MESTRES
DA MATEMÁTICA

Logaritmo

1) DEFINIÇÃO: Dados os números reais positivos a e b, com $b \neq 1$, chamamos de logaritmo de a na base b, indicamos por $log_b a$, ao número x tal que $b^x = a$, ou seja, $log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA: $\begin{cases} a = \text{logaritmando} \Rightarrow a > 0 \\ b = \text{base} \Rightarrow 0 < b \neq 1 \\ x = \text{ logaritmo de } a \text{ na base } b \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$

EXEMPLOS: $\begin{cases} log_2 8 = 3, \text{ pois } 2^3 = 8 \\ log_5 25 = 2, \text{ pois } 5^2 = 25 \\ log_{10} 0{,}1 = -1, \text{ pois } 10^{-1} = 0{,}1 \end{cases}$

OBS: $\begin{cases} \text{Logaritmo decimal} \Rightarrow \log_{10} x = \log x \\ \text{Logaritmo neperiano} \Rightarrow \log_e x = \ln x \end{cases}$

2) CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO:

$C_1)\ log_b 1 = 0, \text{ pois } b^0 = 1$

$C_2)\ log_b b = 1, \text{ pois } b^1 = b$

$C_3)\ log_b b^n = n, \text{ pois } b^n = b^n$

$C_4)\ b^{\log_b a} = a$

Demonstração de C_4: Fazendo a mudança de variável $\log_b a = x$, teremos que $b^{\log_b a} = b^x$, mas como $\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$, então teremos que $b^{\log_b a} = b^x = a$.

3) PROPRIEDADES

$P_1)\ \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$P_2)\ \log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

$P_3)\ \log_b x^n = n \log_b x$

$P_4)$ MUDANÇA DE BASE: $\log_b a \xrightarrow[\text{base } x]{} \dfrac{\log_x a}{\log_x b}$

$P_5)\ \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$P_6)\ \log_{b^n} a = \dfrac{1}{n} \cdot \log_b a$

LOGARITMO

4) EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

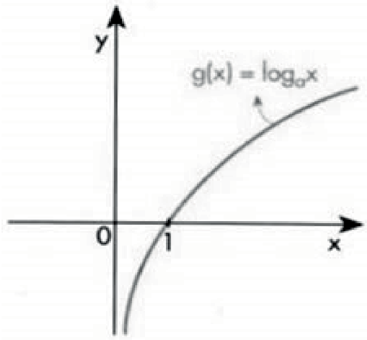
Uma equação é chamada de logarítmica se a variável ou incógnita fizer parte de um dos termos do logaritmo. Assim, para resolvê-las aplicaremos a definição, as condições de existência e as propriedades dos logaritmos, ou seja, $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$.

5) FUNÇÃO LOGARÍTMICA

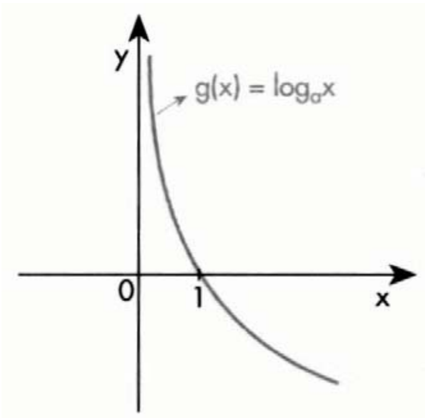
Chamamos de função logarítmica de base b, a função bijetora $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_b x$ onde temos que $0 < b \neq 1$.

6) GRÁFICOS

1º caso: $a > 1$ então f é crescente, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}, D = \mathbb{R}_+^*$.



2º caso: $0 < a < 1$ então f é decrescente, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}, D = \mathbb{R}_+^*$.



7) INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para encontrarmos o conjunto-solução de uma inequação logarítmica, aplicaremos as propriedades do logaritmos e transformaremos a inequação em uma desigualdade de logaritmos de mesma base.

Se $a > 1 \Rightarrow \log_b x > \log_b y \Leftrightarrow x > y$ (conserva o sinal da desigualdade)
Se $0 < a < 1 \Rightarrow \log_b x > \log_b y \Leftrightarrow x < y$ (inverte o sinal da desigualdade)