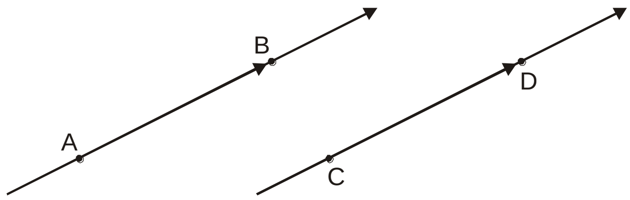
SUMÁRIO

1. EQUIPOLÊNCIA DE SEGMENTOS ORIENTADOS

1.1 EQUIPOLÊNCIA

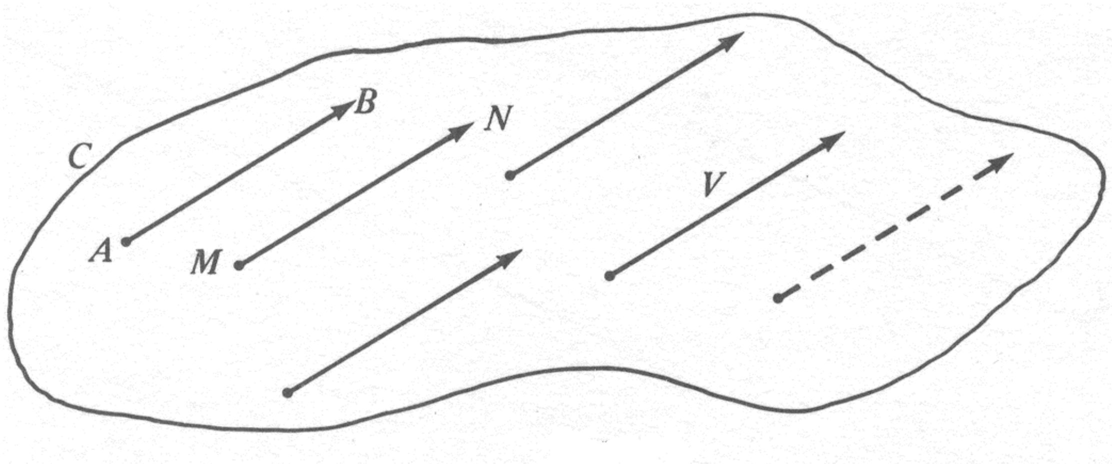
Dois segmentos orientados são equipolentes quando têm a mesma medida (módulo), a mesma direção e o mesmo sentido.



a) Todos os segmentos nulos são equipolentes entre si.
b) Dois segmentos coincidentes são equipolentes.
c) Todos os segmentos equipolentes de mesma origem são coincidentes.

1.2. CLASSE DE EQUIVALÊNCIA

De acordo com esta propriedade, vemos que, dado um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, é possível construir infinitos segmentos equipolentes a $\overrightarrow{AB}$, tendo par origem de cada um deles cada ponto do espaço.



Todos estes infinitos segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e o próprio segmento $\overrightarrow{AB}$ constituem um conjunto de segmentos equipolentes entre si.
A este conjunto damos o nome de classe de equivalência do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$

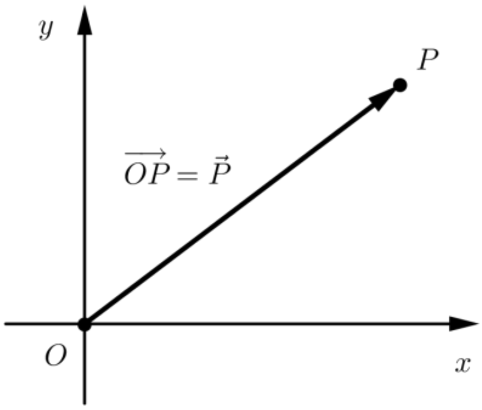
2. VETORES

2.1. VETOR

Representamos uma classe de equivalência formada por segmentos orientados equipolentes entre si por um ente geométrico chamado vetor (vetor livre).
Então, quando dizemos o vetor, estamos nos referindo a todos os segmentos orientados que constituem a classe de equivalência da qual o vetor é representante.
Qualquer elemento do conjunto de segmentos orientados equipolentes entre si pode ser usado para indicar o vetor.

3. DEFINIÇÃO

Um vetor no plano é um par ordenado de número reais (x, y). Os números x e y são chamados as componentes do vetor (x, y).



