

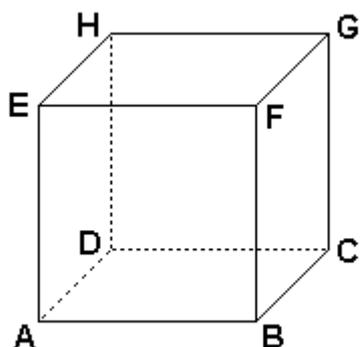
Exercícios de Matemática

Pirâmide

1. (Ita) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

- $(\sqrt{3/9})x$ cm
- $(\sqrt{3/18})x$ cm
- $(\sqrt{3/6})x$ cm
- $(\sqrt{3/3})x$ cm
- $(\sqrt{3/2})x$ cm

2. (Ufpr) Considerando o cubo representado na figura abaixo, de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, e designando como α o plano que contém os pontos C, D, E e F, é correto afirmar:

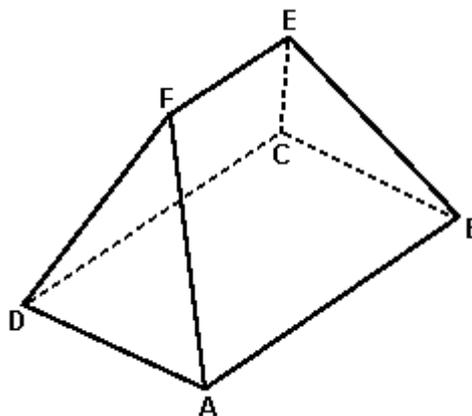


- O plano α divide o cubo em duas pirâmides.
- O plano α é perpendicular à face EADH.
- O plano α é paralelo à aresta \overline{AB} .
- A pirâmide cujos vértices são A, B, C e F tem volume igual a um oitavo do volume do cubo.
- O volume do cilindro circunscrito ao cubo é maior do que uma vez e meia o volume do cubo.
- A esfera inscrita no cubo tem raio igual à aresta do cubo.

Soma ()

3. (Fuvest) No sólido S representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados $AB = 2l$ e $AD = l$; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento EF tem comprimento l .

Determinar, em função de l , o volume de S.



4. (Ufmg) Um recipiente cúbico, sem tampa, cujas arestas medem 4 dm, contém 56 litros de água. Ao lado desse recipiente, estão os seguintes sólidos, todos de aço maciço:

- uma esfera de raio $3\sqrt{2}$ dm;
- um cilindro circular reto com raio da base $\sqrt{2}$ dm e altura $\sqrt{2}$ dm;
- um paralelepípedo retangular de dimensões $\sqrt{3}$ dm, $\sqrt{3}$ dm e $\sqrt{7}$ dm; e
- uma pirâmide reta de altura $\sqrt{5}$ dm e de base quadrada com lado $\sqrt{12}$ dm.

Qual desses sólidos, quando colocado no recipiente, NÃO fará com que a água transborde?

- A pirâmide
- O cilindro
- O paralelepípedo
- A esfera

5. (Ita) Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede $3a$ cm, onde a é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm^2 , vale:

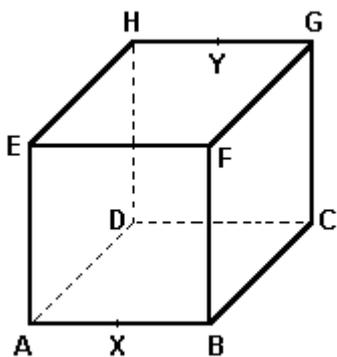
- a) $(a^2\sqrt{327})/4$
- b) $(a^2\sqrt{109})/2$
- c) $(a^2\sqrt{3})/2$
- d) $[a^2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{33})]/2$
- e) $[a^2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{109})]/4$

6. (Pucsp) A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede $8\sqrt{2}$ cm. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17 cm, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:

- a) 520.
- b) 640.
- c) 680.
- d) 750.
- e) 780.

7. (Fuvest) No cubo de aresta ' a ' mostrado na figura adiante, X e Y são pontos médios das arestas AB e GH respectivamente. Considere a pirâmide de vértice F e cuja base é o quadrilátero XCYE. Calcule, em função de a ,

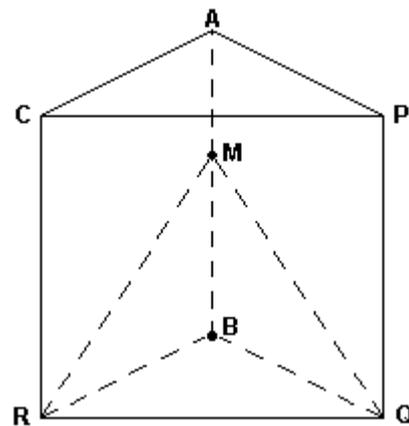
- a) o comprimento do segmento XY.
- b) a área da base da pirâmide.
- c) o volume da pirâmide.



