referência ser o infinito? Na maioria das vezes não.



É muito mais útil em eletrodinâmica calcular o potencial em relação à Terra. Se considerarmos a Terra como nosso referencial o potencial da Terra será zero. Por exemplo, em um laboratório, se dissermos que um corpo tem potencial de +5000 V em relação à Terra, estamos falando que ele tem 5000 V a mais que a Terra.

Quando ligamos à Terra um condutor carregado negativamente, notamos que haverá fluxo de elétrons do condutor para a Terra, até o momento em que se anule a carga elétrica do corpo. Como visto anteriormente, os elétrons procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

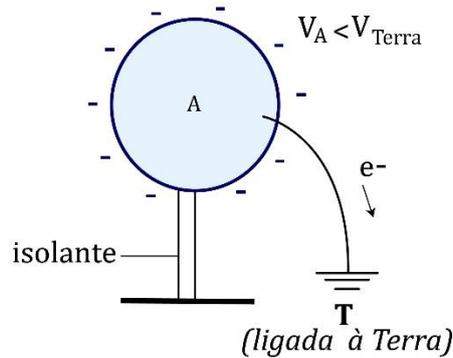


Figura 22: Carga negativa ligada à Terra.

No momento em que o condutor se neutralizar, seu potencial será o mesmo que o da Terra.

Em contrapartida, quando ligamos à Terra um condutor carregado positivamente, notamos que haverá fluxo de elétrons da Terra para o condutor, até o momento em que se anule a carga elétrica do corpo. Novamente, os elétrons (cargas negativas) procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

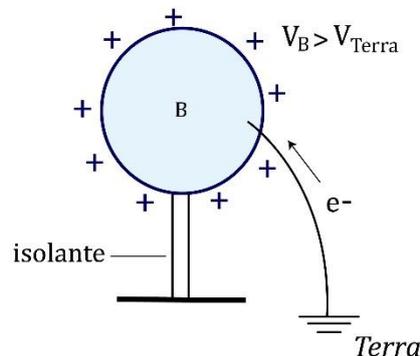


Figura 23: Carga positiva ligada à Terra.

Da mesma forma, quando o condutor se neutralizar, seu potencial será o mesmo que o da Terra (zero no nosso referencial). E esse fenômeno que chamamos de aterramento.

ESCLARECENDO!



4.3. Aplicação do uso de potenciais para condutores em equilíbrio eletrostático

Vamos considerar dois corpos A e B isolados, eletrizados com cargas Q_A e Q_B , com os potenciais V_A e V_B , bem distantes um do outro.



Figura 24: Corpos com formatos quaisquer com suas respectivas cargas e potenciais elétricos.

Se considerarmos $V_A > V_B$, e conectarmos os dois corpos, por causa da diferença de potencial, haverá um fluxo de elétrons de B para A (elétrons, que são cargas negativas, procuram potenciais maiores).

Dessa forma, o corpo B vai perdendo seus elétrons e sua carga está aumentando, logo seu potencial está aumentando. Em contrapartida, ao receber elétrons, o corpo A tem sua carga diminuída e, portanto, seu potencial está diminuindo.

Essa movimentação de cargas ocorre até que ambos tenham o mesmo potencial V_{eq} . Nesse momento não existirá mais campo elétrico, e o movimento ordenado acabará.

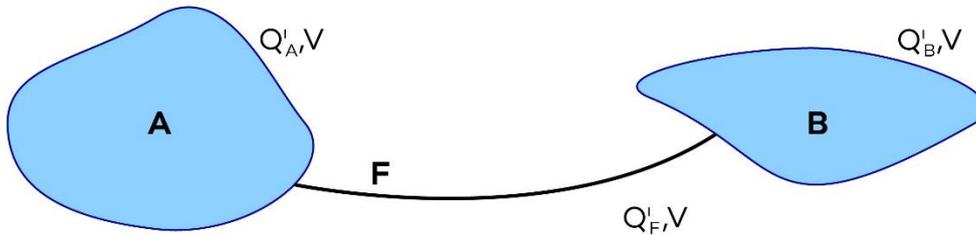


Figura 25: Contato elétrico entre as duas cargas.

De acordo com o Princípio da Conservação das Cargas, podemos escrever que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B + Q_{fio}$$

Quando utilizamos um fio muito fino, a quantidade de cargas armazenadas nele é praticamente nula (estudaremos o conceito de capacitância mais para frente), isto é, $Q_{fio} \cong 0$ e chegamos que:

$$\boxed{Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B}$$

Vamos particularizar nosso estudo para o caso de condutores esféricos. Sejam A e B dois condutores esféricos de raios r_A e r_B . Se ambos estão inicialmente carregados com cargas Q_A e Q_B , respectivamente, quando colocados em contato por um fio muito fino, podemos determinar o potencial equivalente e as cargas finais de cada corpo da seguinte forma:

$$\boxed{V_A = K \frac{Q_A}{r_A}} \text{ e } \boxed{V_B = K \frac{Q_B}{r_B}}$$

Já na configuração final, como ambos os potenciais são V_{eq} :

$$\boxed{V_{eq} = K \frac{Q'_A}{r_A}} \text{ e } \boxed{V_{eq} = K \frac{Q'_B}{r_B}}$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q_A + Q_B = \frac{V_{eq} \cdot r_A}{K} + \frac{V_{eq} \cdot r_B}{K}$$

$$\boxed{V_{eq} = K \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right)}$$



Podemos pensar que temos uma grande esfera com a soma das cargas e a soma dos raios.

Ou ainda em função dos potenciais V_A e V_B :

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow \frac{V_A \cdot r_A}{K} + \frac{V_B \cdot r_B}{K} = \frac{V_{eq} \cdot r_A}{K} + \frac{V_{eq} \cdot r_B}{K}$$

$$V_{eq} = \frac{V_A \cdot r_A + V_B \cdot r_B}{r_A + r_B}$$

Notamos que o potencial no equilíbrio eletrostático é a média ponderada dos potenciais, tendo como peso os raios dos condutores esféricos.

As novas cargas são dadas em função das iniciais da seguinte forma:

$$Q'_A = \frac{V_{eq} \cdot r_A}{K} = \frac{K \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right) r_A}{K}$$

$$Q'_A = r_A \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right)$$

Analogamente, a carga final de B será:

$$Q'_B = r_B \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right)$$

Caso tenhamos n esferas, teremos que:

$$V_{eq} = \frac{V_1 r_1 + V_2 r_2 + \dots + V_n r_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} = \frac{k(Q_1 + \dots + Q_n)}{r_1 + \dots + r_n}$$

$$Q'_i = r_i \left(\frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \right)$$

12) (Unicamp – SP)

Duas esferas condutoras A e B distantes possuem o mesmo raio R e estão carregadas com cargas $Q_A = -q$ e $Q_B = +2q$, respectivamente. Uma terceira esfera condutora C, de mesmo raio R porém descarregada, é trazida desde longe e é levada a tocar primeiramente a esfera A, depois a esfera B e em seguida é levada novamente para longe.

- qual é a diferença de potencial entre as esferas A e B antes de a esfera C tocá-las?
- qual é a carga final da esfera C?

Comentários:

a) antes do contato, os potenciais são:

$$V_A = K \frac{q_A}{r_A} = -K \frac{q}{R} \text{ e } V_B = K \frac{q_B}{r_B} = +2K \frac{q}{R}$$

Portanto, a diferença de potencial $V_A - V_B$ é de:

$$V_A - V_B = -K \frac{q}{R} - 2K \frac{q}{R} = -3K \frac{q}{R}$$

b) carga da esfera C quando entra em contato com a esfera A:



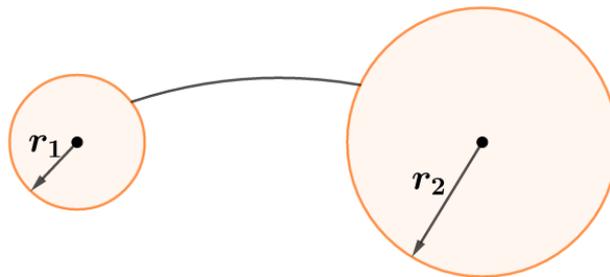
$$Q'_C = R_C \left(\frac{Q_A + Q_C}{R_A + R_C} \right) = R \left(\frac{-q + 0}{R + R} \right) = -\frac{q}{2}$$

Esfera C carregada com carga $-\frac{q}{2}$, colocada em contato com B:

$$(Q_C)_{final} = R_C \left(\frac{Q'_C + Q_B}{R_C + R_B} \right) = R \left(\frac{-\frac{q}{2} + 2q}{R + R} \right) = \frac{3}{4}q$$

13) (PUC – SP)

O sistema de condutores perfeitos da figura consta de duas esferas de raios $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, interligadas por um fio condutor de capacidade nula. Quando o sistema é eletrizado com carga positiva Q , após o equilíbrio eletrostático ser alcançado, o condutor de raio r_1 apresenta densidade superficial de carga σ_1 e o de raio r_2 apresenta densidade superficial de carga σ_2 . Nessa situação, a relação σ_1/σ_2 vale:



- a) zero
- b) 0,5
- c) 1,0
- d) 1,5
- e) 2,0

Comentários:

Os dois condutores possuem o mesmo potencial após o equilíbrio eletrostático:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow K \frac{Q_1}{r_1} = K \frac{Q_2}{r_2} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

As densidades superficiais de carga são dadas por:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2} \text{ e } \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2}$$

Portanto:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{Q_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{Q_2}{4\pi r_2^2}} = \frac{Q_1 \cdot r_2^2}{Q_2 \cdot r_1^2}$$

Mas como $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$, então:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_1 \cdot r_2^2}{r_2 \cdot r_1^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$



Com isso, vemos que se $r_2 > r_1$, a esfera de raio menor possui maior densidade de cargas.

Este fato evidencia nosso resultado acerca do poder das pontas:

Se tomarmos um condutor não esférico, as cargas em excesso concentram-se mais nas regiões de menores raios de curvatura.

Para o nosso caso, $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, logo:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2}$$

Gabarito: E

14) (IME – RJ)

Uma esfera de plástico, maciça, é eletrizada, ficando com uma densidade de carga superficial igual a $+0,05 \text{ C/m}^2$. Em consequência, se uma carga puntiforme $q = +1\mu\text{C}$ fosse colocada exteriormente a 3 metros do centro da esfera, sofreria repulsão de intensidade $F = 0,02\pi \text{ newtons}$. A esfera é descarregada e cai livremente de uma altura de 750 m, adquirindo, ao fim da queda, uma energia cinética de $0,009 \pi \text{ joules}$. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a massa específica do plástico da esfera.

Comentários:

Dado que a densidade superficial da esfera é dada por:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

A carga é expressa por:

$$Q = 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

A força entre a carga e a esfera é dada por:

$$F = K \frac{Qq}{d^2}$$

Com isso, podemos calcular o raio da esfera:

$$0,02\pi = 9 \times 10^9 \frac{(4\pi R^2 \cdot 0,05)(1 \times 10^{-6})}{3^2} \Rightarrow \boxed{R = 10^{-2} \text{ m}}$$

Na segunda parte do problema, quando a esfera é descarregada e cai livremente, temos um novo problema de energia. Quando a esfera está caindo, ela está transformando energia potencial gravitacional em energia cinética. Considerando a conservação da energia mecânica, já que não foi mencionado nenhuma força dissipativa, temos que:

$$E_p = E_c$$

$$mgh = 0,009\pi \Rightarrow m = \frac{0,009\pi}{10,750} \text{ kg}$$

Vamos deixar as contas para o final.

Portanto, a massa específica da esfera de plástico é de:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0,009\pi}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boxed{\rho = 0,9 \text{ kg/m}^3}$$



ESCLARECENDO!



PRESTE MAIS
ATENÇÃO!



4.4. Aplicação do potencial elétrico na indução total

A indução total ocorre quando todas as linhas de força que partem de um corpo carregado chegam a um outro corpo. Como exemplo, temos dois corpos carregados na qual um deles envolve completamente o outro, como visto abaixo:

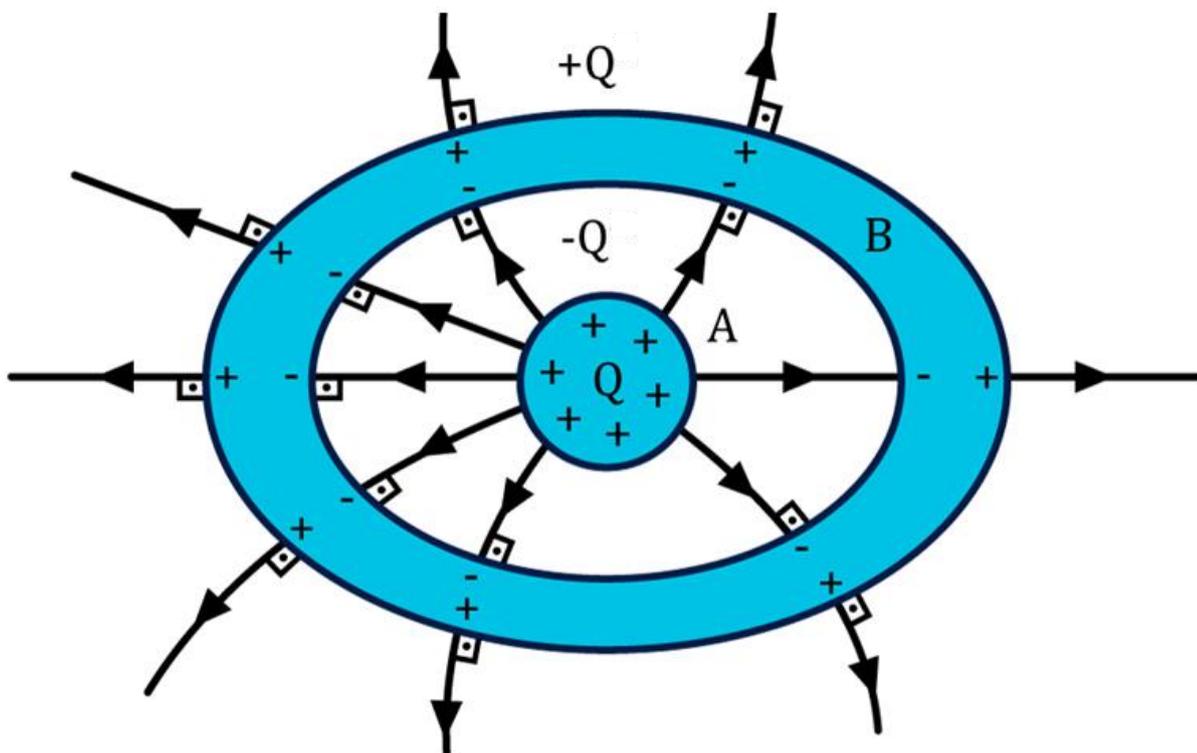


Figura 26: Indução total.

Como já vimos anteriormente, a carga do corpo interno provocará a separação das cargas da casca condutora, de tal forma que a superfície interna terá carga $-Q$ e na externa uma carga $+Q$.

Vamos estudar o potencial em função da distância para o seguinte sistema:

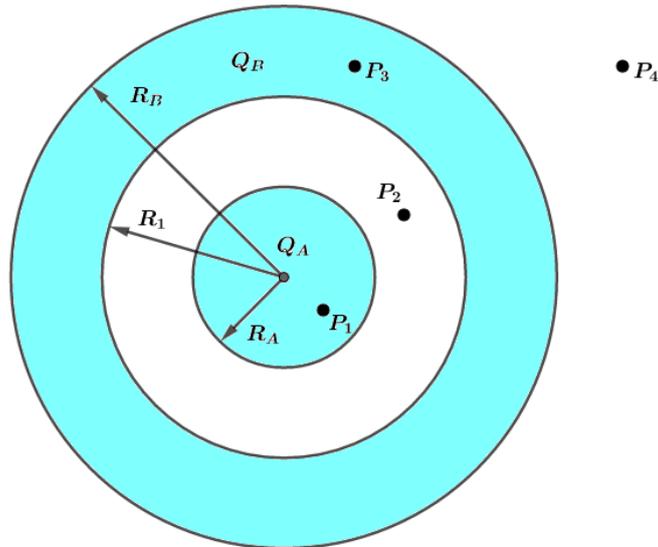


Figura 27: Cálculo do potencial em função da distância de uma carga dentro de uma casca esférica.