Existe uma correspondência biunívoca entre os vetores (x ,y) no plano (R^2) e os pontos (x ,y) no plano. Seja o vetor $\vec{P}$ o par ordenado de números reais (x_p, y_p). Se denotarmos por $\vec{P}$ o ponto (x_p, y_p), então o vetor $\vec{P}$ pode ser representado geometricamente pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{OP}$. Tal segmento de reta orientado é chamado em representação vetor posição.

Teorema

Se $\overrightarrow{OP}$ é o vetor (x_p, y_p), então que é o módulo do vetor $\overrightarrow{OP} = \sqrt{{x_p}^2 + {y_p}^2}$.

4. TIPOS DE VETORES

Vetor nulo – É o vetor de módulo zero. $|\overrightarrow{AB}| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Vetor unitário – É o vetor de módulo igual a uma unidade. $\vec{u}$ vetor unitário se, e somente se, $|\vec{u}| = 1$

Versor de um vetor $\vec{V}$ ou de um eixo (e) é um vetor unitário com a mesma direção e o mesmo sentido do vetor ou do eixo.

$\dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|} =$ versor do vetor $\vec{V}$

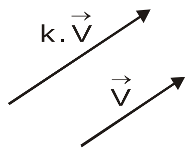
Vetor oposto de um vetor dado $\overrightarrow{AB}$ é o vetor $\overrightarrow{BA}$ que tem o mesmo módulo, a mesma direção e o sentido contrário de $\overrightarrow{AB}$.

5. OPERAÇÕES COM VETORES

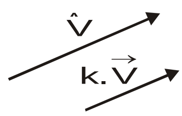
5.1 PRODUTO DE UM NÚMERO REAL (ESCALAR) POR UM VETOR

Sejam K um número real e $\vec{v}$, então o produto K. $\vec{v}$ é um vetor que pode ter as seguintes características:

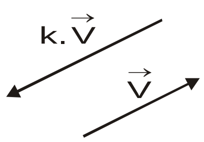
i) possui mesmo sentido e mesma direção que $\vec{V}$ e módulo maior que $\vec{V}$ (isso só ocorre se K > 1)



ii) Possui mesmo sentido e mesma direção de $\vec{v}$, porém de módulo menor que $\vec{v}$ (isso só ocorre se 0 < K < 1).



iii) possui mesma direção e sentido diferente de $\hat{v}$ e módulo maior que $\hat{v}$ (isso só ocorre se K < -1).

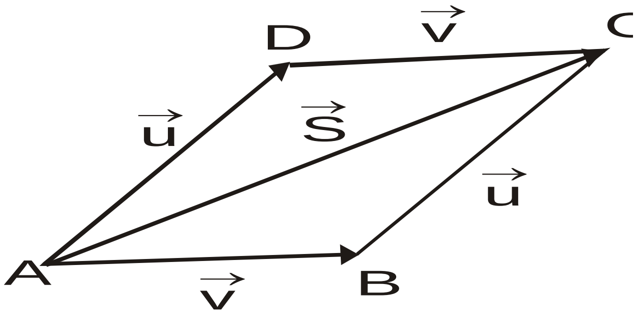


iv) possui mesma direção e sentido diferente de $\vec{v}$ e módulo menor que $\vec{v}$ (isso ocorre se –1 < K < 0).

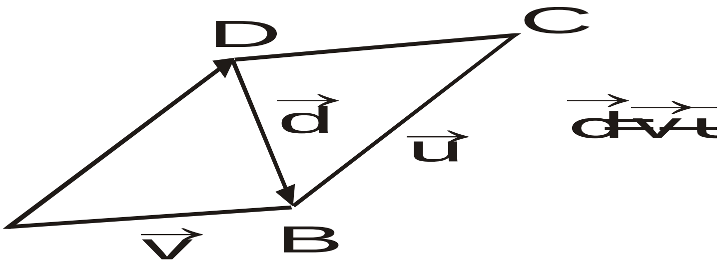
5.2 SOMA VETORIAL

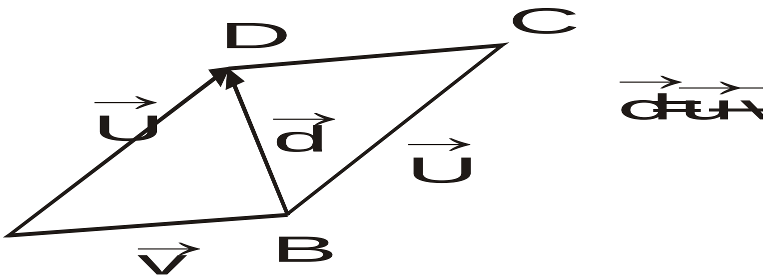
Sejam $\vec{v}\,(x_1,y_1)$ e $\vec{u}\,(x_2,\ y_2)$, definimos o vetor $\vec{S}=\vec{u}+\vec{v}$, como $\vec{S}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$. Note que $\vec{S}=\vec{u}+\vec{v}=\ \vec{v}+\vec{u}$, ou seja, a soma vetorial é comutativa.