8. (Unicamp) Dado um cubo de aresta l , qual é o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo?

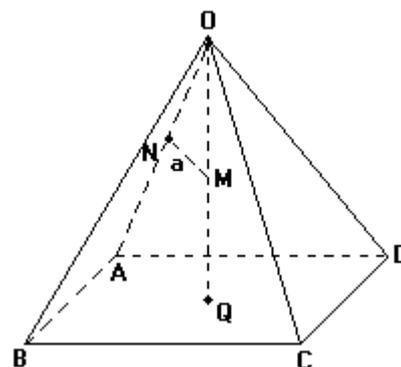
9. (Unesp) As arestas do prisma triangular reto mostrado na figura a seguir têm todas a mesma medida. Secciona-se o prisma por meio de um plano pelos vértices R e Q e por um ponto M da aresta AB. Para que o tetraedro MBQR tenha volume igual a $1/3$ do volume do outro sólido em que se dividiu o prisma, deve-se ter BM igual a:

- a) $3/4$ BA
- b) $2/3$ BA
- c) $3/5$ BA
- d) $1/3$ BA
- e) $1/6$ BA



10. (Unesp) A figura a seguir mostra uma pirâmide regular de base quadrada cuja altura tem a mesma medida que as arestas da base. Pelo ponto médio M da altura OQ, traça-se o segmento MN perpendicular à aresta OA.

Se ' a ' expressa a medida de MN, determine o volume da pirâmide em função de ' a '.



11. (Fei) São dados dois planos paralelos distantes de 5cm. Considere em um dos planos um triângulo ABC de área 30cm^2 e no outro plano um ponto qualquer O. O volume do tetraedro ABCO é:

- a) 10 cm^3
- b) 20 cm^3
- c) 30 cm^3
- d) 40 cm^3
- e) 50 cm^3

12. (Ufpe) Calcule o quadrado do volume do octaedro regular, cujas arestas medem $\sqrt[3]{3}$ unidades de comprimento.

13. (Puccamp) Uma pirâmide regular de base hexagonal é tal que a altura mede 8cm e a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é

- a) $24\sqrt{3}$
- b) $36\sqrt{3}$
- c) $48\sqrt{3}$
- d) $72\sqrt{3}$
- e) $144\sqrt{3}$

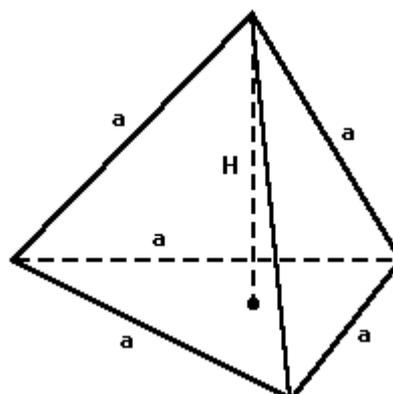
14. (Unicamp) Um tetraedro regular, cujas as arestas medem 9 cm de comprimento, tem vértices nos pontos A, B, C e D. Um plano paralelo ao plano que contém a face BCD encontra as arestas AB, AC e AD, respectivamente, nos pontos R, S e T.

- a) Calcule a altura do tetraedro ABCD.
- b) Mostre que o sólido ARST também é um tetraedro regular.
- c) Se o plano que contém os pontos R, S e T dista 2 centímetros do plano da face BCD, calcule o comprimento das arestas do tetraedro ARST.

15. (Unirio) Um prisma de altura H e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é:

- a) $H/6$
- b) $H/3$
- c) $2H$
- d) $3H$
- e) $6H$

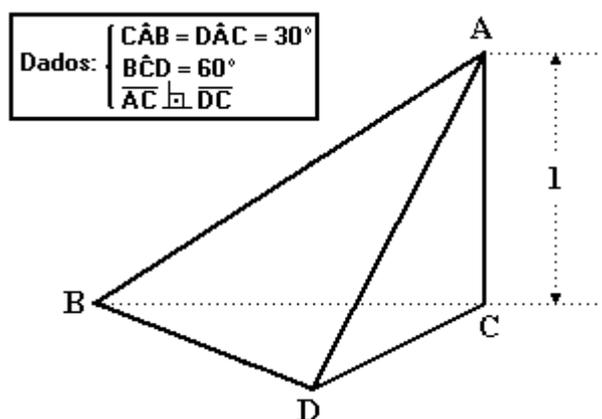
16. (Unesp) Calcule a altura H e o seno do ângulo diedro formado por duas faces quaisquer de um tetraedro regular cujas arestas medem "a" cm.