Considere uma esfera A cuja carga é Q_A e uma casca esférica B de carga Q_B . De acordo com a indução total, a superfície interna da casca B terá carga $-Q_A$ e a superfície externa carga $Q_A + Q_B$, pois sabemos que a carga total da casca B deve permanecer Q_B .

Vamos determinar o potencial nos seguintes pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 , utilizando o Princípio da Superposição, vamos adotar três esferas tais que:

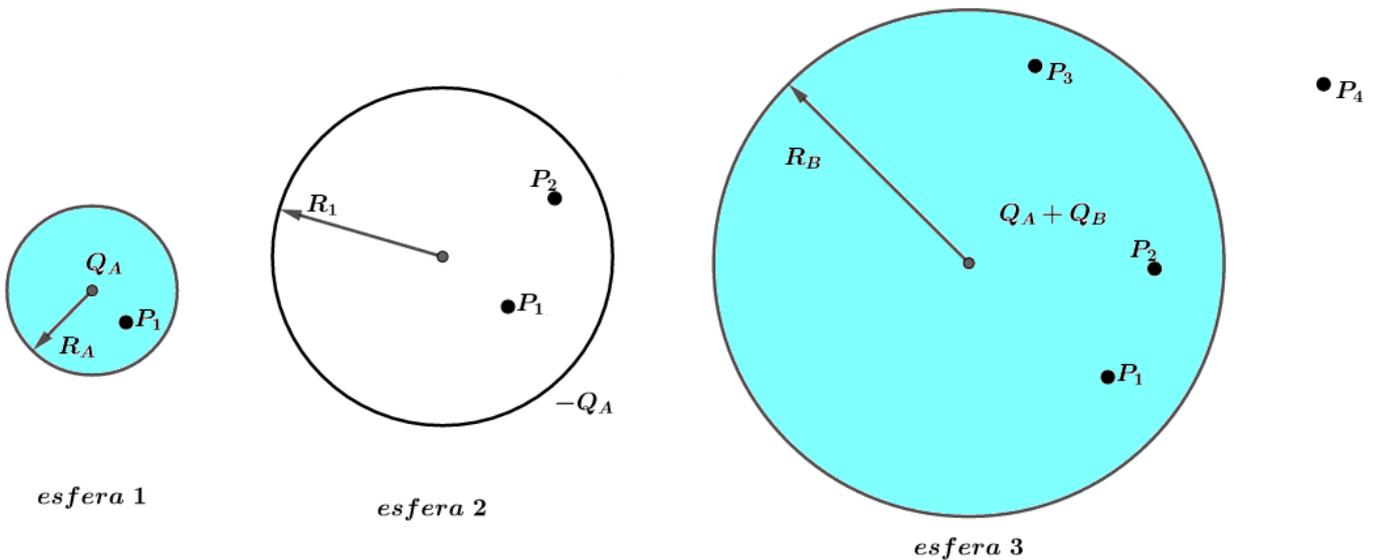


Figura 28: Princípio da superposição para determinação do potencial em função da distância.

O ponto P_1 é interior às três esferas, portanto, o potencial nele é a soma dos potenciais constantes nas três esferas adotadas:

$$V_{P_1} = V_{esfera1} + V_{esfera2} + V_{esfera3}$$

$$V_{P_1} = K \frac{Q_A}{R_A} + \left(-K \frac{Q_A}{R_1}\right) + \left(K \frac{Q_A + Q_B}{R_B}\right)$$

Como esperado, o potencial no interior do condutor A é constante.

O ponto P_2 é externo a esfera 1 e interior as outras, logo:

$$V_{P_2} = K \frac{Q_A}{r} - K \frac{Q_A}{R_1} + K \frac{(Q_A + Q_B)}{R_2}$$



O ponto P_3 é externo a esfera 1 e a esfera 2, então:

$$V_{P_3} = K \frac{Q_A}{r} - K \frac{Q_A}{r} + K \frac{(Q_A + Q_B)}{R_B}$$

$$V_{P_3} = K \frac{(Q_A + Q_B)}{R_B}$$

No ponto P_4 , ponto fora do conjunto, o potencial é expresso por:

$$V_{P_4} = K \frac{Q_A}{r} - K \frac{Q_A}{r} + K \frac{(Q_A + Q_B)}{r}$$

$$V_{P_4} = K \frac{(Q_A + Q_B)}{r}$$

Graficamente, podemos expressar o potencial em função da distância:

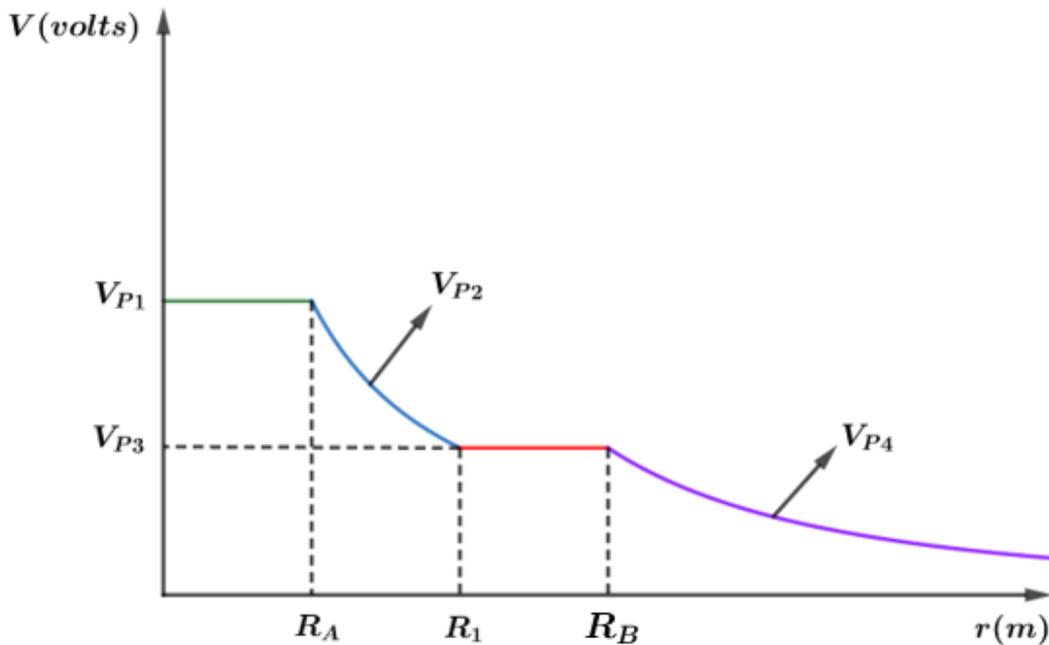


Figura 29: Gráfico do potencial em função da distância.

Vale a pena lembrar que o campo elétrico na direção radial é dado por $E = -\frac{dV}{dr}$ e a descontinuidade na superfície do condutor. Assim, temos o campo elétrico em cada região:

a) $r < R_A$:

$$(\vec{E}_{int})_A = \vec{0}$$

Para um ponto muito próximo da superfície de A, temos que:

$$E = K \frac{Q_A}{R_A^2}$$

Logo, na superfície do condutor A ($r = R_A$), o campo é dado por:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} E_{prox} = \frac{1}{2} K \frac{Q_A}{R_A^2}$$

b) $R_A < r < R_1$



$$E = K \frac{Q_A}{r^2}$$

Para um ponto muito próximo da superfície interna de B, temos que:

$$E = K \frac{Q_A}{R_1^2}$$

Logo, na superfície interna do condutor B ($r = R_1$), o campo é dado por:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} E_{prox} = \frac{1}{2} K \frac{Q_A}{R_1^2}$$

c) $R_1 < r < R_B$:

$$(\vec{E}_{int})_B = \vec{0}$$

Para um ponto muito próximo da superfície externa de B, temos que:

$$E = K \frac{Q_A + Q_B}{R_B^2}$$

Logo, na superfície externa do condutor B ($r = R_B$), o campo é dado por:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} E_{prox} = \frac{1}{2} K \frac{Q_A + Q_B}{R_B^2}$$

d) $r > R_B$:

para pontos externos da casca esférica B, tudo se passa como existisse uma carga puntiforme $Q_A + Q_B$ no centro das esferas. Portanto:

$$E = K \frac{(Q_A + Q_B)}{r}$$

Portanto, o gráfico é dado por:

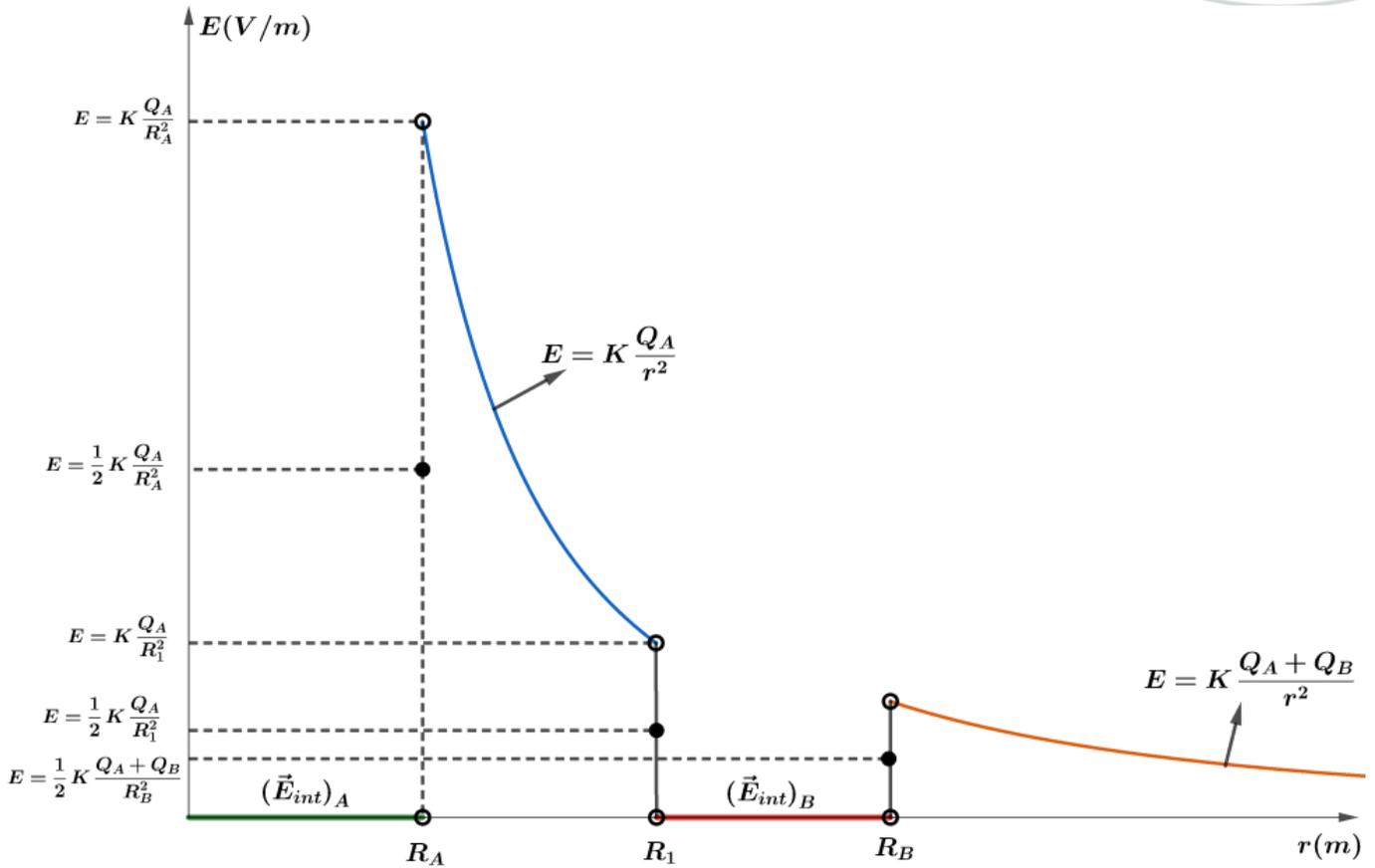


Figura 30: Gráfico do campo elétrico em função da distância.

4.5. Esfera isolante carregada uniformemente

Considere uma esfera isolante carregada com uma carga Q positiva. Nessa esfera, existe uma cavidade bem pequena, na qual existe uma carga elétrica negativa $-q$ ($q > 0$), massa m , que é lançada com uma velocidade v , como mostra a figura:

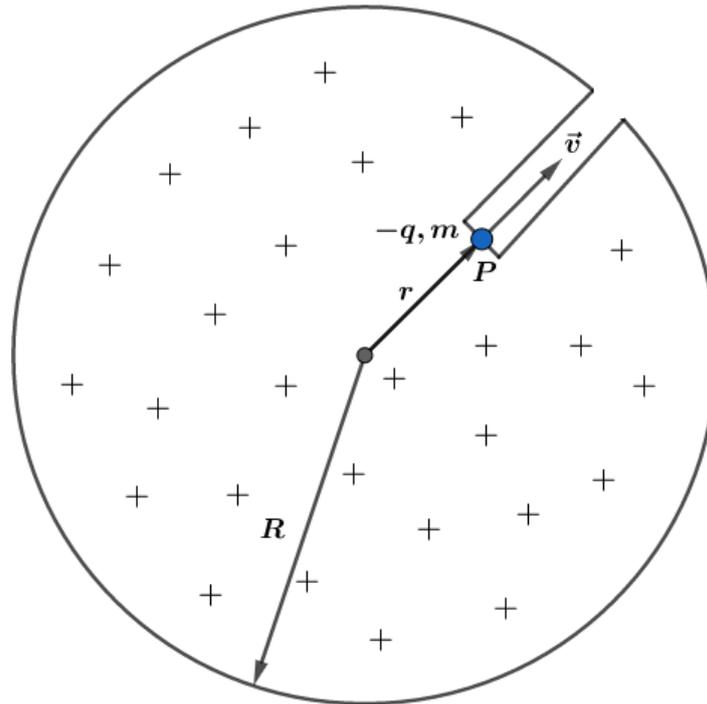


Figura 31: Carga sendo lançada do interior de uma cavidade carregada.

Qual deve ser a mínima velocidade para que a carga $-q$ consiga escapar da esfera?

Para resolver esse problema, vamos usar o conceito de energia. Pelo teorema da energia cinética, temos que:

$$(W_{F_{ele}})_{P \rightarrow \infty} = \Delta E_c \Rightarrow -q(V_P - V_\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

No infinito, temos que o potencial é nulo e dada a condição de velocidade mínima que desejamos, a carga deve chegar no infinito com velocidade praticamente nula, portanto:

$$q \cdot V_P = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot V_P}{m}}$$

Com isso, nosso problema agora passou a ser encontrar o potencial elétrico no ponto P .

$$(E_M)_P = (E_M)_\infty$$

Para isso, vamos lembrar como é o gráfico do campo elétrico de uma esfera isolante:

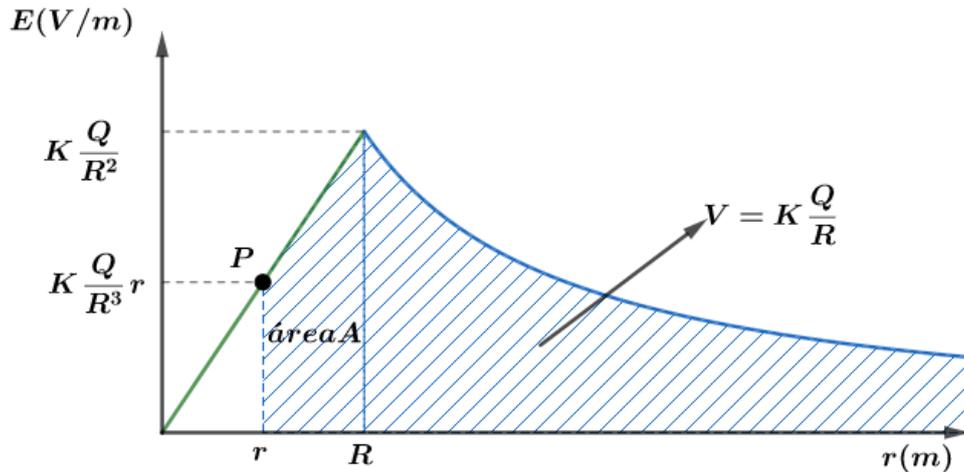


Figura 32: Gráfico da esfera isolante carregada.