- Interpretação Geométrica: Unindo os vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e a partir de suas extremidades traçamos segmentos paralelos aos vetores, temos um paralelogramo. A diagonal maior desse paralelogramo é o vetor soma. $\vec{S}=\vec{u}+\vec{v}$



Se considerarmos a diagonal menor BD, teremos o vetor diferença $\vec{d}$, que pode ser $\vec{u}-\vec{v}$ ou $\vec{v}$-$\vec{u}$, observe:

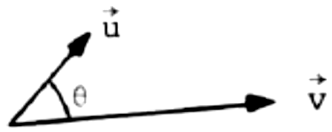




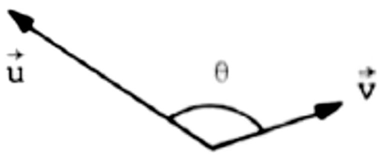
6. ÂNGULO ENTRE VETORES

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sua representação gráfica através de dois segmentos orientados de mesma origem. O ângulo θ entre estes segmentos é definido como o ângulo entre os vetores dados. As figuras sugerem as quatro situações relevantes.

$\theta = 0^\circ$



θ é agudo



θ é obtuso

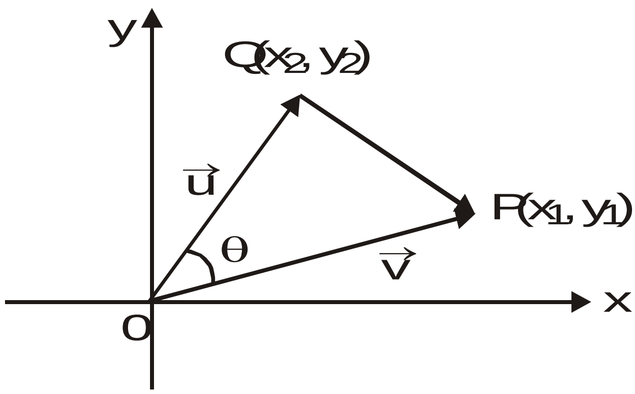
$\theta = 180^\circ$

7. DEFINIÇÃO

Sejam u e v vetores e θ, o ângulo entre os mesmos. O produto escalar ou produto interno de u por v é o número real definido pela expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$.

Esta operação entre dois vetores $\vec{u}\,(x_1 y_1)$ e $\vec{v}\,(x_2 y_2)$ dá como resultado um número real (escalar) e também é definida como: $\vec{u} \,.\, \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Observe a seguinte situação:



Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - 2.\left|\overrightarrow{OQ}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|.\cos\theta$$

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = y_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2\left|\overrightarrow{OQ}\right|.\left|\overrightarrow{OP}\right|.\cos\theta$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) = x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|.\cos\theta$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$$

É fácil perceber que para dois vetores serem perpendiculares é necessário e suficiente que o seu produto escalar seja nulo. Resumindo:

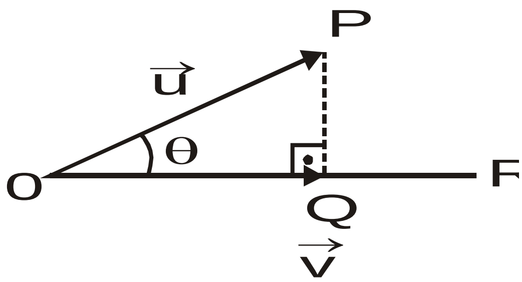
Se $\vec{u}.\vec{v} > 0$, então θ é agudo

Se $\vec{u}.\vec{v} = 0$, então $\theta = 90^o$

Se $\vec{u}.\vec{v} < 0$, então θ é obtuso, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

8. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO ESCALAR

Considere a situação abaixo:



$\overrightarrow{OP}$ é o representante do vetor $\vec{u}$ e $\overrightarrow{OR}$ é o representante do vetor $\vec{v}$. O ponto Q é a projeção ortogonal do ponto P.

