Estou na área, grande guerreiro, futuro oficial da Marinha, Marinha Mercante ou Aeronáutica do Brasil!

Esta é a aula 02 do nosso curso de Matemática 1 para as provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL e veremos hoje algumas noções de teoria dos números: estudaremos critérios de divisibilidade, a fatoração em números primos e também máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc).

SUMÁRIO

1. DIVISIBILIDADE 3
1.1. DEFINIÇÃO 3
1.2. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE 3
1.3. PROPRIEDADES IMPORTANTES 5
2. FATORAÇÃO EM NÚMEROS PRIMOS 7
2.1. DEFINIÇÃO 7
2.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA 7
2.3. DIVISORES DE UM NÚMERO 8
2.4. NÚMERO DE DIVISORES 8
3. MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC) 9
3.1. DEFINIÇÃO 9
3.2. ALGORITMO DE EUCLIDES 10
3.3. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO CANÔNICA 10
4. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC) 11
4.1. DEFINIÇÃO 11
4.2. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO CANÔNICA 11
EXERCÍCIOS DE COMBATE 14
GABARITO 16

TEORIA DOS NÚMEROS

1. DIVISIBILIDADE

Neste momento inicial, nosso interesse será em determinar quando a divisão entre dois números inteiros é exata, ou seja, quando o resto da divisão é 0.

Antes de mais nada, vamos à definição crucial desta parte:

1.1. DEFINIÇÃO

Dizemos que o inteiro a é divisível pelo inteiro b (ou ainda que a é múltiplo de b) se existe um inteiro c tal que $a = bc$.

Exemplos:

15 é múltiplo de 3

33 é múltiplo de 11

17 **não** é múltiplo de 2

Vejamos agora alguns critérios de divisibilidade importantes, que ajudam a ganhar tempo em diversos problemas:

1.2. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

i) DIVISIBILIDADE POR 2:

Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, seu último algarismo é par.

Resto na divisão por 2: se o último algarismo é par, o resto é 0 e se o último algarismo é ímpar, o resto é 1.

Exemplo: 2344 é múltiplo de 2, pois 4 é par, mas 31441 não é múltiplo de 2, pois 1 é ímpar. O resto de 31441 na divisão por 2 é 1.

ii) DIVISIBILIDADE POR 3:

Um número é múltiplo de 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 3.

Resto na divisão por 3: resto da soma dos algarismos do número na divisão por 3.

Exemplo: 3459 é múltiplo de 3, pois $3+4+5+9=21$ e $2+1=3$, que é múltiplo de 3, mas 121 não é múltiplo de 3, pois $1+2+1=4$ não o é. O resto de 121 na divisão por 3 é 1.

iii) DIVISIBILIDADE POR 4:

Um número é múltiplo de 4 se, e somente se, o número formado por seus dois últimos algarismos é múltiplo de 4.

Resto na divisão por 4: resto do número formado pelos dois últimos algarismos na divisão por 4.

Exemplo: 15684 é múltiplo de 4, pois 84 é múltiplo de 4, mas 14234 não é múltiplo de 4, já que 34 não o é. O resto de 14234 na divisão por 4 é 2.

iv) DIVISIBILIDADE POR 5:

Um número é múltiplo de 5 se, e somente se, seu último algarismo é 0 ou 5.

Resto na divisão por 5: resto do último algarismo na divisão por 5.

Exemplo: 995 é múltiplo de 5, pois o último algarismo é 5, mas 1003 não é múltiplo de 5, pois o último algarismo é 3. O resto de 1003 na divisão por 5 é 3.

v) DIVISIBILIDADE POR 8:

Um número é múltiplo de 8 se, e somente se, o número formado pelos três últimos algarismos é múltiplo de 8.

Resto na divisão por 8: resto do número formado pelos três últimos algarismos na divisão por 8.

Exemplo: 271824 é múltiplo de 8, pois 824 é múltiplo de 8, mas 31442 não é múltiplo de 8, pois $442=55\cdot 8+2$, donde o resto de 31442 na divisão por 8 é 2.

vi) DIVISIBILIDADE POR 9:

Um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 9.

Resto na divisão por 9: resto da soma dos algarismos do número na divisão por 9.

Exemplo: 1233 é múltiplo de 9, pois $1+2+3+3=9$ é múltiplo de 9, mas 727 não é múltiplo de 9, pois $7+2+7=16$ e $16=9\cdot 1+7$, donde o resto de 727 na divisão por 9 é 7.

vii) DIVISIBILIDADE POR 10:

Um número é múltiplo de 10 se, e somente se, seu algarismo das unidades é 0.

Resto na divisão por 10: o resto de um número na divisão por 10 é o algarismo das unidades.

Exemplo: 880 é múltiplo de 10, pois 880 termina em 0, mas 1003 não é múltiplo de 10 e seu resto na divisão por 10 é 3.

viii) DIVISIBILIDADE POR 11:

Um número é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par é múltipla de 11.