Portanto, a área sombreada corresponde ao potencial elétrico. Logo:

$$V_p = \frac{KQ}{R} + \text{área } A$$

A área A é a área de um trapézio ($A = \left(\frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2}\right) \cdot \text{altura}$), logo:

$$V_p = \frac{KQ}{R} + \left(\frac{\frac{KQ}{R^2} + \frac{KQr}{R^2}}{2}\right)(R - r)$$

Manipulando algebricamente, temos que:

$$V_p = \frac{3kQ}{2R} - \frac{kQr^2}{2R^3}$$

Podemos dizer que o gráfico do potencial é dado por:

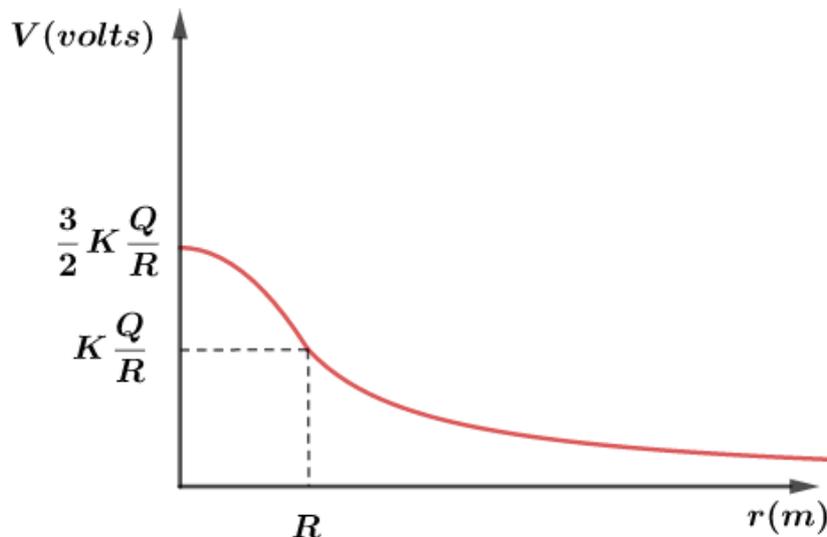


Figura 33: Gráfico do potencial elétrico em função da distância r .

Portanto, a velocidade mínima para que a carga $-q$ chegue no infinito é de:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q}{m} \left(\frac{3kQ}{2R^2} - \frac{kQr^2}{2R^3} \right)}$$

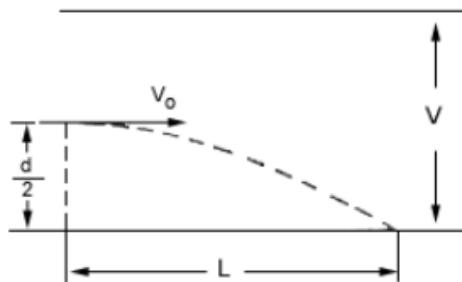


5. Lista de exercícios

1. (ITA 1983)

Entre duas placas planas e paralelas, existe um campo elétrico uniforme. Devido a uma diferença de potencial V aplicada entre elas. Um feixe de elétrons é lançado entre as placas com velocidade inicial v_0 . A massa do elétron é m e q é o módulo de sua carga elétrica. L é a distância horizontal que o elétron percorre para atingir uma das placas e d é a distância entre as placas.

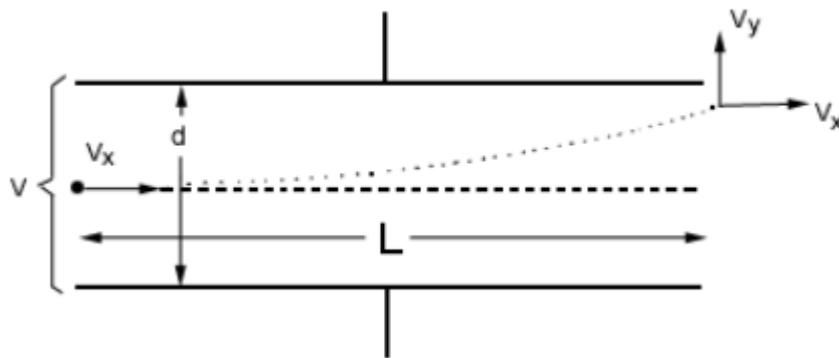
Dados: v_0 , L , d e V , a razão entre o módulo da carga e a massa do elétron $\frac{q}{m}$ é dada por:



- a) $\frac{Vd}{Lv_0}$
- b) $\frac{2L^2v_0}{Vd}$
- c) $\frac{V^2L}{d^2v_0}$
- d) $\frac{d^2v_0^2}{VL^2}$
- e) $\frac{VL}{d^2v_0^2}$

2. (ITA-1971)

Um elétron de massa m e carga $-q$ penetra com velocidade $v_x = \text{constante}$ entre as placas de um capacitor plano. Neste há uma diferença de potencial V orientada de modo a fazer o elétron subir.



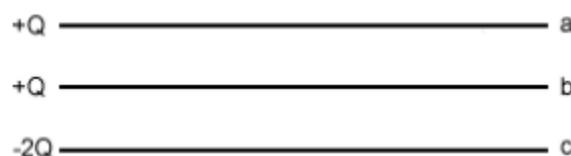
Deduza a expressão da componente v_y da velocidade que o elétron possui ao deixar o capacitor e assinale-a entre as opções abaixo. Despreze a atração gravitacional sobre o elétron.

- a) $v_y = \frac{qVL}{mdv_x}$
- b) $v_y = \frac{qmL}{vdv_x}$
- c) $v_y = v_x$
- d) $v_y = \frac{L}{d} \cdot v_x$

e) nenhuma das opções é correta.

3. (ITA-1969)

Três superfícies planas circulares isoladas possuem cargas distribuídas conforme indica a figura:



Pode-se afirmar que:

- a) O campo elétrico na região compreendida entre a e b é nulo.
- b) O campo elétrico apresenta valores mínimos na região entre b e c.
- c) No centro geométrico de b, o campo elétrico é equivalente àquele determinado pelas cargas de a e c.
- d) Entre c e b o sentido do campo elétrico é de c para b.
- e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.



FIQUE
ATENTO!



4. (ITA – 81)

Uma partícula de massa m e outra de massa $2m$ tem cargas elétricas q de mesmo módulo, mas de sinais opostos. Estando inicialmente separadas de uma distância R , são soltas a partir do repouso. Nestas condições, quando a distância entre as partículas for $R/2$, desprezando a ação gravitacional terrestre, se $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, pode-se afirmar que:

- a) Ambas terão a mesma velocidade $v = q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$.
- b) Ambas terão a mesma velocidade $v = q \left(\frac{K}{mR} \right)^{1/2}$.
- c) Ambas terão a mesma velocidade $v = 2q \left(\frac{k}{3mR} \right)^{1/2}$.
- d) uma terá velocidade $v = q \left(\frac{K}{mR} \right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$.
- e) uma terá velocidade $v = q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$.

5. (ITA-1985)

Uma esfera condutora de raio $0,50 \text{ cm}$ é elevada a um potencial de $10,0V$. Uma segunda esfera, bem afastada da primeira, tem raio $1,00 \text{ cm}$ e está ao potencial $15,0V$. Elas são ligadas por um fio de capacitância desprezível. Sabendo-se que o meio no qual a experiência é realizada é homogêneo e isotrópico, podemos afirmar que os potenciais finais das esferas serão:

- a) $12,5V$ e $12,5V$.
- b) $8,33V$ para a primeira e $16,7V$ para a segunda.
- c) $16,7V$ para a primeira e $8,33V$ para a segunda.
- d) $13,3V$ e $13,3V$.
- e) Zero para a primeira e $25,0V$ para a segunda.

6. (ITA-1986)

Duas esferas metálicas, A e B , de raios R e $3R$, respectivamente, são postas em contato. Inicialmente A possui carga elétrica positiva $+2Q$ e B , carga $-Q$. Após atingir o equilíbrio eletrostático, as novas cargas de A e B passam a ser, respectivamente:

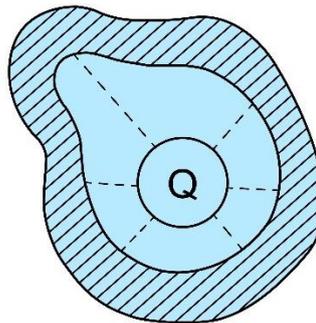


- a) $Q/2, Q/2$.
- b) $3Q/4, Q/4$.
- c) $3Q/2, Q/2$.
- d) $Q/4, 3Q/4$.
- e) $4Q/3$ e $-Q/3$.



7. (ITA-1987)

A figura representa um condutor oco e um condutor de forma esférica dentro da cavidade do primeiro, ambos em equilíbrio eletrostático. Sabe-se que o condutor interno tem carga $+Q$.



Pode-se afirmar que:

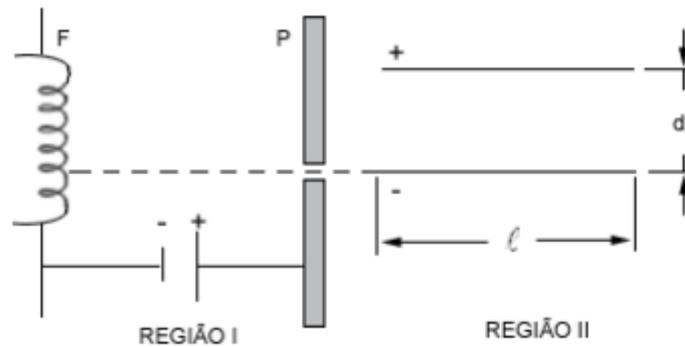
- a) Não há campo elétrico dentro da cavidade.
- b) As linhas de força dentro da cavidade são retas radiais em relação à esfera, como na figura.
- c) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são perpendiculares a essa superfície.
- d) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são tangenciais a essa superfície.
- e) Não haverá diferença de potencial entre os dois condutores se a carga do condutor oco também for igual a Q .

8. (ITA-1987)

Numa experiência de laboratório, elétrons são emitidos por um filamento metálico F , com velocidade inicial praticamente nula. Eles são acelerados através da região I por uma diferença de potencial de $25 \times 10^3 V$, aplicada entre F e a placa perfurada P . Eles emergem do furo da placa com velocidade

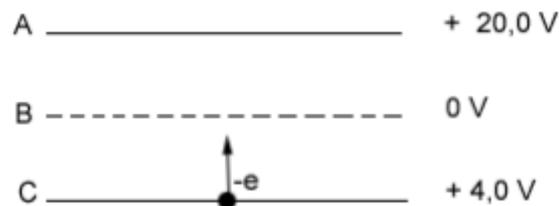


horizontal e penetram na região II, onde são obrigados a atravessar o campo elétrico uniforme de um capacitor cujas placas têm comprimento $l = 5,0 \text{ cm}$ e estão separadas por uma distância $d = 0,50 \text{ cm}$, conforme a figura. Qual é o máximo valor da tensão V_2 entre as placas do capacitor que ainda permite que algum elétron atinja a região III onde não há campo elétrico?



9. (ITA-1988)

A, B e C são superfícies que se acham, respectivamente, a potenciais $+20\text{V}$, 0V e $+4,0\text{V}$. Um elétron é projetado a partir da superfície C no sentido ascendente com uma energia cinética inicial de $9,0 \text{ eV}$. (Um elétron-volt é a energia adquirida por um elétron quando submetido a uma diferença de potencial de um volt). A superfície B é porosa e permite a passagem de elétrons. Podemos afirmar que:



- a) Na região entre C e B o elétron será acelerado pelo campo elétrico até atingir a superfície B com energia cinética de $33,0 \text{ eV}$. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, atingindo a superfície A com energia cinética de $13,0 \text{ eV}$.
- b) Entre as placas C e B o elétron será acelerado atingindo a placa B com energia cinética igual a $13,0 \text{ eV}$, mas não atinge a placa A.
- c) Entre C e B o elétron será desacelerado pelo campo elétrico aí existente e não atingirá a superfície B.
- d) Na região entre C e B o elétron será desacelerado, mas atingirá a superfície B com energia cinética de $5,0 \text{ eV}$. Ao atravessar B, uma vez na região entre B e A será acelerado, até atingir a superfície A com uma energia cinética de $25,0 \text{ eV}$.
- e) Entre as placas C e B o elétron será desacelerado, atingindo a superfície B com energia cinética de $5,0 \text{ eV}$. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, até atingir a superfície A com energia cinética de $15,0 \text{ eV}$.



10. (ITA-1988)

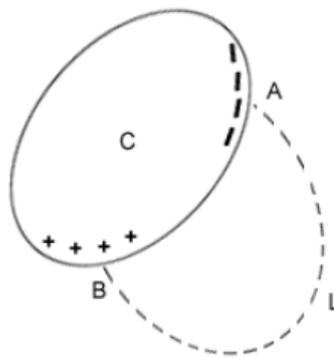
Um fio condutor homogêneo de 25 cm de comprimento foi conectado entre os terminais de uma bateria de $6V$. A 5 cm do pólo positivo, faz-se uma marca P sobre este fio e a 15 cm , outra marca Q .

Então, a intensidade E do campo elétrico dentro deste fio (em volt/metro) e a diferença de potencial $\Delta V = V_P - V_Q$ (em volts) existente entre os pontos P e Q dentro do fio serão dados, respectivamente, por:

- a) 6,0 e 0,6.
- b) 24 e 2,4.
- c) 24 e 2,4.
- d) 6,0 e 6,0.
- e) 24 e 6,0.

11. (ITA-1988)

Na figura, C é um condutor em equilíbrio eletrostático, que se encontra próximo de outros objetos eletricamente carregados. Considere a curva tracejada L que une os pontos A e B da superfície do condutor.



Podemos afirmar que:

- a) A curva L não pode representar uma linha de força do campo elétrico.
- b) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais baixo que o ponto A .
- c) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais alto que o ponto A .
- d) A curva L pode representar uma linha de força, desde que L seja ortogonal à superfície do condutor nos pontos A e B .
- e) A curva L pode representar uma linha de força, desde que a carga total do condutor seja nula.



FIQUE
ATENTO!



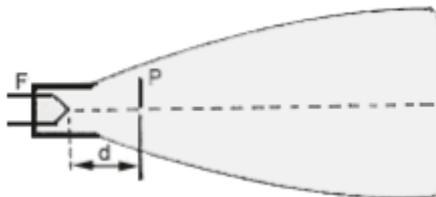
12. (ITA-1990)

Um condutor esférico oco, isolado, de raio R , tem no seu interior uma pequena esfera de raio $r < R$. O sistema está inicialmente neutro. Eletriza-se a pequena esfera com carga positiva. Uma vez atingido o equilíbrio eletrostático, pode-se afirmar que:

- A carga elétrica na superfície externa do condutor é nula.
- A carga elétrica na superfície interna do condutor é nula.
- O campo elétrico no interior do condutor é nulo.
- O campo elétrico no exterior do condutor é nulo.
- Todas as afirmativas acima estão erradas.

13. (ITA-1990)

Num tubo de raios catódicos tem-se um filamento F que libera elétrons quando aquecido, e uma placa aceleradora P que é mantida a um potencial mais alto que o filamento. O filamento fica a uma distância d da placa. A placa tem, ainda, um orifício que permite a passagem dos elétrons que vão se chocar com uma tela que fica fluorescente quando os mesmos a atingem.



Nestas condições:

- Se aumentarmos a distância d entre o filamento e a placa, a energia cinética com que os elétrons chegam à placa aumenta.
- O aumento da distância d faz com que a energia cinética dos elétrons diminua.
- A energia cinética dos elétrons não depende da distância entre o filamento e a placa, mas só da diferença de potencial U entre o filamento e a placa aceleradora.
- A energia cinética dos elétrons só depende da temperatura do filamento.
- Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.



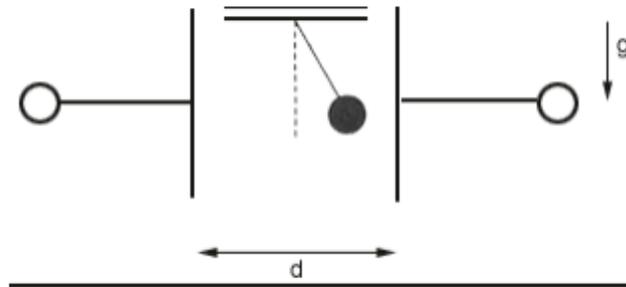
14. (ITA-1993)

Entre as armaduras de um capacitor plano com placas horizontais, existe uma diferença de potencial V . A separação entre as armaduras é d . Coloca-se uma pequena carga $Q > 0$, de massa m entre as armaduras e esta fica em equilíbrio. A aceleração da gravidade é g . Qual é o valor da carga Q ?