Do triângulo OPQ: $\cos\theta = \left|\frac{OQ}{OP}\right| \rightarrow |OQ| = |OP|.\cos\theta$

$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = |\vec{u}|.\cos\theta$, porém, $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$. Logo: $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Da relação $u.v = |u|.|v|.\cos\theta$, segue-se que podemos definir o produto interno de dois vetores como "o produto do módulo de um deles pela projeção algébrica do outro sobre ele". Assim, temos:

Projeção = $|v|.\cos\theta = \frac{u.v}{|u|}$

VETORES NO ESPAÇO

1 Representação de um vetor do $\mathbb{R}^3$:

Sejam $\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, o conjunto destes vetores, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, forma a base *ortonormal canônica*, sendo $\vec{i}$ o versor do eixo dos x, $\vec{j}$ do eixo dos y e $\vec{k}$ do eixo dos z.

Projeções do vetor $\vec{v}$:

$x.\vec{i}$ = projeção no eixo Ox
$y.\vec{j}$ = projeção no eixo Oy
$z.\vec{k}$ = projeção no eixo Oz

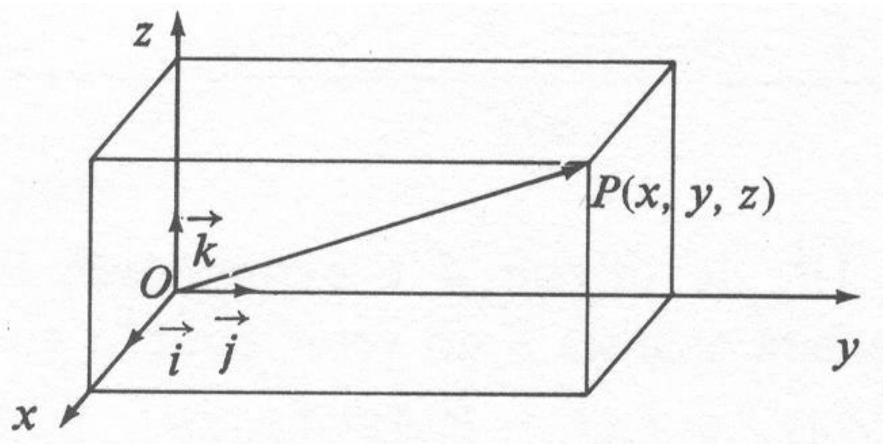
Representação do vetor $\vec{v}$:

$\vec{v} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} = (x, y, z)$

Módulo do Vetor Posição em Relação à Origem O dos Eixos

O módulo de $\overrightarrow{OP}$ podemos obtê-lo através da diagonal do paralelepípedo

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



2- Módulo do Vetor Posição $\overrightarrow{AB}$ em Relação à Origem A

Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

3- Expressão Cartesiana do Versor de um Vetor

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$$

4- CONDIÇÃO DE PARALELISMO DE 2 VETORES

Sejam $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

Dois vetores são paralelos quando suas coordenadas corrrespondentes são proporcionais

5- CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE 3 VETORES

Sejam os vetores

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

Três vetores são coplanares se, e somente se, o determinante obtido de suas coordenadas for nulo

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$ Condição de coplanaridade de 3 vetores

1. Dados os vetores $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{V}_3 = -\vec{i} - \vec{k}$, determine:

a) $|\vec{W}|$, sendo $\vec{W} = 2\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3$

b) O versor do vetor $\vec{V} = 2\vec{V}_2 + \vec{V}_3 - 3\vec{V}_1$

2. Calcular o produto interno dos pares de vetores indicados.

a. $u = (2,3)$ e $v = (3,-2)$

b. $u = (1,2,0)$ e $v = (0,1,2)$

c. $u = 3i - 2j + k$ e $v = -2i + k$

3. Determinar o ângulo entre os vetores $u = (2,1)$ e $v = (3,-1)$.

4. Determinar o ângulo interno A do triangulo cujos vértices são $A(2,3,1)$, $B(3,3,0)$ e $C(2,4,0)$.

5. Determinar os valores de t para que os vetores (t, -2, 1) e (t, t, -3) sejam ortogonais.

6. Determinar a projeção do vetor (1, 2, -1) sobre o vetor (2, 1, 2).

7. (EN 2010) Um paralelepípedo retângulo tem dimensões x, y e z expressas em unidades de comprimento e nesta ordem, formam uma P.G. de razão 2. Sabendo que a área total do paralelepípedo mede 252 unidades de área, qual o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (x-2, y-2, z-4)$ e $\vec{w} = (3,-2,1)$?

