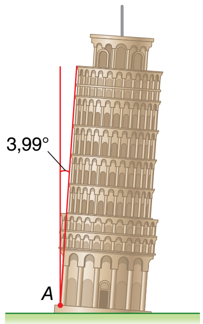
Capítulo 12

A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente

Para pensar



Exercícios propostos

1. Como 1° equivale a 60', para encontrar a equivalência a 3', podemos resolver a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 1° & \text{———} & 60' \\ x & \text{———} & 3' \end{array}$$

$$x = \frac{1 \cdot 3}{60} = 0{,}05$$

Logo, 124°3'0" equivale a 124,05°.
Alternativa **b**.

2. A razão entre o comprimento do arco e a medida do raio, nessa ordem, é a medida x do arco em radiano, ou seja:

$$x = \frac{10}{2{,}5} \cdot \text{rad} \Rightarrow x = 4 \text{ rad}$$

3. a)
$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 30 \end{array} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, 30° equivalem a $\frac{\pi}{6}$ rad.

b)
$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 120 \end{array} \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

Portanto, 120° equivalem a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

c)
$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 225 \end{array} \Rightarrow x = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

Portanto, 225° equivalem a $\frac{5\pi}{4}$ rad.

d)
$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 300 \end{array} \Rightarrow x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$$

Portanto, 300° equivalem a $\frac{5\pi}{3}$ rad.

e)
$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 240 \end{array} \Rightarrow x = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, 240° equivalem a $\frac{4\pi}{3}$ rad.

f)
$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 330 \end{array} \Rightarrow x = \frac{330\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$$

Portanto, 330° equivalem a $\frac{11\pi}{6}$ rad.

4. a)
$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{\pi}{4} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} \therefore x = 45°$$

b)
$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{3\pi}{2} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180°}{\pi} \therefore x = 270°$$

c)
$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{7\pi}{6} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{7\pi}{6} \cdot 180°}{\pi} \therefore x = 210°$$

d)
$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{2\pi}{5} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot 180°}{\pi} \therefore x = 72°$$

e)
$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{5\pi}{3} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{3} \cdot 180°}{\pi} \therefore x = 300°$$

5. Como π rad equivale a 180° e 1 min equivale a 60 s, temos:

$$1.800\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}} = 1.800 \cdot 180° \cdot \frac{1}{60 \text{ s}} = 5.400°/\text{s}$$

6. a) Indicando por x, y e z, respectivamente, o comprimento, a medida em grau e a medida em radiano do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Tempo (h)} & & \textbf{Comprimento do arco (km)} \\ 24 & \text{———} & 2 \cdot \pi \cdot 6.370 \\ 9 & \text{———} & x \end{array}$$

$\therefore x = \frac{9.555\pi}{2}$ km ou, aproximadamente, 15.000 km

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Tempo (h)} & & \textbf{Medida do arco (grau)} \\ 24 & \text{———} & 360 \\ 9 & \text{———} & y \end{array}$$

$\therefore y = 135°$

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Tempo (h)} & & \textbf{Medida do arco (radiano)} \\ 24 & \text{———} & 2\pi \\ 9 & \text{———} & z \end{array}$$

$\therefore z = \frac{3\pi}{4}$ rad

b) Em qualquer paralelo terrestre, um ponto descreve um arco de $\frac{3\pi}{4}$ rad em 9 horas.

7. a) $x_1 = 50°$

$x_2 = 50° + 360° = 410°$

$x_3 = 50° + 2 \cdot 360° = 770°$

Logo, as medidas procuradas são 50°, 410° e 770°.

b) $x_1 = 50° - 360° = -310°$

$x_2 = 50° - 2 \cdot 360° = -670°$

Logo, as medidas procuradas são $-310°$ e $-670°$.

8. a) $x_1 = \frac{6\pi}{7}$

$x_2 = \frac{6\pi}{7} + 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{20\pi}{7}$

$x_3 = \frac{6\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x_3 = \frac{34\pi}{7}$

Logo, as medidas procuradas são $\frac{6\pi}{7}$ rad, $\frac{20\pi}{7}$ rad e $\frac{34\pi}{7}$ rad.

b) $x_2 = \frac{6\pi}{7} - 2\pi \Rightarrow x_2 = -\frac{8\pi}{7}$

$x_3 = \frac{6\pi}{7} - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x_3 = -\frac{22\pi}{7}$

Logo, as medidas procuradas são $-\frac{8\pi}{7}$ rad e $-\frac{22\pi}{7}$ rad.

9. a) $2.923° \,\underline{|\,360°}$

$43° \quad 8$

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 43°.

b) $1.972° \,\underline{|\,360°}$

$172° \quad 5$

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 172°.

c) $-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 320°.

d) $-400° + 360° = -40$ (1ª volta negativa)

$-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 320°.

e) $\frac{45\pi}{11}$ rad $= \left(\frac{44\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)$ rad $= \left(4\pi + \frac{\pi}{11}\right)$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{\pi}{11}$ rad.

f) $\frac{38\pi}{5}$ rad $= \left(\frac{35\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $= \left(7\pi + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $=$

$= \left(6\pi + \pi + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $= \left(6\pi + \frac{8\pi}{5}\right)$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{8\pi}{5}$ rad.

g) $-\frac{\pi}{13}$ rad $= \left(-\frac{\pi}{13} + 2\pi\right)$ rad $= \left(\frac{-\pi + 26\pi}{13}\right)$ rad $=$

$= \frac{25\pi}{13}$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{25\pi}{13}$ rad.

h) $-\frac{18\pi}{5}$ rad $\equiv \left(-\frac{8\pi}{5} + 2\pi\right)$ rad $= \left(\frac{-8\pi + 10\pi}{5}\right)$ rad $=$

$= \frac{2\pi}{5}$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{2\pi}{5}$ rad.

10. a) $2.040° \,\underline{|\,360°}$

$240° \quad 5$

Logo: $x = 240°$

b) $x = 240° + 360° \Rightarrow x = 600°$

c) $x = 240° + 2 \cdot 360° \Rightarrow x = 960°$

d) $x = 240° - 360° \Rightarrow x = -120°$

11. $\frac{121\pi}{6} = \frac{120\pi + \pi}{6} = \frac{120\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 20\pi + \frac{\pi}{6}$

a) $x = \frac{\pi}{6}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{25\pi}{6}$

d) $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi \Rightarrow x = -\frac{11\pi}{6}$

12. a) Como o ponteiro dos minutos faz uma volta a cada hora, cada dia tem 24 horas, e passaram 4 dias até a zero hora do dia 5, concluímos que a medida do arco descrito pelo ponteiro dos minutos é:

$360° \cdot 24 \cdot 4 = 34.560°$

b) Como o ponteiro das horas faz duas voltas por dia e passaram 4 dias até a zero hora do dia 5, temos:

$2 \cdot 360° \cdot 4 = 2.880°$

c) Como o número 3 do relógio equivale a 90° e o ponteiro realiza uma volta por hora, em um dia temos:

$a_n = 90° + 360°(n - 1)$, com $1 \leqslant n \leqslant 24$

Como um dia tem 24 horas, substituindo n por 24, obtemos:

$a_{24} = 90° + 360°(24 - 1) = 8.370°$

Portanto, o termo geral é $a_n = 90° + 360°(n - 1)$ e o último termo é 8.370°.

d) Como os números 3 e 9 do relógio equivalem a 90° e 270° e o ponteiro realiza uma volta por hora, em um dia temos:

$a_n = 90° + 180°(n - 1)$, com $1 \leqslant n \leqslant 48$, pois o ponteiro para 2 vezes a cada hora.

Como um dia tem 24 horas, substituindo n por 48, obtemos:

$a_{48} = 90° + 180°(48 - 1) = 8.550°$

Portanto, o termo geral é $a_n = 90° + 180°(n - 1)$ e o último termo é 8.550°.

13. a) Os infinitos números reais associados ao ponto A' são:

$\ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Os infinitos números reais associados ao ponto B são:

$\dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) Os infinitos números reais associados aos pontos B ou B' são:

$\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) Os infinitos números reais associados aos pontos A, B, A' e B' são:

$\dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\frac{\pi}{2}$, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \pi + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14. **a)** Os vértices do hexágono regular $ABCDEF$ dividem a circunferência trigonométrica em arcos de medida: $\frac{2\pi}{6}$ rad $= \frac{\pi}{3}$ rad

Como o vértice A coincide com a origem da circunferência trigonométrica, os infinitos números reais associados aos vértices do hexágono são: $\dots, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \dots$

Podemos representar esses números por: $k \cdot \frac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Os vértices do triângulo equilátero MNP dividem a circunferência trigonométrica em arcos de medida: $\frac{2\pi}{3}$ rad

Como o vértice N está associado ao número π, os infinitos números reais associados aos vértices do triângulo são: $\dots, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \dots$

Podemos representar esses números por:

$\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

15. A sequência de horários, em hora, programados para o salvamento, depois das 13 h, é:

13,25; 13,5; 13,75; 14; ...; 17; 17,5

Essa sequência pode ser representada por:

$\left(13 + \frac{k}{4}\right)$ horas, com $k \in \mathbb{Z}$ e $1 \leqslant k \leqslant 18$.

Alternativa **a**.

16. **a)** N: $180° - 21° = 159°$

P: $180° + 21° = 201°$

Q: $360° - 21° = 339°$

b) N: π rad $- \frac{\pi}{5}$ rad $= \frac{4\pi}{5}$ rad

P: π rad $+ \frac{\pi}{5}$ rad $= \frac{6\pi}{5}$ rad

Q: 2π rad $- \frac{\pi}{5}$ rad $= \frac{9\pi}{5}$ rad

17. **a)** M: $180° - 120° = 60°$

N: $120°$

P: $180° + 60° = 240°$

Q: $360° - 60° = 300°$

b) M: $210° - 180° = 30°$

N: $180° - 30° = 150°$

P: $210°$

Q: $360° - 30° = 330°$

c) M: $360° - 310° = 50°$

N: $180° - 50° = 130°$

P: $180° + 50° = 230°$

Q: $310°$

d) M: $\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

N: $\frac{4\pi}{5}$

P: $\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

Q: $2\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$

e) M: $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

N: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

P: $\frac{4\pi}{3}$

Q: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

f) M: $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

N: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

P: $\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}$

Q: $\frac{11\pi}{6}$

18. **a)** $\cos 0 = 1$; $\text{sen}\ 0 = 0$

b) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$

c) $\cos \pi = -1$; $\text{sen}\ \pi = 0$

d) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$; $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$

e) $\cos 2\pi = 1$; $\text{sen}\ 2\pi = 0$

f) $\cos 720° = \cos 0° = 1$

g) $\text{sen}\ 450° = \text{sen}\ (90° + 360°) = \text{sen}\ 90° = 1$

h) $\text{sen}\ (-270°) = \text{sen}\ 90° = 1$

i) $\cos (-180°) = \cos 180° = -1$

j) $\cos 12\pi = \cos 0 = 1$

k) $\cos 11\pi = \cos (5 \cdot 2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$

l) $\text{sen}\ \frac{21\pi}{2} = \text{sen}\left(\frac{20\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$

m) $\text{sen}\ \frac{23\pi}{2} = \text{sen}\left(\frac{20\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$

n) $\text{sen}\ (-\pi) = \text{sen}\ \pi = 0$

19. $E = \dfrac{\text{sen } 90° - \cos 180° + \cos 270°}{\text{sen } 270° - \cos 90°}$

$E = \dfrac{1 - (-1) + 0}{-1 - 0} = \dfrac{2}{-1} = -2$

20. $E = \dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} \Rightarrow E = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

21. Os arcos de medidas de 100° e 101° têm extremidades no 2º quadrante. Nesse quadrante, quanto maior a medida do arco, menor o valor do seno. Portanto: sen 101° < sen 100°
Alternativa **e**.

22. **a)** $4 + 5 \cos x = 2$
$5 \cos x = -2$
$\cos x = -\dfrac{2}{5}$
Como $-1 < -\dfrac{2}{5} < 1$, então 2 pertence ao conjunto imagem de f.

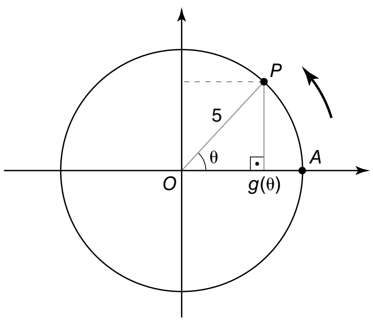
b) $4 + 5 \cos x = 10$
$5 \cos x = 6$
$\cos x = \dfrac{6}{5}$
Como $\dfrac{6}{5} > 1$, concluímos que $\dfrac{6}{5}$ não pertence ao conjunto imagem de f.

c) A imagem da função $y = \cos x$ é $[-1; 1]$; logo, a imagem de $y = 5 \cos x$ é $[-5; 5]$.
Portanto, a imagem da função $y = 4 + 5 \cos x$ é $[-5 + 4; 5 + 4] = [-1; 9]$.

23. Como $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{4} < \beta < \pi$, então α está no primeiro quadrante e β no segundo quadrante.

a) Verdadeira, como α está no primeiro quadrante, sen $\alpha > 0$.
b) Falsa, como β está no segundo quadrante, logo sen $\beta > 0$.
c) Verdadeira, como β está no segundo quadrante, $\cos \beta < 0$.
d) Verdadeira, como $\dfrac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, então 2α está no segundo quadrante, logo $\cos 2\alpha < 0$.
e) Verdadeira, como $\dfrac{3\pi}{2} < 2\beta < 2\pi$, então 2β está no quarto quadrante, logo $\cos 2\beta > 0$.
f) Falsa, como $\pi < 4\alpha < 2\pi$, então 4α está no terceiro ou quarto quadrante, logo sen $4\alpha < 0$.

24. **(I)** Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, com $A(5, 0)$, esquematizamos:



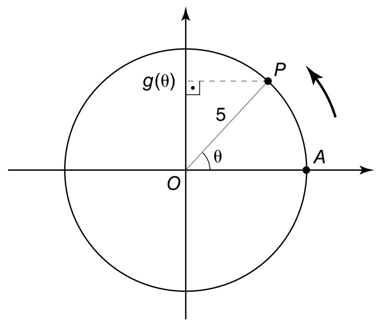
A função g que expressa a abscissa de P para cada medida θ é:
$g(\theta) = 5 \cos \theta$ (I)
A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

Deslocamento angular da partícula em radiano		Tempo em segundo
2π	———	3
θ	———	t

$\therefore \theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad (II)

Substituindo (II) em (I), temos:
$g\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) = 5 \cos \dfrac{2\pi t}{3}$
Indicando essa função por $f(t)$, concluímos:
$f(t) = 5 \cos \dfrac{2\pi t}{3}$
Alternativa **b**.

(II) Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, com $A(5, 0)$, esquematizamos:



A função g que expressa a ordenada de P para cada medida θ é:
$g(\theta) = 5 \text{sen } \theta$ (I)
A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

Deslocamento angular da partícula em radiano		Tempo em segundo
2π	———	3
θ	———	t

$\therefore \theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad (II)

Substituindo (II) em (I), temos:
$g\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$
Indicando essa função por $f(t)$, concluímos:
$f(t) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$
Alternativa **d**.

25. **a)** $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 60°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen } 210° = \text{sen } (180° + 30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos 210° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } 300° = \text{sen } (360° - 60°) = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos 300° = \cos (360° - 60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

26. a)
- *M* e *N* são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:
$N\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
- *M* e *P* são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:
$P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$
- *M* e *Q* são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:
$Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

b)
- *M* e *P* são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:
$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- *N* e *P* são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:
$N\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- *Q* e *P* são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:
$Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c)
- *M* e *Q* são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:
$M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- *N* e *Q* são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:
$N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- *P* e *Q* são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:
$P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

27. a) $\text{sen } \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen } \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{sen } \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\text{sen } \dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos \dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\text{sen } \dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

28. a) $\text{sen } (-30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

b) $\cos (-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } (-300°) = -\text{sen } 300° = -(-\text{sen } 60°) = \text{sen } 60° =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos (-300°) = \cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

e) $\text{sen } (-1.485°) = -\text{sen } 1.485° = -\text{sen } 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos (-1.230°) = \cos 1.230° = \cos 150° = -\cos 30° =$
$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{sen } \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\text{sen } \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\cos \left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos \left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\cos \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

i) $\text{sen}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\text{sen} \dfrac{11\pi}{6} = -\left(-\text{sen } \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{sen} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

j) $\cos \left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos \dfrac{5\pi}{3} = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

k) $\cos \left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos \left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{sen } \dfrac{25\pi}{6} = \text{sen } \left(\dfrac{24\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) =$
$= \text{sen } \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

m) $\text{sen } \dfrac{33\pi}{4} = \text{sen } \left(\dfrac{32\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \left(8\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) =$
$= \text{sen } \left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

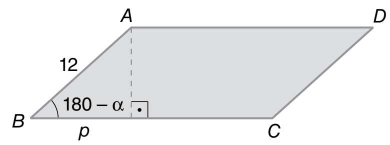
29. $E = \dfrac{\cos (180° + x) + \text{sen } (180° + x) + \text{sen } (180° - x)}{\cos (360° - x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{-\cos x - \cancel{\text{sen } x} + \cancel{\text{sen } x}}{\cos x}$

$\therefore E = -\dfrac{\cos x}{\cos x} = -1$

30. Como *ABCD* é paralelogramo, os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{A}B$ são suplementares; assim:

$\cos(180 - \alpha) = -\cos(\alpha) = -\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$



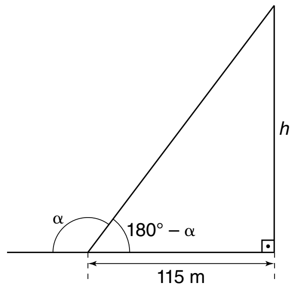
Portanto, para determinar a medida *p* da projeção ortogonal, podemos fazer:

$\cos(180 - \alpha) = \dfrac{p}{12} \Rightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{p}{12}$

$\therefore p = 9$

Portanto, a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o segmento $\overline{BC}$ tem 9 cm.

31. Sendo h a altura da pirâmide, temos:



$$\begin{cases} \text{tg}\ (180° - \alpha) = \dfrac{h}{115} \\ \cos \alpha = -0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\ (180° - \alpha)}{\cos\ (180° - \alpha)} = \dfrac{h}{115} \\ \cos \alpha = -0{,}6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{-\cos \alpha} = \dfrac{h}{115} \\ \cos \alpha = -0{,}6 \end{cases}$$

Como $\cos \alpha = -0{,}6$ e $90° < \alpha < 180°$, temos $\text{sen}\ \alpha = 0{,}8$; logo:

$$\frac{0{,}8}{-(-0{,}6)} = \frac{h}{115} \Rightarrow h \approx 153 \text{ m}$$

32. a) $f(1{,}5) = 300 \cos \left(\dfrac{4 \cdot \pi \cdot 1{,}5}{3}\right) = 300 \cos 2\pi = 300$

Portanto, a abscissa quando $t = 1{,}5$ é 300 km.

b) A função do eixo das ordenadas é dada por

$g(t) = 300\ \text{sen} \left(\dfrac{4\pi t}{3}\right)$; assim, para $t = 2{,}5$ temos:

$$g(2{,}5) = 300\ \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 2{,}5}{3}\right) = 300\ \text{sen} \left(10 \cdot \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 300\ \text{sen} \left(4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -150\sqrt{3}$$

Portanto, a ordenada quando $t = 2{,}5$ é $-150\sqrt{3}$ km.

c) $r^2 = \left[300\ \text{sen} \left(\dfrac{4\pi t}{3}\right)\right]^2 + \left[300 \cos \left(\dfrac{4\pi t}{3}\right)\right]^2$

$r^2 = 300^2 \left[\text{sen}^2 \left(\dfrac{4\pi t}{3}\right) + \cos^2 \left(\dfrac{4\pi t}{3}\right)\right]$

$r^2 = 300^2$

$r = 300$

Portanto, o raio da órbita mede 300 km.

d) Para completar uma volta, devemos ter:

$$\frac{4\pi t}{3} = 2\pi \Rightarrow t = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Portanto, o satélite dá uma volta ao redor da Terra a cada 1,5 hora.

33. $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{9}{25}$

$\therefore \cos \alpha = \pm \dfrac{3}{5}$

Como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, concluímos que $\cos \alpha = -\dfrac{3}{5}$.

34. $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

$\therefore \text{sen}\ x = \pm \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, então $\text{sen}\ x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

35. $\begin{cases} \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 & \text{(I)} \\ \text{sen}\ \beta = 2 \cos \beta & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$(2 \cos \beta)^2 + \cos^2 \beta = 1$ e, portanto:

$4 \cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \beta = 1$

$\therefore \cos^2 \beta = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos \beta = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$, concluímos que $\cos \beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Substituindo $\cos \beta$ por $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ em (II), obtemos:

$\text{sen}\ \beta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

36. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{m}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{m+1}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \dfrac{m^2}{16} + \dfrac{m+1}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{m^2 + 4m + 4}{16} = \dfrac{16}{16}$

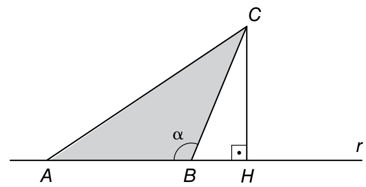
$\therefore m^2 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 2$ ou $m = -6$ (não convém)

Concluímos, então, que $m = 2$.

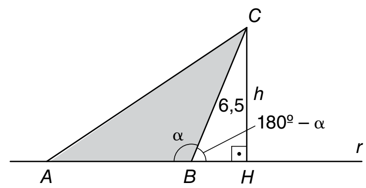
37. a) **Professor!** Variar a linguagem contribui para o enriquecimento do vocabulário do aluno. Sugerimos as seguintes variações para a definição de altura:

Sendo r a reta suporte do lado $\overline{AB}$, a altura relativa a esse lado é o segmento $\overline{CH}$, perpendicular à reta r, com $H \in r$.

A altura relativa ao lado $\overline{AB}$ é o segmento $\overline{CH}$, em que H é a projeção ortogonal de C sobre a reta suporte do lado $\overline{AB}$.



b)



No triângulo retângulo BCH, temos:

$\text{sen}\ (180° - \alpha) = \dfrac{h}{6{,}5} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{h}{6{,}5}$ (I)

Para o cálculo do sen α, aplicamos a relação fundamental da Trigonometria a partir do dado $\cos \alpha = -\dfrac{5}{13}$:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}\ \alpha = \pm \dfrac{12}{13}$

Como α é medida de um ângulo obtuso, temos que sen α é positivo:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{12}{13}$ (II)

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$\dfrac{12}{13} = \dfrac{h}{6{,}5} \Rightarrow h = 6$

Logo, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ é 6 cm.

38. Sendo α, β e γ os ângulos internos do triângulo, temos:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta + \gamma = 180° - \alpha$

$\cos(\beta + \gamma) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Da relação fundamental, temos:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\alpha} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como o triângulo é acutângulo, temos $0 < \alpha < 90°$;

logo: $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Portanto, $\cos(\beta + \gamma) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

39. Fazendo a mudança de variável $\cos x = y$, obtemos a equação do 2º grau:

$3y^2 - 4y + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$

$$\therefore\ y = \frac{-(-4) \pm 2}{2 \cdot 3} \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{3}$$

Retornando à variável original, temos:

$$\cos x = 1\left(\text{não convém, pois } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \text{ ou}$$

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

Pela relação fundamental ($\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$), concluímos:

$$\text{sen}^2\,x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\therefore\ \text{sen}^2\,x = \frac{8}{9} \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, só nos interessa o valor positivo do seno, isto é:

$$\text{sen}\,x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

40. $2\,\text{sen}^2\,x + 3\cos x = 0$

Substituindo $\text{sen}^2\,x$ por $1 - \cos^2 x$, obtemos:

$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$

$-2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

Aplicando a fórmula resolutiva, temos:

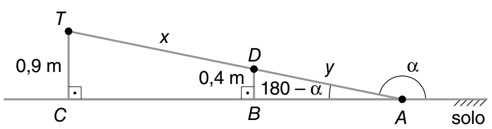
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)}$$

$$\therefore\ \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = 2 \text{ (não convém).}$$

Logo, $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

41. Sendo A o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{TD}$ com o plano do solo, esquematizamos:



Temos:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}$$

Assim:

(I) Do triângulo ADB, obtemos:

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \frac{0{,}4}{y} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{0{,}4}{y}$$

$$\therefore\ y = \frac{0{,}4}{\frac{1}{5}} \Rightarrow y = 2$$

(II) Do triângulo ATC, obtemos:

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \frac{0{,}9}{x + y} \Rightarrow x + y = \frac{0{,}9}{\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + y = 4{,}5$

De (I) e (II), concluímos:

$x + 2 = 4{,}5 \Rightarrow x = 2{,}5$

Portanto, a distância entre T e D é 2,5 m.