- a) $Q = mgd^{-1}/V$.
- b) $Q = Vd/m$.
- c) $Q = mgd/V$.
- d) $Q = Vgd/m$.
- e) $Q = gd/Vm$.

15. (ITA-2001)

Uma esfera de massa m e carga q está suspensa por um fio frágil e inextensível, feito de um material eletricamente isolante. A esfera se encontra entre as placas paralelas de um capacitor plano, como mostra a figura. A distância entre as placas é d , a diferença de potencial entre as mesmas é V e o esforço máximo que o fio pode suportar é igual ao quádruplo do peso da esfera. Para que a esfera permaneça imóvel, em equilíbrio estável, é necessário que:



- a) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15 mg$
- b) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 4 (mg)^2$
- c) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15 (mg)^2$
- d) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \geq 15 mg$
- e) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 16 (mg)^2$

16. (ITA-2002)

Uma esfera metálica isolada, de raio $R_1 = 10,0 \text{ cm}$ é carregada no vácuo até atingir o potencial $U = 9,0V$. Em seguida, ela é posta em contato com outra esfera metálica isolada, de raio $R_2 = 5,0 \text{ cm}$,

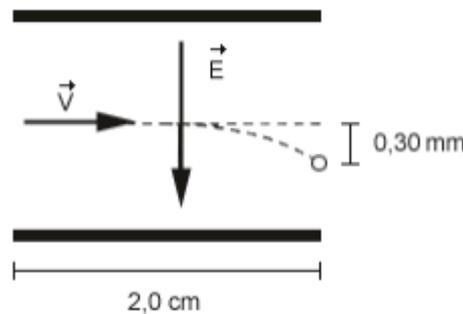


inicialmente neutra. Após atingir o equilíbrio eletrostático, qual das alternativas melhor descreve a situação física? É dado que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

- a) A esfera maior terá uma carga de $0,66 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.
- b) A esfera maior terá um potencial de $4,5\text{V}$.
- c) A esfera menor terá uma carga de $0,66 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.
- d) A esfera menor terá um potencial de $4,5\text{V}$.
- e) A carga total é igualmente dividida entre as duas esferas.

17. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10 \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20 \text{ m/s}$ entre as placas de comprimento igual a $2,0 \text{ cm}$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4 \text{ N/C}$, como mostra a figura.



Considerando que a densidade da gota seja 1000 kg/m^3 e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,30 \text{ mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

- a) $2,0 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.
- b) $3,1 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.
- c) $6,3 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.
- d) $3,1 \cdot 10^{-11} \text{ C}$.
- e) $1,1 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

18. (ITA-2009)

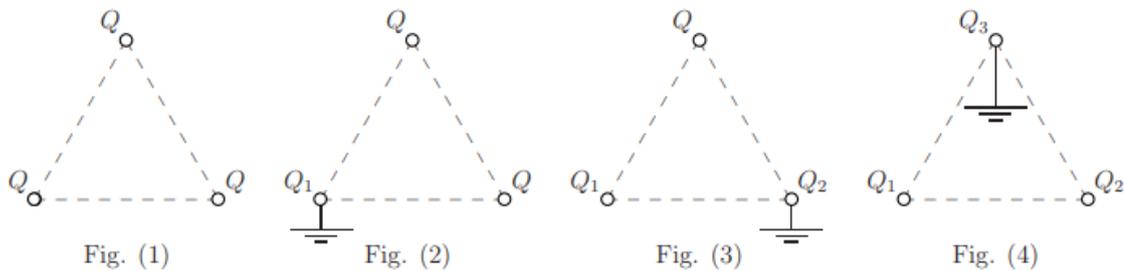


Uma carga q distribui-se uniformemente na superfície de uma esfera condutora, isolada, de raio R . Assinale a opção que apresenta a magnitude do campo elétrico e o potencial elétrico num ponto situado a uma distância $r = R/3$ do centro da esfera.

- a) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = 0 \text{ V}$
- b) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$
- c) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3q}{R}$
- d) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^2}$
- e) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^3}$ e $U = 0 \text{ V}$

19. (ITA-2009)

Três esferas condutoras, de raio a e carga Q , ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado $b \gg a$, conforme mostra a figura (1). Considere as figuras (2), (3) e (4), em que, respectivamente, cada uma das esferas se liga e desliga da Terra, uma de cada vez. Determine, nas situações (2), (3) e (4), a carga das esferas Q_1 , Q_2 e Q_3 , respectivamente, em função de a , b e Q .



20. (ITA-2010)

Considere as cargas elétricas $q_1 = 1 \text{ C}$, situada em $x = -2 \text{ m}$, e $q_2 = -2 \text{ C}$, situada em $x = -8 \text{ m}$. Então, o lugar geométrico dos pontos de potencial nulo é

- a) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -4 \text{ m}$ e $x = 4 \text{ m}$.
- b) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -16 \text{ m}$ e $x = 16 \text{ m}$.
- c) um elipsoide que corta o eixo x nos pontos $x = -4 \text{ m}$ e $x = 16 \text{ m}$.
- d) um hiperboloide que corta o eixo x no ponto $x = -4 \text{ m}$.
- e) um plano perpendicular ao eixo x que o corta no ponto $x = -4 \text{ m}$.

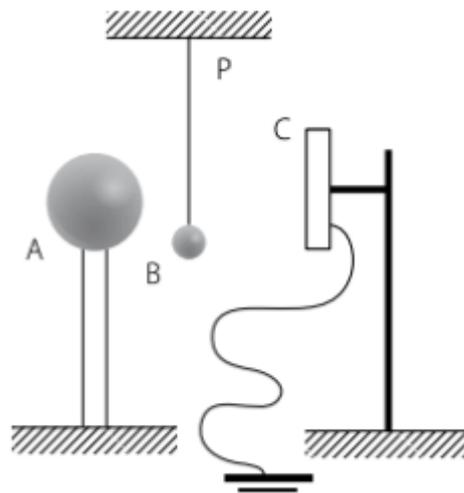


ESTA É
DIFÍCIL!



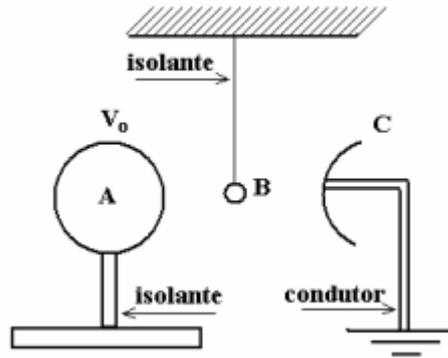
21. (IME – 79)

A figura mostra, esquematicamente, uma campainha eletrostática A e B são condutores esféricos, com diâmetros de 20cm e 4cm , respectivamente. B é suspenso de P por um fio isolante. A placa metálica C é ligada à Terra. A esfera A, carregada inicialmente a um potencial de 50kV , atrai B que, após o contato, é repelida e se choca com a placa C, descarregando-se. A operação se repete enquanto o potencial de A for superior a 25kV . Determine o número de vezes que B baterá em A.



22. (ITA – 2008)

Considere um condutor esférico A de 20cm de diâmetro colocado sobre um pedestal fixo e isolante. Uma esfera condutora B de $0,5\text{mm}$ de diâmetro, do mesmo material da esfera A, é suspensa por um fio fixo e isolante. Em posição oposta à esfera A, é colocada uma campainha C ligada à terra, conforme mostra a figura. O condutor A é, então, carregado a um potencial eletrostático V_0 , de forma a atrair a esfera B. As duas esferas entram em contato devido à indução eletrostática e, após a transferência de carga, a esfera B é repelida, chocando-se com a campainha C, onde a carga adquirida é escoada para a terra. Após 20 contatos com a campainha, verifica-se que o potencial da esfera A é de $10\,000\text{V}$. Determine o potencial inicial da esfera A. Considere $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ se $|x| < 1$

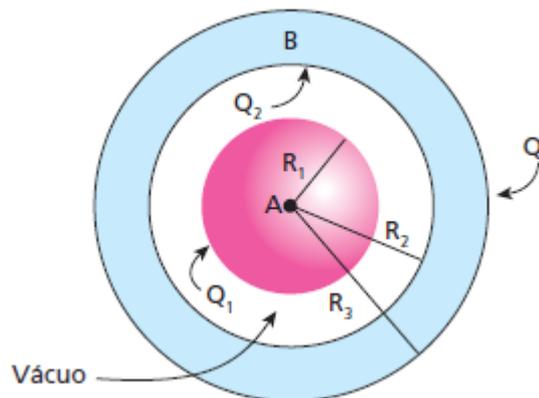


23. (FEI-SP)

Duas esferas condutoras concêntricas A e B possuem raios $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$ e $R_3 = 25 \text{ cm}$ e estão eletrizadas de forma que a diferença de potencial entre elas é $V_A - V_B = 9 \text{ kV}$ e a carga total da esfera B é de $0,3 \mu\text{C}$. Determine as cargas Q_1 , Q_2 e Q_3 existentes nas superfícies dessas esferas.

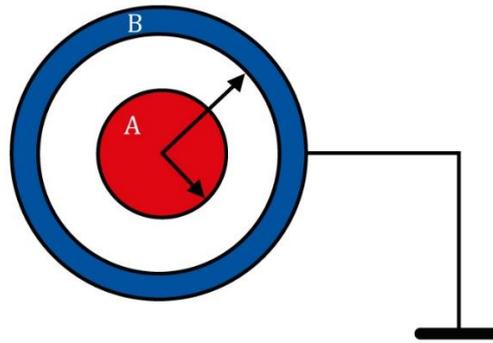
Dado: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.

OBS: o meio entre as esferas é o vácuo.



24.

Considere dois condutores esféricos, sendo o menor maciço de raio R_A e o outro B oco de raio interno R_1 e raio externo R_2 . O condutor maciço está eletrizado com carga q_A , enquanto B está ligado à Terra, como mostra a figura:



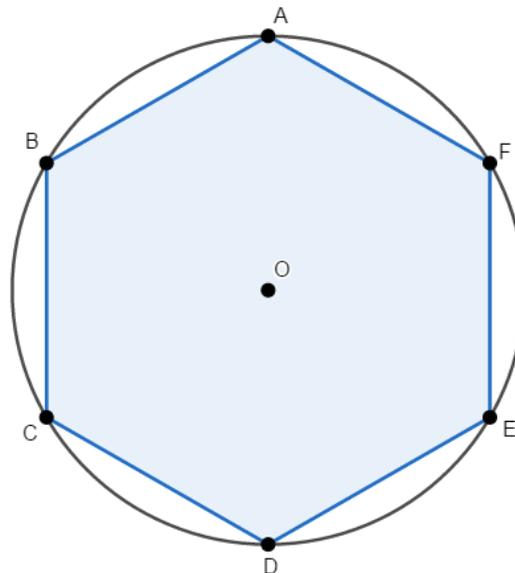
Calcule:

- O potencial na esfera A.
- O potencial na esfera B.
- O potencial num ponto P entre A e B.

Faça o esboço gráfico do potencial em função da distância do centro das esferas.

25.

7 cargas positivas Q encontram-se no infinito. As cargas têm módulo $Q = 40\mu C$ e o hexágono abaixo tem lado 12 cm .



Pede-se:

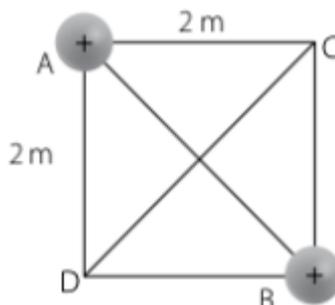
- a energia gasta para trazer 6 dessas cargas do infinito e dispô-las nos vértices do hexágono.
- a energia gasta para, em seguida, trazer a sétima carga do infinito e colocá-la no centro O do hexágono.
- a energia liberada se essa "molécula" for totalmente destruída e as cargas voltarem para o infinito.

Considere: $K = 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ e $\sqrt{3} \cong 1,5$.



26.

Na figura a seguir, temos um quadrado de lado 2 m. Nos vértices A e B estão fixas duas cargas puntiformes idênticas $+Q$.



Determine a mínima energia potencial adquirida por uma carga $+Q$, puntiforme, colocada dentro do quadrado.

27. (Mack - 2005)

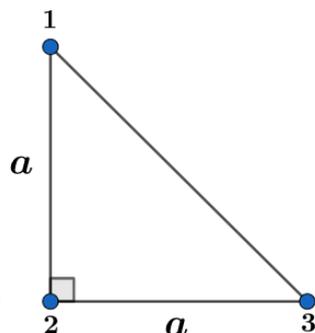
Uma partícula de massa igual a 2cg e carga de $+1\mu C$ é lançada com velocidade de 300 m/s, em direção a uma carga fixa de $+3\mu C$. O lançamento é feito no vácuo de um ponto bastante afastado da carga fixa. Desprezando ações gravitacionais, qual a mínima distância entre as cargas?

Adote: $K_0 = 9,0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$.



28.

Três esferas metálicas idênticas de raio r estão localizadas nos vértices de um triângulo isósceles, como se mostra na figura (supor $r \ll a$). As esferas estão inicialmente com carga q cada. As esferas 1 e 2 são ligadas por um curto período de tempo, com um fio condutor, em seguida, o fio é retirado. Determine as cargas finais das esferas 1 e 2 após o processo.





Caso necessário, utilize a aproximação $(1 + x)^n \cong 1 + nx$, quando $x \ll 1$.



GABARITO



6. Gabarito sem comentários

1. D

2. A

3. C

4. E

5. D

6. D

7. C

8. $V_2 = 1000 V$

9. D

10. C

11. A

12. E

13. C

14. C

15. C

16. A

17. B

18. B

19. $Q_1 = -\frac{2Qa}{b}$, $Q_2 = \frac{Q \cdot a}{b} \left(\frac{2a}{b} - 1 \right)$ e $Q_3 = \frac{Qa^2}{b^2} \left(3 - \frac{2a}{b} \right)$

20. A

21. 4 vezes

22. $V_0 = 10500 V$

23. $Q_1 = +0,2\mu C$, $Q_2 = -0,2\mu C$ e $Q_3 = +0,5\mu C$

24. a) $V_A = Kq_A \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_1} \right)$ b) zero c) $V_P = Kq_A \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{R_1} \right)$

25. a) 1380 J; b) 720 J; c) 2100 J

26. KQ^2

27. $d_{min} = 3 cm$

28. $Q'_1 = q \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$, $Q'_2 = q \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$

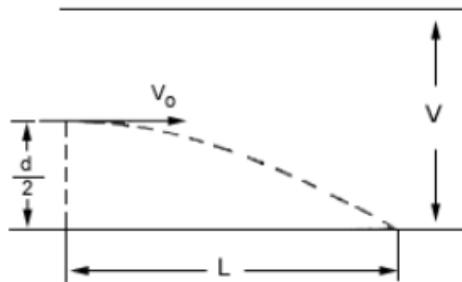


7. Lista de exercícios comentada

1. (ITA 1983)

Entre duas placas planas e paralelas, existe um campo elétrico uniforme. Devido a uma diferença de potencial V aplicada entre elas. Um feixe de elétrons é lançado entre as placas com velocidade inicial v_0 . A massa do elétron é m e q é o módulo de sua carga elétrica. L é a distância horizontal que o elétron percorre para atingir uma das placas e d é a distância entre as placas.

Dados: v_0 , L , d e V , a razão entre o módulo da carga e a massa do elétron $\frac{q}{m}$ é dada por:



- a) $\frac{Vd}{Lv_0}$
- b) $\frac{2L^2v_0}{Vd}$
- c) $\frac{V^2L}{d^2v_0}$
- d) $\frac{d^2v_0^2}{VL^2}$
- e) $\frac{VL}{d^2v_0^2}$

Comentários:

O movimento do elétron é semelhante a um lançamento horizontal, de velocidade v_0 e campo de aceleração vertical dado por:

$$g_{apa} = \frac{E_{ele}q}{m} = \frac{Vq}{md}$$

Lembrando da equação da parábola de um lançamento horizontal:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$



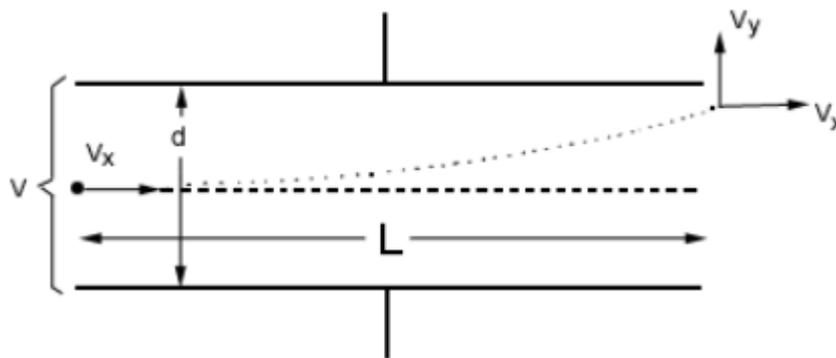
$$\frac{d}{2} = \frac{g_{\text{apa}} x^2}{2v_0^2}$$

$$\frac{q}{m} = \frac{d^2 v_0^2}{L^2 V}$$

Gabarito: D

2. (ITA-1971)

Um elétron de massa m e carga $-q$ penetra com velocidade $v_x = \text{constante}$ entre as placas de um capacitor plano. Neste há uma diferença de potencial V orientada de modo a fazer o elétron subir.