a) $\arccos \dfrac{\sqrt{14}}{42}$

b) $\text{arcsen} \dfrac{5\sqrt{14}}{126}$

c) $\text{arctg}\, 2\sqrt{5}$

d) $\text{arctg} - 5\sqrt{5}$

e) $\text{arcsec} \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

8. (EN 2007) Seja $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$ e $D=\left(d_{ij}\right)_{3\times3}=B^2-4B+3I$. Se o número real $N=\sum_{i=1}^{3}d_{ii}$ é o produto escalar dos vetores $\vec{u}=(2,11,1)$ e $\vec{w}=(5,a,4)$, então o valor de $\operatorname{tg}2\theta$, onde θ é o ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$, vale

a) $-\dfrac{\sqrt{6}}{19}$

b) $\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$

c) $-\dfrac{17\sqrt{3}}{20}$

d) $-\dfrac{12\sqrt{6}}{19}$

e) $\dfrac{12\sqrt{7}}{20}$

9. (EN 2004) Sabendo que $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ onde $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{p}$, podemos afirmar que $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|$ é:

a) $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

b) $\sqrt{14}$

c) $\dfrac{\sqrt{27}}{4}$

d) $\sqrt{20}$

e) $\dfrac{\sqrt{53}}{2}$

10. Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{BA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{BC}$, sendo os pontos $A(3, 2, 1)$, $B(5, 0, 2)$ e $C(1, 4, 0)$.

11. Dados os pontos P(2, 4, 5) e Q(1, 2, 3), determine:

a) o vetor ligado $\overrightarrow{PQ}$ (vetor posição de Q em relação a P)

b) o vetor $\vec{W}//\overrightarrow{PQ}$ tal que $|\vec{W}|=6\cdot\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$

12. Determine x para que o vetor $\vec{u}=(x, 2, 2x)$ tenha módulo 7.

13. Seja um triângulo de vértices $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ e $C(-5,2,-6)$, o comprimento da bissetriz do ângulo externo do vértice A é igual a:

a) $2\sqrt{14}$

b) $\frac{3\sqrt{14}}{2}$

c) $\frac{4\sqrt{14}}{3}$

d) $\frac{5\sqrt{14}}{4}$

e) $\frac{6\sqrt{14}}{5}$

14. Um vetor unitário paralelo à resultante dos vetores $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}$ é:

a) $\frac{1}{3}\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$

b) $\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{5}{6}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{k}$

c) $3\vec{i}+5\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$

d) $3\vec{i}+\frac{5}{3}\vec{j}+3\sqrt{2}\vec{k}$

e) $2\vec{i}+\frac{6}{3}\vec{j}+3\sqrt{2}\vec{k}$

15. Se o p-ésimo, q-ésimo e r-ésimo termos de uma progressão geométrica são os números positivos a, b, c, respectivamente, então o ângulo entre os vetores $\left(\log a^2\right)\vec{i}+\left(\log b^2\right)\vec{j}+\left(\log c^2\right)\vec{k}$ e $(q-r)\vec{i}+(r-p)\vec{j}+(p-q)\vec{k}$ é

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{2}$

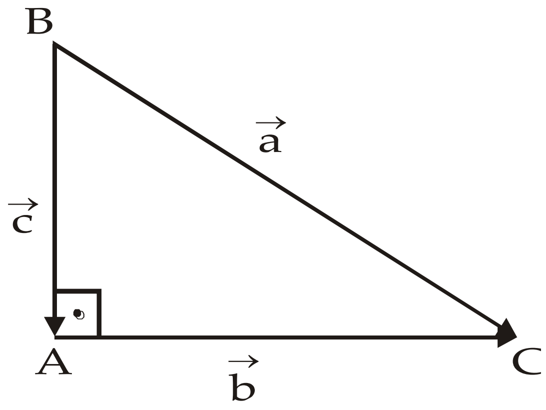
c) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\arccos\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

16. Demonstre que $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|, \forall \vec{a}, \vec{b}$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