42. a) $E = \text{tg}\,\pi + \text{tg}\,2\pi + \text{tg}\dfrac{\pi}{4} = 0 + 0 + 1 = 1$

b) $$E = \frac{\text{tg}\dfrac{3\pi}{3} + \text{tg}^2\dfrac{\pi}{3}}{\text{tg}\left(\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\pi}{3}\right)} = \frac{0 + \left(\sqrt{3}\right)^2}{1} = 3$$

43. Sabemos que a tangente é positiva para arcos dos 1º e 3º quadrantes e negativa para arcos dos 2º e 4º quadrantes. Como 95° é um arco do 2º quadrante e 130° também é um arco do 2º quadrante:

$$\text{tg}\,95° < 0 \text{ e } \text{tg}\,130° < 0 \Rightarrow \frac{\text{tg}\,95°}{\text{tg}\,130°} > 0$$

Alternativa **d**.

44. $$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5},$$

para $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Assim:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Logo, $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

45. $$\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{7} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{6}{7},$$

para $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Assim:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

Logo, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

46. $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\cos\alpha}{4}$

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\cos\alpha}{4} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5},$$

para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Assim:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3\cos\alpha}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$ e $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

47. **a)** Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = \dfrac{90}{100}$

$\text{sen}\, x = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Logo, $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 3.$

b) Como *ABCD* é um quadrado, temos:

$DC = AD = 12$

$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{AD}{DE} \Rightarrow 3 = \dfrac{12}{DE}$

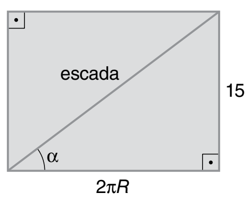
$\therefore DE = 4$

$A_{ABCE} = A_{ABCD} - A_{ADE} = 12^2 - \dfrac{12 \cdot 4}{2} = 144 - 24 =$

$= 120$

Portanto, a área do trapézio *ABCE* é 120 cm^2.

48. Planificando a superfície lateral do reservatório, obtemos um retângulo de altura de 15 m e base $2\pi R$, em que R é a medida do raio da base do cilindro.



$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{15}{2\pi R}$ (I)

Calculando $\text{tg}\, \alpha$:

$\begin{cases} \text{sen}\, \alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4}{5},$

para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Assim: $\text{tg}\, \alpha = \dfrac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = \dfrac{3}{4}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{2\pi R} \Rightarrow R = \dfrac{10}{\pi}$

Logo, o raio da base do cilindro mede $\dfrac{10}{\pi}$ m ou aproximadamente 3,18 m.

49. Calculamos usando a redução ao 1º quadrante.

a) $\text{tg}\, 135° = -\text{tg}\, 45° = -1$

b) $\text{tg}\, 240° = \text{tg}\, 60° = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\, 330° = -\text{tg}\, 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\, \dfrac{5\pi}{3} = -\text{tg}\, \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg}\, \dfrac{5\pi}{4} = \text{tg}\, \dfrac{\pi}{4} = 1$

f) $\text{tg}\, \dfrac{11\pi}{4} = -\text{tg}\, \dfrac{\pi}{4} = -1$

g) $\text{tg}\, \dfrac{20\pi}{3} = -\text{tg}\, \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

h) $\text{tg}\, \dfrac{17\pi}{6} = -\text{tg}\, \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

50. Para $x = 60°$:

$E = \dfrac{\text{tg}\, 2x + \text{tg}\, 3x}{\text{tg}\, 4x} = \dfrac{\text{tg}\, 120° + \text{tg}\, 180°}{\text{tg}\, 240°}$

- 120° é correspondente de 60° e pertence ao 2º quadrante. Logo:
  $\text{tg}\, 120° = -\text{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$
- 240° é correspondente de 60° e pertence ao 3º quadrante. Logo:
  $\text{tg}\, 240° = \text{tg}\, 60° = \sqrt{3}$
  Assim:
  $E = \dfrac{-\sqrt{3} + 0}{\sqrt{3}} = -1$

51. **a)** $\text{tg}\, (-45°) = -\text{tg}\, 45° = -1$

b) $\text{tg}\, (-120°) = -\text{tg}\, 120° = -\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\, (-300°) = -\text{tg}\, 300° = -\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$

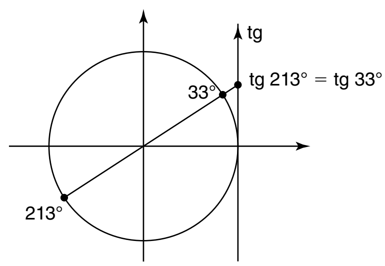
52. **a)** $E = \dfrac{\text{tg}\, \alpha - (-\text{tg}\, \alpha)}{-\text{tg}\, \alpha - \text{tg}\, \alpha} = \dfrac{2\text{tg}\, \alpha}{-2\text{tg}\, \alpha} = -1$

b) $E = \dfrac{\text{tg}\, (180° + x) + \text{tg}\, (180° - x) + \text{tg}\, (360° - x)}{\text{sen}\, (360° - x)} =$

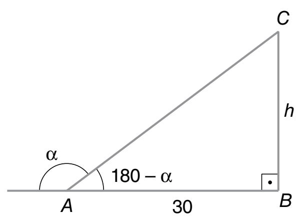
$= \dfrac{\text{tg}\, x + (-\text{tg}\, x) + (-\text{tg}\, x)}{-\text{sen}\, x} =$

$= \dfrac{\text{tg}\, x}{\text{sen}\, x} = \dfrac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\text{sen}\, x} = \dfrac{1}{\cos x}$

53. Os arcos trigonométricos de 33° e 213° têm extremidades simétricas em relação ao centro da circunferência e, portanto, os prolongamentos dos raios que passam por essas extremidades interceptam o eixo das tangentes no mesmo ponto. Logo: $\text{tg}\, 213° = \text{tg}\, 33°$



54. Do enunciado temos:

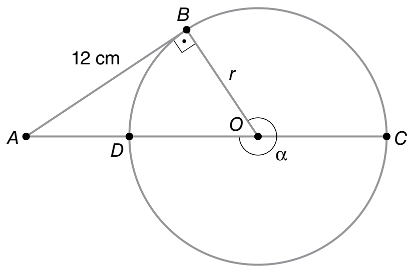


$\text{tg}\, (180° - \alpha) = -\text{tg}\, \alpha = \dfrac{BC}{AB}$

$-\text{tg}\, \alpha = \dfrac{h}{30} \Rightarrow h = -30\, \text{tg}\, \alpha$

Alternativa **b**.

55. Do enunciado temos:



$\text{tg}\,(360° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = 1{,}5$

$\text{tg}\,(360° - \alpha) = \dfrac{AB}{BO} \Rightarrow 1{,}5 = \dfrac{12}{r}$

$\therefore\ r = 8$

Portanto, o raio mede 8 cm.

56. Sabemos que $\text{tg}\,\alpha = -2{,}6$ e $\alpha + \beta = 180°$.

a) $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha$

$\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = 2{,}6$

Logo, $\text{tg}\,\beta = 2{,}6$.

b) $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \text{tg}\,180° = 0$

c) $\text{tg}\,(2\alpha + \beta) = \text{tg}\,(2\alpha + 180° - \alpha) = \text{tg}\,(180° + \alpha) =$
$= \text{tg}\,\alpha = -2{,}6$

Logo, $\text{tg}\,(2\alpha + \beta) = -2{,}6$.

57. a) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais

$\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \dfrac{\pi}{4}$

ou

$x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

b) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ ou

$x = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

c) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais

$\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ são $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

d) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ são $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ ou

$x = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

e) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ são $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

f) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais

$\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{2}$ são $x = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$ ou

$x = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

g) O valor de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para o qual

$\text{sen}\,x = -1$ é $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

h) O valor de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para o qual

$\cos x = 1$ é $x = 0$.

Logo, $S = \{0\}$.

i) Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\,x = 0$ são $x = 0$ ou $x = \pi$.

Logo, $S = \{0, \pi\}$.

j) Não existe x tal que $\text{sen}\,x = 3$. Logo, $S = \varnothing$.

k) Não existe x tal que $\cos x = -2$. Logo, $S = \varnothing$.

l) $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

m) $\text{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

n) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ ou

$x = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

o) $\text{tg}\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ ou

$x = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

58. a) Na primeira volta do sentido positivo, temos:

$\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Na primeira volta do sentido positivo, temos:

$\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é

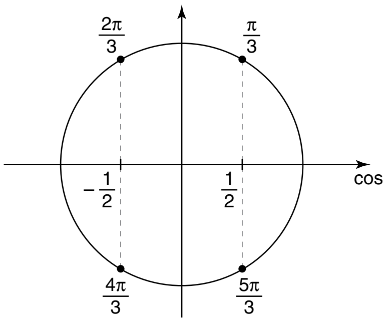
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

i) Na primeira volta do sentido positivo, temos:
sen $x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}\}$.

m) Na primeira volta do sentido positivo, temos:
$\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

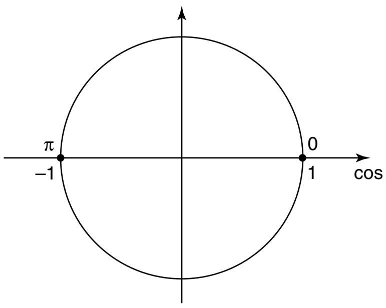
n) Na primeira volta do sentido positivo, temos:
$\text{tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

59. a) $\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$



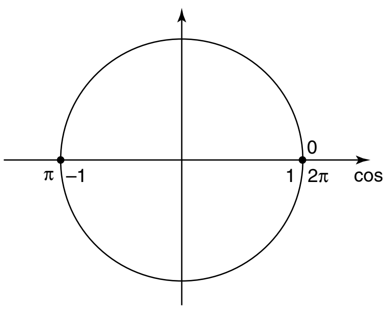
$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$



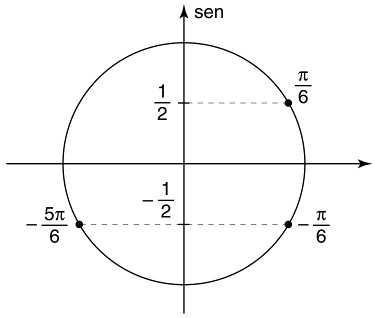
$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$
Logo, $S = \{0, \pi\}$.

c) $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$



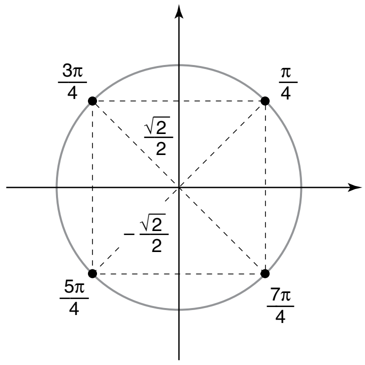
$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

d) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



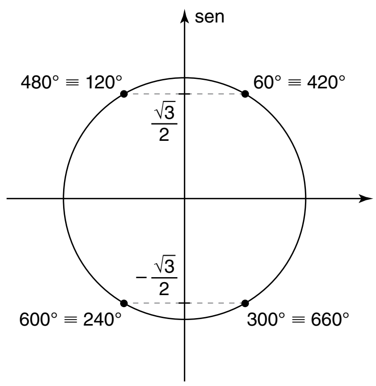
$\therefore x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$
Logo, $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

e) $|\text{sen } x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



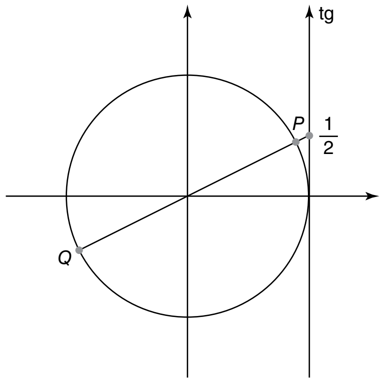
Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

60. $\text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



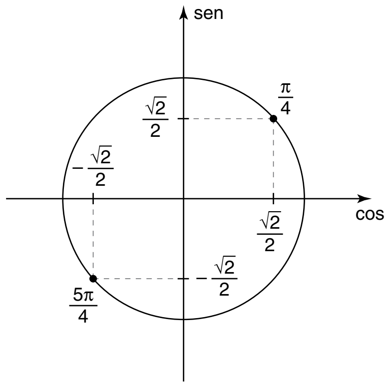
$\therefore x = 60°$ ou $x = 120°$ ou $x = 240°$ ou $x = 300°$ ou $x = 420°$ ou $x = 480°$ ou $x = 600°$ ou $x = 660°$
Logo, $S = \{60°, 120°, 240°, 300°, 420°, 480°, 600°, 660°\}$.

61. Prolongando o raio que passa pelo ponto de ordenada $\frac{1}{2}$ do eixo das tangentes, determinamos dois pontos, P e Q, sobre a circunferência trigonométrica abaixo.



Logo, em cada volta dessa circunferência a equação possui 2 raízes e, portanto, nas 3 voltas representadas pelo intervalo $[0, 6\pi[$ a equação possui 6 raízes.

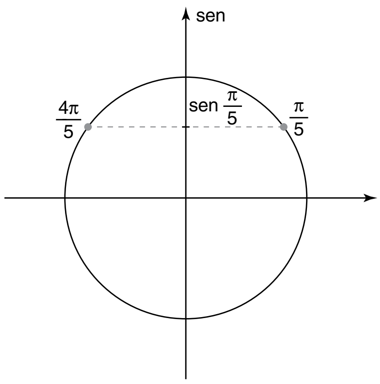
62. $\text{sen } x = \cos x$



$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

63. a) $\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{5}$

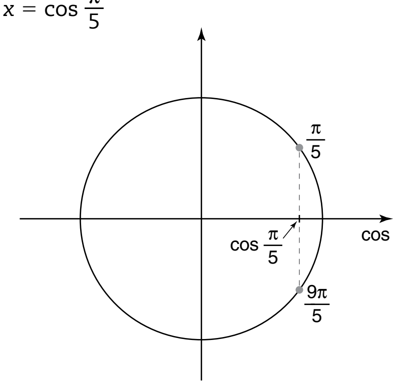


Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{4\pi}{5}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$.

b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$

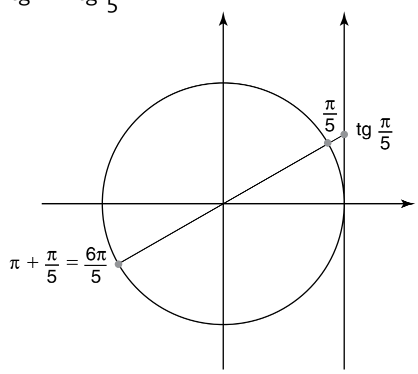


Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$\cos x = \cos \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{9\pi}{5}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$.

c) $\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{5}$



Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right\}$

64. a) $2\ \text{sen } (\pi - x) - \sqrt{3} \cos (\pi + x) = \text{sen } (-x)$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

$2\ \text{sen } x - \sqrt{3}\ (-\cos x) = -\text{sen } x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\ \text{sen } x = -\sqrt{3} \cos x$

$\therefore\ \frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

b) Além das raízes na primeira volta, obtidas no item anterior, a equação $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ possui as seguintes raízes na segunda volta:

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{23\pi}{6}$

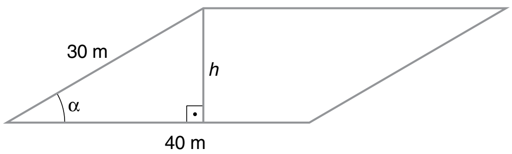
Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$.

c) Como $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, temos:

$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

65. Supondo α como na figura abaixo, temos:



$\text{sen } \alpha = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \text{ sen } \alpha$

Sabendo que a área do paralelogramo é 600 m^2, temos:

$40 \cdot h = 600 \Rightarrow 40 \cdot 30 \text{ sen } \alpha = 600$

$\therefore \text{ sen } \alpha = \frac{1}{2}$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

(Note que os dois valores convêm como resposta. Um para o ângulo agudo e o outro para o ângulo obtuso formado pelos lados consecutivos do paralelogramo.)

66. a) Os valores de t para os quais a altura do eixo do pedal foi de 16 cm podem ser obtidos pela equação:

$16 = 16 - 6\text{sen } (2\pi t) \Rightarrow 6\text{sen } (2\pi t) = 0$

$\therefore \text{ sen } (2\pi t) = 0$

$\therefore 2\pi t = 0 + k\pi$

$\therefore t = \frac{k}{2}$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 60\}$

Observe que, como o tempo máximo é 30 segundos, o valor máximo de k deve ser 60.

b) Observando a expressão $h(t) = 16 - 6\text{sen } (2\pi t)$, concluímos que a altura máxima ocorre quando $6\text{sen } (2\pi t)$ é mínimo, ou seja, quando $\text{sen } (2\pi t) = -1$. Logo:

$\therefore 2\pi t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

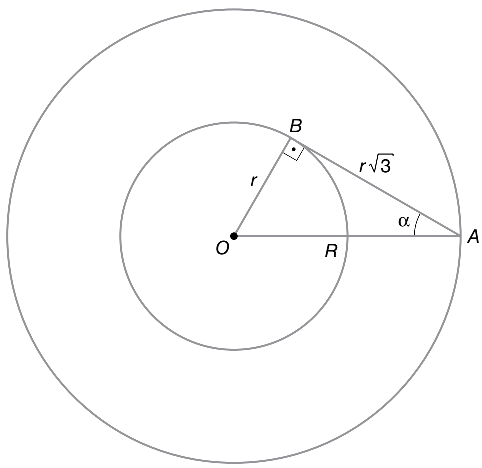
$\therefore t = \frac{3}{4} + k$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}$

c) Uma volta completa ocorre quando:

$2\pi t = 2\pi \Rightarrow t = 1$

Ou seja, o pedal realiza uma volta completa a cada 1 segundo.

67. A medida do ângulo agudo $O\widehat{A}B$ é máxima na posição esquematizada a seguir:



Nessa posição: $\text{tg } \alpha = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, $\alpha = 30°$.

68. a) $(2\text{sen } x - \sqrt{3})(2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\text{sen } x - \sqrt{3} = 0$ ou $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$\therefore \text{ sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{ sen } x(2\cos x + 1) = 0$

$\therefore \text{ sen } x = 0$ ou $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{ sen } x = 0$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

c) $\text{tg}^2 x - \text{tg } x = 0$

Para $t = \text{tg } x$, temos:

$t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t - 1) = 0$

$\therefore t = 0$ ou $t = 1$

Assim:

- $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

d) $(\text{tg } x - \sqrt{3})(\text{tg}^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg } x - \sqrt{3} = 0$ ou $\text{tg}^2 x - 1 = 0$

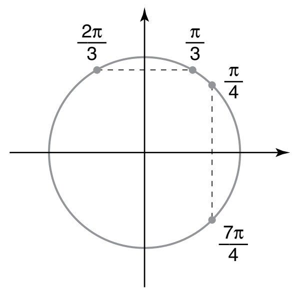
$\therefore \text{ tg } x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

Assim, temos:

- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

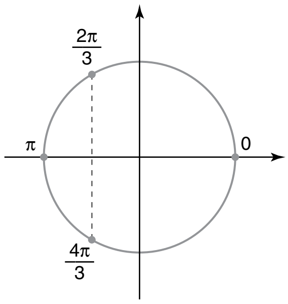
69. a) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item a do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

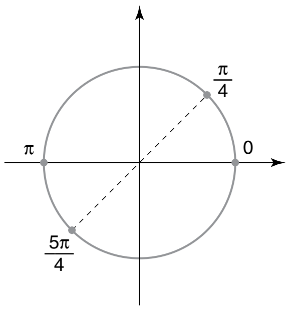
b) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **b** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **c** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

70. Dada a equação $4x^2 + 4x \text{ sen } \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 0$, temos:

$\Delta = (4 \text{ sen } \alpha)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

$\therefore \Delta = 16 \text{ sen}^2 \alpha - 16 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

$\therefore \Delta = 16 \text{ sen } \alpha \cdot (\text{sen } \alpha - \cos \alpha)$

Como a equação possui duas raízes reais e iguais, devemos ter $\Delta = 0$. Assim:

$16 \text{ sen } \alpha (\text{sen } \alpha - \cos \alpha) = 0$

$\therefore 16 \text{ sen } \alpha = 0 \text{ ou sen } \alpha - \cos \alpha = 0$

$\therefore \text{sen } \alpha = 0 \text{ ou sen } \alpha = \cos \alpha$

$\therefore \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pi \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \alpha = \frac{5\pi}{4}$

71. a) Fazendo a mudança de variável sen x = y, temos:

$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

ou

- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) Fazendo a mudança de variável cos x = y, temos:

$2y^2 - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\cos x = 2$ (não convém)

ou

- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) Fazendo a mudança de variável tg x = y, temos:

$4y^2 + \sqrt{3}y = y^2 + 3\sqrt{3}y + 3 \Rightarrow 3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0$

$\therefore y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$

ou

- $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen } x$, temos:

$1 - \text{sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x + 4 \text{ sen } x - 5 = 0$

Fazendo a mudança de variável sen x = y, temos:

$y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -5 \text{ ou } y = 1$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{sen } x = -5$ (não convém)

ou

- $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

72. O valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau é a ordenada do vértice da parábola correspondente. Assim:

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\text{sen}^2 \alpha - 4\cos \alpha}{4} = -\frac{1}{4}$

$\therefore \text{sen}^2 \alpha - 4\cos \alpha = 1$

Substituindo $\text{sen}^2 \alpha$ por $1 - \cos^2 \alpha$, temos:

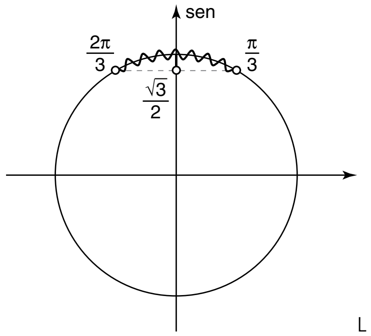
$1 - \cos^2 \alpha - 4\cos \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha + 4\cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha \cdot (\cos \alpha + 4) = 0$

$\therefore \cos \alpha = 0 \text{ ou } \cos \alpha = -4$ (não convém)

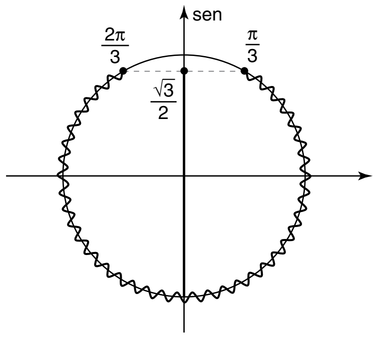
Logo, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

73. a) sen $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



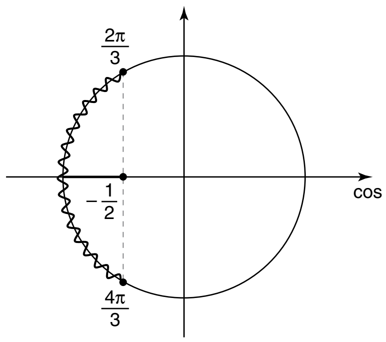
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$.

b) sen $x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



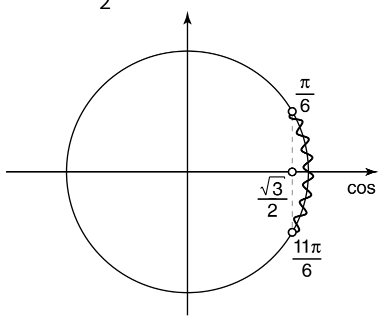
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

c) cos $x \leqslant -\frac{1}{2}$



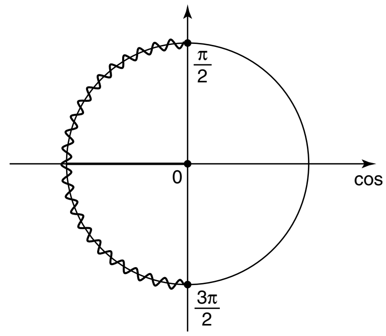
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$.

d) cos $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



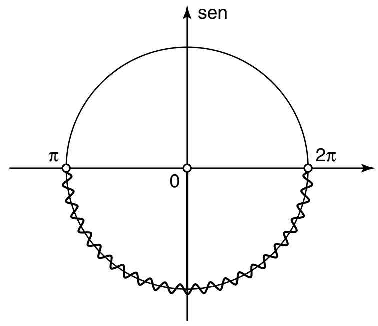
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

e) cos $x \leqslant 0$



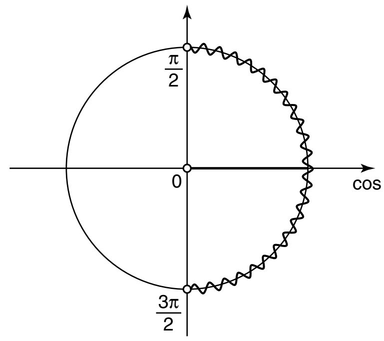
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$.

f) sen $x < 0$



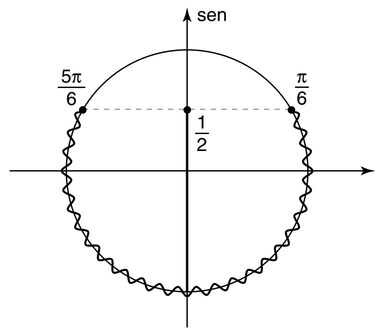
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$.