17. (Uece) Numa pirâmide quadrangular regular, uma aresta da base mede $2\sqrt{2}$ cm e uma aresta lateral mede $\sqrt{22}$ cm. O volume dessa pirâmide, em cm^3 , é:

- a) $7\sqrt{2}$
- b) $8\sqrt{2}$
- c) $9\sqrt{2}$
- d) $10\sqrt{2}$

18. (Mackenzie) O volume do sólido da figura a seguir é:

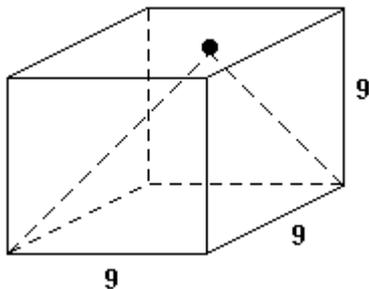


- a) $\sqrt{3/12}$.
- b) $\sqrt{3/18}$.
- c) $\sqrt{3/20}$.
- d) $\sqrt{3/24}$.
- e) $\sqrt{3/36}$.

19. (Faap) Considere um tetraedro retangular e um plano que o intercepta. A única alternativa correta é:

- a) a intersecção pode ser um quadrilátero
- b) a intersecção é sempre um triângulo
- c) a intersecção é sempre um triângulo equilátero
- d) a intersecção nunca é um triângulo equilátero
- e) a intersecção nunca é um quadrilátero

20. (Ufpe) Na figura a seguir o cubo tem aresta igual a 9cm e a pirâmide tem um vértice no centro de uma face e como base a face oposta. Se $V \text{ cm}^3$ é o volume da pirâmide, determine $(1/3)V$.



21. (Cesgranrio) Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais a x . O volume dessa pirâmide é:

- a) $(x^3\sqrt{2})/3$
- b) $(x^3\sqrt{2})/6$
- c) $(x^3\sqrt{3})/2$
- d) $(x^3\sqrt{3})/6$
- e) x^3

22. (Pucsp) Um imperador de uma antiga civilização mandou construir uma pirâmide que seria usada como seu túmulo. As características dessa pirâmide são

- 1° Sua base é um quadrado com 100 m de lado.
- 2° Sua altura é de 100 m.

Para construir cada parte da pirâmide equivalente a 1000 m^3 , os escravos, utilizados como mão-de-obra, gastavam, em média, 54 dias. Mantida essa média, o tempo necessário para a construção da pirâmide, medido em anos de 360 dias, foi de

- a) 40 anos.
- b) 50 anos.
- c) 60 anos.
- d) 90 anos.
- e) 150 anos.

23. (Mackenzie) A soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide é $18\pi \text{ rd}$. Então o número de lados do polígono da base da pirâmide é:

- a) 8
- b) 9
- c) 10
- d) 11
- e) 12

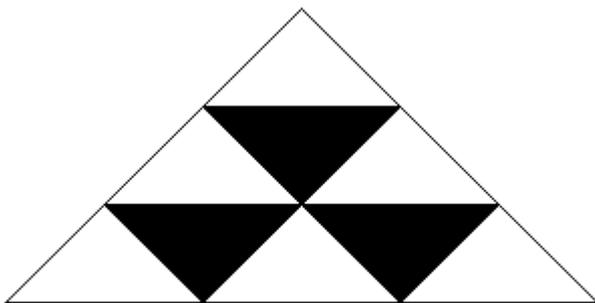
24. (Fei) Seja ABCD um tetraedro regular e X, Y e Z os pontos médios das arestas AB, AC e AD respectivamente. Considere as afirmações:

- I. O triângulo XCD é isósceles
- II. O triângulo XBD é retângulo
- III. O triângulo XYA é equilátero

Assinale a alternativa correta:

- a) Somente a I e II são verdadeiras.
- b) Somente a I e III são verdadeiras.
- c) Somente II e III são verdadeiras.
- d) Todas são verdadeiras.
- e) Somente I é verdadeira.