Resto na divisão por 11: resto da diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par na divisão por 11.

Exemplo: 407 é múltiplo de 11, pois 7 + 4 – 0 = 11 é múltiplo de 11, mas 300 não é múltiplo de 11, pois 0 + 3 – 0 = 3 não o é. Seu resto na divisão por 11 é 3.

ix) DIVISIBILIDADE POR 2^k:

Um número é múltiplo de 2^k se, e somente se, o número formado pelos seus k últimos algarismos é múltiplo de 2^k.

Resto na divisão por 2^k: resto do número formado pelos k últimos algarismos na divisão por 2^k.

x) DIVISIBILIDADE POR 5^k :

Um número é múltiplo de 5^k se, e somente se, o número formado pelos seus k últimos algarismos é múltiplo de 5^k.

Resto na divisão por 5^k : resto do número formado pelos k últimos algarismos na divisão por 5^k.

xi) DIVISIBILIDADE POR 10^k :

Um número é múltiplo de 10^k se, e somente se, seus k últimos algarismos são zeros.

Resto na divisão por 10^k : o resto é o número formado pelos k últimos algarismos.

1.3. PROPRIEDADES IMPORTANTES

i) O resto de uma soma na divisão por um determinado número N é igual ao resto da soma dos restos de cada parcela na divisão por N.

Exemplo: Calcular o resto de $123+441+1829$ na divisão por 5.

Basta calcular o resto de $3+1+4=8$ na divisão por 5, que é 3.

ii) O resto de um produto na divisão por um determinado número N é igual ao resto do produto dos restos de cada fator na divisão por N.

Exemplo: Calcular o resto de $765 \cdot 423 \cdot 112$ na divisão por 11.

Basta calcular o resto de $6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ na divisão por 11, que é 5.

iii) Para achar o resto de uma potência na divisão por um determinado número N, calcula-se primeiramente o resto da base na divisão por N e depois eleva-se esse resto ao expoente dado. Obtido esse número, calcula-se o resto na divisão por N.

Exemplo: Calcular o resto de 34^9 na divisão por 7.

O resto de 34 na divisão por 7 é 6. Então, precisamos calcular o resto de 6^9 na divisão por 7. Mas $6^2 = 36$ deixa resto 1 na divisão por 7. Assim, 6^8 deixa resto 1 na divisão por 7 e, portanto $6^9 = 6^8 \cdot 6^1$ deixa resto 6 na divisão por 7.

RESTO DE POTÊNCIAS:

Para calcular o resto de a^m na divisão por N, primeiramente determina-se um expoente d tal que a^d deixa resto 1 na divisão por N. Assim, se $m = dq + r$, $0 \leq r < d$, o resto de a^m na divisão por N será o resto de $a^{dq+r} = a^{dq} \, . \, a^r$ na divisão por N. Como a^d deixa resto 1, a^{dq} também deixará resto 1. Dessa forma, o resto de a^m é igual ao resto de a^r na divisão por N.

Exemplos:

1. Calcular o resto de 156^{98} na divisão por 11.

Como 156 deixa resto 2 na divisão por 11, basta calcular o resto de 2^{98} na divisão por 11.

Temos que 2^1 deixa resto 2, 2^2 deixa resto 4, 2^3 deixa resto 8, 2^4 deixa resto 5, 2^5 deixa resto 10, 2^6 deixa resto 9, 2^7 deixa resto 7, 2^8 deixa resto 3, 2^9 deixa resto 6 e 2^{10} deixa resto 1. Assim, 2^{98} deixará o mesmo resto que 2^8, pois $98 = 10 \, . \, 9 + 8$. Como 2^8 deixa resto 3, temos que 156^{98} deixa resto 3 na divisão por 11.

2. Calcular o resto de 39^{2012} na divisão por 7.

Temos que 39 deixa resto 4 na divisão por 7. Então, basta calcular o resto de 4^{2012} na divisão por 7. Temos que 4^1 deixa resto 4, 4^2 deixa resto 2 e 4^3 deixa resto 1. Assim, 4^{2012} deixará o mesmo resto que 4^2, pois $2012 = 670 \, . \, 3 + 2$. Assim, 39^{2012} deixa resto 2 na divisão por 7.

PROBIZU

Vejamos um exercício resolvido:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1:

(CN 1987) O número 583ab é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos a e b é:

a) indeterminado
b) 20
c) 18
d) 11
e) 2

RESOLUÇÃO:

Para que 583ab seja divisível por 9, a soma de seus algarismos deve ser divisível por 9. Assim, temos que $5+8+3+a+b=a+b+16$ é divisível por 9. Veja ainda que $a,b\leq 9$ (pois são algarismos de um número). Desta forma, temos que $a+b$ é no máximo 18. Para $a+b+16$ ser divisível por 9, podemos ter $a+b$ igual a 2 ou 11 (qualquer outro valor passaria de 18). Então o valor máximo pedido é 11.