g) cos $x > 0$



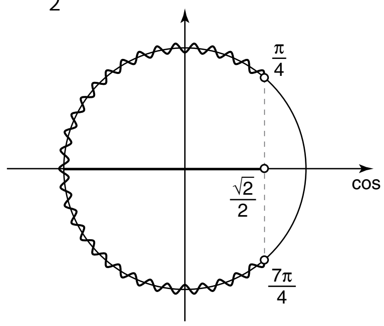
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

h) sen $x \leqslant \frac{1}{2}$



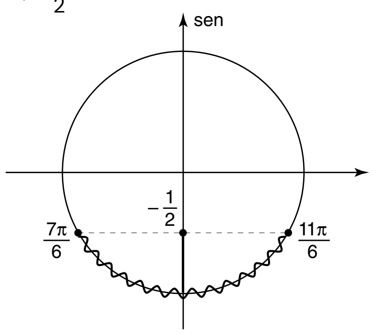
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

i) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



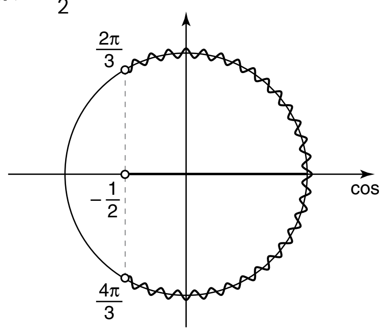
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$.

j) $\text{sen}\, x \leqslant -\frac{1}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$.

k) $\cos x > -\frac{1}{2}$



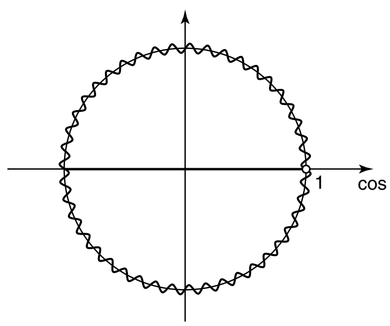
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

l) $\text{sen}\, x > 1$

Não existem valores de x que satisfaçam essa inequação, pois $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

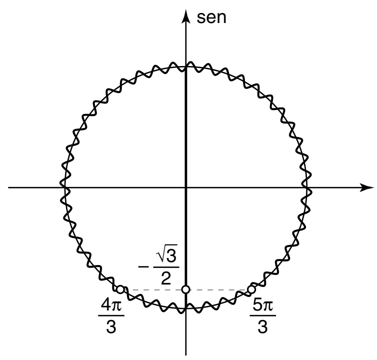
Logo, $S = \varnothing$.

m) $\cos x < 1$



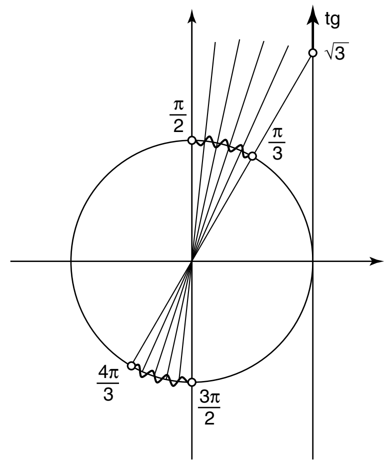
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

n) $\text{sen}\, x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



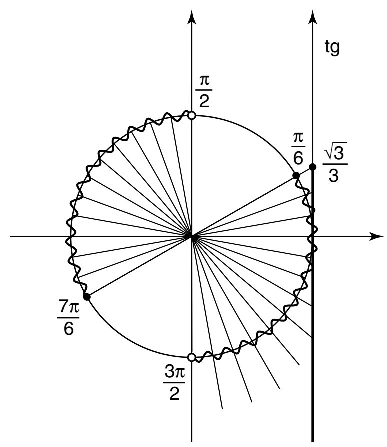
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{4\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{3}\right\}$.

o) $\text{tg}\, x > \sqrt{3}$



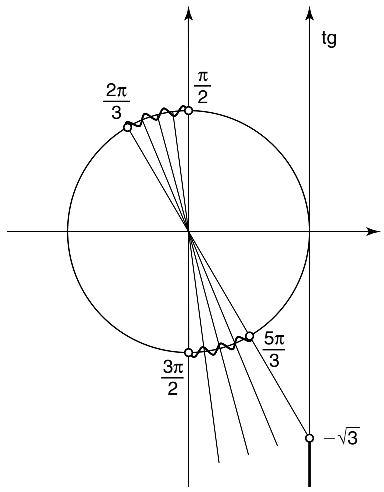
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

p) $\text{tg}\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

q) $\text{tg}\, x < -\sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

74. a) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **a** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **c** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Como os números $\frac{11\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução da inequação do item **d** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

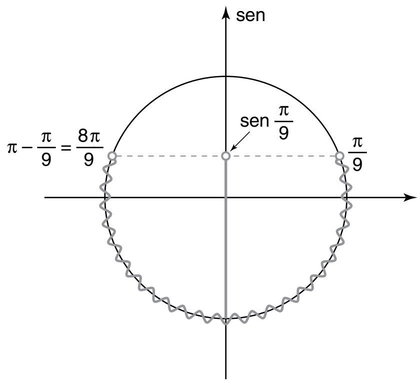
o) Basta adicionar a expressão $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a um dos intervalos obtidos no item **o** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

p) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, aos extremos do intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$ obtido no item **p** do exercício anterior:

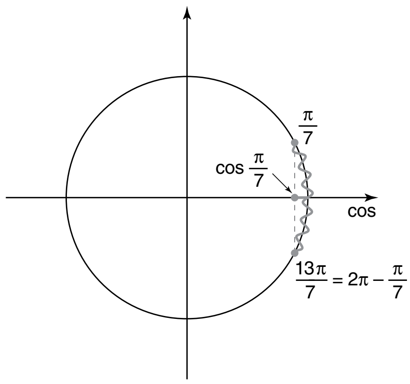
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

75. a) $\text{sen}\, x < \text{sen}\, \frac{\pi}{9}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{9} \text{ ou } \frac{8\pi}{9} < x < 2\pi\right\}$.

b) $\cos x \geqslant \cos \frac{\pi}{7}$

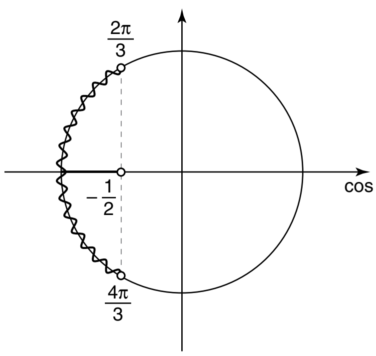


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{7} \text{ ou } \frac{13\pi}{7} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

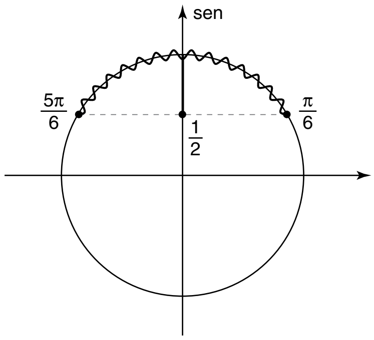
76. a) $\begin{cases} \cos x < -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen}\, x \geqslant \frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

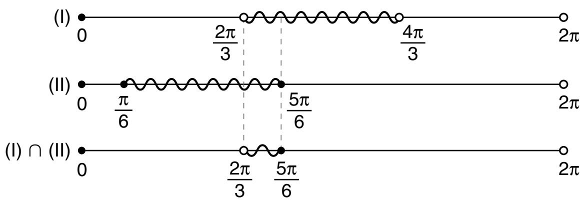
(I) $\cos x < -\frac{1}{2}$



(II) sen $x \geqslant \dfrac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), vamos ter:

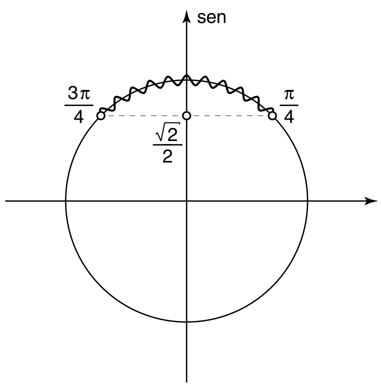


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2\pi}{3} < x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

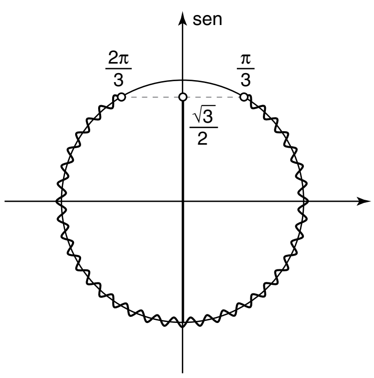
b) $\begin{cases} \text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

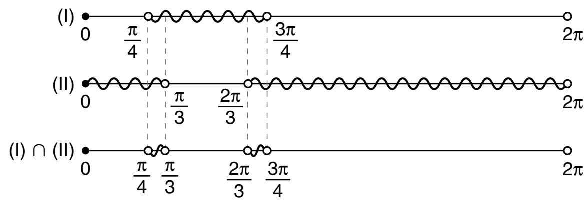
(I) sen $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(II) sen $x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

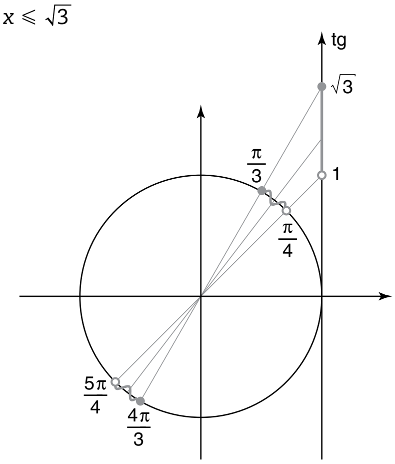


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), vamos ter:



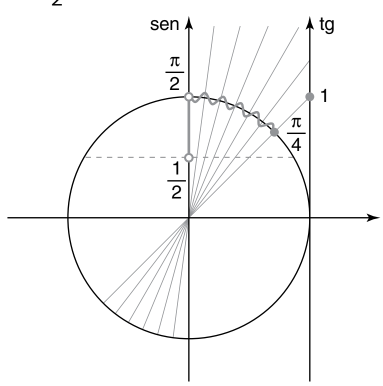
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

c) $\begin{cases} \text{tg } x > 1 \\ \text{tg } x \leqslant \sqrt{3} \end{cases}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

d) $\begin{cases} \text{tg } x \geqslant 1 \\ \text{sen } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

77. a) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **a** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **d** do exercício anterior:

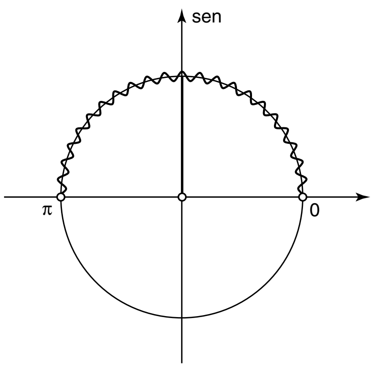
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

78. **a)** A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

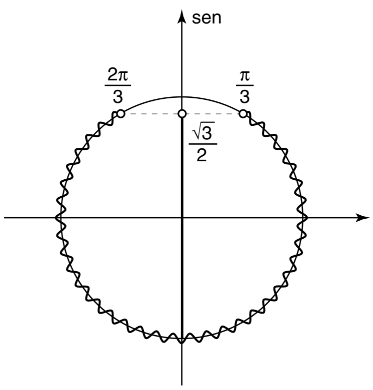
$$\begin{cases} \text{sen } x > 0 & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

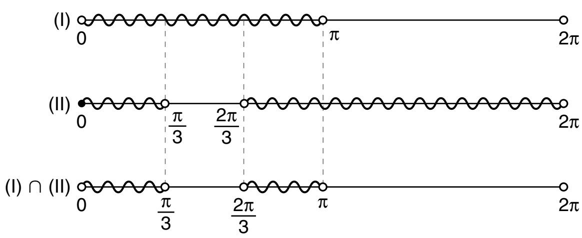
(I) $\text{sen } x > 0$



(II) $\text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



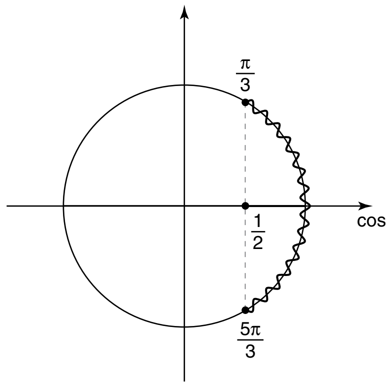
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$.

b) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

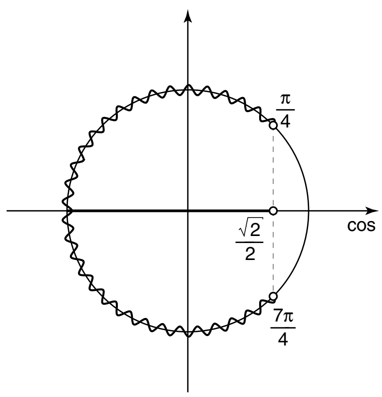
$$\begin{cases} \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

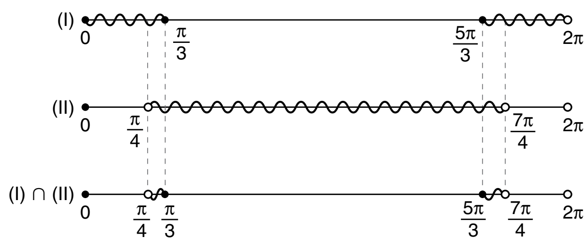
(I) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

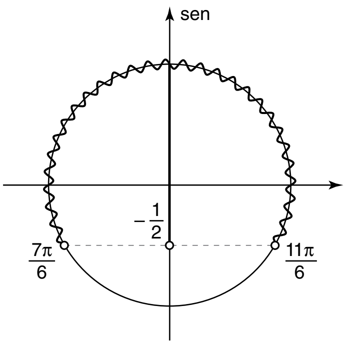
c) $|\text{sen } x| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < \text{sen } x < \dfrac{1}{2}$

Essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema

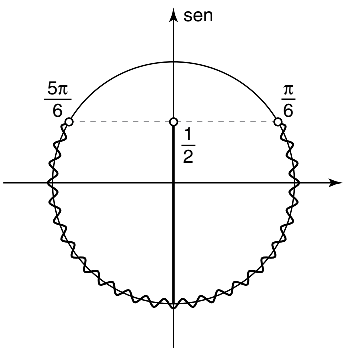
$$\begin{cases} \text{sen } x > -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

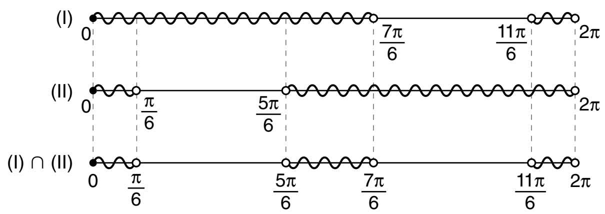
(I) sen $x > -\frac{1}{2}$



(II) sen $x < \frac{1}{2}$

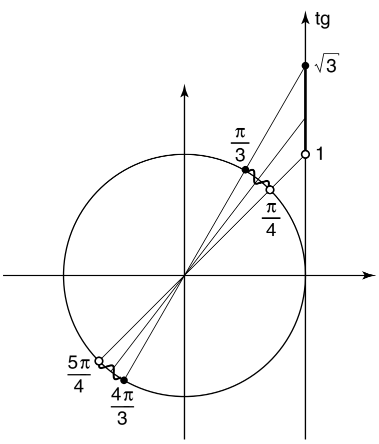


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



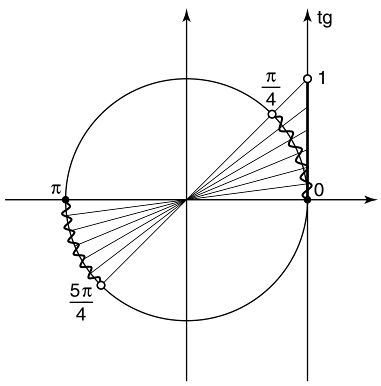
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

d)



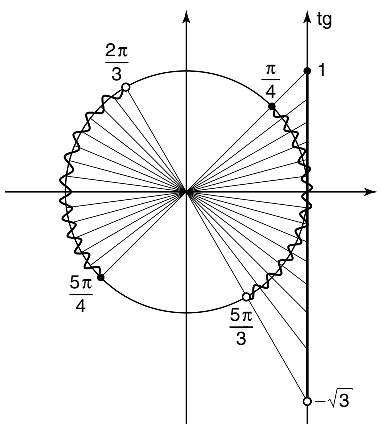
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$.

e)



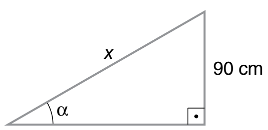
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4}\right\}$.

f)



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

79. Sendo x o comprimento da rampa, em centímetro, esquematizamos a situação:



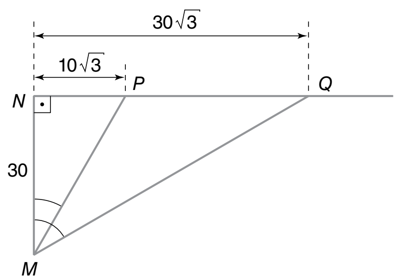
Assim: sen $\alpha = \frac{90}{x}$

Como devemos ter $x \geqslant 180$, concluímos que sen $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Ou seja, $\alpha \leqslant 30°$.

Alternativa **a**.

80. Esquematizando a situação, temos:



Pela figura, observamos que, no trecho $\overline{PQ}$, a medida α do ângulo agudo $B\widehat{M}N$ é mínima quando o barco está no ponto P e máxima quando está em Q. Logo, $P\widehat{M}N < \alpha < Q\widehat{M}N$.

Temos:

$$\text{tg}\,(P\widehat{M}N) = \frac{10\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow P\widehat{M}N = 30°$$

$$\text{tg}\,(Q\widehat{M}N) = \frac{30\sqrt{3}}{30} = \sqrt{3} \Rightarrow Q\widehat{M}N = 60°$$

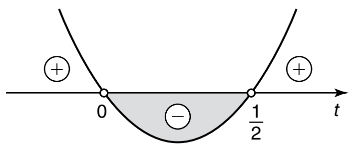
Assim: $30° < \alpha < 60°$

Alternativa **c**.

81. **a)** $2\,\text{sen}^2\,x - \text{sen}\,x < 0$.

Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos a inequação $2t^2 - t < 0$.

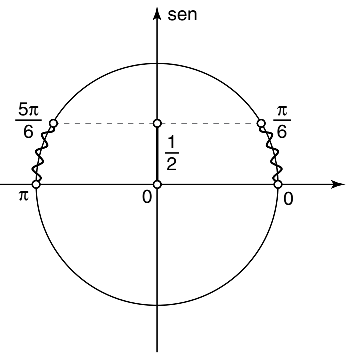
A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - t$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$.

Retornando à variável original, temos

$0 < \text{sen}\,x < \frac{1}{2}$ e, portanto:



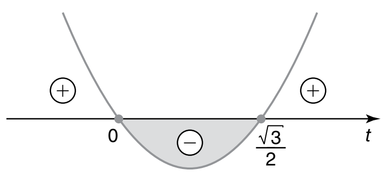
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$$

b) $2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3}\cos x \leqslant 0$

Fazendo a mudança de variável cos x = t, obtemos:

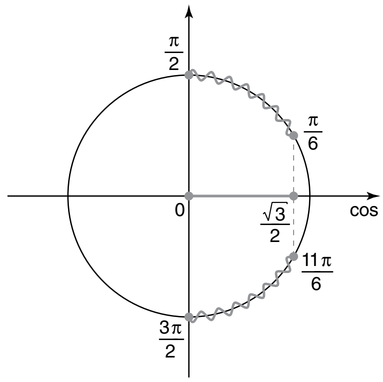
$2t^2 - \sqrt{3}t \leqslant 0$



Assim, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Retornando à variável original, temos:

$0 \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $2\,\text{sen}^2\,x + 5\cos x - 4 > 0 \Rightarrow$

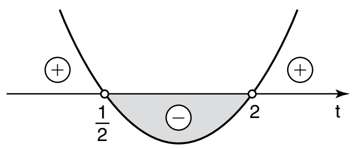
$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 > 0$

$\therefore -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 < 0$

Fazendo a mudança de variável cos x = t, obtemos a inequação $2t^2 - 5t + 2 < 0$.

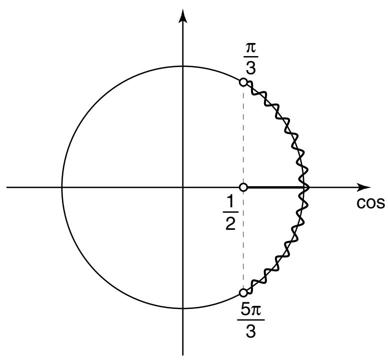
A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 5t + 2$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 2$.

Retornando à variável original, temos:

$\frac{1}{2} < \cos x < 2$, ou seja, $\cos x > \frac{1}{2}$, cujas soluções são representadas por:



Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

d) $2 \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen} x - 1 \leqslant 0$

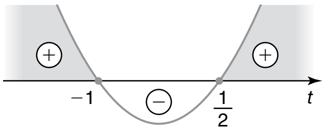
Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos:

$2 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x - 1 \leqslant 0$

$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 \geqslant 0$

Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos:

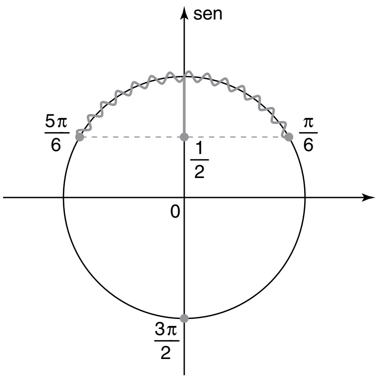
$2t^2 + t - 1 \geqslant 0$



Assim: $t \leqslant -1$ ou $t \geqslant \frac{1}{2}$

Retornando à variável original, temos:

$\operatorname{sen} x \leqslant -1$ ou $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{1}{2}$

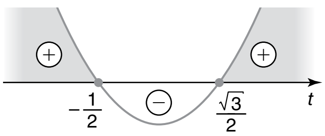


Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$

e) $(2 \cdot \operatorname{sen} x + 1)(2 \cdot \operatorname{sen} x - \sqrt{3}) \geqslant 0$

Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos:

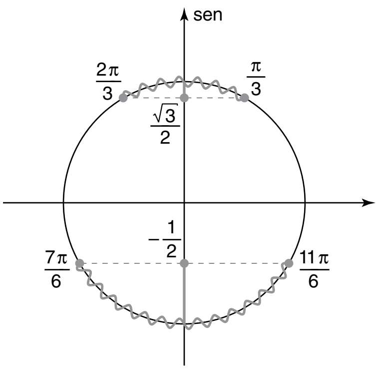
$(2t + 1)(2t - \sqrt{3}) \geqslant 0$



Assim: $t \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $t \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Retornando à variável original, temos:

$\operatorname{sen} x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

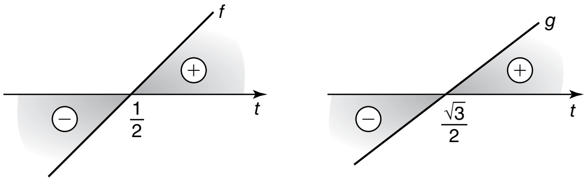
f) $\dfrac{2\operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen} x - \sqrt{3}} \leqslant 0$

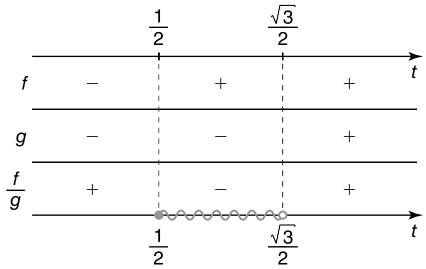
Fazendo sen x = t, obtemos a inequação

$\dfrac{2t - 1}{2t - \sqrt{3}} \leqslant 0.$

Estudando a variação de sinal das funções

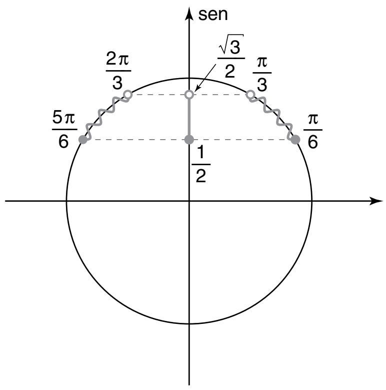
$f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{3}$ e $\dfrac{f}{g}$, temos:





$\dfrac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant t < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; e, portanto:



Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$

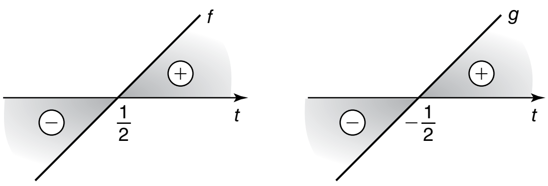
g) $\dfrac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} > 0$