25. (Fei) Em cada face de um tetraedro regular desenhou-se um trevo de 3 folhas estilizado, conforme indicado na figura. Se a medida da aresta do tetraedro é t , a soma das áreas de todas as folhas de todos os trevos desenhados é:



as três folhas do trevo têm dimensões iguais

- a) $(t^2\sqrt{3})/2$
- b) $(t^2\sqrt{3})/3$
- c) $(t^2\sqrt{3})/6$
- d) $(t^2\sqrt{3})/9$
- e) $(t^2\sqrt{3})/12$

26. (Mackenzie) Pelo centro A de um quadrado MNPQ de lado $l = 1$, levanta-se uma perpendicular ao plano do quadrado e une-se um ponto T dessa perpendicular aos vértices do quadrado, obtendo-se, deste modo, quatro triângulos equiláteros.

O ângulo AMT mede:

- a) 30°
- b) 45°
- c) 60°
- d) $\text{arc tg } \sqrt{2}$
- e) $\text{arc tg } \sqrt{2}/2$

27. (Mackenzie) Pelo centro A de um quadrado MNPQ de lado $l = 1$, levanta-se uma perpendicular ao plano do quadrado e une-se um ponto T dessa perpendicular aos vértices do quadrado, obtendo-se, deste modo, quatro triângulos equiláteros.

O volume do poliedro de vértice T e base AMN é:

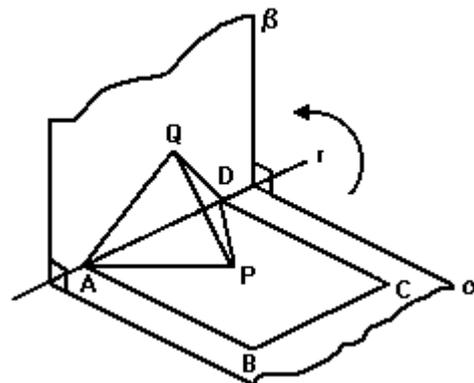
- a) $\sqrt{2}/6$
- b) $\sqrt{2}/12$
- c) $\sqrt{2}/24$
- d) $\sqrt{2}/36$
- e) $\sqrt{2}/48$

28. (Mackenzie) Pelo centro A de um quadrado MNPQ de lado $l=1$, levanta-se uma perpendicular ao plano do quadrado e une-se um ponto T dessa perpendicular aos vértices do quadrado, obtendo-se, deste modo, quatro triângulos equiláteros.

A área total do poliedro de vértice T e base MNPQ é:

- a) $(\sqrt{3}) + 2$
- b) $2(\sqrt{2} + 1)$
- c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
- d) $\sqrt{2} + 1$
- e) $\sqrt{3} + 1$

29. (Unesp) Na figura, os planos α e β são perpendiculares e se interceptam segundo a reta r . Os pontos A, B, C, e D com A e D em r , são os vértices de um quadrado e P é o ponto de interseção das diagonais do quadrado. Seja Q, em β , o ponto sobre o qual cairia P se o plano α girasse de 90° em torno de r , no sentido indicado na figura, até coincidir com β .



Se $AB = 2\sqrt{3}$, calcule o volume do tetraedro APDQ.

30. (Ufrs) Numa pirâmide regular, a base é um quadrado de lado a . Suas faces laterais são triângulos equiláteros. O volume desta pirâmide é

- a) $\sqrt{2}/12 a^3$
- b) $\sqrt{2}/6 a^3$
- c) $\sqrt{2}/3 a^3$
- d) $\sqrt{3}/12 a^3$
- e) $\sqrt{3}/6 a^3$

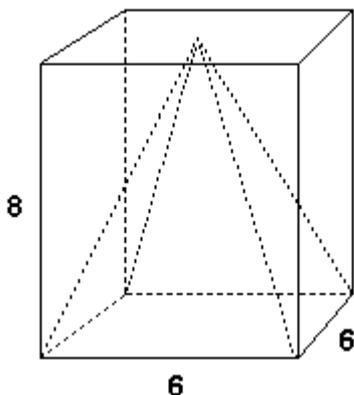
31. (Ita) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45° . Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

- a) $\sqrt{2}$
- b) $1/3$
- c) $\sqrt{6}$
- d) $(\sqrt{2})/2$
- e) $(\sqrt{3})/3$

32. (Cesgranrio) Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após se ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrá dessa folha de papel corresponde a:

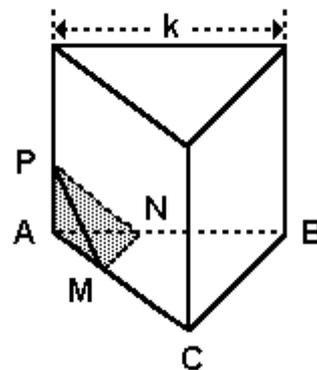
- a) 20 %
- b) 16 %
- c) 15 %
- d) 12 %
- e) 10 %

33. (Fuvest) Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura h , a partir da base ($h \leq 8$). Determine o volume da água para um valor arbitrário de h , $0 \leq h \leq 8$.