RESPOSTA: D

2. FATORAÇÃO EM NÚMEROS PRIMOS

Vejamos uma definição inicialmente:

2.1. DEFINIÇÃO

Um número inteiro p é dito um número primo quando possui exatamente quatro divisores inteiros: $\pm p, \pm 1$. Por outro lado, um inteiro é dito composto quando não é primo.

Exemplo: $2, 3, 5, 7, 11$ são números primos, mas $6, 15, 21, 42$ são números compostos.

OBSERVAÇÃO

O único número primo par é o 2.

O resultado mais importante referente a números primos é o chamado teorema fundamental da Aritmética:

2.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo inteiro maior do que 1 pode ser expresso de maneira única (a menos da ordem) como produto de fatores primos.

Exemplo: $5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

2.3. DIVISORES DE UM NÚMERO

Os divisores de um número inteiro n são todos os inteiros m tais que n é múltiplo de m.

OBSERVAÇÃO

OBSERVAÇÃO: Se $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, um divisor natural de a é da forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, onde $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ para todo $1 \le i \le k$. Este fato permite, através do princípio multiplicativo da Análise Combinatória, calcular a quantidade de divisores de um determinado número.

Exemplo: os divisores de 30 formam o conjunto $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\}$.

OBSERVAÇÃO: Um número n é dito um quadrado perfeito se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$. É fácil demonstrar que um número é um quadrado perfeito se, e somente se, o expoente de cada primo em sua fatoração é um número par.

Um número n é dito um cubo perfeito se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^3$. É fácil demonstrar que um número é um cubo perfeito se, e somente se, o expoente de cada primo em sua fatoração é um número múltiplo de três.

$k \in \mathbb{Z}$ $n = k^m$

2.4. NÚMERO DE DIVISORES

Se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, o número de divisores naturais de n é dado por $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$. Para achar o número de divisores inteiros de n, basta multiplicar d(n) por 2.

Exemplo:

Consideremos o número $22680 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.
O número de divisores naturais é $(3+1)(4+1)(1+1)(1+1) = 80$.
Vejamos dois exercícios resolvidos:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2:

Se P é o produto de todos os números primos menores que 1000, o algarismo das unidades de P é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 5
e) 9

RESOLUÇÃO:

Como 2 e 5 são primos menores que 1000, estes dois números estarão presentes no produto P. Desta forma, P é múltiplo de 10 e assim seu algarismo das unidades é 0.

RESOLUÇÃO: A

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3:

Seja N = $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^6$. O número de divisores naturais de N que são múltiplos de 10 é:

a) 24
b) 35
c) 120
d) 144
e) 210

RESOLUÇÃO:

Um divisor natural genérico de N é da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, onde $0 \le a \le 4, 0 \le b \le 5, 0 \le c \le 6$. Para que tal divisor seja múltiplo de 10, a e c devem ser maiores ou iguais a 1. Desta forma, há 4 possíveis valores para a (1, 2, 3, 4), 6 possíveis valores para b (0,1,2,3,4,5) e 6 possíveis valores para c (1,2,3,4,5,6). Assim, o total de divisores naturais de N múltiplos de 10, pelo princípio multiplicativo, é $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$.

RESOLUÇÃO: D

3. MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

3.1. DEFINIÇÃO

Dados dois inteiros a e b não nulos, o máximo divisor comum de a e b (denotado por $\text{mdc}(a,b)$) é o maior inteiro positivo que divide a e b simultaneamente.

Exemplo:

Os divisores naturais de 30 são: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Os divisores naturais de 12 são: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Veja que o maior inteiro que aparece nas duas listas é o 6. Assim, $\text{mdc}(30,12) = 6$.

OBSERVAÇÃO

Dois números a e b com mdc igual 1 a são ditos primos entre si.

Você deve estar se perguntando agora: será que existe uma maneira mais prática de calcular o mdc de dois números?? A resposta é sim!! Vejamos agora como:

3.2. ALGORITMO DE EUCLIDES

Dados A e B $(A > B)$, dividimos A por B, obtendo quociente q_1 e resto r_1. Colocamos q_1 acima de B e r_1 abaixo de A e ao lado de B (r_1 será agora o novo divisor e o novo dividendo é B). Feito isso, dividimos B por r_1, obtendo quociente q_2 e resto r_2. Colocamos q_2 acima de r_1 e r_2 abaixo de B e ao lado de r_1 (r_2 será agora o novo divisor e o novo dividendo é r_1). Repetimos este processo até obter resto 0. O último divisor, r_n, será o mdc.

O método acima normalmente é apresentado através do dispositivo de cálculo a seguir:

	q_1	q_2	q_3	...	q_n	q_{n+1}
A	B	r_1	r_2	...	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	...	r_n	0	

Exemplo: Calcular mdc (665, 280).