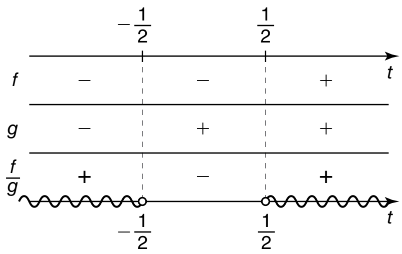
Fazendo cos x = t, obtemos a inequação

$\dfrac{2t - 1}{2t + 1} > 0.$

Estudando a variação de sinal das funções

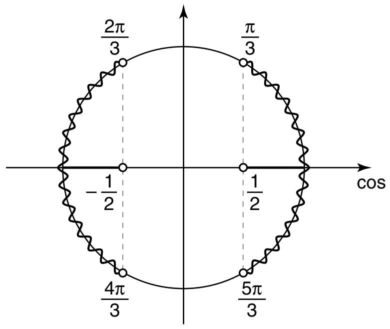
$f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t + 1$ e $\dfrac{f}{g}$, temos:





$\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\dfrac{1}{2}$ ou $t > \dfrac{1}{2}$

Logo, $\cos x < -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x > \dfrac{1}{2}$; e, portanto:



Concluímos, então:

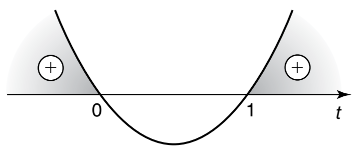
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

h) $tg^2\,x - tg\,x > 0$

Fazendo $tg\,x = t$, temos:

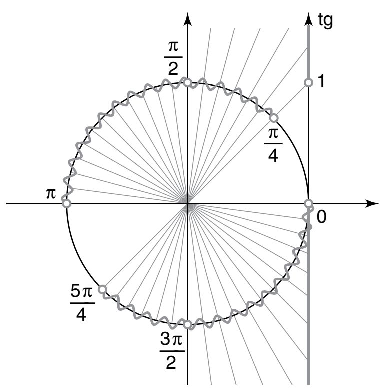
$t^2 - t > 0$

Estudando a variação de sinal de função $f(t) = t^2 - t$, obtemos:



Assim, $f(t) > 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > 1$ e, portanto:

$tg\,x < 0$ ou $tg\,x > 1$

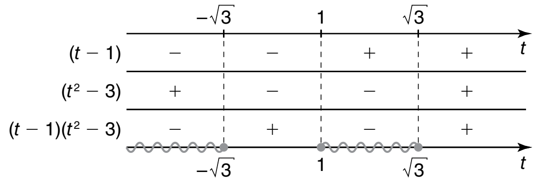


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

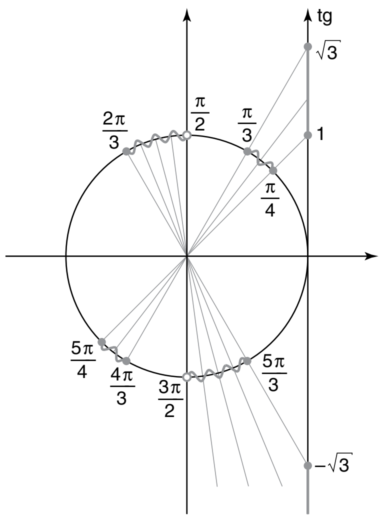
i) $(tg\,x - 1)(tg^2\,x - 3) \leqslant 0$

Fazendo a mudança de variável $tg\,x = t$, obtemos:

$(t - 1)(t^2 - 3) \leqslant 0$



Logo, $t \leqslant -\sqrt{3}$ ou $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$.
Retornando à variável original, temos:
$tg\,x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $1 \leqslant tg\,x \leqslant \sqrt{3}$

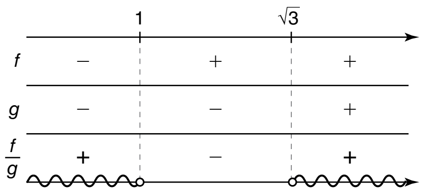


Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

j) $\dfrac{tg\,x - 1}{tg\,x - \sqrt{3}} > 0$

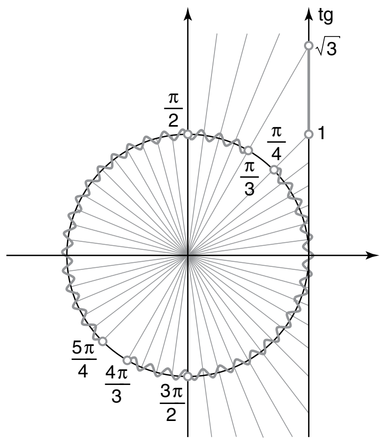
Fazendo $tg\,x = t$, temos: $\dfrac{t - 1}{t - \sqrt{3}} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t - 1$, $g(t) = t - \sqrt{3}$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < 1$ ou $t > \sqrt{3}$ e, portanto:

$tg\,x < 1$ ou $tg\,x > \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

82. d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **d** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

e) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **e** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

i) Basta adicionar a expressão $k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ e $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ obtidos no item **i** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x \leqslant \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) O comprimento da circunferência é $2\pi r = 30\pi$ e podemos calcular a medida, em grau, do arco da seguinte maneira:

30π ——— $360°$
5π ——— x

$$x = \frac{5\pi \cdot 360°}{30\pi} = 60°$$

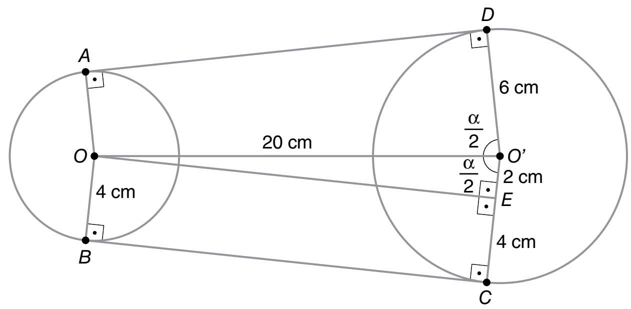
Portanto, a medida, em grau, do arco é 60°.

b) Podemos calcular a medida, em grau, do arco da seguinte maneira:

rad ——— cm
1 ——— 2,5
x ——— 2π

$\therefore x = \frac{4\pi}{5}$ rad

2. Sendo α o ângulo de medida do menor arco $\overset{\frown}{CD}$, E o ponto de intersecção entre $O'C$ e uma paralela a $\overline{BC}$ que passe por O, e traçando $\overline{OO'}$, que divide α na metade, obtemos:



Analisando o triângulo $OO'E$, temos:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{20} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 84°$$

Portanto, α mede aproximadamente 168°.

3. a) A sequência é dada por: (40°, 400°, 760°, ..., 6.520°)
Seu termo geral é: $a_n = 40° + (n - 1) \cdot 360°$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 19$

b) Pelo item anterior, o último termo é 6.520°.

4. a) A sequência é dada por:

$$\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}, \frac{24\pi}{5}, \ldots, \frac{104\pi}{5}, \frac{114\pi}{5}, \frac{124\pi}{5}, \ldots, \frac{734\pi}{5}\right)$$

Seu termo geral é:

$a_n = \frac{4\pi}{5} + (n - 1) \cdot 2\pi$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 74$

b) Pelo item anterior, o último termo é $\frac{734\pi}{5}$.

5. Como as expressões indicam medidas de dois arcos côngruos, podemos escrever:
$3x - 45° = 2x + 135° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
$\therefore x = 180° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
$\therefore x = 180° (1 + 2k)$, com $k \in \mathbb{Z}$
Alternativa **e**.

6. a) $2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$

$x_A = 0$ rad $\quad x_D = \pi$ **rad**
$x_B = \frac{\pi}{3}$ rad $\quad x_E = \frac{4\pi}{3}$ **rad**
$x_C = \frac{2\pi}{3}$ rad $\quad x_F = \frac{5\pi}{3}$ **rad**

Logo: $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $D(\pi)$, $E\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $F\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

b) x_C na 2ª e na 3ª voltas positivas.

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ (na 2ª volta positiva)

$\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{14\pi}{3}$ (na 3ª volta positiva)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice C são $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad.

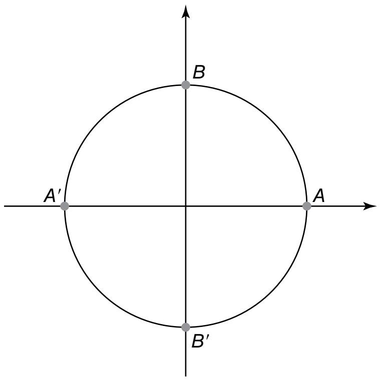
c) x_F na 1ª e na 2ª voltas negativas.

$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ (na 1ª volta negativa)

$\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$ (na 2ª volta negativa)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice F são $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad.

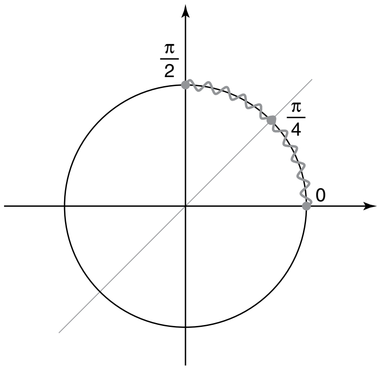
7. O conjunto A é formado pelos números reais associados aos quatro pontos A, B, A' e B' da circunferência trigonométrica abaixo; e o conjunto B é formado pelas medidas associadas aos pontos A e A'.



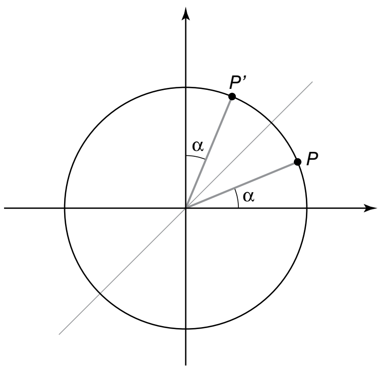
Logo, o conjunto $A - B$ é formado pelos números reais associados aos pontos B e B'. A expressão geral desses números é $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Alternativa **a**.

8. a) Na figura abaixo estão representadas as possíveis posições de P e de seus simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

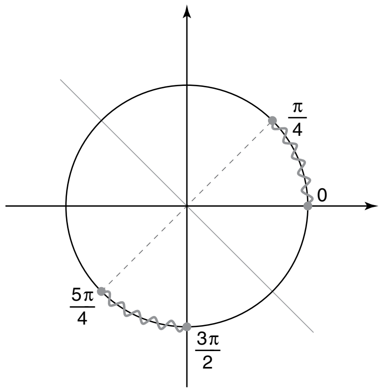


Observe que, para cada ponto P de medida α, temos seu simétrico P' na seguinte posição:

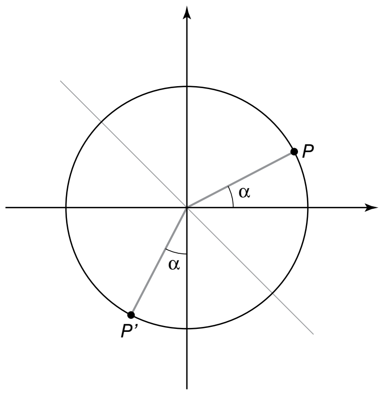


Assim, o número real x associado ao simétrico de cada ponto P pode ser representado pela expressão: $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$

b) Na figura a seguir estão representadas as possíveis posições de P e de seus simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes pares.



Observe que, para cada ponto P de medida α, temos seu simétrico P' na seguinte posição:



Assim, o número real x associado ao simétrico de cada ponto P pode ser representado pela expressão: $x = \frac{3\pi}{2} - \alpha$

9. I.

a) Cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60° e a altura $\overline{OM}$ também é bissetriz; logo, a medida do ângulo central $A\hat{O}P$ é 30°. Como a medida do ângulo central é a mesma do arco determinado, concluímos que, na primeira volta do sentido positivo, o arco $\overset{\frown}{AP}$ mede 30°.

b) A medida do lado do triângulo OPQ é 1, pois é raio da circunferência trigonométrica. Como a altura $\overline{OM}$ também é mediana, temos que M é ponto médio de $\overline{PQ}$ e, portanto, $PM = \frac{1}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP, concluímos:

$$(OM)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Do item **b**, temos $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Como a abscissa e a ordenada de P são, respectivamente, o cosseno e o seno do arco $\overset{\frown}{AP}$, concluímos que:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II.

a) Cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60°; logo, a medida do ângulo central $A\hat{O}P$ é 60°. Como a medida do ângulo central é a mesma do arco determinado, concluímos que, na primeira volta do sentido positivo, o arco $\overset{\frown}{AP}$ mede 60°.

b) A medida do lado do triângulo equilátero AOP é 1, pois é raio da circunferência trigonométrica. Como a altura $\overline{PM}$ também é mediana, temos que M é ponto médio de $\overline{OA}$ e, portanto, $OM = \frac{1}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP, concluímos:

$(PM)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Do item **b**, temos $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Como a abscissa e a ordenada de P são, respectivamente, o cosseno e o seno do arco $\overset{\frown}{AP}$, concluímos que:

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60° = \frac{1}{2}$

III.

a) Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm medidas iguais. Indicando por α a medida dos ângulos congruentes $A\hat{O}P$ e $Q\hat{P}O$, temos, do triângulo OPQ:

$\alpha + \alpha + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

Portanto, o ângulo $A\hat{O}P$ mede 45°.

Como a medida do ângulo central é a mesma do arco determinado, concluímos que, na primeira volta do sentido positivo, o arco $\overset{\frown}{AP}$ mede 45°.

b) A hipotenusa do triângulo retângulo OPQ mede 1, pois é raio da circunferência trigonométrica, e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{OQ}$ são congruentes, pois são lados de um triângulo isósceles de base $\overline{OP}$. Indicando por ℓ a medida de cada um desses segmentos congruentes e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ, temos:

$\ell^2 + \ell^2 = 1^2 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim: $PQ = OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Do item **b**, temos $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como a abscissa e a ordenada de P são, respectivamente, o cosseno e o seno do arco $\overset{\frown}{AP}$, concluímos que:

$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. Para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$0 \leqslant |\text{sen } x| \leqslant 1$

Portanto, o valor mínimo de f é zero.

11. A expressão $\frac{1}{|\cos x|}$ assume o valor mínimo quando o denominador $|\cos x|$ assume o valor máximo. Como o valor máximo de $|\cos x|$ é 1, concluímos que o valor mínimo de $\frac{1}{|\cos x|}$ é $\frac{1}{1} = 1$.

12. Vamos analisar cada um dos itens.

a) $1.570° = 130° + 4 \cdot 360°$. Ou seja, o ângulo está no 2º quadrante e, portanto, sen 1.570° é positivo. Afirmação falsa.

b) $1.330° = 250° + 3 \cdot 360°$. Ou seja, o ângulo está no 3º quadrante e, portanto, cos 1.330° é negativo. Afirmação falsa.

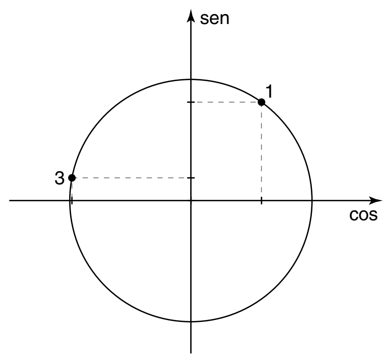
c) $\frac{44\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} + 4 \cdot 2\pi$. Ou seja, o ângulo está no 2º quadrante e, portanto, $\cos \frac{44\pi}{5}$ é negativo. Afirmação falsa.

d) $\frac{36\pi}{5} = \frac{6\pi}{5} + 3 \cdot 2\pi$. Ou seja, o ângulo está no 3º quadrante e, portanto, $\cos \frac{36\pi}{5}$ é negativo. Afirmação verdadeira.

e) $\frac{13\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi$. Ou seja, $\cos \frac{13\pi}{2}$ é nulo. Afirmação falsa.

Alternativa **d**.

13. Lembrando que $\pi \approx 3{,}14$ e $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, as posições de 1 e 3 na circunferência trigonométrica são, aproximadamente:



Observando a figura, temos:

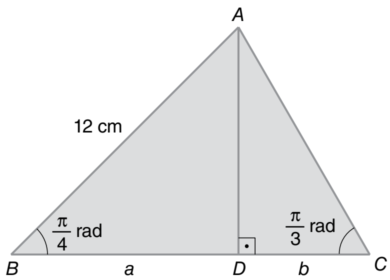
I. Falsa, pois sen 1 > sen 3

II. Falsa, pois cos 1 > cos 3

III. Verdadeira, pois cos 1 < sen 1

Alternativa **c**.

14. Sendo $\overline{AD}$ a altura do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$, esquematizamos:



$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{12}$

$\therefore a = 6\sqrt{2}$

Como ABD é isósceles de base $\overline{AB}$, temos que:
$AD = BD = 6\sqrt{2}$
Do triângulo ADC, obtemos:
$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{2}}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6\sqrt{2}}{b}$
$\therefore\ b = 2\sqrt{6}$
Concluímos, então, que $BC = a + b = \left(6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)$ cm.

15. Os 20 primeiros termos de ordem ímpar são:

$a_1 = 5 \cdot 1 + \text{sen}\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 5 + 1$

$a_3 = 5 \cdot 3 + \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 15 - 1$

$a_5 = 5 \cdot 5 + \text{sen}\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 25 + 1$

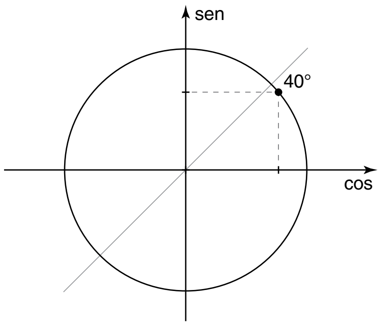
...

$a_{37} = 5 \cdot 37 + \text{sen}\left(37 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 185 + 1$

$a_{39} = 5 \cdot 39 + \text{sen}\left(39 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 195 - 1$

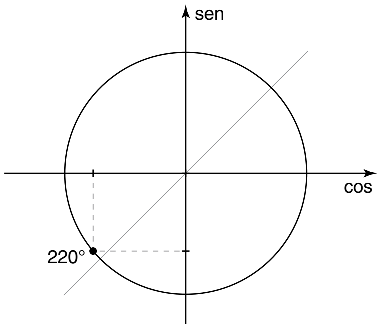
Assim, a soma desses termos é dada por:
$5 \cancel{+1} + 15 \cancel{-1} + 25 \cancel{-1} + \ldots + 185 \cancel{+1} + 195 \cancel{-1} =$
$= 5 + 15 + 25 + \ldots + 185 + 195 =$
$= \frac{(5 + 195) \cdot 20}{2} = 2.000$
Alternativa **d**.

16. a) V, pois sen 145° = sen (180° − 145°) = sen 35° e sen 40° > sen 35°.
b) V, pois cos 40° é positivo e cos 230° é negativo; portanto, cos 40° > cos 230°.
c) V, pois sen 40° é positivo e sen 320° é negativo; portanto, sen 40° > sen 320°.
d) F, pois cos 320° = cos (360° − 320°) = cos 40°.
e) V, pois, observando a circunferência trigonométrica, temos:



$\therefore$ sen 40° < cos 40°

f) F, pois, observando a circunferência trigonométrica, temos:



sen 220° > cos 220°

17. 2.370° = 210° + 6 · 360°
$\therefore$ sen 2.370° = sen 210° = − sen 30° = $-\frac{1}{2}$
Alternativa **b**.

18. $\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + \left(\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)^2 =$

$= -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)^2 =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$

Alternativa **c**.

19. a) $E = \frac{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}{-(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)} = -1$

b) $E = \frac{1 - (-\cos\alpha)^2}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} =$

$= \frac{(1 - \cos\alpha)\cancel{(1 + \cos\alpha)}}{\cancel{(1 + \cos\alpha)}} = 1 - \cos\alpha$

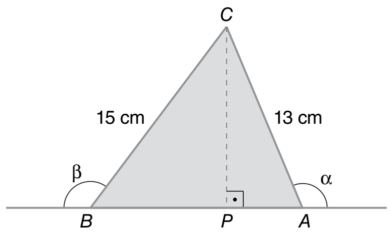
20. $E = \frac{\text{sen}\,x + \text{sen}\,(\pi + x) + \text{sen}\,(x - \pi)}{\text{sen}\,(-x) + \text{sen}\,(2\pi - x)} =$

$= \frac{\text{sen}\,x - \text{sen}\,x - \text{sen}\,x}{-\text{sen}\,x - \text{sen}\,x} =$

$= -\frac{\text{sen}\,x}{-2\text{sen}\,x} = \frac{1}{2}$

Alternativa **c**.

21.



No triângulo APC, temos:
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{AP}{13}$
$\therefore -\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{AP}{13} \Rightarrow AP = 5$
No triângulo BPC, temos:
$\cos(180° - \beta) = -\cos\beta = \frac{BP}{15}$
$\therefore -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{BP}{15} \Rightarrow BP = 9$
Assim: $AB = AP + BP = 5 + 9 = 14$
Portanto, o perímetro do triângulo ABC é:
15 cm + 13 cm + 14 cm = 42 cm

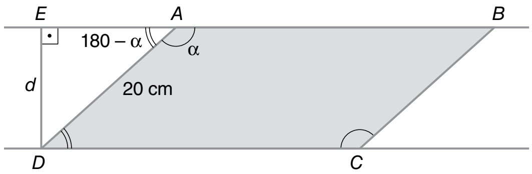
22. Pelo enunciado, temos:
$\cos\alpha + 2\text{sen}\,\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1 - 2\text{sen}\,\alpha$ (I)
Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:
$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = 1 - 2\text{sen}\,\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}\right)^2 = (1 - 2\text{sen}\,\alpha)^2$
$\therefore 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - 4\text{sen}\,\alpha + 4\text{sen}^2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow 5\text{sen}^2\alpha - 4\text{sen}\,\alpha = 0$
$\therefore \text{sen}\,\alpha\,(5\text{sen}\,\alpha - 4) = 0$
$\therefore \text{sen}\,\alpha = 0$ (não convém) ou $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ (III)

Substituindo (III) em (I), temos:

$\cos \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

Como sen $\alpha > 0$ e cos $\alpha < 0$, concluímos que α é uma medida do 2º quadrante.

23. Sendo d a distância procurada, esquematizamos:



Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2 \alpha = 1$, calculamos sen α:

$\text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$\therefore \text{sen}\alpha = \pm\frac{2}{3}$

Como $90° < \alpha < 180°$, só nos interessa o valor positivo do seno, isto é:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$

Do triângulo ADE, obtemos:

$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \frac{d}{20} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{d}{20}$

$\therefore \frac{2}{3} = \frac{d}{20} \Rightarrow d = \frac{40}{3}$

Portanto, a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $\frac{40}{3}$ cm.

24. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$y^2 = (\text{sen}\,x + \cos x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = \text{sen}^2\,x + 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x + \cos^2 x$

$\therefore y^2 = (\text{sen}^2\,x + \cos^2 x) + 2 \cdot (\text{sen}\,x \cdot \cos x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{8}$

$\therefore y^2 = \frac{5}{4}$

$\therefore y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Alternativa **b**.

25. Como sen 70° = cos 20° e sen 50° = cos 40°, temos:

$E = \text{sen}^2\,20° + \text{sen}^2\,40° + \text{sen}^2\,50° + \text{sen}^2\,70° \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \text{sen}^2\,20° + \text{sen}^2\,40° + \cos^2 40° + \cos^2 20°$

1

1

$\therefore E = 2$

26. Como cos 140° = −cos 40°, temos:

$$E = \frac{\text{sen}^2\,30° + \cos^2 60°}{\text{sen}^2\,40° + \cos^2 140°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\text{sen}^2\,40° + \cos^2 40°} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{1}$$

$\therefore E = \frac{1}{2}$

27. $\begin{cases} 4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 \\ \cos^2 x + \text{sen}\,x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 5\text{sen}\,x - 5 = 0 & \text{(I)} \\ \cos^2 x = 1 - \text{sen}\,x^2 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$4(1 - \text{sen}^2\,x) + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,\text{sen}^2\,x - 5\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável sen $x = k$, obtemos a equação do 2º grau:

$4k^2 - 5k + 1 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

$\therefore k = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} \Rightarrow k = 1$ ou $k = \frac{1}{4}$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\,x = 1 \left(\text{não convém, pois } \frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

ou $\text{sen}\,x = \frac{1}{4}$

Portanto, concluímos que sen $x = \frac{1}{4}$.