Deduza a expressão da componente v_y da velocidade que o elétron possui ao deixar o capacitor e assinale-a entre as opções abaixo. Despreze a atração gravitacional sobre o elétron.

a) $v_y = \frac{qVL}{mdv_x}$

b) $v_y = \frac{q mL}{vdv_x}$

c) $v_y = v_x$

d) $v_y = \frac{L}{d} \cdot v_x$

e) nenhuma das opções é correta.

Comentários:

Aplicando $F = ma$ ao elétron, na direção vertical, temos:

$$a = \frac{Eq}{m} = \frac{Vq}{md}$$

Como se trata de um movimento com aceleração constante, podemos escrever:

$$v_y = v_0 + at \Rightarrow v_y = \frac{Vqt_f}{md} \quad (\text{eq. 1})$$

O movimento horizontal tem velocidade constante, logo:



$$v_x = \frac{L}{t_f} \Rightarrow t_f = \frac{L}{v_x}$$

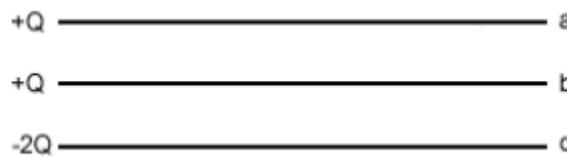
Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$v_y = \frac{VqL}{mdv_x}$$

Gabarito: A

3. (ITA-1969)

Três superfícies planas circulares isoladas possuem cargas distribuídas conforme indica a figura:



Pode-se afirmar que:

- O campo elétrico na região compreendida entre a e b é nulo.
- O campo elétrico apresenta valores mínimos na região entre b e c.
- No centro geométrico de b, o campo elétrico é equivalente àquele determinado pelas cargas de a e c.
- Entre c e b o sentido do campo elétrico é de c para b.
- Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

Comentários:

Incorreto. Como as placas são finitas temos o chamado efeito de bordas, de modo que as linhas de campo saindo das placas não são perpendiculares e, portanto, não se cancelam. Além disso, temos o campo gerado pela placa C, que contribui para que o campo elétrico resultante na região não seja nulo.

Incorreto. O campo tem intensidade crescente de c para b, logo não pode ter um mínimo naquele intervalo.

Correto. Considere uma porção arbitrária de b. Essa porção possuirá uma outra, simétrica em relação ao centro da superfície, de modo que o campo resultante desse par de cargas, no centro, é nulo. A superfície é composta por pares como o descrito acima, logo gera campo resultante nulo no centro.

Incorreto. Cargas negativas geram campos que apontam em sua direção e positivas, o oposto.

Gabarito: C

4. (ITA – 81)

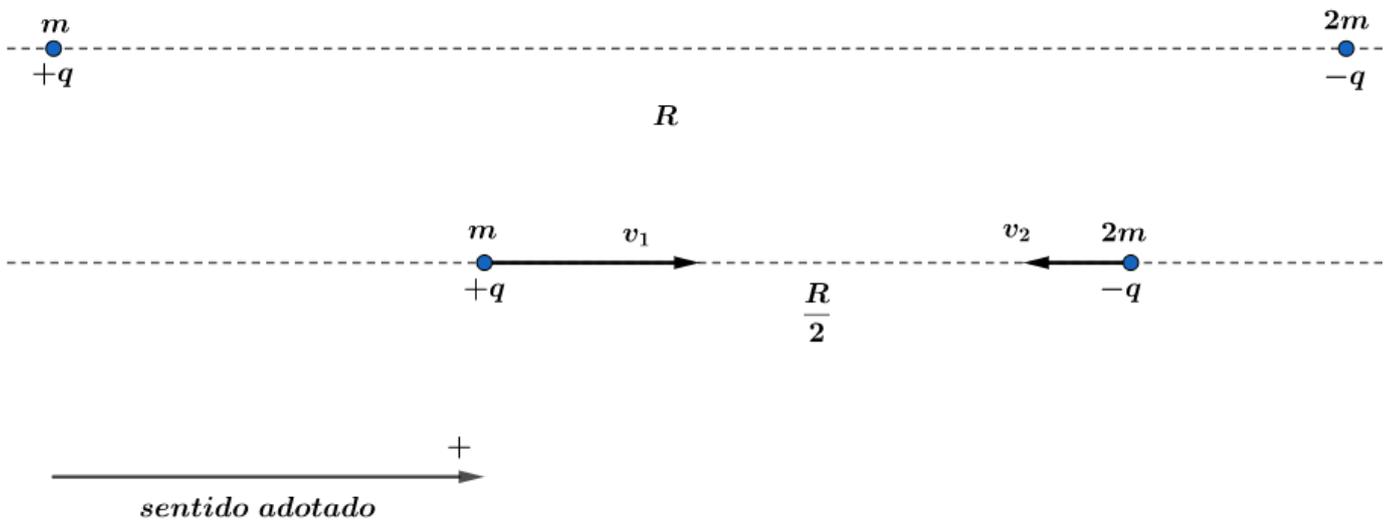


Uma partícula de massa m e outra de massa $2m$ tem cargas elétricas q de mesmo módulo, mas de sinais opostos. Estando inicialmente separadas de uma distância R , são soltas a partir do repouso. Nestas condições, quando a distância entre as partículas for $R/2$, desprezando a ação gravitacional terrestre, se $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, pode-se afirmar que:

- a) Ambas terão a mesma velocidade $v = q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$.
- b) Ambas terão a mesma velocidade $v = q \left(\frac{K}{mR} \right)^{1/2}$.
- c) Ambas terão a mesma velocidade $v = 2q \left(\frac{k}{3mR} \right)^{1/2}$.
- d) uma terá velocidade $v = q \left(\frac{K}{mR} \right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$.
- e) uma terá velocidade $v = q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q \left(\frac{K}{3mR} \right)^{1/2}$.

Comentários:

Vamos fazer um desenho representativo do nosso sistema:



O sistema é isolado, já que não existe forças externas atuando nele e a força elétrica de atração as cargas é interna, podemos dizer que a quantidade de movimento do sistema se conserva, logo:

$$\vec{Q}_{antes} = \vec{Q}_{depois}$$

$$m \cdot 0 + m \cdot 0 = m \cdot v_1 - 2m \cdot v_2$$

$$\boxed{v_1 = 2v_2} \text{ eq 1}$$

Dado que o sistema é conservativo, temos que a energia mecânica se conserva, portantoo:

$$(E_M)_{antes} = (E_M)_{depois}$$

$$\frac{Kq(-q)}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 + \frac{Kq(-q)}{\frac{R}{2}} \text{ eq 2}$$

Substituindo 1 em 2 e manipulando algebricamente, temos que:



$$\frac{Kq^2}{R} = 3mv_2^2 \Rightarrow v_2 = q \sqrt{\frac{K}{3mR}}$$

Então:

$$v_1 = 2v_2 = 2q \sqrt{\frac{K}{3mR}}$$

Gabarito: E.

5. (ITA-1985)

Uma esfera condutora de raio $0,50 \text{ cm}$ é elevada a um potencial de $10,0V$. Uma segunda esfera, bem afastada da primeira, tem raio $1,00 \text{ cm}$ e está ao potencial $15,0V$. Elas são ligadas por um fio de capacitância desprezível. Sabendo-se que o meio no qual a experiência é realizada é homogêneo e isotrópico, podemos afirmar que os potenciais finais das esferas serão:

- a) $12,5V$ e $12,5V$.
- b) $8,33V$ para a primeira e $16,7V$ para a segunda.
- c) $16,7V$ para a primeira e $8,33V$ para a segunda.
- d) $13,3V$ e $13,3V$.
- e) Zero para a primeira e $25,0V$ para a segunda.

Comentários:

Calculando a carga na primeira esfera:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{r_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{r_1 V_1}{k} \quad (\text{eq. 1})(r_1 = 0,5 \text{ cm})$$

Do mesmo modo:

$$Q_2 = \frac{r_2 V_2}{k} \quad (\text{eq. 2})(r_2 = 1 \text{ cm})$$

Quando as duas são ligadas a carga se distribui de modo que as duas esferas possuam o mesmo potencial:

$$V_f = \frac{kQ'_1}{r_1} = \frac{kQ'_2}{r_2} \Rightarrow Q'_1 = \frac{r_1 V_f}{k} \quad (\text{eq. 3}) \text{ e } Q'_2 = \frac{r_2 V_f}{k} \quad (\text{eq. 4})$$

A carga total do sistema se mantém constante:

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 \quad (\text{eq. 5})$$

Substituindo (1), (2), (3) e (4) em (5), obtemos:

$$\frac{r_1 V_1}{k} + \frac{r_2 V_2}{k} = \frac{r_1 V_f}{k} + \frac{r_2 V_f}{k} \Rightarrow V_f = \frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{r_1 + r_2}$$



$$V_f = \frac{0,5 \cdot 10 + 1 \cdot 1,5}{1,5} = \frac{20}{1,5} = 13,3 \text{ V}$$

Gabarito: D

6. (ITA-1986)

Duas esferas metálicas, A e B , de raios R e $3R$, respectivamente, são postas em contato. Inicialmente A possui carga elétrica positiva $+2Q$ e B , carga $-Q$. Após atingir o equilíbrio eletrostático, as novas cargas de A e B passam a ser, respectivamente:

- a) $Q/2, Q/2$.
- b) $3Q/4, Q/4$.
- c) $3Q/2, Q/2$.
- d) $Q/4, 3Q/4$.
- e) $4Q/3$ e $-Q/3$.

Comentários:

Quando as duas são postas em contato a carga se distribui de modo que as duas esferas possuam o mesmo potencial:

$$V_f = \frac{kQ'_A}{r_A} = \frac{kQ'_B}{r_B} \Rightarrow Q'_B = \frac{r_B}{r_A} Q'_A = 3Q'_A \quad (eq. 1)$$

A carga total do sistema se mantém constante:

$$Q_{tot} = 2Q + (-Q) = Q'_A + Q'_B \quad (eq. 2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

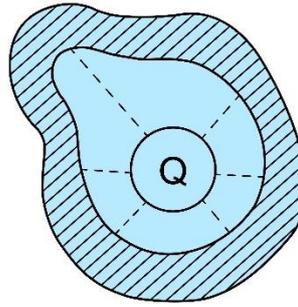
$$Q = Q'_A + 3Q'_A \Rightarrow Q'_A = \frac{Q}{4}$$

$$\therefore Q'_B = 3Q'_A = \frac{3Q}{4}$$

Gabarito: D

7. (ITA-1987)

A figura representa um condutor oco e um condutor de forma esférica dentro da cavidade do primeiro, ambos em equilíbrio eletrostático. Sabe-se que o condutor interno tem carga $+Q$.



Pode-se afirmar que:

- a) Não há campo elétrico dentro da cavidade.
- b) As linhas de força dentro da cavidade são retas radiais em relação à esfera, como na figura.
- c) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são perpendiculares a essa superfície.
- d) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são tangenciais a essa superfície.
- e) Não haverá diferença de potencial entre os dois condutores se a carga do condutor oco também for igual a Q .

Comentários:

a) **Incorreto.** Usando a Lei de Gauss:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

Usando qualquer gaussiana Ω cobrindo Q e contida na cavidade do condutor oco, chegamos em:

$$\sum_{\Omega(Q)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} > 0$$

$$\vec{E} \neq 0$$

b) **Incorreto.** As linhas de força devem chegar perpendiculares à superfície interna do condutor.

c) **Correto.** O campo dentro do condutor em equilíbrio é nulo, assim, usando a Lei de Gauss com qualquer gaussiana Ω que esteja inteiramente no seu interior resulta em:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

$$0 = +Q + q_{condutor,int}$$

$$q_{condutor,int} = -Q$$

d) **Incorreto.** As linhas são perpendiculares.

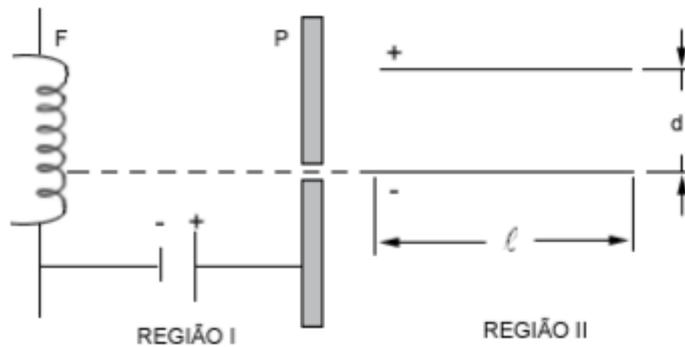
e) **Incorreto.** Note que o argumento usado em a) independe da carga total do condutor, logo haverá campo entre a carga no centro e a superfície interna do condutor, o que garante uma diferença de potencial não nula.



Gabarito: C

8. (ITA-1987)

Numa experiência de laboratório, elétrons são emitidos por um filamento metálico F , com velocidade inicial praticamente nula. Eles são acelerados através da região I por uma diferença de potencial de $25 \times 10^3 \text{ V}$, aplicada entre F e a placa perfurada P . Eles emergem do furo da placa com velocidade horizontal e penetram na região II , onde são obrigados a atravessar o campo elétrico uniforme de um capacitor cujas placas têm comprimento $l = 5,0 \text{ cm}$ e estão separadas por uma distância $d = 0,50 \text{ cm}$, conforme a figura. Qual é o máximo valor da tensão V_2 entre as placas do capacitor que ainda permite que algum elétron atinja a região III onde não há campo elétrico?



Comentários:

Note que estamos tratando de um movimento análogo a um lançamento horizontal, com campo gravitacional a_y e eixo y invertido. A equação da parábola para tal movimento é dada por:

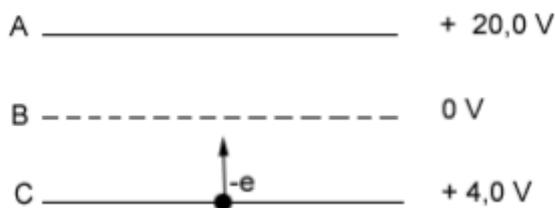
$$y(x) = \frac{g_{ap} x^2}{2v_x^2} \Rightarrow d = \frac{\left(\frac{V_{II}q}{md}\right) l^2}{2\left(\frac{2V_Iq}{m}\right)}$$

$$V_{II} = 4V_I \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 4 \cdot 25 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1000 \text{ V}$$

Gabarito: $V_2 = 1000 \text{ V}$

9. (ITA-1988)

A, B e C são superfícies que se acham, respectivamente, a potenciais $+20\text{V}$, 0V e $+4,0\text{V}$. Um elétron é projetado a partir da superfície C no sentido ascendente com uma energia cinética inicial de $9,0 \text{ eV}$. (Um elétron-volt é a energia adquirida por um elétron quando submetido a uma diferença de potencial de um volt). A superfície B é porosa e permite a passagem de elétrons. Podemos afirmar que:



- a) Na região entre C e B o elétron será acelerado pelo campo elétrico até atingir a superfície B com energia cinética de 33,0 eV. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, atingindo a superfície A com energia cinética de 13,0 eV.
- b) Entre as placas C e B o elétron será acelerado atingindo a placa B com energia cinética igual a 13,0 eV, mas não atinge a placa A.
- c) Entre C e B o elétron será desacelerado pelo campo elétrico aí existente e não atingirá a superfície B.
- d) Na região entre C e B o elétron será desacelerado, mas atingirá a superfície B com energia cinética de 5,0 eV. Ao atravessar B, uma vez na região entre B e A será acelerado, até atingir a superfície A com uma energia cinética de 25,0 eV.
- e) Entre as placas C e B o elétron será desacelerado, atingindo a superfície B com energia cinética de 5,0 eV. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, até atingir a superfície A com energia cinética de 15,0 eV.