	2	2	1	2
665	280	105	70	35
105	70	35	0	

Obtemos assim mdc (665, 280) = 35.

3.3. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO CANÔNICA

Neste método, encontramos inicialmente a fatoração em primos dos números de interesse: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ e $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ **(alguns expoentes podem ser NULOS!)**.

Desta forma, temos que $mdc(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta 1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}$, ou seja, mdc(a,b) é o produto dos fatores primos comuns às duas decomposições tomados com seus menores expoentes.

Exemplo: 665 = 5 . 7 . 19 e 280 = 2^3 . 5 . 7. Logo, mdc(665,280) = 5 . 7 = 35.

Se mdc(a,b) = d, podemos escrever a = du, b = dv, com u,v primos entre si.

4. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

4.1. DEFINIÇÃO

O mmc entre dois inteiros não-nulos a e b é o menor inteiro positivo que é divisível por a e b.

Exemplo:

Os múltiplos positivos de 30 são: 30, 60, 90, 120, 150, ...

Os múltiplos positivos de 12 são: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

Veja que 60 é o menor número comum às duas listas. Desta forma, mmc(30, 12) = 60.

Assim como no mdc, vejamos um método de calcular o mmc entre dois números.

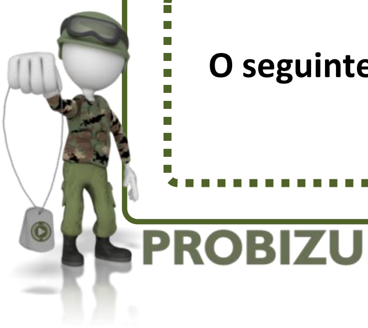
O mmc de dois números primos entre si é igual ao produto entre estes números. Por exemplo, 3 e 5 são primos entre si e, portanto, mmc (3,5) = 3 x 5 = 15.

4.2. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO CANÔNICA

Tal qual no mdc, encontramos primeiramente a fatoração dos números de interesse: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ e $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ **(alguns expoentes podem ser NULOS!).**

Desta forma, temos que $mmc(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta 1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}$, ou seja, mmc(a,b) é o produto dos fatores primos comuns e não-comuns às duas decomposições tomados com seus maiores expoentes.

Exemplo: 665 = 5 . 7 . 19 e 280 = 2^3 . 5 . 7. Logo, mmc(665,280) = 2^3 . 5 . 7 . 19 = 5320.



O seguinte resultado é bastante útil: dados inteiros a,b não nulos, vale que ab = mmc(a,b) . mdc(a,b)

Vejamos dois exercícios resolvidos:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4:

Três satélites artificiais giram em torno da Terra, em órbitas constantes. O tempo de rotação do primeiro é de 42 minutos, o do segundo de 72 minutos e o do terceiro é de 126 minutos. Em dado momento, eles se alinham em um mesmo meridiano, embora em latitudes diferentes. Eles voltarão em seguida, a passar simultaneamente pelo mesmo meridiano, depois de:

a) 15h 24min

b) 7h 48min

c) 126min

d) 8h 24min

RESOLUÇÃO:

O primeiro satélite passa pelo meridiano a cada 42 minutos, o segundo a cada 72 minutos e o terceiro a cada 126 minutos. Desta forma, temos o seguinte esquema para os tempos nos quais os satélites passarão por tal meridiano:

Satélite 1: 42, 84, 126, 168, ...

Satélite 2: 72, 144, 216, 288, ...

Satélite 3: 126, 252, 378, 504, ...

Veja que os tempos nos quais os satélites passam são os múltiplos de 42, os múltiplos de 72 e os múltiplos de 126. Desta forma, o primeiro tempo no qual eles passarão juntos novamente pelo meridiano é o menor número comum às três listas, ou seja, é o menor múltiplo comum entre 42, 72 e 126.

Vamos calcular então mmc(42, 72, 126). Para isso, veja que:

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
$72 = 2^3 \cdot 3^2$
$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Para calcular o mmc, devemos tomar os fatores primos comuns e não comuns elevados ao **MAIOR** expoente, obtendo assim $\text{mmc}(42,72,126) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

Com isso, a cada 504 minutos, os satélites estarão juntos no meridiano. Como 504 minutos equivalem a 8h 24min, depois de 8h 24min, eles estarão juntos no meridiano.

RESPOSTA: D

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5:

Se mdc(a, b) = 4, mmc (a,b) = 80 e a + b = 36, então o valor numérico de 2a – b, onde a > b é:

a) 24

b) 16

c) 20

d) 36

e) 12

RESOLUÇÃO:

Como mdc(a,b) = 4, podemos escrever $a = 4u, b = 4v$, com u e v primos entre si. Desta forma, temos que $\text{mmc}(a,b) = \text{mmc}(4u,4v) = 4uv = 80 \Leftrightarrow uv = 20$. Além disso, $a + b = 36 \Leftrightarrow 4u + 4v = 36 \Leftrightarrow u + v = 9$. Como a > b, segue que u > v e assim u = 5, v = 4. Daí a = 20, b = 16 e, portanto, 2a – b = 40 – 16 = 24.