28. $x^2 - 4x + 4\cos^2 \alpha = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4\cos^2 \alpha = 16 - 16\cos^2 \alpha =$
$= 16(1 - \cos^2 \alpha)$

Como $1 - \cos^2 \alpha = \text{sen}^2\,\alpha$, temos:

$\Delta = 16\,\text{sen}^2\,\alpha$

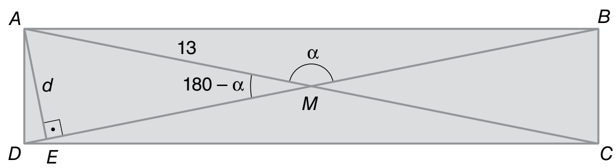
$\therefore x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16\,\text{sen}^2\,\alpha}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4\,\text{sen}\,\alpha}{2}$

$\therefore x = 2 \pm 2\,\text{sen}\,\alpha$

Portanto: $S = \{2 - 2\cos\alpha, 2 + 2\cos\alpha\}$

29. $E = \frac{1 + \cos x \cdot (-\cos x)}{-\text{sen}\,x \cdot (-\text{sen}\,x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{\text{sen}^2\,x} = \frac{\text{sen}^2\,x}{\text{sen}^2\,x} = 1$

30. O ponto M, comum às diagonais, é ponto médio de cada uma. Assim, indicando por d a distância procurada, esquematizamos:



Do triângulo AEM, temos:

$\text{sen}\,180° - \alpha = \frac{d}{13} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{d}{13}$ (I)

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{d}{13}\right)^2 + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore d = \pm 5$

Como d representa uma distância, só nos convém $d = 5$.

Ou seja, a distância entre o vértice A e a diagonal $\overline{BD}$ é 5 cm.

31.
a) tg 89° ≈ 57,28996163
b) tg 89,9° ≈ 572,9572134
c) tg 89,99° ≈ 5.729,577893
d) tg 89,999° ≈ 57.295,77951
e) tg 89,9999° ≈ 572.957,7951
f) tg 90° não existe

32. **a)** F, pois, tomando $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, temos $\text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$.

b) F, pois, tomando $\alpha = \pi$, temos $\text{tg}\ \pi = 0$.

c) V, pois, para $\alpha = \pi + k\pi$, teremos $\text{sen}\ \alpha = 0$ e, consequentemente, $\text{tg}\ \alpha = 0$.

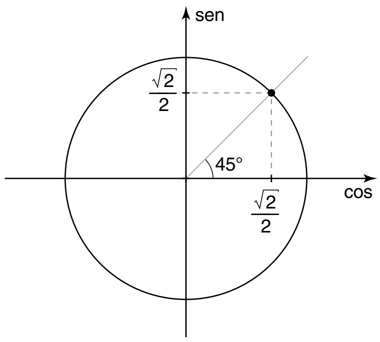
d) V, pois, para $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, com k ímpar, teremos $\cos \pi = 0$ e, consequentemente, $\text{tg}\ \alpha$ não existe.

e) V, pois, para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, teremos $\text{tg}\ 2\alpha = \text{tg}(\pi + 2k\pi) = 0$.

f) F, pois, tomando $k = 30$, temos $\text{tg}(\alpha) = \text{tg}\left(\frac{30\pi}{6}\right) = \text{tg}(5\pi) = 0$.

33. Tomando $45° < \theta < 90°$, temos $\text{tg}\ \theta > 1$.

Temos o seguinte círculo trigonométrico:



Daí se nota que, para o intervalo $45° < \theta < 90°$, teremos $\text{sen}\ \theta > \cos \theta$.
Como $\cos \theta < \text{sen}\ \theta < 1$ e $\text{tg}\ \theta > 1$, então
$\cos \theta < \text{sen}\ \theta < \text{tg}\ \theta$
Alternativa **b**.

34. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{9} - \frac{4}{9}$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{5}{9}$$

Assim:

$$\text{tg}^2\ x = \frac{\text{sen}^2\ x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Alternativa **c**.

35. $\text{tg}\ \alpha = -2 \Rightarrow \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = -2$

$$\begin{cases} \text{sen}\ \alpha = -2\cos \alpha \\ \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ \text{para}\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Assim:

$$\text{sen}\ \alpha = -2\cos \alpha = -2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

36. $\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\ x = \frac{3}{4} \cdot \cos x$

$\therefore \text{sen}^2\ x = \frac{9}{16} \cdot \cos^2 x$ (I)

Substituindo (I) na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$$\frac{9}{16} \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{25}{16} \cdot \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

$$\text{sen}\ x = \frac{3}{4} \cdot \cos x \Rightarrow \text{sen}\ x = \pm\frac{3}{5}$$

Como x é uma medida do 3º quadrante, concluímos que $\text{sen}\ x = -\frac{3}{5}$ e $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Portanto:

$$\cos x - \text{sen}\ x = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

Alternativa **e**.

37. $\text{tg}\ \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{3}\cos \alpha$

$$\begin{cases} \text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{3}\cos \alpha \\ \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

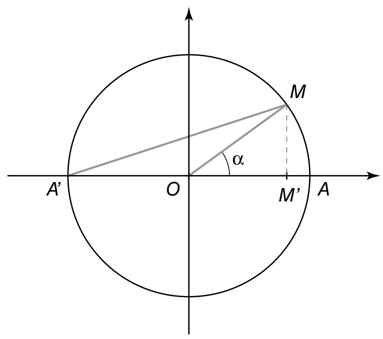
para $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Assim:

$$\text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{3}\cos \alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Logo, $\text{sen}\ \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ e $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

38. **a)** Seja M' a projeção de M sobre o eixo das abscissas.



Cálculo de OM':

$$(OM)^2 = (MM')^2 + (OM')^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + (OM')^2$$

$$\therefore (OM') = \frac{4}{5}$$

Assim:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{MN'}{OM'} = \frac{3}{4}$$

b) $m(A\widehat{A'}M) = \frac{1}{2} \cdot m(A\widehat{O}M) \Rightarrow m(A\widehat{A'}M) = \frac{\alpha}{2}$

c) $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{MM'}{A'M'} = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{1}{3}$

39. **a)** $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

$\therefore M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b) $\text{tg}\ \alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $N\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

c) $\text{tg } \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $N\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

40. a) $\text{tg }(-30°) = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg }(-120°) = -\text{tg } 120° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

c) $\text{tg }(-225°) = -\text{tg } 225° = -\text{tg } 45° = -1$

d) $\text{tg }(-300°) = -\text{tg } 300° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

e) $\text{tg }(-1.110°) = -\text{tg }(1.110°) = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg }(-1.860°) = -\text{tg }(1.860°) = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

41. a) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg } \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\text{tg } \frac{5\pi}{3} = \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\text{tg } \frac{7\pi}{6} = -\text{tg } \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\text{tg } \frac{3\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$

e) $\text{tg}\left(\frac{33\pi}{4}\right) = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$

f) $\text{tg}\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

42. Pelo enunciado, temos:

$$E = \frac{\text{tg }(\pi - x) + \text{tg }(-x) + \text{tg }(\pi + x)}{\text{tg }(2\pi - x)} =$$

$$= \frac{-\text{tg } x - \text{tg } x + \text{tg } x}{-\text{tg } x} = \frac{-\text{tg } x}{-\text{tg } x} = 1$$

Alternativa **a**.

43. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$a^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - a^2$

$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - a^2}$ ou $\cos \alpha = -\sqrt{1 - a^2}$ (não convém)

Assim:

$$\text{tg }(\pi - a) = \frac{\text{sen }(\pi - \alpha)}{\cos (\pi - \alpha)} = -\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Alternativa **a**.

44. Temos:

I. $\text{tg } 92° = -\text{tg }(180° - 92°) = -\text{tg } 88°$

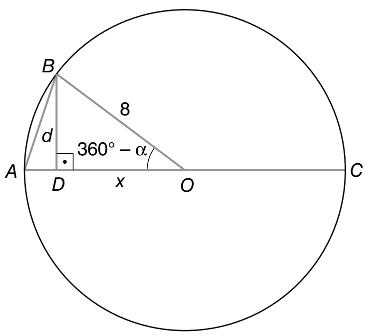
II. $\text{tg } 178° = \text{tg }(180° - 2°) = \text{tg }(-2°) = -\text{tg } 2°$

III. $\text{tg } 268° = \text{tg }(180° + 88°) = \text{tg } 88°$

IV. $\text{tg } 272° = \text{tg }(180° + 92°) = \text{tg } 92° = -\text{tg } 88°$

Alternativa **d**.

45. Indicando por O o centro da circunferência, por x a medida da projeção ortogonal de $\overline{OB}$ sobre $\overline{OA}$ e por d a distância procurada, esquematizamos:



Do triângulo OBA, temos:

$$\begin{cases} \text{tg }(360° - \alpha) = \frac{d}{x} \\ d^2 + x^2 = 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\text{tg } \alpha = \frac{d}{x} \\ d^2 + x^2 = 64 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{d}{x} \\ d^2 + x^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{3x}{4} & \text{(I)} \\ d^2 + x^2 = 64 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + x^2 = 64 \Rightarrow x = \frac{32}{5}$$

Substituindo x por $\frac{32}{5}$ em (I), concluímos:

$$d = \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{5} = \frac{96}{20} = 4{,}8$$

Ou seja, a distância entre o ponto B e o diâmetro $\overline{AC}$ é 4,8 cm.

46. a) O valor de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para que $\text{sen } x = 1$ é $x = 90°$.

Logo, $S = \{90°\}$.

b) Os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para os quais $\cos x = 0$ são $x = 90°$ ou $x = 270°$.

Logo, $S = \{90°, 270°\}$.

c) Os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para os quais $\text{sen } x = \frac{1}{2}$ são $x = 30°$ ou $x = 180° - 30° = 150°$.

Logo, $S = \{30°, 150°\}$.

d) Os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para os quais $\cos x = -\frac{1}{2}$ são $x = 180° - 60° = 120°$ ou $x = 180° + 60° = 240°$.

Logo, $S = \{120°, 240°\}$.

47. a) Na primeira volta no sentido positivo, temos:

$\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Na primeira volta no sentido positivo, temos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

48. a) $\text{tg}^2\, x = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 0$

$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi\}$.

b) $\text{tg}^2\, x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\text{tg}^2\, x = 3 \Rightarrow \text{tg } x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg } x = -\sqrt{3}$

- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\text{tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

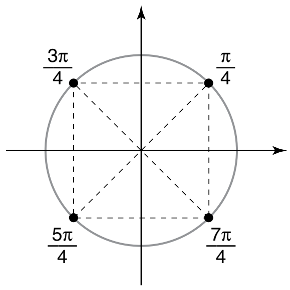
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

d) $|\text{tg } x| = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$
- $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

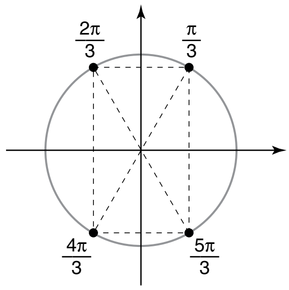
49. b) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **b** do exercício anterior, temos:



Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **c** do exercício anterior, temos:

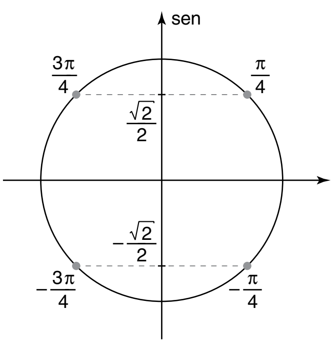


Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \right.$

$\left. \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

50. $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\therefore x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

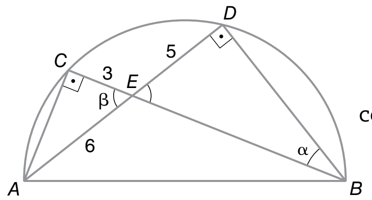
Logo, $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

51. $3 \text{ sen } x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \frac{3 \text{ sen } x}{\cos x} = \sqrt{3}$

$\therefore \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

52. a) Sendo β a medida do ângulo $A\hat{E}C$ e α a medida procurada, esquematizamos:



$\cos \beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60°$

Como os ângulos $A\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$ são opostos pelo vértice: $m(B\hat{E}D) = 60°$

Assim: $90° + 60° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad

b) No triângulo BED, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{ED}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{BD}$

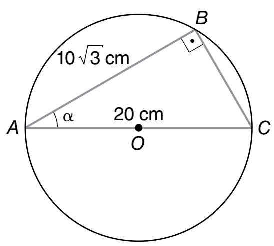
$\therefore BD = 5\sqrt{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, concluímos:

$(AB)^2 = 11^2 + (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow (AB)^2 = 196$

$\therefore AB = 14$ cm

53. Sendo α a medida procurada, esquematizamos:



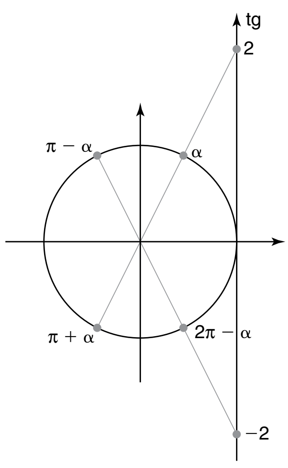
Assim, temos:

$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30° \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases}$

Logo, a medida do ângulo agudo que a corda $\overline{AB}$ forma com o diâmetro $\overline{AC}$ é 30°.

54. $\text{tg}^2 x = 4 \Rightarrow \text{tg } x = 2$ e $\text{tg } x = -2$

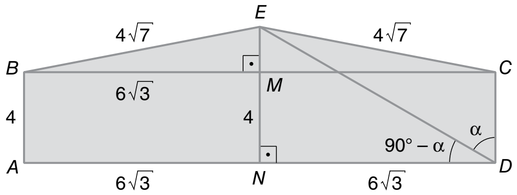
Sendo α a raiz pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:



Logo, a soma S das raízes no intervalo $[0, 2\pi[$ é dada por:

$S = \alpha + \pi - \alpha + \pi + \alpha + 2\pi - \alpha = 4\pi$

55. Traçando o segmento $\overline{EN}$, perpendicular à base $\overline{AD}$, obtemos:



Temos, no triângulo *EBM*:

$(EM)^2 + (6\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{7})^2 \Rightarrow (EM)^2 = 112 - 108 = 4$

$\therefore EM = 2$

Logo: $EN = 2 + 4 = 6$

Observando o triângulo *END*, temos:

$\text{tg}\,(90° - \alpha) = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 90° - \alpha = 30°$

$\therefore \alpha = 60°$

56. $\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = 0$ ou $\cos x = 0$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

57. $2\,\text{sen}\,x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\,(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ ou $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$

Resolvendo cada uma dessas duas equações, obtemos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

58. $2 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}\,x - \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,x \cdot (2\cos^2 x - 1) = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \text{sen}\,x = 0$ ou $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x = k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

59. $2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\therefore \cos x(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$
- $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

60. Do enunciado temos:

$2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \text{tg}\,x - 2 \cdot \text{sen}\,x - \text{tg}\,x + 1 = 0$

Colocando 2sen x e -1 em evidência, temos:

$2\text{sen}\,x\,(\text{tg}\,x - 1) - 1(\text{tg}\,x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2\text{sen}\,x - 1) \cdot (\text{tg}\,x - 1) = 0$

$\therefore 2\text{sen}\,x - 1 = 0$ ou $\text{tg}\,x - 1 = 0$

$\therefore \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$ ou $\text{tg}\,x = 1$

Considerando o intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Logo, a soma das raízes é:

$\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{6\pi}{6} + \dfrac{6\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{2}$

Alternativa **c**.

61. a) $(4\,\text{sen}^2 x - 3)(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{4\,\text{sen}^2 x - 3 = 0}_{\text{(I)}}$ ou $\underbrace{\cos x - 1 = 0}_{\text{(II)}}$

Resolvendo as equações (I) e (II), para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:

(I) $4\,\text{sen}^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \text{sen}\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou

$x = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

(II) $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1$

$\therefore x = 0$ ou $x = 2\pi$

De (I) e (II), concluímos:

$S = \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

b) $\cos^2 x \cdot \text{sen}\,x - \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x\,(\cos^2 x - 1) = 0$

$\therefore \text{sen}\,x = 0$ ou $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

c) $4 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x + 2\,\text{sen}\,x - 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}\,x\,(2\cos x + 1) - 1(2\cos x + 1) = 0$

$\therefore (2\cos x + 1)(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$
- $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x\,(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0$

$\therefore \text{sen}\,x = 0$ ou $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$.

e) $\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\,\text{tg}\,x = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x\,(\text{tg}\,x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \text{tg}\,x = 0$ ou $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$

Assim:

- $\text{tg}\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

f) $tg^5\,x - tg\,x = 0 \Rightarrow tg\,x\,(tg^4\,x - 1) = 0$
$\therefore\ tg\,x = 0$ ou $tg\,x = 1$ ou $tg\,x = -1$
Assim:
- $tg\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $tg\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $tg\,x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$.

62. $2 \cdot sen\,x \cdot cos\,x = \sqrt{2}\,cos\,x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot sen\,x \cdot cos\,x - \sqrt{2}\,cos\,x = 0$
$\therefore\ cos\,x\,(2 \cdot sen\,x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow cos\,x = 0$ ou $sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Logo, no intervalo $[0, 3\pi]$, temos:
$x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$
ou $x = \frac{9\pi}{4}$ ou $x = \frac{11\pi}{4}$
Alternativa **e**.

63. Condição de existência: $cos\,x \neq 0$
$(tg^2\,x - 3)(cos^2\,x - 1) = 0 \Leftrightarrow tg^2\,x - 3 = 0$ ou $cos^2\,x - 1 = 0$
$\therefore\ tg\,x = \sqrt{3}$ ou $tg\,x = -\sqrt{3}$ ou $cos\,x = 1$ ou $cos\,x = -1$
Assim, temos:
- $tg\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $tg\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $cos\,x = 1$ ou $cos\,x = -1 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

64. Condição de existência: $cos\,x \neq 0$
$tg\,x \cdot sen\,x - tg\,x - sen\,x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\,x\,(sen\,x - 1) - (sen\,x - 1) = 0$
$\therefore\ (sen\,x - 1)(tg\,x - 1) = 0 \Rightarrow sen\,x - 1 = 0$ ou $tg\,x - 1 = 0$
Assim, temos:
- $sen\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ não convém, pois $tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$ e $cos\,x \neq 0$
- $tg\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

65. Condição de existência: $cos\,x \neq 0$
$sen\,x \cdot tg\,x + sen\,x - tg\,x \cdot cos\,x - cos\,x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow sen\,x\,(tg\,x + 1) - cos\,x\,(tg\,x + 1) = 0$
$\therefore\ (tg\,x + 1)(sen\,x - cos\,x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\,x + 1 = 0$ ou $sen\,x - cos\,x = 0$
Assim, temos:
- $tg\,x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$
- $sen\,x = cos\,x \Rightarrow tg\,x = 1$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$
Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

66. Condição de existência: $cos\,x \neq 0$
Temos:
$tg\,x \cdot sen\,x = tg\,x \Rightarrow tg\,x \cdot sen\,x - tg\,x = 0$
$\therefore\ tg\,x\,(sen\,x - 1) = 0 \Rightarrow tg\,x = 0$ ou $sen\,x = 1$
Os valores de x para os quais $sen\,x = 1$ não convêm, pois esses valores não satisfazem a condição de existência. Portanto:
$tg\,x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

67. a) $cos^2\,x - 4\,cos\,x + 3 = 0$
Fazendo a mudança de variável $cos\,x = t$, obtemos a equação de 2º grau:
$t^2 - 4t + 3 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$
$\therefore\ t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow t = 3$ ou $t = 1$
Como $cos\,x = t$, temos $cos\,x = 3$ (impossível) ou $cos\,x = 1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$cos\,x = 1 \Rightarrow x = 0$
Logo, $S = \{0\}$.

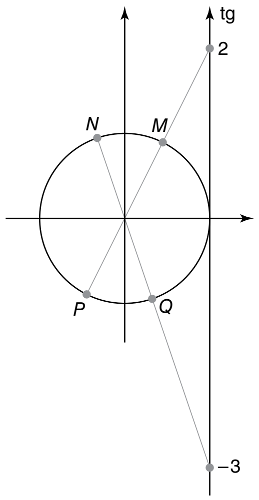
b) $sen^2\,x - 3\,sen\,x + 2 = 0$
Fazendo a mudança de variável $sen\,x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$t^2 - 3t + 2 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow t = 2$ ou $t = 1$
Como $sen\,x = t$, temos $sen\,x = 2$ (impossível) ou $sen\,x = 1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$sen\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

c) $2\,cos^2\,x + 3\,cos\,x + 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável $cos\,x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$2t^2 + 3t + 1 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ ou $t = -1$
Como $cos\,x = t$, temos $cos\,x = -\frac{1}{2}$ ou $cos\,x = -1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
- $cos\,x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $cos\,x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi\right\}$.

68. $tg^2\,x + tg\,x - 6 = 0$
Para $tg\,x = y$, temos: $y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -3$
Logo: $tg\,x = 2$ ou $tg\,x = -3$

Quatro pontos, M, N, P e Q, são extremos de arcos trigonométricos que têm essas tangentes, conforme mostra a figura:



Assim, concluímos que no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ a equação proposta apresenta 3 raízes.

69. $tg^2\, x - (1 + \sqrt{3})\, tg\, x + \sqrt{3} = 0$

Para $t = tg\, x$, temos:

$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$

Sendo S e P, respectivamente, a soma e o produto das raízes dessa equação do 2º grau, temos:

$\begin{cases} S = 1 + \sqrt{3} \\ P = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = \sqrt{3}$

Assim:

- $tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $tg\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Concluímos, então, que a maior raiz da equação proposta, no intervalo $[0, 2\pi[$, é $\frac{4\pi}{3}$.

70. $sen^2\, x - 2\cos x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$

$\therefore \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos x = y$, obtemos a equação do 2º grau:

$y^2 + 2y + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$\therefore y = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y = -1$

Retornando à variável original, temos $\cos x = -1$. Assim, para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{\pi\}$.

71. $3\, sen^2\, x + sen\, x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 3\, sen^2\, x - sen\, x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$

$\therefore 3(1 - sen^2\, x) - sen\, x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cos^2 x - sen\, x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$

$\therefore \cos^2 x - sen\, x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\,(\cos x - sen\, x) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ ou $\cos x - sen\, x = 0$

Assim, temos:

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\cos x = sen\, x \Rightarrow tg\, x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

72. $8\, sen^4\, x + 2\cos^2 x = 3 \Rightarrow 8\, sen^4\, x + 2(1 - sen^2\, x) = 3$

$\therefore 8\, sen^4\, x - 2\, sen^2\, x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $sen^2\, x = t$, obtemos a equação do 2º grau:

$8t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1) = 36$

$\therefore t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ou $t = -\frac{1}{4}$

Retornando à variável original, temos:

$sen^2\, x = \frac{1}{2}$ ou $sen^2\, x = -\frac{1}{4}$ (impossível)

Assim, calculamos os possíveis valores de sen x:

$sen^2\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $sen\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, concluímos:

- $sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
- $sen\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$.

73. Temos que $sen^2\, x = |sen\, x|^2$; logo, a equação proposta é equivalente a: $|sen\, x|^2 + |sen\, x| - 2 = 0$

Fazendo a mudança de variável $|sen\, x| = y$, temos:

$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -2$

Retornando à variável original, obtemos:

$|sen\, x| = 1$ ou $|sen\, x| = -2$

Como o módulo de um número real é positivo ou nulo, só nos interessa $|sen\, x| = 1$, cuja resolução é:

$|sen\, x| = 1 \Rightarrow sen\, x = \pm 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Alternativa **b**.

74. $sen^4\, x = \cos^4 x \Rightarrow sen\, x = \cos x$ ou $sen\, x = -\cos x$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $sen\, x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $sen\, x = -\cos x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, a equação proposta tem quatro soluções no intervalo considerado.

Alternativa **a**.

75. Como o resultado da multiplicação é 0, precisamos que um dos fatores seja 0; logo:

- Para $2\cos^2 x + 3\, sen\, x = 0$

  $2 \cdot (1 - sen^2\, x) + 3\, sen\, x = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow -2\, sen^2\, x + 3\, sen\, x + 2 = 0$

  Pela fórmula resolutiva de uma equação de 2º grau, temos:

  $sen\, x = -\frac{1}{2}$ ou $sen\, x = 2$ (não convém)

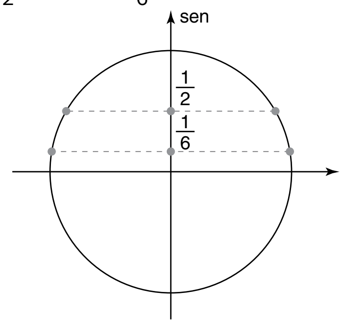
  Concluímos então que as raízes da equação são: $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

- Para $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$
  $\cos^2 x = \text{sen}^2 x$
  $\therefore \cos x = \text{sen } x$ (I) ou $\cos x = -\text{sen } x$ (II)
  Em (I), as raízes são: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$
  Em (II), as raízes são: $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

Portanto, temos 6 possíveis soluções para a equação proposta.