Comentários:

Utilizando o teorema da energia cinética, podemos determinar a energia cinética na superfície B:

$$\begin{aligned} (\tau_{F_{ele}})_{C \rightarrow B} &= (-e) \cdot (V_C - V_B) = \Delta E_c = (E_c)_B - (E_c)_C \\ (-e)(4 - 0) &= (E_c)_B - 9eV \\ (E_c)_B &= 5 eV \end{aligned}$$

Novamente, pelo teorema da energia cinética, temos que a energia cinética com que o elétron chegará na placa é de:

$$\begin{aligned} (\tau_{F_{ele}})_{B \rightarrow A} &= (-e) \cdot (V_B - V_A) = \Delta E_c = (E_c)_A - (E_c)_B \\ (-e) \cdot (0 - 20) &= (E_c)_A - 5eV \\ \boxed{(E_c)_A} &= 25 eV \end{aligned}$$

Gabarito: D.

10.

Um fio condutor homogêneo de 25 cm de comprimento foi conectado entre os terminais de uma bateria de 6V. A 5 cm do pólo positivo, faz-se uma marca P sobre este fio e a 15 cm, outra marca Q.



Então, a intensidade E do campo elétrico dentro deste fio (em volt/metro) e a diferença de potencial $\Delta V = V_P - V_Q$ (em volts) existente entre os pontos P e Q dentro do fio serão dados, respectivamente, por:

- a) 6,0 e 0,6.
- b) 24 e 2,4.
- c) 24 e 2,4.
- d) 6,0 e 6,0.
- e) 24 e 6,0.

Comentários:

O campo elétrico dentro do fio será perpendicular à sua secção transversal, já que a presença de uma componente radial levaria ao acúmulo de cargas. Como não há campo na direção da secção transversal, o potencial elétrico deve ser o mesmo em toda a sua extensão.

Desse modo, temos um campo uniforme dentro do fio, nos permitindo escrever:

$$\Delta V = Ed$$

$$\Delta V_{bateria} = El_{fio} \quad (eq.1)$$

$$\Delta V_{PQ} = El_{PQ} \quad (eq.2)$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$\Delta V_{PQ} = \Delta V_{bateria} \frac{l_{PQ}}{l_{fio}} \Rightarrow \Delta V_{PQ} = 6 \cdot \frac{10}{25} = 2,4 V$$

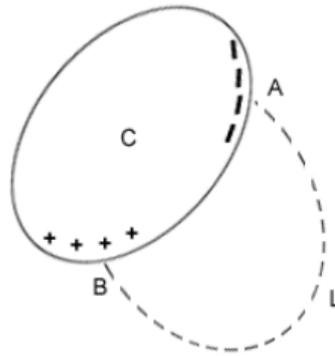
De (1), temos:

$$E = \frac{6}{0,25} = 24 V/m$$

Gabarito: C

11. (ITA-1988)

Na figura, C é um condutor em equilíbrio eletrostático, que se encontra próximo de outros objetos eletricamente carregados. Considere a curva tracejada L que une os pontos A e B da superfície do condutor.



Podemos afirmar que:

- a) A curva L não pode representar uma linha de força do campo elétrico.
- b) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais baixo que o ponto A.
- c) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais alto que o ponto A.
- d) A curva L pode representar uma linha de força, desde que L seja ortogonal à superfície do condutor nos pontos A e B.
- e) A curva L pode representar uma linha de força, desde que a carga total do condutor seja nula.

Comentários:

Um condutor em equilíbrio eletrostático apresenta o mesmo potencial em toda sua extensão. Assuma, por absurdo, que existe uma linha de força ligando dois pontos, A e B, desse condutor. Considere uma região bem pequena dessa linha, de comprimento Δl , de modo que podemos considerar a direção do campo constante nesse trecho:

$$\Delta V = -E \Delta l$$

A linha como um todo pode ser considerada uma soma de trechos, logo:

$$\sum \Delta V = -E \sum \Delta l = -El \neq 0$$

O que é um absurdo, pois não existe diferença de potencial entre os pontos do condutor.

Gabarito: A

12. (ITA-1990)

Um condutor esférico oco, isolado, de raio R, tem no seu interior uma pequena esfera de raio $r < R$. O sistema está inicialmente neutro. Eletriza-se a pequena esfera com carga positiva. Uma vez atingido o equilíbrio eletrostático, pode-se afirmar que:

- a) A carga elétrica na superfície externa do condutor é nula.



- b) A carga elétrica na superfície interna do condutor é nula.
- c) O campo elétrico no interior do condutor é nulo.
- d) O campo elétrico no exterior do condutor é nulo.
- e) Todas as afirmativas acima estão erradas.

Comentários:

a) **Incorreto.** Veja b).

b) **Incorreto.** O campo dentro do condutor em equilíbrio é nulo, assim, usando a Lei de Gauss com qualquer gaussiana Ω que esteja inteiramente no seu interior resulta em:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

$$0 = +Q + q_{condutor,int}$$

$$q_{condutor,int} = -Q$$

Como o condutor externo é neutro, temos:

$$q_{condutor,int} + q_{condutor,ext} = 0$$

$$q_{condutor,ext} = Q$$

Logo, não é nula a carga na superfície interna, nem na superfície externa, como mostrada a indução, utilizando a Lei de Gauss.

c) **Incorreto.** Usando a Lei de Gauss:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

Usando qualquer gaussiana Ω cobrindo Q e contida na cavidade do condutor oco, chegamos em:

$$\sum_{\Omega(Q)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} > 0$$

$$\vec{E} \neq 0$$

Notamos que na região entre a casca esférica e a esfera menor, existe um campo elétrico não-nulo. O ITA fez uma pegadinha nesse item.

d) **Incorreto.** Usando a Lei de Gauss:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = q_{interna}$$

Usando qualquer gaussiana Ω cobrindo o condutor oco, chegamos em:

$$\sum_{\Omega(Q)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = Q + q_{condutor,int} + q_{condutor,ext} = Q > 0$$

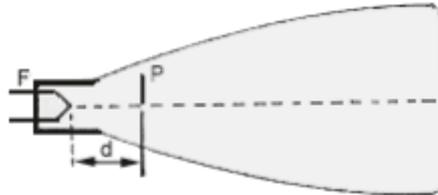
$$\vec{E} \neq 0$$

Gabarito: E



13. (ITA-1990)

Num tubo de raios catódicos tem-se um filamento F que libera elétrons quando aquecido, e uma placa aceleradora P que é mantida a um potencial mais alto que o filamento. O filamento fica a uma distância d da placa. A placa tem, ainda, um orifício que permite a passagem dos elétrons que vão se chocar com uma tela que fica fluorescente quando os mesmos a atingem.



Nestas condições:

- Se aumentarmos a distância d entre o filamento e a placa, a energia cinética com que os elétrons chegam à placa aumenta.
- O aumento da distância d faz com que a energia cinética dos elétrons diminua.
- A energia cinética dos elétrons não depende da distância entre o filamento e a placa, mas só da diferença de potencial U entre o filamento e a placa aceleradora.
- A energia cinética dos elétrons só depende da temperatura do filamento.
- Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.

Comentários:

Como a única força que atua nos elétrons é a força elétrica e ela é conservativa, podemos usar o teorema da energia cinética nesse caso:

$$\tau_{F_{ele}} = \Delta E_c$$

Onde o trabalho da força elétrica pode ser dado por:

$$\tau_{F_{ele}} = q(V_F - V_P)$$

Portanto:

$$q(V_F - V_P) = \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2$$

O enunciado deixa claro que o potencial da placa P é maior que o potencial do filamento, como esperado, os elétrons (cargas negativas) procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

- Incorreto.** Como vimos, a velocidade final dos elétrons ao chegar na placa não depende da distância d .
- Incorreto.** Novamente, a distância d não interfere na variação da energia cinética dos elétrons.
- Correto.** Como mostramos a variação da energia cinética dos elétrons é função exclusiva da diferença de potencial das placas:

$$\frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 = q(V_F - V_P)$$



- d) **Incorreto.** Conforme vimos no item c.
e) **Incorreto.** O item c está correto.

Gabarito: C

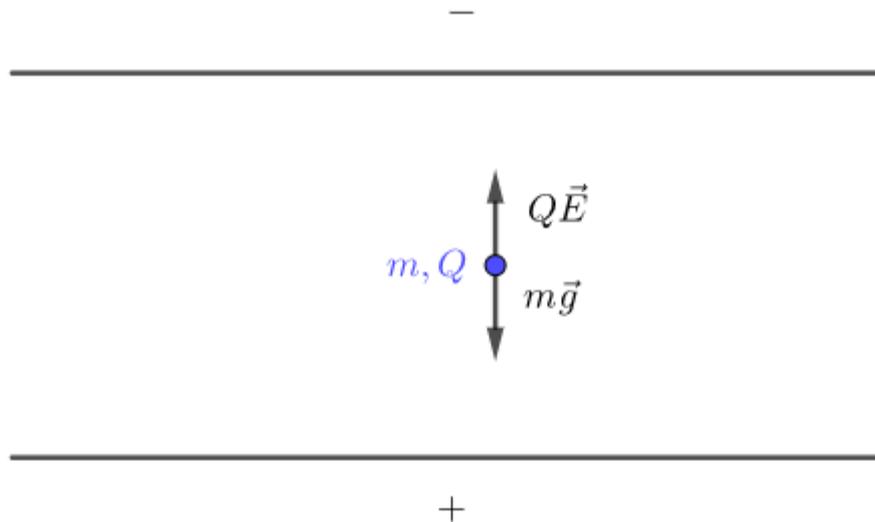
14. (ITA-1993)

Entre as armaduras de um capacitor plano com placas horizontais, existe uma diferença de potencial V . A separação entre as armaduras é d . Coloca-se uma pequena carga $Q > 0$, de massa m entre as armaduras e esta fica em equilíbrio. A aceleração da gravidade é g . Qual é o valor da carga Q ?

- a) $Q = mgd^{-1}/V$.
b) $Q = Vd/m$.
c) $Q = mgd/V$.
d) $Q = Vgd/m$.
e) $Q = gd/Vm$.

Comentários:

Nessa configuração temos um campo uniforme e perpendicular às placas do capacitor. Equilibrando as forças agindo na carga:



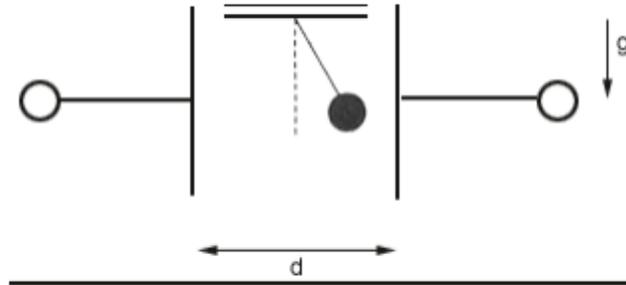
$$F_{ele} = \text{Peso} \Rightarrow Eq = mg \Rightarrow \boxed{Q = \frac{mgd}{V}}$$

Gabarito: C

15. (ITA-2001)



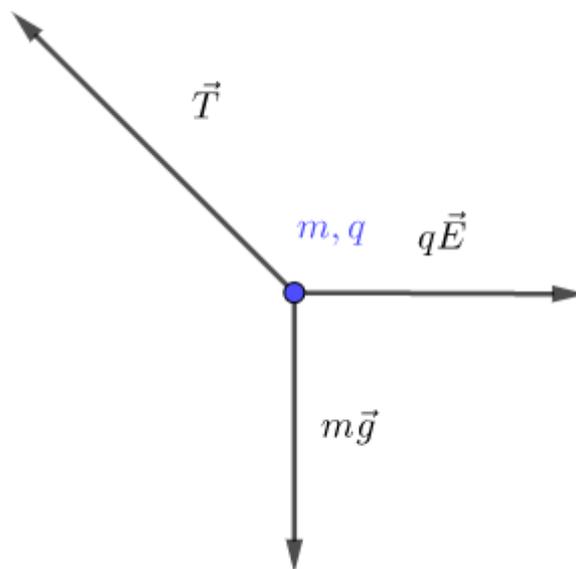
Uma esfera de massa m e carga q está suspensa por um fio frágil e inextensível, feito de um material eletricamente isolante. A esfera se encontra entre as placas paralelas de um capacitor plano, como mostra a figura. A distância entre as placas é d , a diferença de potencial entre as mesmas é V e o esforço máximo que o fio pode suportar é igual ao quádruplo do peso da esfera. Para que a esfera permaneça imóvel, em equilíbrio estável, é necessário que:



- a) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15 mg$
- b) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 4 (mg)^2$
- c) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15 (mg)^2$
- d) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \geq 15 mg$
- e) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 16 (mg)^2$

Comentários:

Considere o esquema de forças agindo sobre a carga:



Pelo equilíbrio, temos:

$$T^2 = (mg)^2 + (qE)^2$$



Lembrando que esforço máximo é tal que $T \leq 4mg$, então:

$$(qE)^2 \leq 15(mg)^2$$

$$\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15(mg)^2$$

Gabarito: C

16. (ITA-2002)

Uma esfera metálica isolada, de raio $R_1 = 10,0 \text{ cm}$ é carregada no vácuo até atingir o potencial $U = 9,0V$. Em seguida, ela é posta em contato com outra esfera metálica isolada, de raio $R_2 = 5,0 \text{ cm}$, inicialmente neutra. Após atingir o equilíbrio eletrostático, qual das alternativas melhor descreve a situação física? É dado que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

- a) A esfera maior terá uma carga de 0,66. 10-10 C.
- b) A esfera maior terá um potencial de 4,5V.
- c) A esfera menor terá uma carga de 0,66. 10-10 C.
- d) A esfera menor terá um potencial de 4,5V.
- e) A carga total é igualmente dividida entre as duas esferas.

Comentários:

Calculando a carga na primeira esfera:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{R_1 V_1}{k} \quad (\text{eq. 1})(R_1 = 10 \text{ cm})$$

Quando as duas são ligadas a carga se distribui de modo que as duas esferas possuam o mesmo potencial:

$$V_f = \frac{kQ'_1}{R_1} = \frac{kQ'_2}{R_2} \Rightarrow Q'_1 = \frac{R_1 V_f}{k} \quad (\text{eq. 2}) \text{ e } Q'_2 = \frac{R_2 V_f}{k} \quad (\text{eq. 3})$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos:

$$Q = Q_1 = Q'_1 + Q'_2 \quad (\text{eq. 4})$$

Substituindo (1), (2), (3) em (4), obtemos:

$$\frac{R_1 U}{k} = \frac{R_1 V_f}{k} + \frac{R_2 V_f}{k} \Rightarrow V_f = \frac{R_1 U}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_f = \frac{2}{3} 9 = 6 \text{ V} \quad (\text{eq. 5})$$

Substituindo (5) em (2) e (3), obtemos:

$$Q_1 = 0,66 \cdot 10^{-10} \text{ C} \quad (\text{gabarito})$$

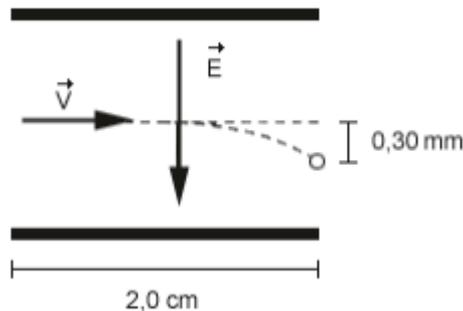
$$Q_2 = 0,33 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

Gabarito: A



17. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10 \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20 \text{ m/s}$ entre as placas de comprimento igual a $2,0 \text{ cm}$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4 \text{ N/C}$, como mostra a figura.