RESPOSTA: A

Vamos agora para o combate???

1. Substitua as letras y ou z de modo que o número:

a) 5.2y4 seja divisível por 3.
b) 4y5 seja divisível por 3.
c) 1.2y8 seja divisível por 3.
d) 45y seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.
e) 1.24y seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.
f) 20.28y seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.
g) 4y8 seja divisível por 11.
h) 53.9y7 seja divisível por 11.
i) 25.01y seja divisível por 11.

2. Determine a soma dos algarismos do menor número da forma aabbccc que é múltiplo de 836.

a) 14
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

3. Determine o resto da divisão de:

a) $(14543)^{567}$ por 3
b) $74892^{359} \times 6379^{207} \times 9538^{179} \times 3756^{723}$ por 5

4. (CN 1994) O resto da divisão de 743^{48} por 6, é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

5. (CN 1978) O resto da divisão por 5 do número 5743^{9319} é:

a) 0
b) 2
c) 1
d) 4
e) 3

6. (CN 1984) O resto da divisão por 11 do resultado da expressão: $1211^{20} + 9119^{32} \cdot 343^{26}$, é:
a) 9
b) 1
c) 10
d) 6
e) 7

7. (CN 2007)

$$\begin{array}{c|c} N & x \\ x & x \\ x & x \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

No dispositivo acima, tem-se a decomposição tradicional em fatores primos de um número natural N, em que a letra x está substituindo qualquer número natural diferente de N, zero e um. Sendo y o número total de divisores naturais de N, quantos são os valores possíveis para y?
a) três
b) quatro
c) cinco
d) seis
e) sete

8. (CN 2005) Um número natural N tem 2005 divisores positivos. O número de bases distintas da sua decomposição em fatores primos pode ser
a) um
b) cinco
c) três
d) quatro
e) n.r.a.

9. (EPCAR 2005) O número $Y = 2^a \,.\, 3^b \,.\, c^2$ é divisor de N = 15 . 20 . 6.. Sabendo-se que c é primo e y admite exatamente 36 divisores, é correto afirmar que
a) ab = c
b) a + b = c
c) a < b < c
d) a – b = –1

10. Uma pessoa dispõe de três pedaços de arame do mesmo tipo, cujas medidas são: 2400 m, 3200 m e 5600 m. Ela deseja cortar cada pedaço em tamanhos iguais, de comprimento inteiro, de forma que os tamanhos sejam os maiores possíveis. Calcule o número de pedaços que serão obtidos.

11. (EPCAr 2006) Três alunos A, B e C participam de uma gincana e uma das tarefas é uma corrida em pista circular. Eles gastam para esta corrida, respectivamente, 1,2 minutos, 1,5 minutos e 2 minutos para completarem uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os três alunos se encontram pela primeira vez no local de partida. Considerando os dados acima, assinale a alternativa correta.

a) Na terceira vez que os três se encontrarem, o aluno menos veloz terá completado 12 voltas.
b) O tempo que o aluno B gastou até que os três se encontraram pela primeira vez foi de 4 minutos.
c) No momento em que os três alunos se encontraram pela segunda vez, o aluno mais veloz gastou 15 minutos.
d) A soma do número de voltas que os três alunos completaram quando se encontraram pela segunda fez foi 24.

12. Ao calcular o mdc dos números A e B, ambos naturais, pelo algoritmo de Euclides, obteve-se:

	2	1	3
A	B	x	11
y	z	0	

Podemos afirmar assim que:
a) A – B = 27
b) A – B = 47
c) A – B = 55
d) A – B = 53
e) A – B = 77

13. (EPCAR 2001) Ao separar o total de suas figurinhas, em grupos de 12, 15 e 24, uma criança observou que sobravam sempre 7 figurinhas. Se o total de suas figurinhas está compreendido entre 240 e 360, pode-se afirmar que a soma dos algarismos significativos desse total é:
a) 6
b) 9
c) 10
d) 13

14. (EPCAR 2005) Se o mínimo múltiplo comum entre os inteiros $a = 16 \cdot 3^k$ $(k \neq 0)$ e $b = 2^p \cdot 21$ for 672, então, pode-se concluir que
a) p é divisor de 2^p . 21
b) 3^k é divisível por 2^p
c) pk é múltiplo de 3
d) p – k = 4k

15. (AFA 2005) Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ os n primeiros números primos, com $n \geq 5$.