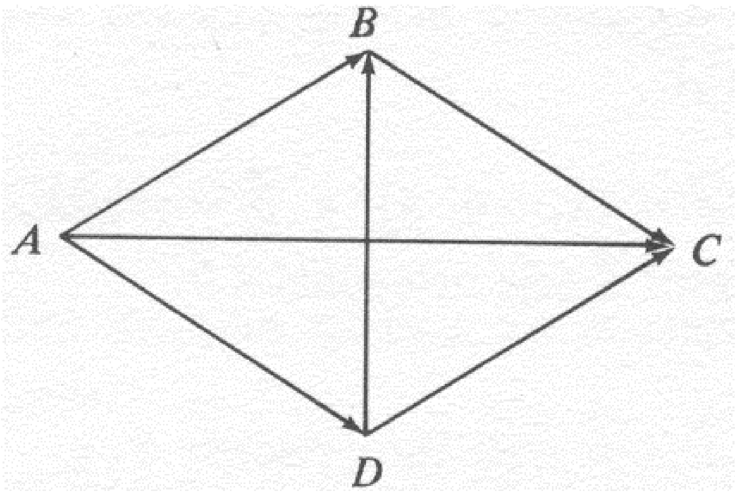
17. Demonstre vetorialmente o teorema de Pitágoras.



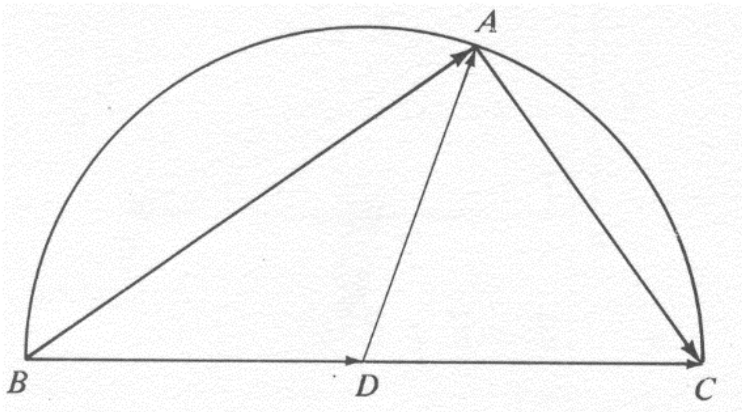
18. Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

H: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ e $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$

T: $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}=0$



19. Demonstre vetorialmente que todo ângulo inscrito num semi-círculo é reto.



H: $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DA}| = R$ (raios); $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$

T: $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC} = 0$

20. O vértice A de um triângulo acutângulo ABC é equidistante do circuncentro O e do ortocentro H do triângulo. O valor do ângulo $\hat{A}$ é:

a) 15º
b) 30º
c) 45º
d) 60º
e) 75º

1.

RESPOSTA:

a)

$\vec{W} = 8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$|\vec{W}| = \sqrt{64+1+9} = \sqrt{74}$

b)

Seja $\vec{u}$ o versor de $\vec{V} \Rightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

$\vec{V} = 8\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}$

$|\vec{V}| = \sqrt{64+144+16} = \sqrt{224} = \sqrt{2^5 \,.\, 7} = 4\sqrt{14}$

então $\vec{u} = \dfrac{-8\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}}{4\sqrt{14}} = -\dfrac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$

2.

RESPOSTA:

a. $u.v = 2.3 + 3.(-2) = 6 - 6 = 0$

b. $u.v = 1.0 + 2.1 + 0.2 = 2$

c. $u = (3,-2,1)$ e $v = (-2,0,1)$

Daí, $u.v = 3.(-2) + (-2).0 + 1.1 = -5$

Observemos, então, que, no item a, os vetores são ortogonais; no item b, formam um ângulo agudo e no item c, um ângulo obtuso.

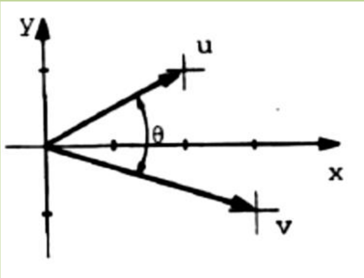
3.

RESPOSTA:

Observemos que $u.v = |u|.|v|.\cos\theta$; em consequência, como u.v pode ser calculado através das componentes de u e v, poderemos calcular cos θ.

$$u.v = 2.3 + 1.(-1) = 5$$
$$|u| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$|v| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Daí, $\cos\theta = \dfrac{u.v}{|u|.|v|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}.\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

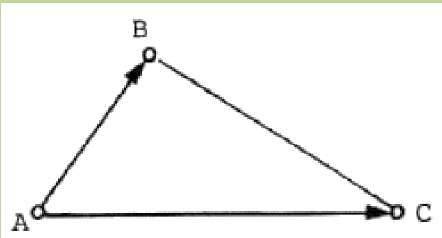


Em consequência θ = 45°.

4.