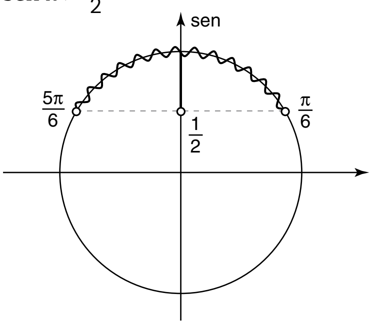
76. Partindo do enunciado, temos:
$\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0 \Rightarrow 1 - \cos^2 x - 2\cos^4 x = 0$
Pela fórmula resolutiva de uma equação de 2º grau, temos:
$\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ou $\cos^2 x = -1$ (não convém)
$\therefore \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
Concluímos, então, que o conjunto solução é:
$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
Somando as raízes da equação, temos:
$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$
Alternativa **c**.

77. Pelo enunciado, temos:
$8^{\text{sen}^2 x} = 4^{\text{sen } x - \frac{1}{8}} \Rightarrow 2^{3\text{sen}^2 x} = 2^{2\text{sen } x - \frac{1}{4}}$
$\therefore 3\text{sen}^2 x = 2\text{sen } x - \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 12\text{sen}^2 x - 8\text{sen } x + 1 = 0$
Pela fórmula resolutiva de uma equação de 2º grau, temos:
$\text{sen } x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{6}$



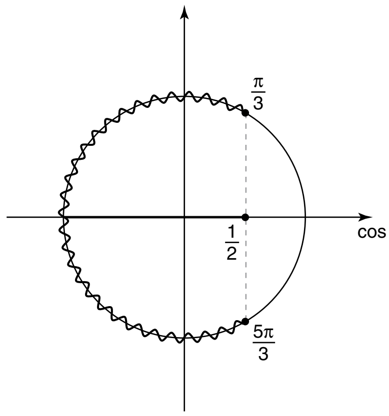
Pelo gráfico, concluímos que a equação admite 4 raízes.
Alternativa **b**.

78. a) $\text{sen } x > \frac{1}{2}$



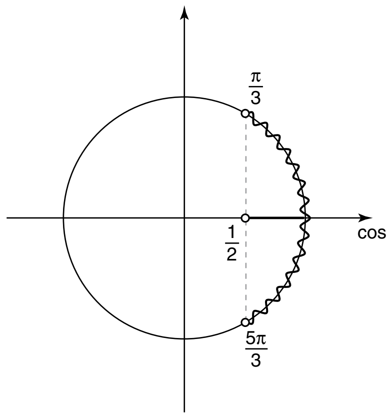
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$



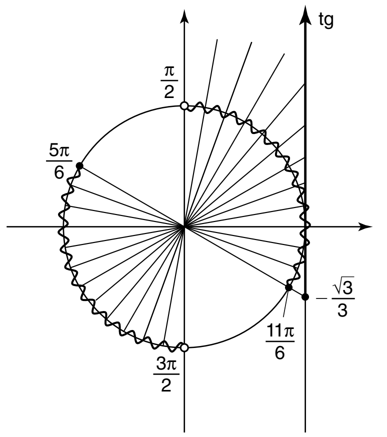
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$.

c) $\cos x > \frac{1}{2}$



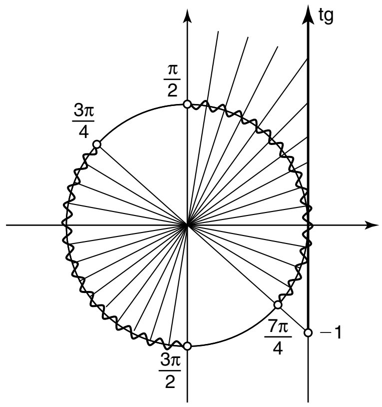
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

d) $\text{tg } x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$



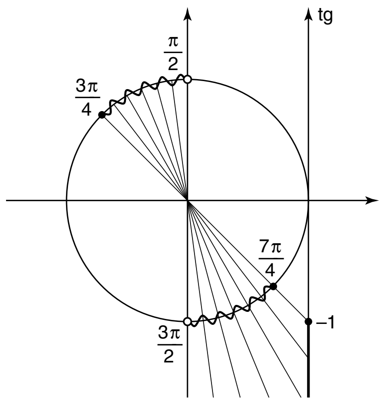
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

e) $\text{tg}\, x > -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

f) $\text{tg}\, x \leqslant -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$.

79. b) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **b** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Como os números $\frac{5\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução da inequação do item **c** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

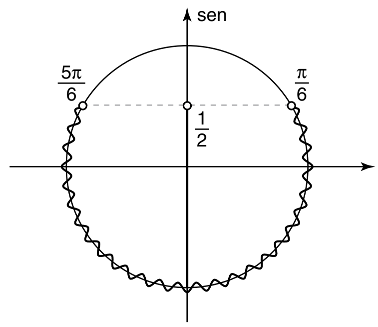
d) Basta adicionar a expressão $k\pi$ a cada extremo do intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Assim, o conjunto solução da inequação do item **d** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

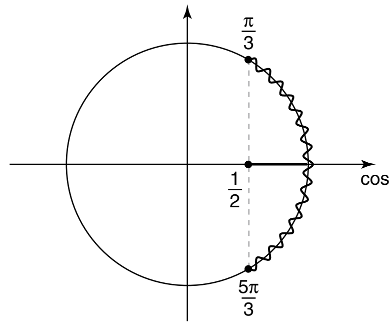
80. a) $\begin{cases} \text{sen } x < \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

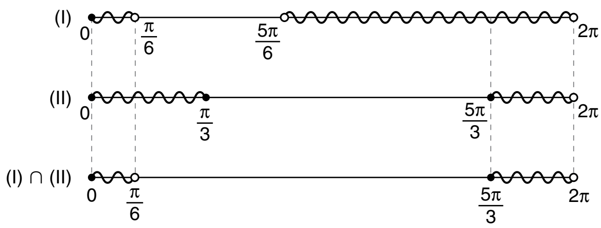
(I) $\text{sen } x < \frac{1}{2}$



(II) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

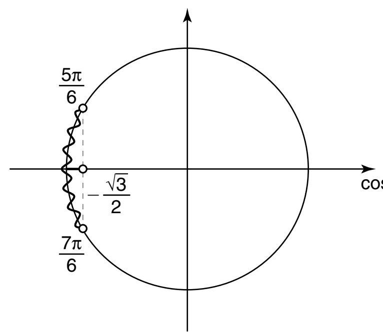


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

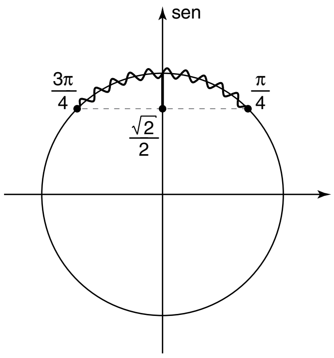
b) $\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

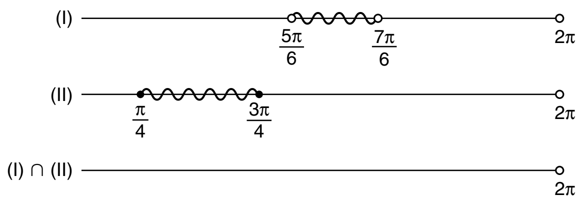
(I) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$



(II) sen $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

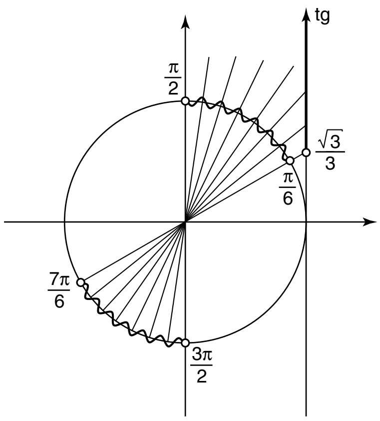


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

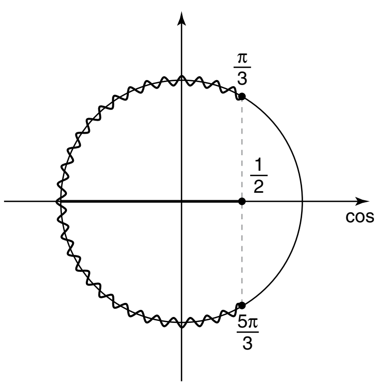


Logo, $S = \varnothing$.

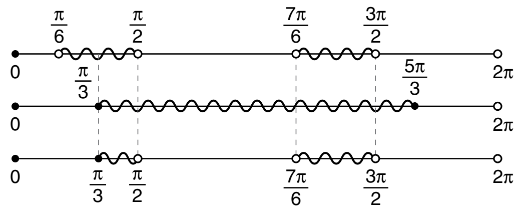
c) $\text{tg } x > \frac{\sqrt{3}}{3}$



$\cos x \leqslant \frac{1}{2}$

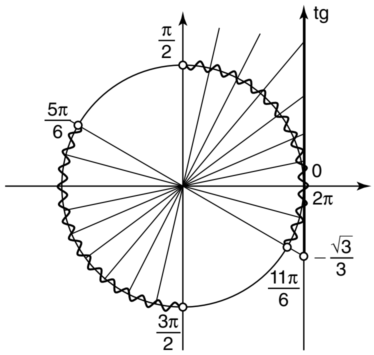


Retificando as soluções, temos:

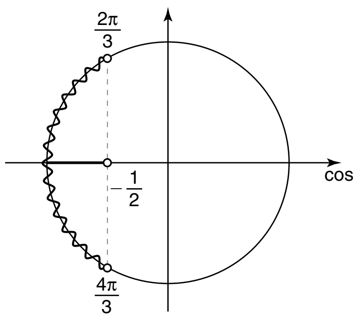


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

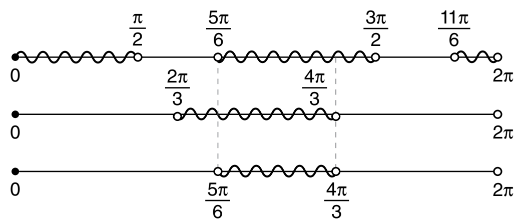
d) $\text{tg } x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$



$\cos x < -\frac{1}{2}$



Retificando as soluções, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$.

81. **a)** Como os números $\frac{5\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução do sistema do item **a** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\right.$$

$$\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **d** do exercício anterior:

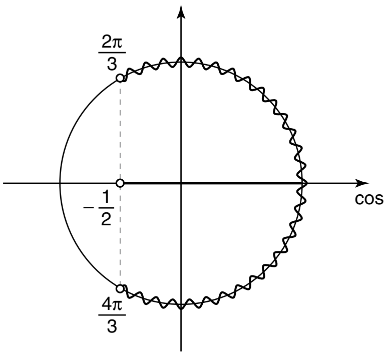
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

82. a) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

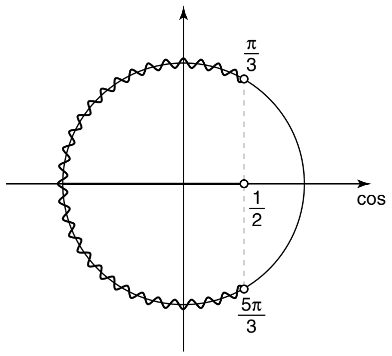
$$\begin{cases} \cos x > -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

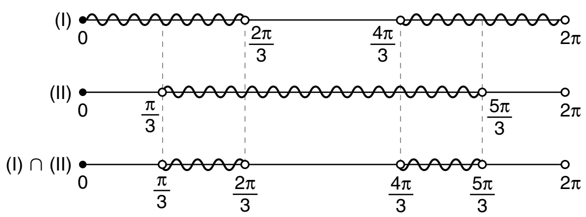
(I) $\cos x > -\dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x < \dfrac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



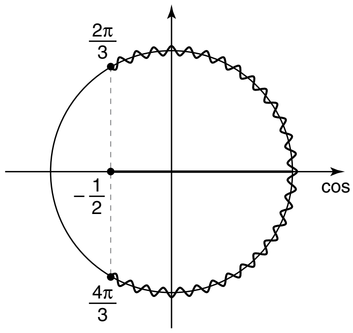
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{4\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

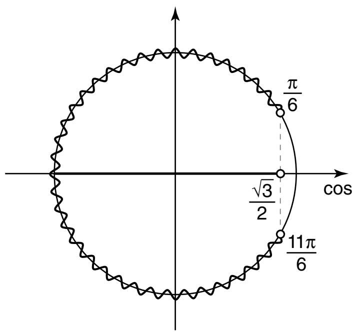
$$\begin{cases} \cos x \geqslant -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

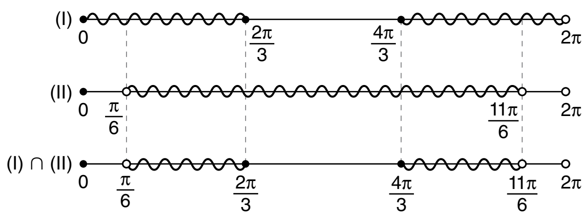
(I) $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

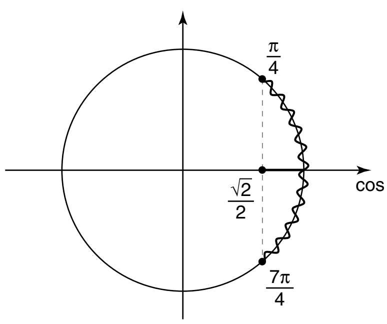


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} < x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{4\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

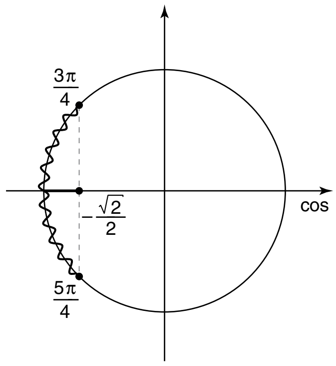
c) $|\cos x| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underbrace{\cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{(II)}} \text{ ou } \underbrace{\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{(I)}}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

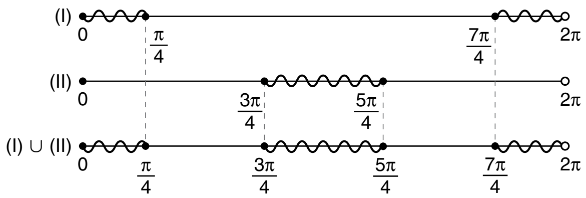
(I) $\cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(II) $\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

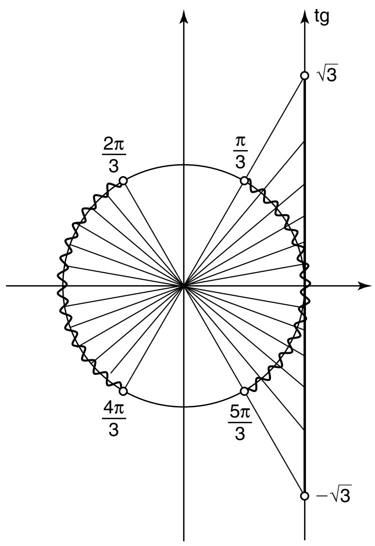


Fazendo a união dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



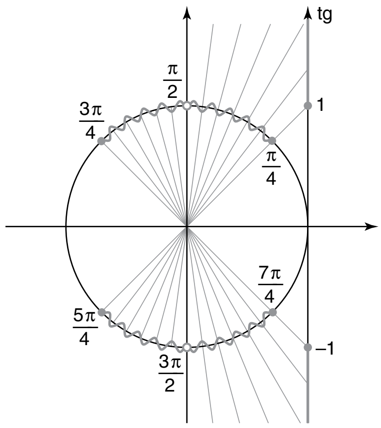
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

d) $|\text{tg } x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < \text{tg } x < \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

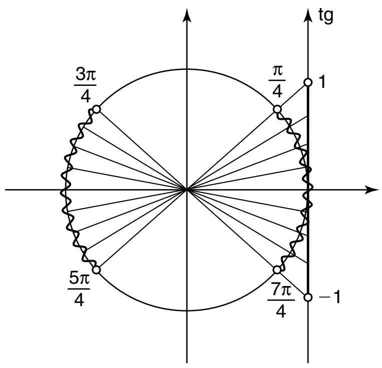
e) $|\text{tg } x| \geqslant 1 \Rightarrow \text{tg } x \geqslant 1 \text{ ou } \text{tg } x \leqslant -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{4} \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

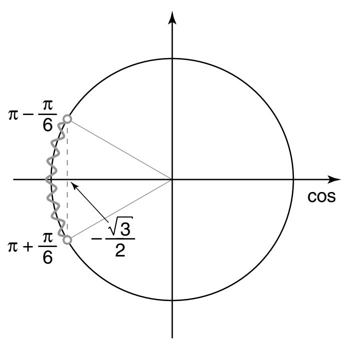
f) $|\text{tg } x| + 1 > |2 \text{ tg } x| \Rightarrow |\text{tg } x| + 1 > 2|\text{tg } x|$

$\therefore |\text{tg } x| < 1 \Rightarrow -1 < \text{tg } x < 1$



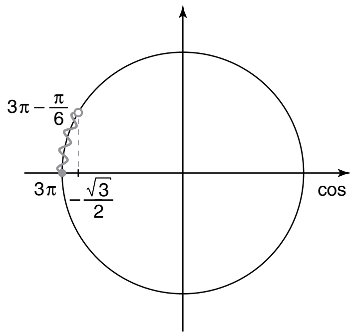
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

83. Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:



Portanto, nosso intervalo é $\left]\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right[$.

Para $x \in [2\pi, 3\pi]$, temos:



Portanto, nosso intervalo é $\left]\frac{17\pi}{6}, 3\pi\right]$.

Logo, o conjunto solução da inequação é:

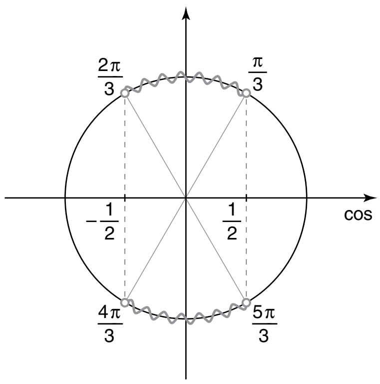
$$S = \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{6}, 3\pi\right]$$

Alternativa **e**.

84. Pelo enunciado, temos:

$$|\cos x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x > -\frac{1}{2}$$

Representando os valores de x na circunferência trigonométrica, obtemos:



Portanto, o conjunto solução é formado por todos os números reais x tais que:

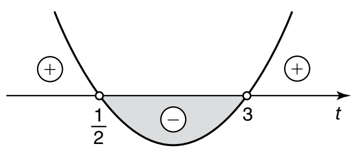
$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

Alternativa **a**.

85. **a)** $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 < 0$

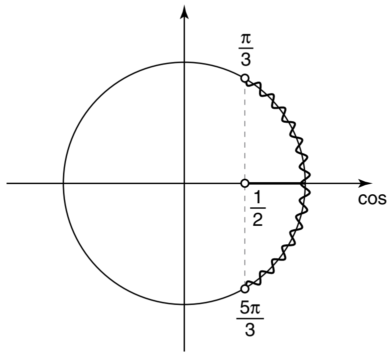
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 7t + 3 < 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 7t + 3$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 3$

Retornando à variável original, temos $\frac{1}{2} < \cos x < 3$, ou seja, $\cos x > \frac{1}{2}$, cujas soluções são representadas por:



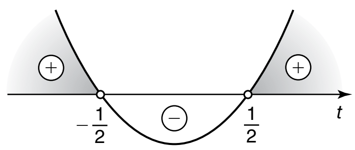
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

b) $4\cos^2 x - 1 > 0$

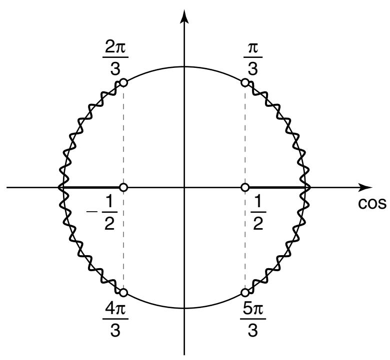
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $4t^2 - 1 > 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 4t^2 - 1$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$ ou $t > \frac{1}{2}$

Retornando à variável original, temos $\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{1}{2}$. A reunião dos conjuntos soluções dessas inequações é representada por:



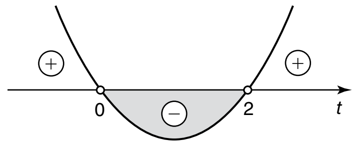
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

c) $\text{sen}^2\, x < 2\,\text{sen}\, x \Rightarrow \text{sen}^2\, x - 2\,\text{sen}\, x < 0$

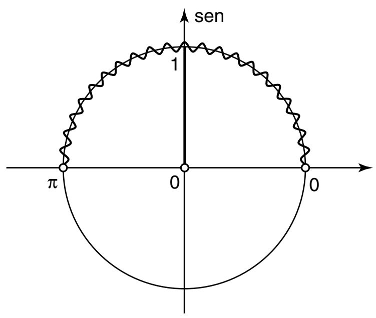
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos a inequação $t^2 - 2t < 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = t^2 - 2t$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < 2$

Retornando à variável original, temos $0 < \text{sen } x < 2$, ou seja, $\text{sen } x > 0$, cujas soluções são representadas por:



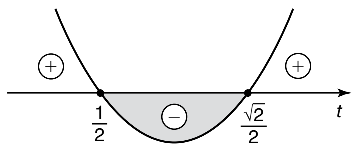
Concluímos, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$

d) $4\cos^2 x - (2\sqrt{2} + 2)\cos x + \sqrt{2} \leqslant 0$

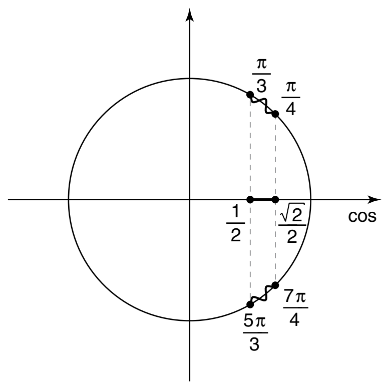
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2} \leqslant 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2}$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

Retornando à variável original, temos $\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções são representadas por:



Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Nota:

No caso de os alunos terem dificuldade na resolução da equação $4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2} = 0$, podem ser sugeridas duas formas de resolução:

I) Soma (S) e Produto (P) das raízes:

$$\begin{cases} S = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \\ P = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Concluímos, então, que as raízes são $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

II) $\Delta = 8 + 8\sqrt{2} + 4 - 16\sqrt{2} = 8 - 8\sqrt{2} + 4 = (2\sqrt{2} - 2)^2$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{2} + 2 \pm \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8} \text{ ou}$$

$$t = \frac{2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8}$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } t = \frac{1}{2}$$

e) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{3} + \dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3}{6} \leqslant \dfrac{0}{6}$

$\therefore 2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3 \leqslant 0 \Rightarrow$

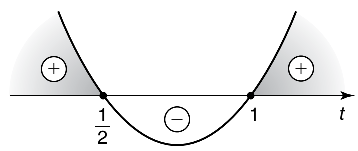
$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 \leqslant 0$

$\therefore -2\cos^2 x + 3\cos x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 3t + 1 \geqslant 0$

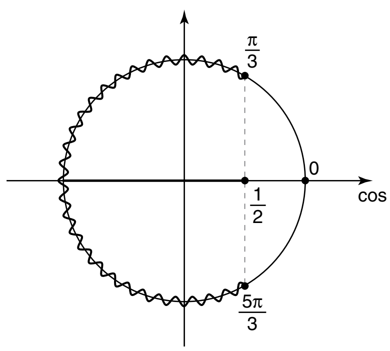
A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 3t + 1$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant \frac{1}{2}$ ou $t \geqslant 1$

Retornando à variável original, temos $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $\cos x \geqslant 1$, ou seja, $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1$.