Se $x = p_1 p_2^2 p_3^3 \ldots p_n^n$ e $y = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$, então o número total de divisores positivos de $\frac{x}{y}$ é:
a) (n + 1)!
b) n!
c) n! + 1
d) (n – 1)!

GABARITO

1.

a) DIVISIBILIDADE POR 3:
Um número é múltiplo de 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 3
5 + 2 + y + 4 deve ser divisível por 3, logo y + 11 é divisível por 3.
Assim, y = 1, 4 ou 7

b) DIVISIBILIDADE POR 3:
Um número é múltiplo de 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 3
4 + y + 5 deve ser divisível por 3, logo y + 9 é divisível por 3.
Assim, y = 0, 3, 6 ou 9

c) DIVISIBILIDADE POR 3:
Um número é múltiplo de 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 3
1 + 2 + y + 8 deve ser divisível por 3, logo y + 11 é divisível por 3.
Assim, y =1, 4 ou 7

d) DIVISIBILIDADE POR 9:
Um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 9
DIVISIBILIDADE POR 2:
Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, seu último algarismo é par
4 + 5 + y deve ser divisível por 9, logo y + 9 é divisível por 9.
Assim, y = 0 ou y = 9. Como y deve ser par, y = 0.

e) DIVISIBILIDADE POR 9:
Um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 9
DIVISIBILIDADE POR 2:
Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, seu último algarismo é par
1 + 2 +4 + y é divisível por 9, logo y + 7 é divisível por 9.
Assim, y = 2, que é par, obrigando o número desejado a ser par.

f) DIVISIBILIDADE POR 9:
Um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 9
DIVISIBILIDADE POR 2:
Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, seu último algarismo é par
2 + 0 + 2 + 8 + y = y + 14 é divisível por 9.
Assim, y = 4, que é par, o que faz com o que o número desejado seja par.

g) DIVISIBILIDADE POR 11:
Um número é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par é múltipla de 11.
$8 + 4 - y = 12 - y$ é divisível por 11. Assim, $y = 1$.

h) DIVISIBILIDADE POR 11:
Um número é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par é múltipla de 11.
$7 + 9 + 5 - 3 - y = 18 - y$ é divisível por 11. Assim, $y = 7$.

i) DIVISIBILIDADE POR 11:
Um número é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par é múltipla de 11.
$y + 0 + 2 - 1 - 5 = y - 4$ é divisível por 11. Assim, $y = 7$.

2.
Fatorando 836, temos $836 = 4 \times 11 \times 19$.
Para aabbccc ser múltiplo de 4 e de 11, temos:
i) cc é múltiplo de 4:
$c = 0$, 4 ou 8

ii) $c + c + b + a - c - b - a$ é múltiplo de 11:
c é múltiplo de 11

Com isso, obtemos que $c = 0$.
Desta forma, aabb000 deve ser múltiplo de 19 também, ou seja, aabb deve ser múltiplo de 19. Não conhecemos nenhum critério de divisibilidade para 19, mas estamos interessados no menor número desta forma que é divisível por 19.
Veja agora que $aabb = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a+b)$. Logo $100a + b$ deve ser divisível por 19. Como $100 = 19 \times 5 + 5$, devemos ter $95a + 5a + b$ divisível por 19, ou seja, $5a+b$ é divisível por 19. Para termos $a + b$ menor possível, tomamos $a = 3$ e $b = 4$.
Assim, a soma dos algarismos pedida é $3 + 3 + 4 + 4 + 0 + 0 + 0 = 14$.

RESPOSTA: A

3.
a) Soma dos algarismos de 14543: $1 + 4 + 5 + 4 + 3 = 17$, que deixa resto 2 na divisão por 3. Logo devemos achar o resto de 2^{567} na divisão por 3. Veja que 2^2 deixa resto 1 na divisão por 3. Dividindo 567 por 2, obtemos $567 = 2 \times 283 + 1$. Logo $2^{567} = (2^2)^{283} . 2$ deixa resto $1 \times 2 = 2$ na divisão por 3.

b) 74892 deixa resto 2 na divisão por 5, 6379 deixa resto 4 na divisão por 5, 9538 deixa resto 3 na divisão por 5 e 3756 deixa resto 1 na divisão por 5. Logo, devemos encontrar o resto de $2^{359} \times 4^{207} \times 3^{179} \times 1^{723}$ na divisão por 5.

Veja que $2^4 = 16$ deixa resto 1 na divisão por 5, $4^2 = 16$ deixa resto 1 na divisão por 5 e $3^4 = 81$ deixa resto 1 na divisão por 5.

Assim, temos:

$2^{359} = (2^4)^{89} . 2^3$ deixa o mesmo resto que $2^3 = 8$ na divisão por 5, que é 3.

$4^{207} = (4^2)^{103} . 2$ deixa resto 4 na divisão por 5.

$3^{179} = (3^4)^{44} . 3^3$ deixa o mesmo resto que $3^3 = 27$ na divisão por 5, que é 2.