Considerando que a densidade da gota seja 1000 kg/m^3 e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,30 \text{ mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

- a) $2,0 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.
- b) $3,1 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.
- c) $6,3 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.
- d) $3,1 \cdot 10^{-11} \text{ C}$.
- e) $1,1 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

Comentário:

Aplicando $F = ma$ à gota, temos:

$$a_y = \frac{Eq}{m} \quad (1) \text{ (para baixo)}$$

O movimento é análogo a um lançamento horizontal com campo gravitacional igual a (1). A equação da parábola para lançamentos horizontais é dada por:

$$y(x) = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} \Rightarrow \Delta y = -\frac{g_{\text{apa}}x^2}{2v^2} \Rightarrow h_{\text{final}} = \frac{\left(\frac{Eq}{m}\right) l_{\text{placa}}^2}{2v^2}$$

$$q = \frac{2h_{\text{final}}v^2m}{El_{\text{placa}}^2} = \frac{2h_{\text{final}}v^2(\rho_{\text{gota}} \cdot \frac{4}{3}\pi r_{\text{gota}}^3)}{El_{\text{placa}}^2}$$

$$q = \pi \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

Gabarito: B



18. (ITA-2009)

Uma carga q distribui-se uniformemente na superfície de uma esfera condutora, isolada, de raio R . Assinale a opção que apresenta a magnitude do campo elétrico e o potencial elétrico num ponto situado a uma distância $r = R/3$ do centro da esfera.

- a) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = 0 \text{ V}$
- b) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$
- c) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3q}{R}$
- d) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^2}$
- e) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^3}$ e $U = 0 \text{ V}$

Comentários:

Usando a Lei de Gauss com qualquer gaussiana esférica de raio menor que R , temos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0} = 0$$

Pela simetria do problema teremos um campo radial, que é constante em variações angulares, ou seja, $E = E(r)$. Logo o produto escalar acima se torna:

$$\sum_{\Omega(r)} E(r) \cdot \Delta s = E(r) \cdot S(\Omega(r)) = 0$$

$$E(r) = 0, \forall r < R$$

Como não há linhas de campo entre um ponto de raio r e o centro do condutor, o potencial desses é o mesmo. Calculando o potencial no centro do condutor esférico: (todas as cargas têm a mesma distância ao centro)

$$V_{cond} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = V(r)$$

Resultado já esperado, uma vez que o campo no interior de um condutor maciço é constante e o campo elétrico é nulo.

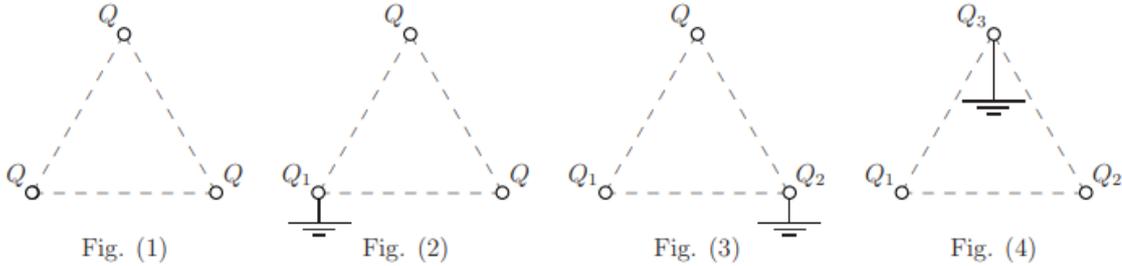
Gabarito: B

19. (ITA-2009)

Três esferas condutoras, de raio a e carga Q , ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado $b \gg a$, conforme mostra a figura (1). Considere as figuras (2), (3) e (4), em que, respectivamente,



cada uma das esferas se liga e desliga da Terra, uma de cada vez. Determine, nas situações (2), (3) e (4), a carga das esferas Q_1 , Q_2 e Q_3 , respectivamente, em função de a , b e Q .



Comentários:

Em (2) o condutor ligado à Terra deve ter potencial nulo, logo:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{a} + \frac{kQ}{b} + \frac{kQ}{b} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{2aQ}{b}$$

Em (3) o condutor ligado à Terra deve ter potencial nulo, assim:

$$V_2 = \frac{kQ_2}{a} + \frac{kQ_1}{b} + \frac{kQ}{b} = 0 \Rightarrow Q_2 = -\frac{aQ}{b} \left(1 - \frac{2a}{b}\right)$$

Do mesmo modo, em (4) o condutor ligado à Terra deve ter potencial nulo:

$$V_3 = \frac{kQ_3}{a} + \frac{kQ_2}{b} + \frac{kQ_1}{b} = 0 \Rightarrow Q_3 = \frac{Qa^2}{b^2} \left(3 - \frac{2a}{b}\right)$$

Gabarito: $Q_1 = -\frac{2Qa}{b}$, $Q_2 = \frac{Q \cdot a}{b} \left(\frac{2a}{b} - 1\right)$ e $Q_3 = \frac{Qa^2}{b^2} \left(3 - \frac{2a}{b}\right)$

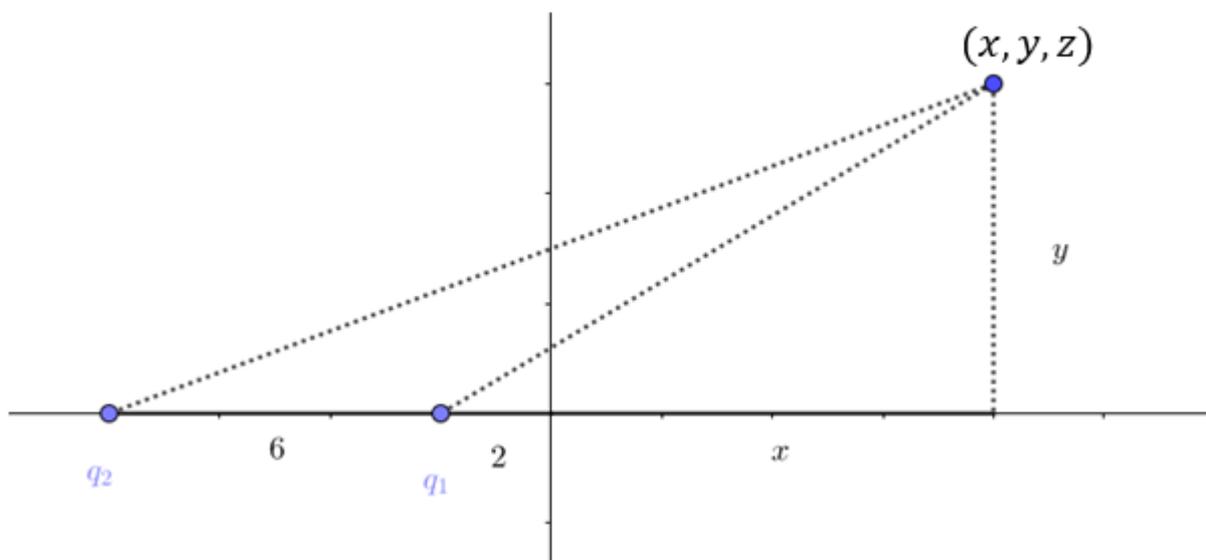
20. (ITA-2010)

Considere as cargas elétricas $q_1 = 1 \text{ C}$, situada em $x = -2 \text{ m}$, e $q_2 = -2 \text{ C}$, situada em $x = -8 \text{ m}$. Então, o lugar geométrico dos pontos de potencial nulo é

- b) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -4 \text{ m}$ e $x = 4 \text{ m}$.
- b) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -16 \text{ m}$ e $x = 16 \text{ m}$.
- c) um elipsoide que corta o eixo x nos pontos $x = -4 \text{ m}$ e $x = 16 \text{ m}$.
- d) um hiperboloide que corta o eixo x no ponto $x = -4 \text{ m}$.
- e) um plano perpendicular ao eixo x que o corta no ponto $x = -4 \text{ m}$.

Comentários:

Calculando o potencial de um ponto arbitrário (x, y, z) (considere o eixo z saindo do plano da folha):



$$V(x, y) = \frac{kq_1}{\sqrt{(2+x)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{kq_2}{\sqrt{(8+x)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

$$\sqrt{(8+x)^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{(2+x)^2 + y^2 + z^2}$$

$$(8+x)^2 + y^2 + z^2 = 4[(2+x)^2 + y^2 + z^2]$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 48$$

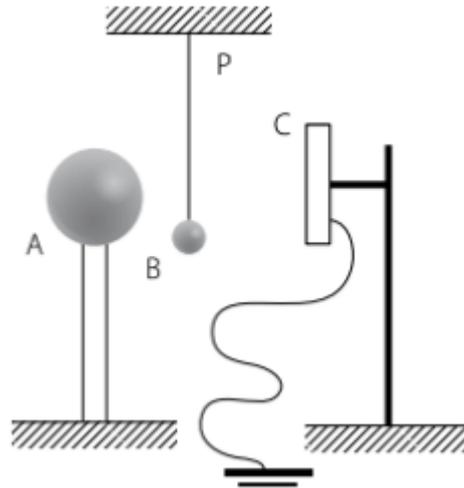
$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 16}$$

A equação representa uma esfera centrada em $(0,0,0)$ de raio 4, cortando o eixo x em 4 e -4 .

Gabarito: A

21. (IME – 79)

A figura mostra, esquematicamente, uma campainha eletrostática A e B são condutores esféricos, com diâmetros de 20cm e 4 cm , respectivamente. B é suspenso de P por um fio isolante. A placa metálica C é ligada à Terra. A esfera A, carregada inicialmente a um potencial de 50kV , atrai B que, após o contato, é repelida e se choca com a placa C, descarregando-se. A operação se repete enquanto o potencial de A for superior a 25 kV . Determine o número de vezes que B baterá em A.



Comentários:

Calculando a carga inicial de A:

$$V_A = \frac{kQ_A}{R_A} \quad (eq. 1) \Rightarrow Q_A = \frac{V_A R_A}{k} \quad (eq. 2)$$

Quando A e B entram em contato, seus potenciais se igualam:

$$V = \frac{kQ'_A}{R_A} = \frac{kQ'_B}{R_B} \quad (eq. 3) \Rightarrow \frac{Q'_A}{R_A} = \frac{Q'_B}{R_B} \quad (eq. 4)$$

Por conservação de carga, temos:

$$Q'_A + Q'_B = Q_A$$

Usando (4):

$$Q'_A + \frac{R_B}{R_A} Q'_A = Q_A \Rightarrow Q'_A = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right) Q_A$$

Note que a carga Q_A pode ser tratada como a carga inicial antes de qualquer colisão (não necessariamente a primeira) e Q'_A a carga após a colisão, logo cada colisão multiplica a carga de A pelo fator mostrado. Assim, após n colisões a carga de A será:

$$Q_A(n) = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right)^n Q_A$$

(Use indução finita para uma prova matematicamente rigorosa)

Queremos a colisão que deixará A com um potencial menor que 25 kV:

$$V < 25 \text{ kV}$$

$$\frac{kQ_A(n)}{R_A} < 25$$

$$\frac{kQ_A}{R_A} \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right)^n < 25$$

Por (1), temos:

$$V_A \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right)^n < 25$$



$$\left(\frac{20}{24}\right)^n < \frac{1}{2}$$

$$n \geq 4$$

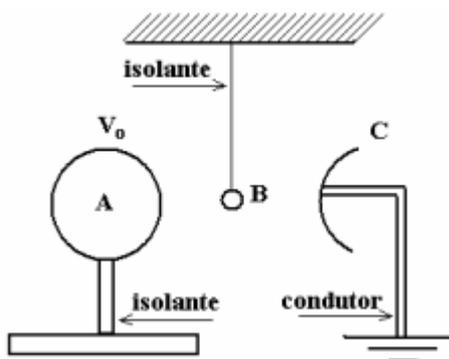
Após a primeira colisão que satisfaz a desigualdade não haverá outras, logo:

$$\boxed{n = 4 \text{ colisões}}$$

Gabarito: 4 vezes

22. (ITA – 2008)

Considere um condutor esférico A de 20cm de diâmetro colocado sobre um pedestal fixo e isolante. Uma esfera condutora B de 0,5mm de diâmetro, do mesmo material da esfera A, é suspensa por um fio fixo e isolante. Em posição oposta à esfera A, é colocada uma campainha C ligada à terra, conforme mostra a figura. O condutor A é, então, carregado a um potencial eletrostático V_0 , de forma a atrair a esfera B. As duas esferas entram em contacto devido à indução eletrostática e, após a transferência de carga, a esfera B é repelida, chocando-se com a campainha C, onde a carga adquirida é escoada para a terra. Após 20 contatos com a campainha, verifica-se que o potencial da esfera A é de 10 000 V. Determine o potencial inicial da esfera A. Considere $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ se $|x| < 1$



Comentários:

Calculando a carga inicial de A:

$$V_0 = \frac{kQ_A}{R_A} \quad (\text{eq. 1})$$

$$Q_A = \frac{V_0 R_A}{k} \quad (\text{eq. 2})$$

Quando A e B entram em contato, seus potenciais se igualam:

$$V = \frac{kQ'_A}{R_A} = \frac{kQ'_B}{R_B} \quad (\text{eq. 3}) \Rightarrow \frac{Q'_A}{R_A} = \frac{Q'_B}{R_B} \quad (\text{eq. 4})$$

Por conservação de carga, temos:

$$Q'_A + Q'_B = Q_A$$



Usando (4):

$$Q'_A + \frac{R_B}{R_A} Q'_A = Q_A \Rightarrow Q'_A = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right) Q_A$$

Note que a carga Q_A pode ser tratada como a carga inicial antes de qualquer colisão (não necessariamente a primeira) e Q'_A a carga após a colisão, logo cada colisão multiplica a carga de A pelo fator mostrado. Assim, após n colisões a carga de A será:

$$Q_A(n) = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right)^n Q_A$$

(Caso queira, use indução finita para uma prova matematicamente rigorosa)

Assim, o potencial após a n -ésima colisão é dado por:

$$V_A(n) = \frac{kQ_A(n)}{R_A} = \frac{kQ_A}{R_A} \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right)^n$$

Usando (1), temos:

$$V_A(n) = V_0 \left(\frac{R_A}{R_A + R_B} \right)^n \Rightarrow V_0 = V_A(n) \left(1 + \frac{R_B}{R_A} \right)^n$$

Como $R_B \ll R_A$, podemos fazer a aproximação fornecida no enunciado: ($n = 20$)

$$V_0 = 10000 \left(1 + \frac{20 \cdot 0,5}{200} \right) = 10500 \text{ V}$$

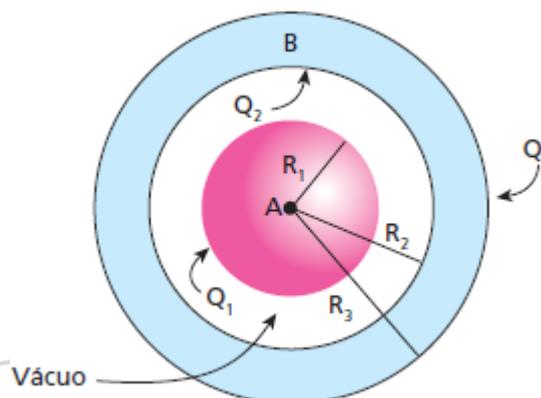
Gabarito: $V_0 = 10500 \text{ V}$

23. (FEI-SP)

Duas esferas condutoras concêntricas A e B possuem raios $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$ e $R_3 = 25 \text{ cm}$ e estão eletrizadas de forma que a diferença de potencial entre elas é $V_A - V_B = 9 \text{ kV}$ e a carga total da esfera B é de $0,3 \mu\text{C}$. Determine as cargas Q_1 , Q_2 e Q_3 existentes nas superfícies dessas esferas.

Dado: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.

OBS: o meio entre as esferas é o vácuo.