RESPOSTA:

Devemos determinar o ângulo entre os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.



$$\vec{AB} = (3-2, 3-3, 0-1)$$
$$= (1,0,-1)$$
$$\vec{AC} = (2-2, 4-3, 0-1)$$
$$= (0,1,-1)$$

Daí, obtemos:

$$\vec{AB}.\vec{AC} = (1,0,-1).(0,1,-1)$$
$$= 1.0 + 0.1 + (-1).(-1) = 1$$

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

$\cos A = \dfrac{\vec{AB}.\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

Logo, A = 60°

5.

RESPOSTA:

Da igualdade $u.v = |u|.|v|.\cos\theta$, segue-se que dois vetores não nulos são ortogonais exatamente quando seu produto escalar é nulo $(\cos 90° = 0)$.

Daí, temos:

$(t,-2,1).(t,t,-3) = t^2 - 2t - 3 = 0$

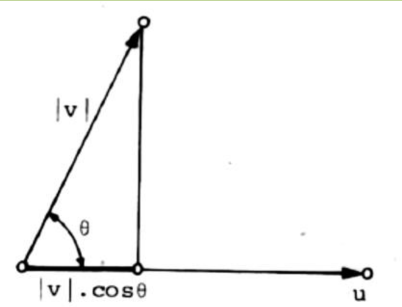
Resolvendo a equação encontrada, obtermos:

$t = -1$ e $t = 3$

6.

RESPOSTA:

Observemos que a projeção de um valor v sobre um vetor u é igual a $|v|.\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os mesmos; se $0 \le \theta < 90°$, então, o valor algébrico da projeção é positivo; caso $90° < \theta \le 180°$, o valor algébrico da projeção é negativo.



Da relação $u.v = |u|.|v|.\cos\theta$, segue-se que podemos definir o produto interno de dois vetores como "o produto do módulo de um deles pela projeção algébrica do outro sobre ele". Assim, temos:

Projeção = $|v|.\cos\theta = \dfrac{u.v}{|u|}$

Fazendo $v = (1,2,-1)$ e $u = (2,1,2)$, vem:

$u.v = 1.2 + 2.1 + (-1).2 = 2$

$|u| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

Logo, a projeção de (1, 2, -1) sobre (2, 1, 2) vale 2/3.

7.

RESPOSTA: A

$PG: x, y, z$ de razão 2 $\Rightarrow y = 2x \wedge z = 4x$

$$S_{TOTAL} = 2(xy + xz + yz) = 2\left(2x^2 + 4x^2 + 8x^2\right) = 28x^2 = 252 \Leftrightarrow x = 3$$

Logo, $\vec{u} = (x-2, y-2, z-4) = (1,4,8)$ e $\vec{w} = (3,-2,1)$.

Sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, temos:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{(1,4,8)\cdot(3,-2,1)}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{9+4+1}} = \frac{3-\cancel{8}+\cancel{8}}{9\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{42} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$$

8.

RESPOSTA: D

$$D = B^2 - 4B + 3I = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 17 & \\ & & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 16 & \\ & & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 36 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$$

$$N = \sum_{i=1}^{3} d_{ii} = 6 + 36 - 6 = 36$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (2,11,1)\cdot(5,a,4) = 10 + 11a + 4 = 36 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{36}{\sqrt{2^2+11^2+1^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

$$\Rightarrow tg^2\,\theta = \sec^2\theta - 1 = \frac{70}{16} - 1 = \frac{54}{16} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{3\sqrt{6}}{4} \Rightarrow tg\,2\theta = \frac{2\,tg\,\theta}{1 - tg^2\,\theta} = \frac{2\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}}{1-\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2} = -\frac{12\sqrt{6}}{19}$$

9.

RESPOSTA: B

$$\vec{v} \parallel \vec{p} = 3\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (3k, -k, 0)$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (2-3k, 1+k, -3)$$

$$\vec{w} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{p} = 0 \Rightarrow (2-3k, 1+k, -3)\cdot(3,-1,0) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \wedge \vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3\right) \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = (1,-2,3) \Rightarrow |\vec{v} - \vec{w}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

10.

RESPOSTA:

$$\text{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}.\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \qquad (1)$$

Determinemos as coordenadas dos 2 vetores:

$$\overrightarrow{BA} = (a-b) = (3-5,\ 2-0,\ 1-2) = (-2,\ 2,\ -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (C-B) = (1-5,\ 4-0,\ 0-2) = (-4,\ 4,\ -2)$$

Então, $\text{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \dfrac{(-2)(-4)+2\,.\,4+(-1)(-2)}{\sqrt{16+16+4}} = \dfrac{18}{6} = 3$

11.