$1^{723} = 1$ deixa resto 1 na divisão por 5.

Logo o resto buscado é o mesmo resto de 3 x 4 x 2 x 1 = 24 na divisão por 5, que é 4.

4. 743 = 123 x 6 + 5 e assim 743 deixa resto 5 na divisão por 6. Logo queremos o resto de 5^{48} na divisão por 6. Veja que $5^2 = 25$ deixa resto 1 na divisão por 6. Logo, $5^{48} = (5^2)^{24}$ deixa resto 1 na divisão por 6.

RESPOSTA: A

5. 5743 deixa resto 3 na divisão por 5. Logo queremos o resto de 3^{9319} na divisão por 5.

Veja que:

3^1 deixa resto 3 na divisão por 5

3^2 deixa resto 4 na divisão por 5

3^3 deixa resto 2 na divisão por 5

3^4 deixa resto 1 na divisão por 5

Dividindo 9319 por 4, temos que 9319 = 2329 x 4 + 3. Logo $3^{9319} = (3^4)2^{329} . 3^3$ deixa o mesmo resto que $3^3 = 27$ na divisão por 5, que é 2.

RESPOSTA: B

6. Vamos analisar cada uma das parcelas:

Para encontrarmos o resto de 1211^{20} por 11, primeiramente encontramos o resto de 1221 por 11. Para isso, usamos que tal resto é o resto da diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par na divisão por 11, ou seja:

O resto de 1211 por 11 é igual ao resto de (1+2)-(1+1) por 11, que é 1.

Com isso, 1211^{20} deixa resto $1^{20} = 1$ na divisão por 11.

Para encontrarmos o resto de 9119^{32} por 11:

Resto de 9119 por 11 = Resto de (9+1)-(1+9) por 11 = 0.

Com isso, 9119^{32} deixa resto 0 na divisão por 11.

Assim o resto de $1211^{20} = 9119^{32} . 343^{26}$ por 11 é igual ao resto de $1 + 0 . 343^{26} = 1$ na divisão por 11, que é 1.

RESPOSTA: B

7. Veja que pelo método da decomposição em primos, N possui 4 fatores primos (não necessariamente distintos). Assim, N pode ter os seguintes formatos:

pqrs

p^2qr

p^2q^2

p^3q

p^4

Temos as seguintes quantidades de divisores:

$(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

$(2+1)(2+1)=9$

$(3+1)(1+1)=8$

$(4+1)=5$

Assim, há 5 possíveis valores para y.

RESPOSTA: C

8. O número de divisores positivos de um número da forma $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$ é: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_n+1)$.

Então:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_n+1)=2005$$

Sabemos que:

2005 = 401 . 5, onde 401 e 5 são primos.

Temos então, duas possibilidades:

i) $\alpha_1 = 2004$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$

Aqui nosso número será composto por uma base.

ii) $\alpha_1 = 400$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$

Aqui nosso número será composto por duas bases distintas.

RESPOSTA: A

9. Temos que N = 15 . 20 . 6 = $2^3 . 3^2 . 5^2$. Como $y = 2^a . 3^b . c^2$ é divisor de N, temos que c = 2, 3 ou 5, pois c é primo. Ainda, como y possui 36 divisores, y possui 18 divisores positivos. Assim:

i) Se c = 2:

$y = 2^{(a+2)} . 3^b$

Logo, (a + 3)(b + 1) = 18. Como a + 2 ≤ 3, só podemos ter a = 0 ou a = 1.

Se a = 0, b = 5 (não pode, pois b é no máximo 2). Se a = 1, b não seria inteiro.

Neste caso não há soluções.

ii) Se c = 3:

$y = 2^a \cdot 3^{b+2}$

Logo, (a + 1)(b + 3) = 18. Como b + 2 ≤ 2, só podemos ter b = 0. Logo a = 5 (não pode, pois a é no máximo 2)

Neste caso não há soluções.

iii) Se c = 5:

$y = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^2$

Logo, (a + 1)(b + 1)(2 + 1) = 18 ⇔ (a + 1)(b + 1) = 6. Veja que a é no máximo 3 e b é no máximo 2. Se b = 0, a = 5 (não pode!); se b = 1, a = 2; se b = 2, a = 1.

Assim, temos que a = 2, b = 1, c = 5 ou a = 1, b = 2 ou c = 5.

No primeiro caso, nenhuma das opções é verdadeira.

No segundo caso, C e D são verdadeiras.

RESPOSTA: C ou D

10. Queremos que o tamanho de todos os pedaços seja igual. Seja x o tamanho desse pedaço.

Sabemos que x divide 2400, x divide 3200 e x divide 5600.

Com isso, x tem que ser um divisor comum de 2400, 3200 e 5600.

Como no enunciado é pedido o maior tamanho possível, x = mdc(2400,3200,5600).