Comentários:

Usaremos o fato do potencial causado pela carga na superfície de um condutor ser constante no seu interior e igual a:

$$V(r) = \frac{kQ}{R}, \forall r < R$$

No exterior temos:

$$V(r) = \frac{kQ}{r}, \forall r \geq R$$

Por indução temos: $Q_2 = -Q_1$ (eq. 1)

Pela carga total de B , temos:

$$\begin{aligned} Q_3 + Q_2 &= 3 \cdot 10^6 \text{ C} \\ Q_3 - Q_1 &= 3 \cdot 10^6 \text{ C} \quad (\text{eq. 2}) \end{aligned}$$

Calculando a d.d.p. entre A e B , obtemos:

$$V_A - V_B = \left(\frac{kQ_3}{R_3} + \frac{kQ_2}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_1} \right) - \left(\frac{kQ_3}{R_3} + \frac{kQ_2}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_2} \right)$$

$$V_A - V_B = \left(\frac{kQ_3}{R_3} - \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_1} \right) - \left(\frac{kQ_3}{R_3} - \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_2} \right)$$

$$V_A - V_B = kQ_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^9 Q_1 \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2} \right)$$

$$Q_1 = 0,2 \mu\text{C}$$

Substituindo o resultado acima em (1) e (2), obtemos:

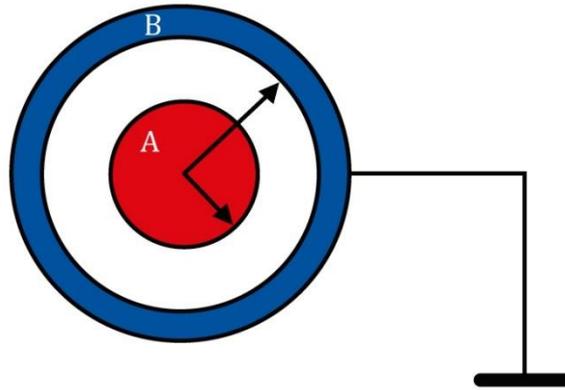
$$Q_2 = -0,2 \mu\text{C}$$

$$Q_3 = 0,5 \mu\text{C}$$

Gabarito: $Q_1 = +0,2 \mu\text{C}$, $Q_2 = -0,2 \mu\text{C}$ e $Q_3 = +0,5 \mu\text{C}$

24.

Considere dois condutores esféricos, sendo o menor maciço de raio R_A e o outro B oco de raio interno R_1 e raio externo R_2 . O condutor maciço está eletrizado com carga q_A , enquanto B está ligado à Terra, como mostra a figura:



Calcule:

- O potencial na esfera A.
- O potencial na esfera B.
- O potencial num ponto P entre A e B.

Faça o esboço gráfico do potencial em função da distância do centro das esferas.

Comentários:

a) Como bem sabemos, a carga da esfera A induzirá na superfície interna da esfera B uma carga de mesma intensidade e sinal contrário. Por outro lado, a superfície externa ficará com falta de elétrons, deixando-a com carga positiva, mas como a casca esférica B está conectada a Terra, elétrons fluíram para neutralizar essas cargas positiva e, dessa forma, a superfície externa ficará com carga nula.

Dado que a esfera A é condutora e nos condutores o potencial é constante, podemos determinar o seu potencial pela expressão:

$$V_A = K \frac{q_A}{R_A} + K \frac{(-q_A)}{R_1}$$

$$V_A = K q_A \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_1} \right)$$

b) Devido ao fato da esfera B estar conectada à Terra, temos que seu potencial será nulo.

c) Para um ponto P situado na região entre a esfera A e a casca esférica B, temos que o potencial é dado pela soma dos potenciais:

$$V_P = K \frac{q_A}{r} - K \frac{q_A}{R_1}$$

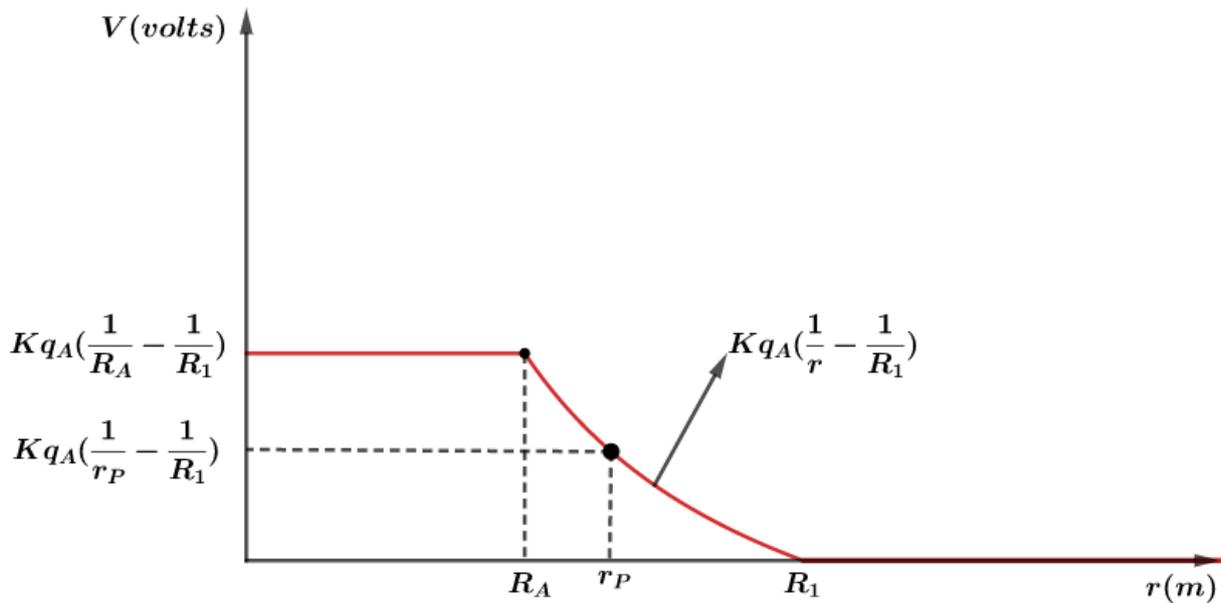
$$V_P = K q_A \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Para pontos externos, temos que o potencial será nulo, pois:

$$V = K \frac{q_A}{r} - K \frac{q_A}{r}$$

$$V = 0$$

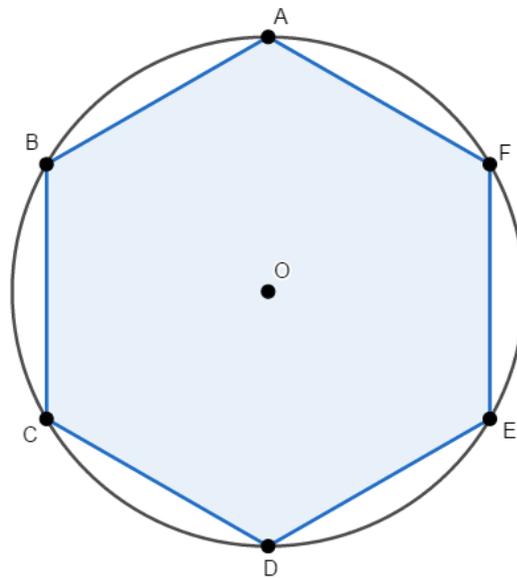
Portanto o gráfico é dado por:



Gabarito: a) $V_A = Kq_A \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_1} \right)$ b) zero c) $V_P = Kq_A \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{R_1} \right)$

25.

7 cargas positivas Q encontram-se no infinito. As cargas têm módulo $Q = 40\mu C$ e o hexágono abaixo tem lado 12 cm .



Pede-se:

- a energia gasta para trazer 6 dessas cargas do infinito e dispô-las nos vértices do hexágono.
- a energia gasta para, em seguida, trazer a sétima carga do infinito e colocá-la no centro O do hexágono.
- a energia liberada se essa "molécula" for totalmente destruída e as cargas voltarem para o infinito. Considere: $K = 9,0 \times 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2$ e $\sqrt{3} \cong 1,5$.

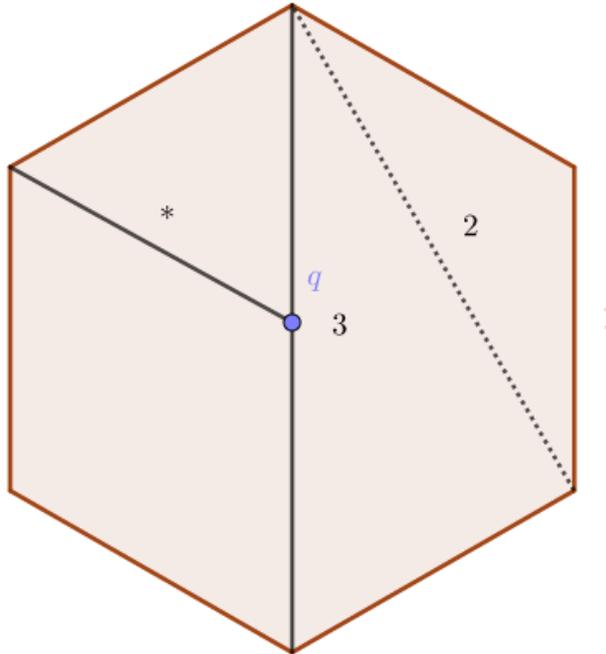


Comentários:

a) A energia gasta deve ser a diferença de energia entre o sistema inicial e final:

$$E_{gasta} = U_{final} - U_0$$

A energia final deve levar em consideração a interação de cada par de cargas contidas no hexágono:



Vamos separar a energia potencial elétrica em três grupos de acordo com a distância:

Grupo 1): energia potencial para cargas que estão a distância de l :

$$U_1 = \frac{kq^2}{l}$$

Grupo 2): energia potencial para cargas que estão a distância de $l\sqrt{3}$:

$$U_2 = \frac{kq^2}{l\sqrt{3}}$$

Grupo 3): energia potencial para cargas que estão a distância de $2l$:

$$U_3 = \frac{kq^2}{2l}$$

Logo a energia gasta deve ser:

$$E_{gasta,1} = (6U_1 + 6U_2 + 3U_3) - 0$$

$$E_{gasta,1} = \frac{3kq^2}{l} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_{gasta,1} = 1380 \text{ J}$$

b) Novamente:

$$E_{gasta,2} = U_f - U_0$$



$$E_{gasta,2} = (E_{gasta,1} + 6U_1) - E_{gasta,1}$$

$$E_{gasta,2} = \frac{6kq^2}{l}$$

$$E_{gasta,2} = 720 \text{ J}$$

A energia liberada é a energia perdida pelo sistema, assim:

$$E_{liberada} = U_0 - U_{final}$$

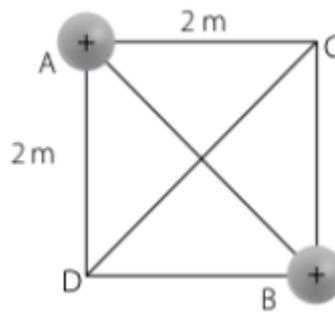
$$E_{liberada} = (E_{gasta,1} + E_{gasta,2}) - 0$$

$$E_{liberada} = E_{gasta,1} + E_{gasta,2} = 2100 \text{ J}$$

Gabarito: a) 1380 J; b) 720 J; c) 2100 J

26.

Na figura a seguir, temos um quadrado de lado 2 m. Nos vértices A e B estão fixas duas cargas puntiformes idênticas +Q.



Determine a mínima energia potencial adquirida por uma carga +Q, puntiforme, colocada dentro do quadrado.

Comentários:

Seja r_1 a distância de Q a A e r_2 a distância de Q a B . Desse modo, a energia potencial adquirida pela carga deve ser:

$$U(Q) = kQ^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Como $\frac{1}{r_1} > 0$ e $\frac{1}{r_2} > 0$ podemos usar a desigualdade das médias:

$$M.A. \geq M.G. \Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

Onde o mínimo ocorre quando $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$, ou seja, quando:

$$r_1 = r_2 = r$$

$$[U(Q)]_{min} = \frac{2kQ^2}{r}$$



Obviamente o menor potencial será alcançado no maior r , isto é, $r = 2 m$, logo:

$$\boxed{[U(Q)]_{min, r=2m} = kQ^2}$$

Gabarito: kQ^2

27. (Mack – 2005)

Uma partícula de massa igual a 2cg e carga de $+1\mu C$ é lançada com velocidade de 300 m/s, em direção a uma carga fixa de $+3\mu C$. O lançamento é feito no vácuo de um ponto bastante afastado da carga fixa. Desprezando ações gravitacionais, qual a mínima distância entre as cargas?

Adote: $K_0 = 9,0 \times 10^9 N.m^2/C^2$.

Comentários:

Inicialmente, vamos considerar que a energia potencial eletrostática é nula, já que a carga no momento do lançamento está muito afastada. Como apenas a força elétrica é considerada no problema, temos um sistema conservativo. Logo, a energia mecânica é conservada:

$$(E_M)_{antes} = (E_M)_{depois} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{(Kq_1q_2)}{d}$$

Notamos que devido ao fato de as duas cargas serem positivas, a força elétrica está freando a carga. Dessa forma, a distância será mínima quando a velocidade for nula, marcando a inversão do movimento. Portanto:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{(Kq_1q_2)}{d_{min}} \Rightarrow d_{min} = \frac{2Kq_1q_2}{mv_0^2}$$

Substituindo valores, temos que:

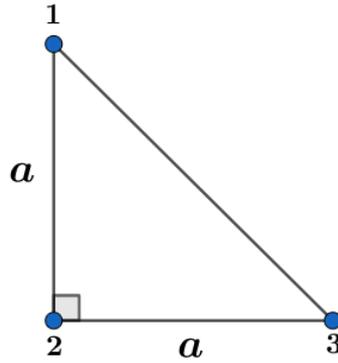
$$d_{min} = \frac{2.9 \times 10^9. 1 \times 10^{-6}. 3 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-5}. (300)^2}$$

$$\boxed{d_{min} = 3 \text{ cm}}$$

Gabarito: $d_{min} = 3 \text{ cm}$

28.

Três esferas metálicas idênticas de raio r estão localizadas nos vértices de um triângulo isósceles, como se mostra na figura (supor $r \ll a$). As esferas estão inicialmente com carga q cada. As esferas 1 e 2 são ligadas por um curto período de tempo, com um fio condutor, em seguida, o fio é retirado. Determine as cargas finais das esferas 1 e 2 após o processo.



Caso necessário, utilize a aproximação $(1 + x)^n \cong 1 + nx$, quando $x \ll 1$.

Comentários:

Inicialmente, consideramos o fio condutor com capacidade de acumular cargas desprezível. Dessa forma, temos pelo Princípio da Conservação das Cargas que:

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

$$\boxed{2q = Q'_1 + Q'_2}$$

Quando fazemos o contato das cargas 1 e 2, o potencial elétrico é o mesmo das esferas, logo:

$$V_{Q'_1} = K \frac{Q'_1}{r} + K \frac{Q'_2}{a} + K \frac{q}{a\sqrt{2}}$$

$$V_{Q'_2} = K \frac{Q'_2}{r} + K \frac{Q'_1}{a} + K \frac{q}{a}$$

$$V_{Q'_1} = V_{Q'_2}$$

$$K \frac{Q'_1}{r} + K \frac{Q'_2}{a} + K \frac{q}{a\sqrt{2}} = K \frac{Q'_2}{r} + K \frac{Q'_1}{a} + K \frac{q}{a}$$

$$K \frac{Q'_1}{r} + K \frac{2q - Q'_1}{a} + K \frac{q}{a\sqrt{2}} = K \frac{2q - Q'_1}{r} + K \frac{Q'_1}{a} + K \frac{q}{a}$$

$$Q'_1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = q \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} \right) \quad (\times r)$$

$$Q'_1 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{r}{a} \right) = q \left(2 - \frac{r}{a} - \frac{r}{a\sqrt{2}} \right)$$

$$r \ll a \Rightarrow \left(1 - \frac{r}{a} \right)^n \cong \left(1 + n \frac{r}{a} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{1 - \frac{r}{a}} \cong 1 + \frac{r}{a}$$

$$Q'_1 = q \left(1 + \frac{r}{a} \right) \left(\frac{2}{2} - \frac{r}{2a} - \frac{r}{2a\sqrt{2}} \right)$$

$$Q'_1 = q \left[\frac{2}{2} - \frac{r}{2a} - \frac{r}{2a\sqrt{2}} + \frac{2r}{2a} - \frac{r^2}{2a^2} - \frac{2r^2}{2a^2\sqrt{2}} \right]$$

Desconsiderando termos quadráticos de $\left(\frac{r}{a} \right)^2$ já que $r \ll a$, temos que:



$$Q'_1 = q \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

Como $Q'_2 = 2q - Q'_1$, vem:

$$Q'_2 = q \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

Gabarito: $Q'_1 = q \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$, $Q'_2 = q \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$



8. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembramos conceitos estudados no ensino fundamental e também aprofundamos o nosso conhecimento em alguns assuntos. Nessa aula, vimos uma breve revisão de assuntos da Mecânica e fechamos nosso estudo de potencial elétrico.

Na próxima aula, fecharemos o estudo de eletrostática, finalizando com capacitância e uma breve revisão da mecânica e um estudo completo acerca dos capacitores.

Estude com calma e muita concentração. Essa parte da Física é bem difícil e bem abstrata.

Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



9. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.
- [6] Paul A. Tipler, Gene Mosca. Física para Cientistas e Engenheiros volume 2. 5ª ed. LTC, 2006. 499 f.