A reunião dos conjuntos soluções dessa inequação e dessa equação é representada por:



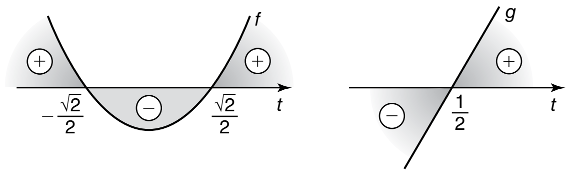
Concluímos, então:

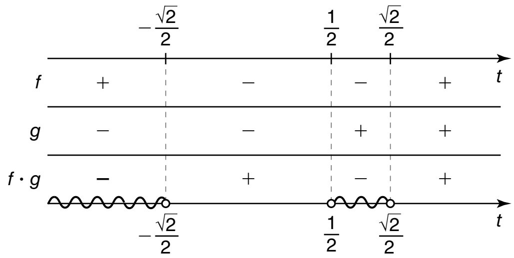
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 0\right\}$

f) $(2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) < 0$

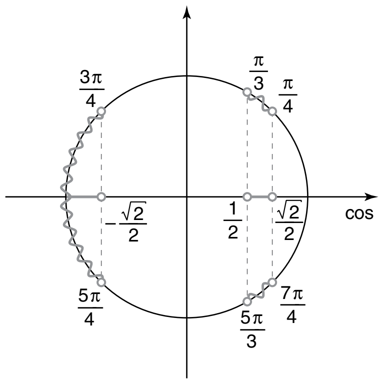
Fazendo $\cos x = t$, temos: $(2t^2 - 1)(2t - 1) < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = 2t - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:





Logo, $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e, portanto:



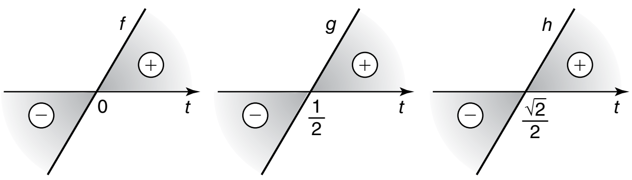
Concluímos, então:

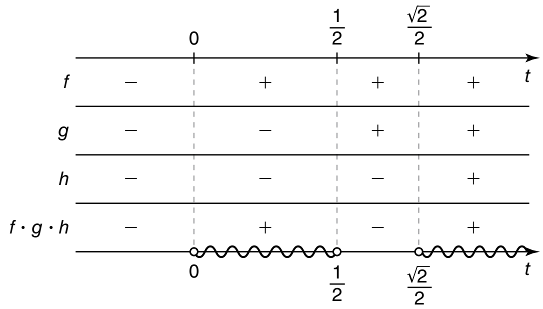
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

g) $\operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)(2\operatorname{sen} x - \sqrt{2}) > 0$

Fazendo $\operatorname{sen} x = t$, temos: $t\left(t - \frac{1}{2}\right)(2t - \sqrt{2}) > 0$

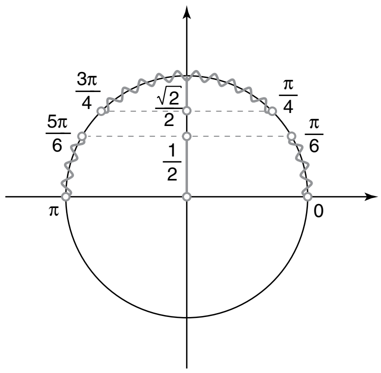
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t$, $g(t) = t - \frac{1}{2}$, $h(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $f \cdot g \cdot h$, obtemos:





$f(t) \cdot g(t) \cdot h(t) > 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$ ou $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $0 < \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Concluímos, então, que o conjunto solução S é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

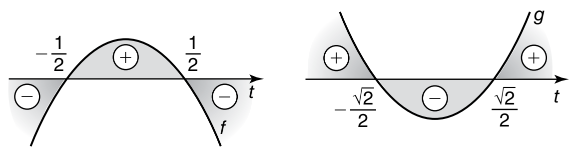
h) $\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow$

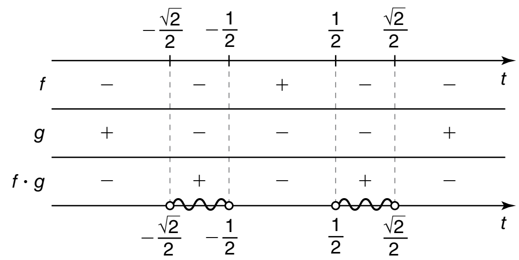
$\Rightarrow \left(1 - \operatorname{sen}^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0$

$\therefore \left(-\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4}\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0$

Fazendo $\operatorname{sen} x = t$, temos: $\left(-t^2 + \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) > 0$

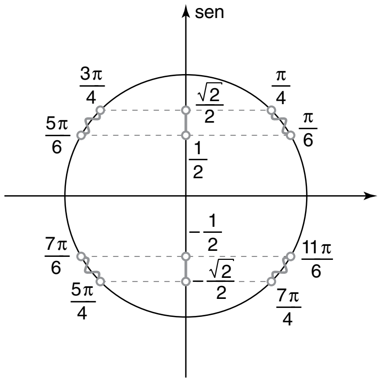
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -t^2 + \frac{1}{4}$, $g(t) = t^2 - \frac{1}{2}$ e $f \cdot g$, obtemos:





$f(t) \cdot g(t) > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen } x < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < \text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e, portanto:



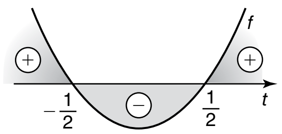
Concluímos, então:

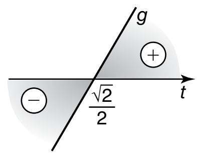
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \right.$ ou $\left. \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

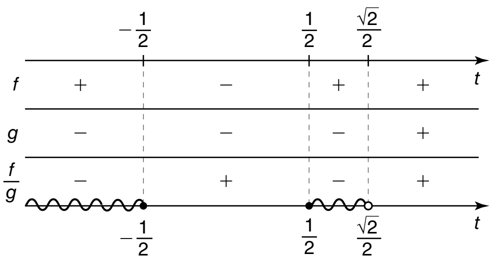
i) $\frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} \leqslant 0$

Fazendo cos x = t, temos: $\frac{4t^2 - 1}{2t - \sqrt{2}} \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 4t^2 - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:

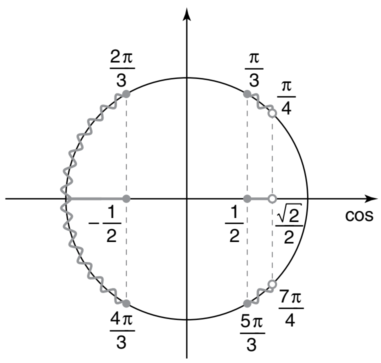






$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e, portanto:



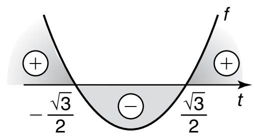
Concluímos, então:

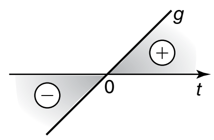
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

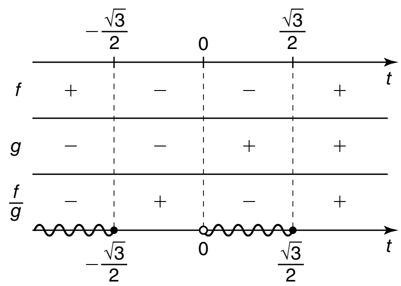
j) $\frac{4\cos^2 x - 3}{\cos x} \leqslant 0$

Fazendo cos x = t, temos: $\frac{4t^2 - 3}{t} \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 4t^2 - 3$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:

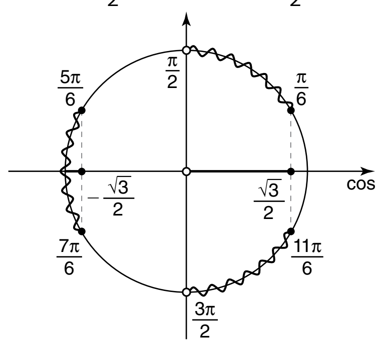






$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $0 < t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $0 < \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; e, portanto:



Concluímos, então:

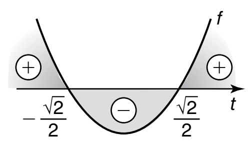
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

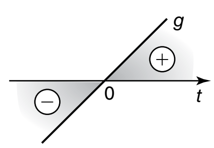
k) $\frac{-2\cos^2 x + 1}{\text{sen } x} > 0 \Rightarrow \frac{-2(1 - \text{sen}^2 x) + 1}{\text{sen } x} > 0$

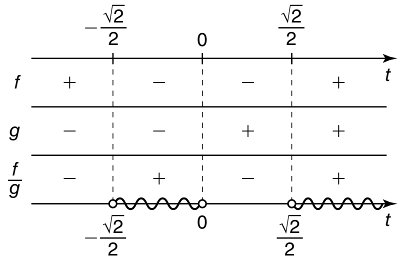
$\therefore \frac{2\,\text{sen}^2 x - 1}{\text{sen } x} > 0$

Fazendo sen x = t, temos: $\frac{2t^2 - 1}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:

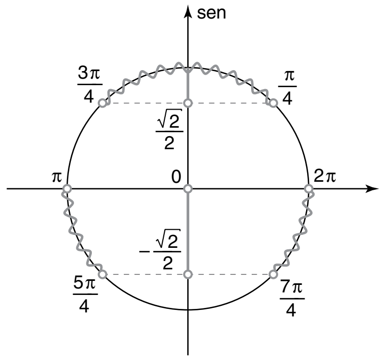






$\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < t < 0$ ou $t > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\, x < 0$ ou $\text{sen}\, x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e, portanto:



Concluímos, então:

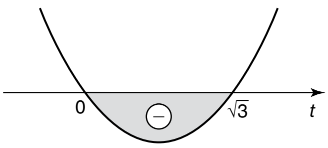
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

86. a) $\text{tg}^2\, x - \sqrt{3}\, \text{tg}\, x \leqslant 0$

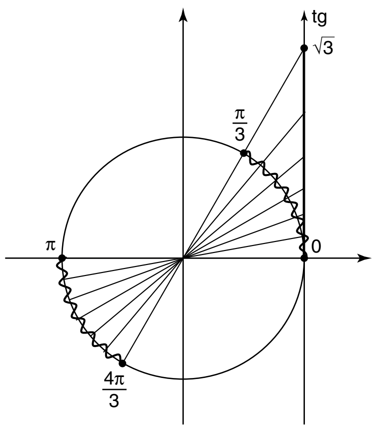
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos:

$t^2 - \sqrt{3}t \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - \sqrt{3}t$, obtemos:



Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$; e, portanto: $0 \leqslant \text{tg}\, x \leqslant \sqrt{3}$



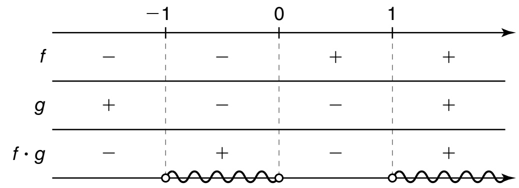
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{tg}^3\, x - \text{tg}\, x > 0$

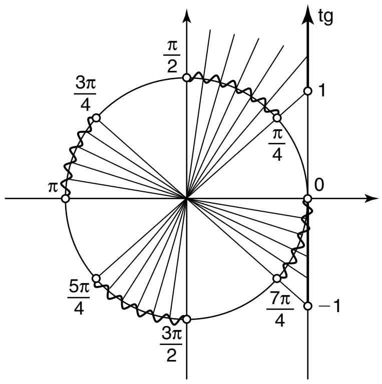
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos:

$t^3 - t > 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t$, $g(t) = t^2 - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:



Assim, $f(t) \cdot g(t) > 0 \Rightarrow -1 < t < 0$ ou $t > 1$; e, portanto: $-1 < \text{tg}\, x < 0$ ou $\text{tg}\, x > 1$



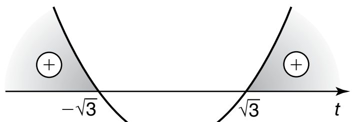
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

c) $\text{tg}^2\, x - 3 \geqslant 0$

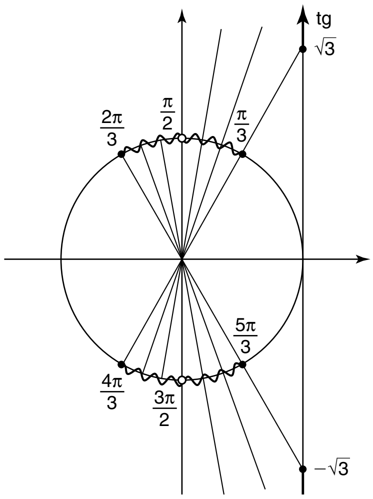
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos:

$t^2 - 3 \geqslant 0$

Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - 3$, obtemos:



Assim, $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\sqrt{3}$ ou $t \geqslant \sqrt{3}$; e, portanto: $\text{tg}\, x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $\text{tg}\, x \geqslant \sqrt{3}$



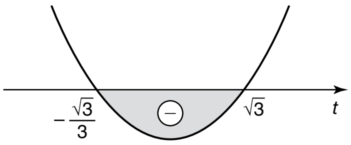
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

d) $3\,\text{tg}^2\,x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}\,x - 3 \leqslant 0$

Fazendo tg x = t, temos:

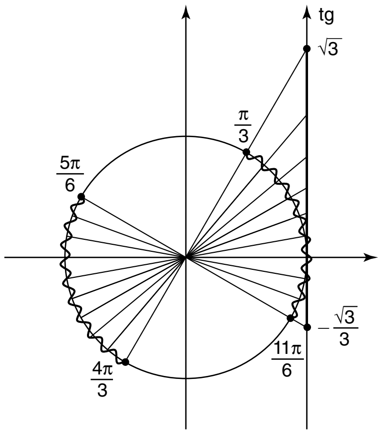
$3t^2 - 2\sqrt{3}\,t - 3 \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal da função $f(t) = 3t^2 - 2\sqrt{3}\,t - 3$, obtemos:



Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$; e, portanto:

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \text{tg}\,x \leqslant \sqrt{3}$



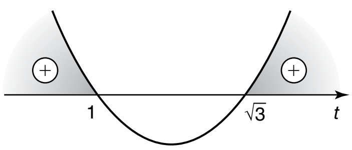
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

e) $\text{tg}^2\,x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\text{tg}\,x + \sqrt{3} > 0$

Fazendo tg x = t, temos:

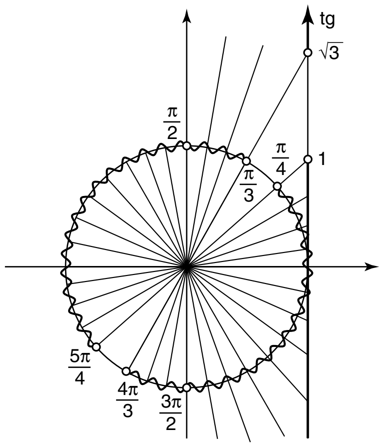
$t^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)t + \sqrt{3} > 0$

Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)t + \sqrt{3}$, obtemos:



Assim, $f(t) > 0 \Rightarrow t < 1$ ou $t > \sqrt{3}$; e, portanto:

$\text{tg}\,x < 1$ ou $\text{tg}\,x > \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

f) $\left(\text{tg}^2\,x - 1\right)\left(3\text{tg}\,x - \sqrt{3}\right) \geqslant 0$

Fazendo tg x = t, temos:

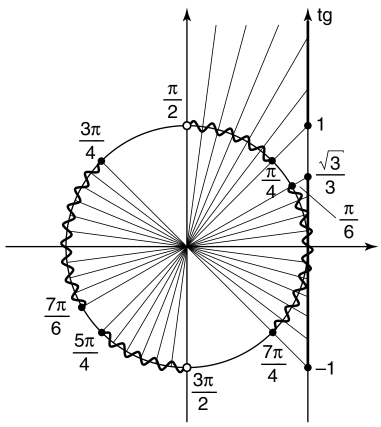
$\left(t^2 - 1\right)\left(3t - \sqrt{3}\right) \geqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t^2 - 1$, $g(t) = 3t - \sqrt{3}$ e $f \cdot g$, obtemos:

	$t < -1$	$-1 < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} < t < 1$	$t > 1$
f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Assim: $f(t) \cdot g(t) \geqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $t \geqslant 1$;

portanto: $-1 \leqslant \text{tg}\,x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\text{tg}\,x \geqslant 1$



Logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leqslant x < 2\pi\right\}$

g) $\dfrac{tg^2\,x - 3}{tg\,x + 1} \leqslant 0$

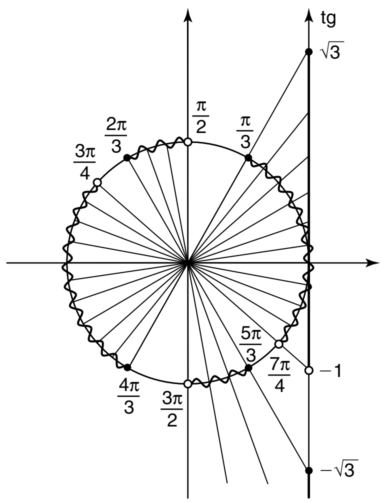
Fazendo tg $x = t$, temos: $\dfrac{t^2 - 3}{t + 1} \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = t^2 - 3$, $g(t) = t + 1$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$	
f	$+$		$-$		$-$		$+$
g	$-$		$-$		$+$		$+$
$\dfrac{f}{g}$	$-$		$+$		$-$		$+$

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\sqrt{3}$ ou $-1 < t \leqslant \sqrt{3}$; e, portanto: tg $x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $-1 <$ tg $x \leqslant \sqrt{3}$

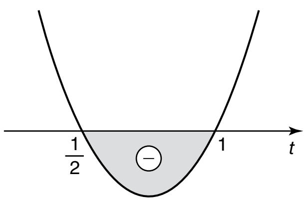


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{5\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

87. Fazendo a mudança de variável cos $x = t$, temos:

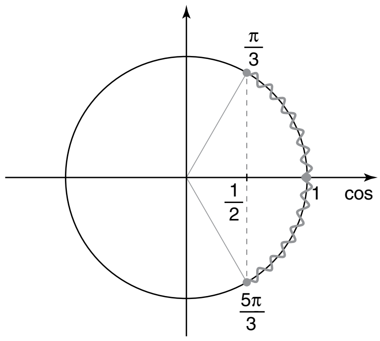
$$2t^2 - 3t + 1 \leqslant 0$$

Pelo estudo do sinal da função $f(t) = 2t^2 - 3t + 1$, obtemos os valores de t para os quais $f(t) \leqslant 0$:



Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$.

Logo, $\dfrac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.



Portanto, o conjunto solução é formado por todos os valores de x tais que: $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi$

Alternativa **a**.

Exercícios contextualizados

88. Como uma volta corresponde a 360°, temos:

Volta	Ângulo	
1	360°	
x	900°	$\therefore x = 2{,}5$

Alternativa **d**.

89. Entre a posição do número 12 até a de 1 hora tem $\dfrac{360°}{12} = 30°$, portanto em 20 minutos o ponteiro das horas andou:

Ângulo	Tempo	
30°	60 min	
x	20 min	$\therefore x = 10°$

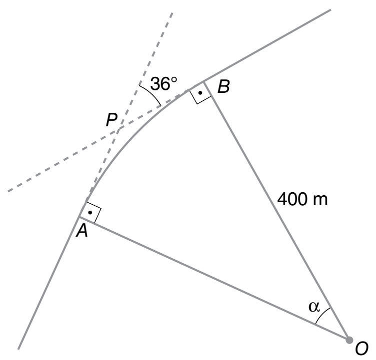
Portanto, o ponteiro das horas andou 70° (30° a cada hora, mais 10° em 20 minutos).
Como o ponteiro dos minutos está na posição do número 4, que representa 20 minutos, e equivale a 120° em relação a posição zero hora, então o ângulo formado pelos ponteiros é 120° − 70° = 50°.

90. Como 24 h equivalem a $24 \cdot 60$ min $= 1.440$ min, podemos fazer:

Grau	Minuto	
360°	1.440 min	
3°	x	$\therefore x = 12$ min

Portanto, a diferença de nascer do Sol entre as duas cidades é de 12 minutos.

91. Pelos dados do enunciado, temos:



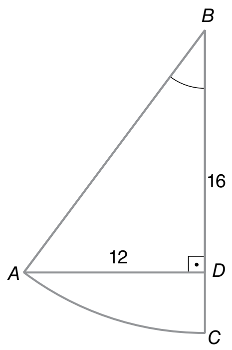
A medida do ângulo $A\hat{P}B$ é dada por:
$180° - 36° = 144°$
Logo, a medida α do ângulo $A\hat{O}B$ é:
$360° - 90° - 90° - 144° = 36°$
Agora, calculamos o comprimento x da curva $\overset{\frown}{AB}$ por uma regra de três:

Medida do ângulo		Comprimento
360°	———	$2\pi \cdot 400$
36°	———	x

$\therefore\ x = 80\pi$

Logo, a curva terá 80π metros de comprimento ou, aproximadamente, 251 m.

92. Pelos dados do enunciado, temos:



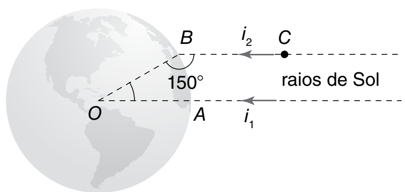
$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{12}{16} = 0{,}75$$

Na calculadora, calculamos o ângulo cuja tangente é 0,75, obtendo: $m(A\hat{B}C) \approx 36{,}9°$
Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida do raio, obtendo $AB = 20$ m.
Finalmente, calculamos o comprimento x do arco $\overset{\frown}{AC}$ por uma regra de três:

Medida do ângulo		Comprimento
360°	———	$2\pi \cdot 20$
36,9°	———	x

$\therefore\ x = 4{,}1\pi \approx 12{,}87$
Logo, o comprimento do arco é de aproximadamente 12,87 m.

93. a)



Como $i_1 // i_2$, temos que os ângulos colaterais $A\hat{O}B$ e $O\hat{B}C$ são suplementares, logo o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 30°. Assim, o comprimento c do arco $\overset{\frown}{AB}$ é dado pela regra de três:

Medida do ângulo central em grau		Comprimento do arco em km
360	———	$2 \cdot \pi \cdot 6.370$
30	———	c

$\therefore\ c = \dfrac{3.185\pi}{3}$ km ou, aproximadamente, 3.333,6 km.

b) A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 30°, que é a mesma do ângulo central $A\hat{O}B$. A medida x desse arco em radiano é dada pela regra de três:

Medida do arco em grau		Medida do arco em radiano
360	———	2π
30	———	x

$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{6}$ rad

94. a) Lembrando que uma volta tem 2π rad, temos:

Medida do ângulo (rad)		Tempo (dia)
$\dfrac{50\pi}{683}$	———	1
2π	———	x

$\therefore\ x = 27{,}32$ dias

Logo, a Lua completa uma volta ao redor da Terra em 27,32 dias aproximadamente.

b) Primeiro, vamos transformar 36° em radianos:

Grau		Radiano
360°	———	2π
36°	———	x

$\therefore\ x = 0{,}2\pi$

Medida do ângulo (rad)		Tempo (dia)
$\dfrac{50\pi}{683}$	———	1
$0{,}2\pi$	———	y

$\therefore\ y = 2{,}732$ dias

Logo, a Lua percorre um arco de 36° ao redor da Terra em 2,732 dias aproximadamente.

95. a) Lembrando que $1° = 60'$, temos:

Medida do ângulo (minuto)		Comprimento (metro)
$360 \cdot 60$	———	$2\pi \cdot 6.370.000$
1	———	x

$\therefore\ x \approx 1.853$

Logo, 1 milha marítima mede aproximadamente 1.853 m.

b)

Medida do ângulo (rad)		Comprimento (metro)
2π	———	$2\pi \cdot 6.370.000$
$\dfrac{\pi}{60}$	———	x

$\therefore\ x \approx 333.532$

Logo, um arco de $\dfrac{\pi}{60}$ rad mede aproximadamente 333.532 m.

96. Quando a polia maior gira $\dfrac{4\pi}{3}$ rad (ou 240°), a menor gira α rad tal que: $\dfrac{\alpha}{\frac{4\pi}{3}} = \dfrac{12}{4} \Rightarrow \alpha = 4\pi$

Alternativa **d**.

97. a) A medida x, em radiano, do arco é dada por:

$x = \frac{30}{10}$ rad $= 3$ rad

Logo, a velocidade angular ω_a do ponto é:

$\omega_a = \frac{3}{2}$ rad/min $= 1{,}5$ rad/min

Portanto, a velocidade angular do ponto P é 1,5 rad/min.

b) $\omega_a = \frac{3{,}6 \text{ rad}}{1 \text{ s}}$

Em 3 segundos, o ponto Q percorrerá:

$3 \cdot 3{,}6$ rad $= 10{,}8$ rad

Sendo R a medida, em centímetro, do raio da circunferência, temos:

$\frac{54}{R} = 10{,}8 \Rightarrow R = 5$

Portanto, a medida do raio dessa circunferência é 5 cm.

98. Temos que 100 rotações equivalem a $2\pi \cdot 100 = 200\pi$ radianos.

Então, o disco gira 200π radianos em 3 minutos. Assim:

Medida do ângulo (rad)		Tempo (s)
200π	———	$3 \cdot 60$
x	———	1

$\therefore x = \frac{10\pi}{9} \approx 3{,}5$

Logo, a velocidade do disco é $\frac{10\pi}{9}$ rad/s ou, aproximadamente, 3,5 rad/s.

99. a) Temos que 1.200 rotações equivalem a $2\pi \cdot 1.200 = 2.400\pi$ radianos.

Ou seja, a centrífuga gira 2.400π radianos em 1 minuto.

Medida do ângulo (rad)		Tempo (s)
2.400π	———	60
x	———	1

$\therefore x = 40\pi$

Logo, a velocidade da centrífuga é 40π rad/s.

b)

Radiano		Grau
2π	———	360
40π	———	x

$\therefore x = 7.200$

Ou seja, a centrífuga gira 7.200° em 1 segundo. Transformando 1 s em hora, temos:

Medida do ângulo (grau)		Tempo (hora)
7.200	———	$\frac{1}{3.600}$
x	———	1

$\therefore x = 25.920.000$

Logo, a velocidade da centrífuga é de $2{,}592 \cdot 10^7$ graus por hora.

c) A centrífuga do item **a** tem velocidade de 40π rad/s. Então, em 8 minutos ela gira:

$40\pi \cdot 8 \cdot 60$ rad, ou seja, 19.200π rad

Em 8 minutos, temos $20 \cdot 8 \cdot 60$ voltas, ou seja, 9.600 voltas.