Usaremos o método da decomposição canônica para encontrar o mdc:

$2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$

$3200 = 2^7 \cdot 5^2$

$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

Com isso, x = mdc(2400,3200,5600) = $2^5 \cdot 5^2 = 800$

O número de pedaços distribuídos é $\frac{2400}{800}+\frac{3200}{800}+\frac{5600}{800}=3+4+7=14$ pedaços.

11. A gasta 1,2 minutos = 72 segundos para dar a volta, B gasta 1,5 minutos = 90 segundos para dar a volta e C gasta 2 minutos = 120 segundos para dar a volta.

Assim, A passa pelo local de partida em tempos múltiplos de 72 segundos, B passa pelo local de partida em tempos múltiplos de 90 segundos e C passa pelo local de partida em tempos múltiplos de 120 segundos.

Com isso, A, B e C passam juntos no local de partida em tempos múltiplos comuns a 72, 90 e 120. Fatorando 72, 90 e 120, temos:

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Logo, mmc(72,90,120) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Assim, a cada 360 segundos = 6 minutos, A, B e C passam juntos no local de partida. Vamos analisar as alternativas:

a) Na terceira vez que os três se encontrarem, o aluno menos veloz terá completado 12 voltas.

Na terceira vez que os três se encontram, decorreram-se 18 minutos. C é o aluno menos veloz e percorre a pista em 2 minutos. Em 18 minutos, portanto, terá dado 9 voltas.

(FALSA)

b) O tempo que o aluno B gastou até que os três se encontraram pela primeira vez foi de 4 minutos.

Na verdade, B gastou 6 minutos até que os três se encontraram pela primeira vez.

(FALSA)

c) No momento em que os três alunos se encontraram pela segunda vez, o aluno mais veloz gastou 15 minutos.

Quando os três se encontraram pela segunda vez, decorreram-se 18 minutos.

(FALSA)

d) A soma do número de voltas que os três alunos completaram quando se encontraram pela segunda vez foi 24.

Quando eles se encontraram pela segunda vez, decorreram-se 12 minutos.

Em 12 minutos, A completou 12/1,2 = 10 voltas.

Em 12 minutos, B completou 12/1,5 = 8 voltas.

Em 12 minutos, C completou 12/2 = 6 voltas.

Assim, a soma do número de voltas é 10 + 8 + 6 = 24.

(VERDADEIRA)

RESPOSTA: D

12.

	2	1	3
A	B	x	11
y	z	0	

Pelo método do algoritmo de Euclides, temos:

x = y

z = 11

A = 2B + y

B = x + z

x = 33

Logo x = y = 33, B = x + z = 33 + 11 = 44 e A = 2B + y = 88 + 33 = 121.

Assim, A = 121 e B = 44, o que nos dá A – B = 77.

RESPOSTA: E

13. Seja x o número total de figurinhas. Pelo enunciado, sabemos que x – 7 é divisível por 12, por 15 e por 24. Então x – 7 tem que ser múltiplo comum desses três números. Assim, x – 7 é múltiplo de mmc(12,15,24).

Para encontrar o mmc, usaremos o método da decomposição canônica:

$12 = 2^2 \cdot 3$

$15 = 3 \cdot 5$

$24 = 2^3 \cdot 3$

$\text{mmc}(12,15,24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Como o total tem que estar compreendido entre 240 e 360:

$x - 7 = 2 \cdot \text{mmc}(12,15,24)$

$x - 7 = 2 \cdot 120$

$x = 247$

A soma dos algarismos é 2 + 4 + 7 = 13.

RESPOSTA: D

14. Temos $a = 2^4 \,.\, 3^k$ e $b = 2^p \,.\, 3 \,.\, 7$ e. Como $k \neq 0$, temos que $k \geq 1$.
Logo, $\text{mmc}(a,b) = 2^{\max(p,4)} \cdot 3^k \cdot 7$. Como $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$, temos que $\max(p,4) = 5$, ou seja, p = 5 e k = 1.

Analisando as alternativas:

a) p é divisor de $2^p \,.\, 21$
 5 é divisor de $2^5 \,.\, 21$ (FALSO)

b) 3^k é divisível por 2^p
 3 é divisível por 2^5 (FALSO)

c) p^k é múltiplo de 3
 5 é múltiplo de 3 (FALSO)

d) $p - k = 4^k$
 5 – 1 = 4 . 1 (VERDADEIRO)

RESPOSTA: D

15. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{p_1 p_2{}^2 p_3{}^3 \cdots p_n{}^n}{p_1 p_2 p_3 \cdots p_n} = p_2 p_3{}^2 p_4{}^3 \cdots p_n{}^{n-1}$

O número de divisores positivos de $\dfrac{x}{y}$ é $(1+1)(2+1)(3+1)\ldots(n-1+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n = n!$

RESPOSTA: B