RESPOSTA:

a)

Determinemos a expressão cartesiana do vetor $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1-2)\vec{i} + (2-4)\vec{j} + (3-5)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}$$

b)

Determinemos $\vec{u}$, versor de $\overrightarrow{PQ}$, ele tem módulo 1 e é // a $\overrightarrow{PQ}$ então $\vec{W} = 6\vec{u}$.

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{-\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{W} = 6\vec{u} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}}$$

12.

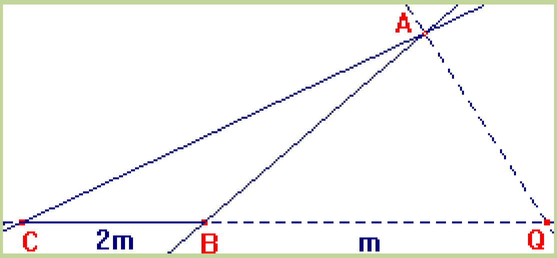
RESPOSTA:

$$|\vec{u}|\sqrt{x^2+4+4x^2} = 7 \Rightarrow x^2+4+4x^2 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

13.

RESPOSTA:



$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(1-(-1))^2+(-2-(-3))^2}=\sqrt{6}$$

$$AC=\sqrt{(-5-1)^2+(2-(-1))^2+(-6-(-3))^2}=3\sqrt{6}$$

$$\vec{B}=\frac{2\cdot\vec{Q}+\vec{C}}{3}\Leftrightarrow 2\cdot\vec{Q}=3\cdot\vec{B}-\vec{C}\Leftrightarrow\vec{Q}=\frac{3\cdot\vec{B}-\vec{C}}{2}$$

$$\vec{Q}=\frac{3\cdot(2,1,-2)-(-5,2,6)}{2}=\left(\frac{11}{2},\frac{1}{2},-6\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{Q}=\left(\frac{11}{2},\frac{1}{2},-6\right)\\ \vec{A}=(1,-1,-3)\end{array}\right|\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2},-3\right)\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-3)^2}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$$

14.

RESPOSTA: C

15.

RESPOSTA: C

16.

RESPOSTA:

Sabemos que $-1\le\cos\theta\le 1$, logo $|\cos\theta|\le 1$, então podemos escrever $|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (1) e como $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ a expressão (1) pode ser escrita $|\vec{a}\times\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$.

Notemos que a igualdade ocorre para $|\cos\theta|=1$ ou $\cos\theta=\pm1$, isto é, para $\theta=0$ ou $\theta=\pi$, então $|\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|$ se, e somente se, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares.

17.

RESPOSTA:

Tomemos $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ e multipliquemos escalarmente por ela mesma $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{a}=(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{b}+\vec{c})\Rightarrow|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\times\vec{c}+|\vec{c}|^2$ e como $\vec{b}\perp\vec{c}\Rightarrow\vec{b}\times\vec{c}=0$ então $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$.

18.

RESPOSTA:

Da figura tiramos:

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (1)

e

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ (2)

Multiplicando escalarmente (1) e (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\times(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2$

mas, por hipótese $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|\Rightarrow\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}=0$

19.

RESPOSTA:

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$ (1)

e

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$ ou $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DA}$ (2)

Multipliquemos escalarmente (1) por (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BD}|^2-|\overrightarrow{DA}|^2$ ou $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{AC}=R^2-R^2\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{AC}=0$

20.

RESPOSTA: D

Seja um sistema de eixos com origem no circuncentro. O e H são equidistantes de A se, e somente se, $|\vec{A}-\vec{O}|=|\vec{A}|=|\vec{A}-\vec{H}|$. Elevando essas equações ao quadrado e observando que $|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{C}|=R$, onde R é o raio do círculo circunscrito, e que $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, temos:

$R^2=|\vec{A}-\vec{O}|^2=|\vec{A}-\vec{H}|^2=|\vec{B}+\vec{C}|^2=(\vec{B}+\vec{C})\cdot(\vec{B}+\vec{C})$

Note-se que: $a^2=|\vec{B}-\vec{C}|^2=(\vec{B}-\vec{C})\cdot(\vec{B}-\vec{C})=|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2-2\vec{B}\cdot\vec{C}$

$R^2=|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2+2\vec{B}\cdot\vec{C}=|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2+|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2-a^2$

$R^2=4R^2-a^2 \Rightarrow \dfrac{a}{R}=\sqrt{3}$

Pela Lei dos Senos: $\dfrac{a}{R}=2\text{sen}A=\sqrt{3}$