Medida do ângulo		Comprimento
2π rad	———	$2\pi \cdot 10$ cm
19.200π rad	———	x

$\therefore x = 192.000\pi$ cm $= 1{,}92\pi$ km ≈ 6 km

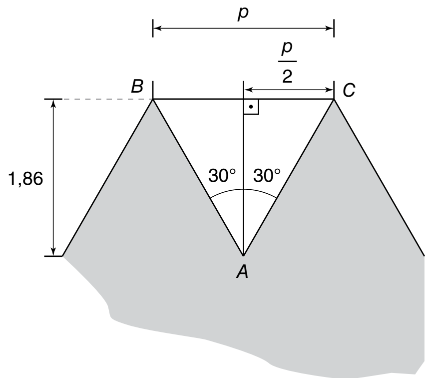
Logo, a distância percorrida pelo tubo em 8 minutos é de aproximadamente 6 km.

100. a) No triângulo equilátero destacado na figura a seguir, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{\frac{p}{2}}{1{,}86} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{p}{3{,}72}$

$\therefore p = \frac{3{,}72\sqrt{3}}{3} \Rightarrow p \approx \frac{3{,}72 \cdot 1{,}73}{3}$

$\therefore p \approx 2{,}1452$



Logo, a medida do passo da rosca é 2,15 mm, aproximadamente.

b) A cada volta do parafuso, cada crista da rosca se desloca um passo p no interior da peça de metal. Como 2.700° equivalem a 7,5 voltas, concluímos que a penetração do parafuso no interior da peça equivale a $7{,}5 \cdot 2{,}15$ mm, aproximadamente, ou seja, 16,125 mm.

101. a) Observando que uma volta tem 3,4 km de extensão, concluímos que 3,8 voltas têm:

$3{,}8 \cdot 3{,}4$ km $= 12{,}92$ km

b) $\frac{15{,}1}{3{,}4} \approx 4{,}44$

Logo, 15,1 km correspondem a 4 voltas completas (13,6 km) mais 1,5 km.

Portanto, a pessoa terá parado no marco 1,5 km.

c) Na passagem pelo marco 2,5 km, as distâncias percorridas por uma pessoa que deu exatamente 5 voltas são:

2,5 km; 5,9 km; 9,3 km; 12,7 km e 16,1 km

A expressão que representa esses valores é:

$x = 2{,}5 + k \cdot 3{,}4$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k \leqslant 4$

Expressão II.

102. a) A abscissa x pode ser representada pela função cosseno. Como o raio da roda-gigante mede 75 m, a abscissa pode ser representada em função do ângulo α por: $x = 75 \cdot \cos \alpha$

Agora, vamos representar o ângulo α em função do tempo t:

Medida do ângulo		Tempo (min)
2π rad	———	30
α rad	———	t

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi t}{15}$

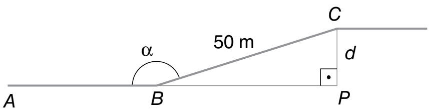
Assim: $x = 75 \cdot \cos \dfrac{\pi t}{15}$

b) Analogamente ao item **a**, temos: $y = 75 \cdot \text{sen}\, \dfrac{\pi t}{15}$

c) Observando que no instante inicial o ponto P está a uma altura de 90 m, temos:

$h = 90 + 75 \cdot \text{sen}\, \dfrac{\pi t}{15}$

103. Sendo d o deslocamento vertical procurado, esquematizamos:



$\text{sen}\,(180 - \alpha) = \dfrac{d}{50}$

Como $\text{sen}\,(180 - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, temos:

$0{,}3 = \dfrac{d}{50} \Rightarrow d = 15$

Logo, o deslocamento vertical será de 15 m.

104. No decorrer de cada dia, a temperatura T, em grau Celsius, no interior de uma câmara frigorífica pode ser descrita em função do tempo t, em hora, pela função $T(t) = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi t}{6}$, em que $t = 0$ representa a meia-noite (0 hora).

a) $T(5) = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6} = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

$T(5) = -3 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -2$

Logo, a temperatura às 5 h é -2 °C.

b) $T(7) = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6} = -3 - 2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

$T(7) = -3 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -4$

Logo, a temperatura às 7 h é -4 °C.

c) $T(11) = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{6} = -3 - 2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

$T(11) = -3 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -4$

Logo, a temperatura às 11 h é -4 °C.

d) $T(17) = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{17\pi}{6} = -3 + 2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

$T(17) = -3 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -2$

Logo, a temperatura às 17 h é -2 °C.

e) A temperatura máxima ocorre quando o seno assume seu valor máximo, ou seja, 1. Assim:

$T_{máx} = -3 + 2 \cdot 1$

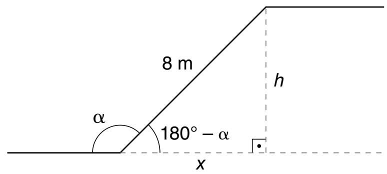
$\therefore T_{máx} = -1$ °C

f) A temperatura mínima ocorre quando o seno assume seu valor mínimo, ou seja, -1. Assim:

$T_{mín} = -3 + 2 \cdot (-1)$

$\therefore T_{mín} = -5$ °C

105. Façamos um esquema:



$\cos\,(180° - \alpha) = \dfrac{x}{8} \Rightarrow -\cos\alpha = \dfrac{x}{8}$

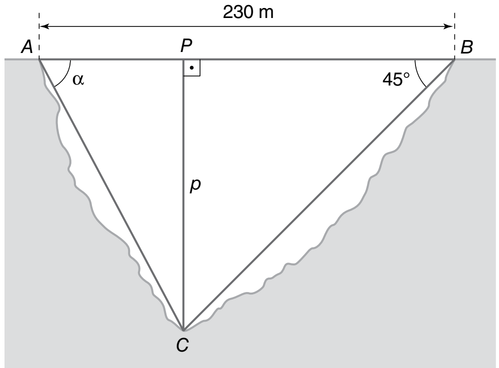
$\therefore -\left(-\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$8^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 39 \Rightarrow h = \sqrt{39}$

Logo, a altura do piso superior em relação ao piso inferior é $\sqrt{39}$ m ou, aproximadamente, 6,24 m.

106. Sendo p a profundidade procurada, em metro, esquematizamos:



No triângulo BCP, temos: $\text{tg}\,45° = 1 = \dfrac{p}{PB} \Rightarrow p = PB$

Logo, $AP = 230 - p$.

Como não temos a medida AC da hipotenusa do triângulo ACP, convém achar o valor de tg α. Substituindo sen α por $\dfrac{15}{17}$ na relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\left(\dfrac{15}{17}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{64}{289}$

$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{8}{17}$ (não convém) ou $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$

Assim: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \dfrac{15}{8}$

Observando o triângulo ACP, temos:

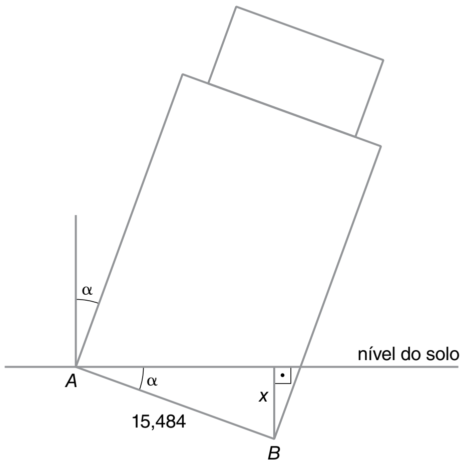
$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{p}{AP} \Rightarrow \dfrac{15}{8} = \dfrac{p}{230 - p}$

$\therefore 8p = 3.450 - 15p \Rightarrow 23p = 3.450$

$\therefore p = 150$

Portanto, a cratera tem 150 m de profundidade.

107. a) Indicando por x a medida, em metro, do afundamento vertical do ponto B, esquematizamos:



Assim, temos: $\text{sen } \alpha = \dfrac{x}{15{,}484}$

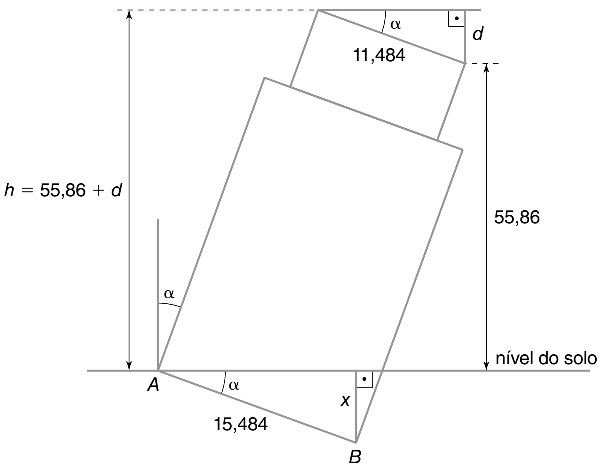
Como tg α = 0,06977, obtemos sen α = 0,0696 com o auxílio de uma calculadora. Logo:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{x}{15{,}484} \Rightarrow 0{,}0696 = \dfrac{x}{15{,}484}$

$\therefore x \approx 1{,}08$

Ou seja, o afundamento vertical do ponto B foi de 1,08 m, aproximadamente.

b) Indicando por d a distância vertical, em metro, entre os pontos mais alto e mais baixo da torre, esquematizamos:



Assim, temos que:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{d}{11{,}484} \Rightarrow 0{,}0696 = \dfrac{d}{11{,}484}$

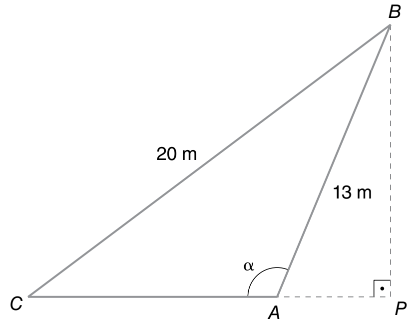
$\therefore d \approx 0{,}8$

Logo: $h = 55{,}86 + 0{,}8 = 56{,}66$

Ou seja, na parte mais elevada, a altura da torre mede 56,66 m, aproximadamente.

108. Como a tangente do ângulo $B\widehat{A}C$ é negativa, concluímos que esse ângulo é obtuso.

Então, podemos esquematizar a situação do seguinte modo:



Temos:

$\text{tg } \alpha = -\dfrac{12}{5} \Rightarrow \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\dfrac{12}{5}$

$\therefore \cos \alpha = -\dfrac{5 \text{ sen } \alpha}{12}$ (I)

Substituindo (I) na relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(-\dfrac{5 \text{ sen } \alpha}{12}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{169 \text{ sen}^2 \alpha}{144} = 1$

$\therefore \text{sen } \alpha = -\dfrac{12}{13}$ (não convém) ou $\text{sen } \alpha = \dfrac{12}{13}$

Lembrando que sen (180° − α) = sen α, no triângulo ABP, temos:

$\text{sen } (180° - \alpha) = \dfrac{BP}{13} \Rightarrow \dfrac{12}{13} = \dfrac{BP}{13}$

$\therefore BP = 12$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo APB, concluímos que $AP = 5$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo PBC, temos:

$12^2 + PC^2 = 20^2 \Rightarrow PC = 16$

Assim, concluímos:

$AC = PC - AP = 16 - 5$

$\therefore AC = 11$ m

109. a) $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1 - \text{sen } x}{3} \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{1}{2}$

Como x é medida de um ângulo agudo, temos que x = 30°.

Logo, o cabeceador vê $\dfrac{1}{4}$ da superfície da bola sob um ângulo de 60°.

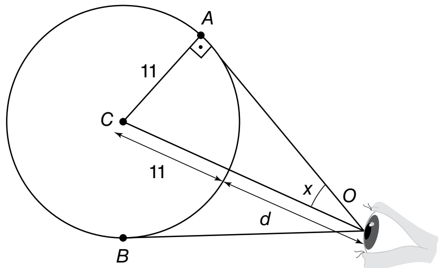
b) $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1 - \text{sen } x}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{3}{4}$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos:

$\alpha \approx 48{,}6°$

Logo, o cabeceador vê $\dfrac{1}{8}$ da superfície da bola sob um ângulo de 97,2°, aproximadamente.

c)



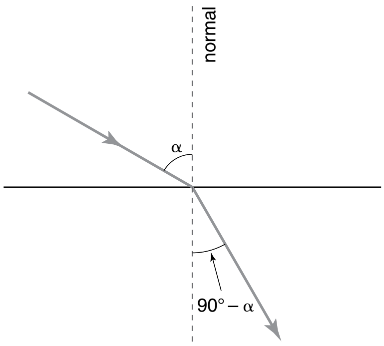
Temos:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{25} = \dfrac{1 - \text{sen } x}{2} \\ \text{sen } x = \dfrac{11}{11 + d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \dfrac{11}{25} \\ \text{sen } x = \dfrac{11}{11 + d} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{11}{11 + d} = \frac{11}{25} \Rightarrow d = 14$$

Logo, a distância entre o olho de mira e a bola é 14 cm.

110. Esquematizando, temos:



Sabemos que: $n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r$

Então: $\dfrac{5}{4} \cdot \text{sen } \alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \text{sen } (90° - \alpha)$

$\therefore \text{sen } \alpha = \sqrt{3} \cdot \text{sen } (90° - \alpha)$

Lembrando que $\text{sen } (90° - \alpha) = \cos \alpha$, temos:

$\text{sen } \alpha = \sqrt{3} \cdot \cos \alpha$

$\therefore \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha = \sqrt{3}$

Portanto, $\alpha = 60°$.

111. $\text{tg } x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$, para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

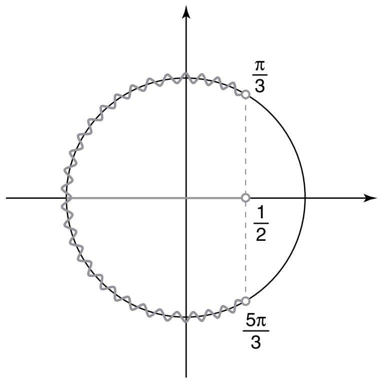
Dividindo o comprimento do arco pela medida R do raio de curvatura, obtemos a medida do ângulo central correspondente, em radiano. Assim:

$$\frac{20}{R} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow R = \frac{120}{\pi}$$

Logo, o raio de curvatura mede $\dfrac{120}{\pi}$ m, ou aproximadamente 38,2 m.

112. Queremos os valores de t, com $0 \leqslant t \leqslant 24$, tais que:

$$T = -1 + 2\cos\frac{\pi(t + 1)}{6} < 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi(t + 1)}{6} < \frac{1}{2}$$



Assim: $\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < \dfrac{\pi(t + 1)}{6} < \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

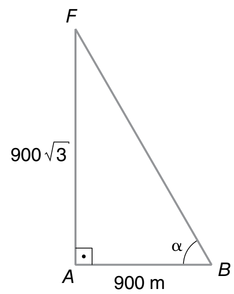
$\therefore 1 + 12k < t < 9 + 12k$

Para $k = 0$, temos: $1 < t < 9$

Para $k = 1$, temos: $13 < t < 21$

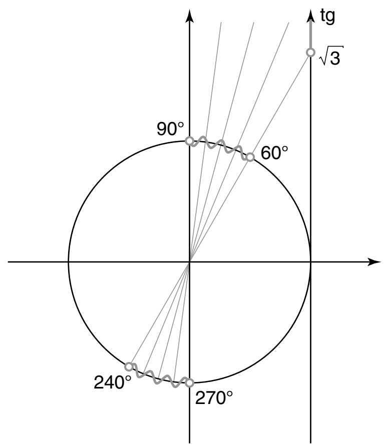
Concluímos, então, que a temperatura esteve negativa entre 1 h e 9 h e entre 13 h e 21 h.

113. Sendo α a medida do ângulo $A\hat{B}F$, esquematizamos:



Para AF superior a $900\sqrt{3}$ m, temos:

$$\text{tg } \alpha > \frac{900\sqrt{3}}{900} \Rightarrow \text{tg } \alpha > \sqrt{3}$$

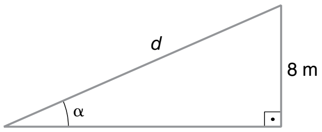


Assim: $60° < \alpha < 90°$ ou $240° < \alpha < 270°$ (não convém).

Logo, as possíveis medidas para o ângulo $A\hat{B}F$ são: 68°, 72° e 80°

Alternativa **e**.

114. Esquematizando a situação, temos:



Se $18 < d < 24$, temos:

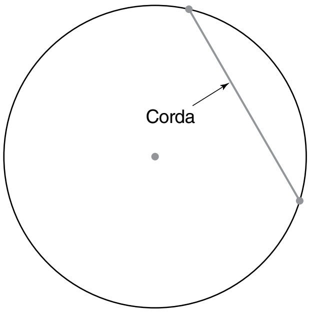
$\frac{8}{24} < \text{sen } \alpha < \frac{8}{18}$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos:

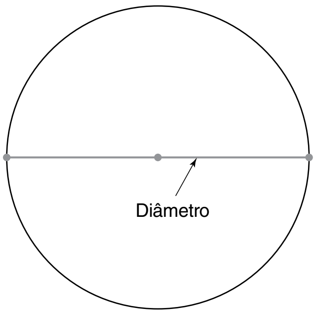
$19{,}47° < \alpha < 26{,}39°$

Pré-requisitos para o capítulo 13

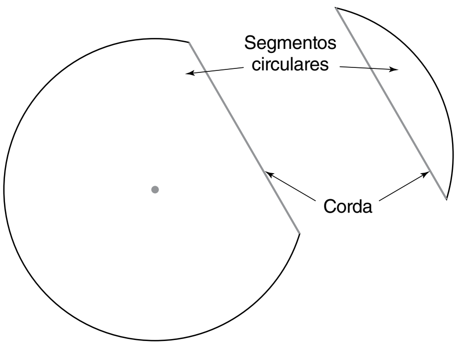
1. a)



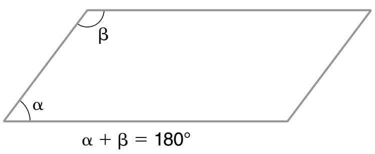
b)



c)

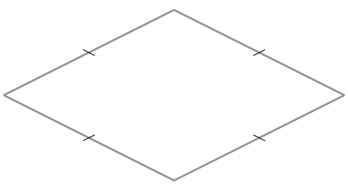


d)

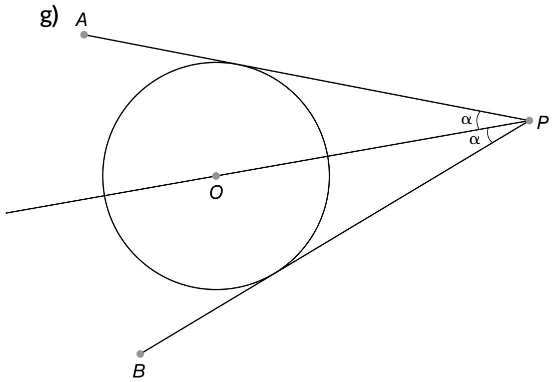


e)

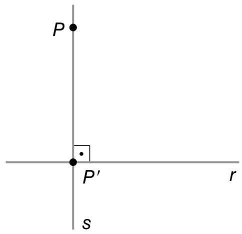
f)



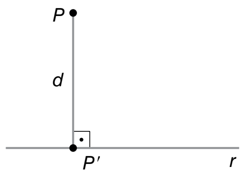
g)



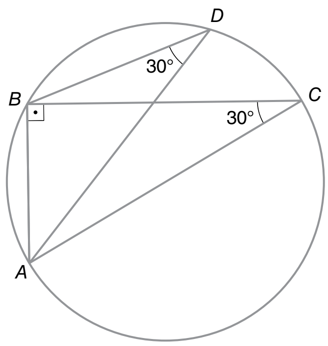
h)



i)



2. Os ângulos $B\widehat{D}A$ e $B\widehat{C}A$ são congruentes, pois estão inscritos em um mesmo arco. O ângulo $A\widehat{B}C$ é reto, pois está inscrito em meia circunferência. Assim, esquematizamos:



Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos que a medida do ângulo $B\widehat{A}C$ é 60°.

3. a) Como a fórmula da área de um triângulo é dada por $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, temos:

$$\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$$

Portanto, a área desse triângulo é 20 cm².

b) Considerando a medida da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ como x, temos:

$20 = \frac{10 \cdot x}{2} \Rightarrow x = 4$

Portanto, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ é 4 cm.

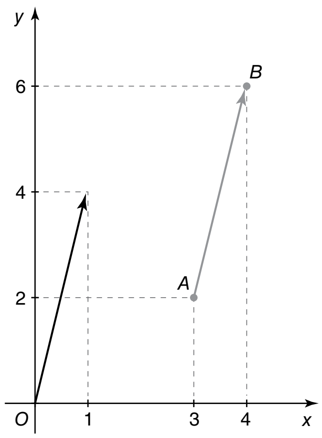
4. a) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela fórmula $S_i = (n - 2) \cdot 180$, sendo n o número de lados do polígono. Como o pentágono tem 5 lados, então:

$S_i = (5 - 2) \cdot 180 = 540$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540°.

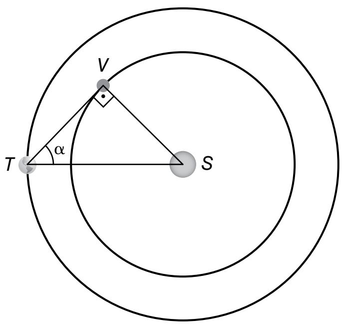
b) Como a soma de todos os ângulos é 540°, então para um pentágono regular cada ângulo tem medida $\frac{540°}{5}$, ou seja, 108°.

5.



Matemática sem fronteiras

1. Indicando por α a medida do ângulo $V\widehat{T}S$, temos:



$\text{sen } \alpha = \frac{VS}{TS} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{108.204.000}{150.000.000}$

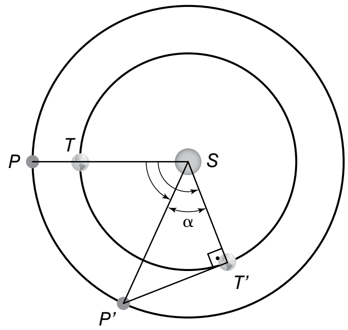
$\text{sen } \alpha = 0{,}72136$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos:

$\alpha \approx 46{,}17°$

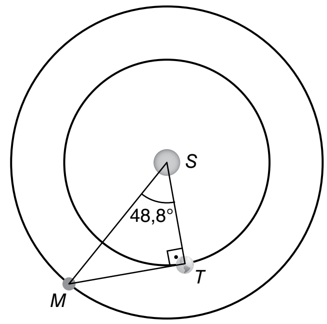
2. Admitindo a hipótese de que a Terra é esférica e que as órbitas dos planetas do sistema solar são circulares e coplanares, tendo o Sol como centro, calculamos a distância entre a Terra e um planeta superior (planeta com raio orbital maior que o da Terra), a partir da distância d entre a Terra e o Sol. Para isso, escolhemos um momento em que o ângulo de vértice no Sol, cujos lados passam pela Terra e pelo planeta, assume sua medida máxima, com o que obtemos um triângulo retângulo, em cujo vértice do ângulo reto está a Terra, conforme explicado a seguir.

Na figura a seguir, o planeta superior, a Terra e o Sol estão alinhados, ocupando as posições P, T e S, respectivamente. Após uma medida t de tempo, em hora, o planeta e a Terra ocupam as posições P' e T', de modo que o planeta é visto da Terra na linha do horizonte. Nesse momento, a reta $\overleftrightarrow{P'T'}$ é tangente à órbita da Terra e, portanto, o ângulo $S\widehat{T'}P'$ é reto. Assim, concluímos que o ângulo de vértice no Sol, cujos lados passam pela Terra e pelo planeta, assume sua medida máxima α. Tendo em vista que todos os planetas do sistema solar giram em torno do Sol em um mesmo sentido (adote na figura o sentido anti-horário), que o período da órbita da Terra é de 24 h e que o período do planeta, em hora, é p, com $p > 24$, calculamos a medida α, em função de p e t.



(**Nota:** O período da órbita de todo planeta superior é muito maior que o da órbita da Terra. O menor desses períodos é o de Marte, que é de 686 dias, aproximadamente.)

3. Temos:



$\cos 48{,}8° = \frac{ST}{SM}$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos:

$0{,}6587 \approx \frac{150.000.000}{SM} \Rightarrow SM \approx 227.721.000$

Logo, a distância entre o Sol e o planeta Marte é 227.721.000 km, aproximadamente.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno cometeu um erro ao admitir que α é uma medida da primeira volta positiva da circunferência trigonométrica.

Resolução correta:

Fazendo a mudança de variável $2x = \alpha$, temos:

$\text{sen } \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Retornando à variável original, obtemos:

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos que os únicos valores possíveis de k são 0 e 1:

- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0\pi = \frac{\pi}{4}$
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.