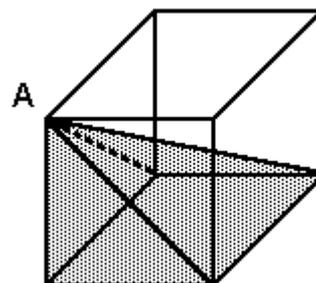
34. (Mackenzie) Na figura a seguir, PMN é a secção do prisma reto, triangular e regular, com um plano α que faz 60° com sua base. Se M e N são pontos médios e se o volume do sólido assinalado é $\sqrt{3}$, então k mede:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

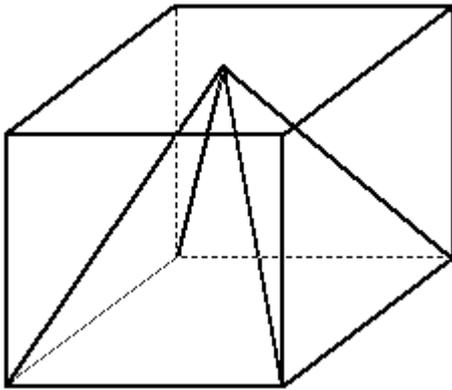


35. (Mackenzie) Na figura a seguir, a pirâmide de vértice A tem por base uma das faces do cubo de lado k. Se a área lateral dessa pirâmide é $4+4\sqrt{2}$, então o volume do sólido contido no cubo e externo à pirâmide é:

- a) $8/3$
- b) 16
- c) 8
- d) $4/3$
- e) $16/3$



36. (Unirio)

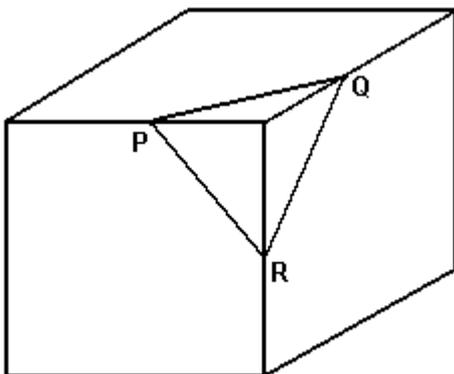


Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura anterior. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3 , então, o volume do cubo, em m^3 , é igual a:

- a) 9
- b) 12
- c) 15
- d) 18
- e) 21

37. (Ufrs) O valor numérico de cada aresta de um cubo é 2, e os pontos P, Q e R são pontos médios de três arestas, como no desenho a seguir. Um plano passando pelos pontos P, Q e R secciona o cubo em dois sólidos. A razão entre o volume do sólido menor e o volume do cubo é

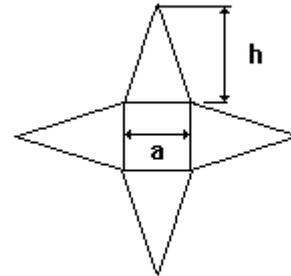
- a) $1/48$
- b) $1/32$
- c) $1/24$
- d) $1/16$
- e) $1/12$



38. (Unicamp) Cada aresta de um tetraedro regular mede 6cm. Para este tetraedro, calcule:

- a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;
- b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

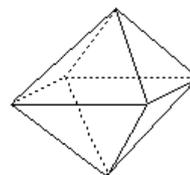
39. (Ufrs) Considere uma pirâmide regular de base quadrada, construída a partir do padrão plano abaixo.



Se a altura da pirâmide é o dobro do lado "a" da base, o valor de h no padrão é

- a) $h = (\sqrt{17/2}) a$
- b) $h = (\sqrt{5}) a$
- c) $h = (\sqrt{22/2}) a$
- d) $h = (\sqrt{6}) a$
- e) $h = (5/2) a$

40. (Puccamp) Um octaedro regular é um poliedro constituído por 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra a figura a seguir.



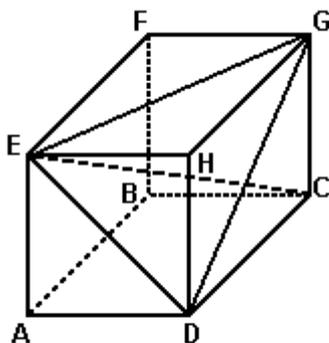
Se o volume desse poliedro é $72\sqrt{2} \text{ cm}^3$, a medida de sua aresta, em centímetros, é

- a) $\sqrt{2}$
- b) 3
- c) $3\sqrt{2}$
- d) 6
- e) $6\sqrt{2}$

41. (Ita) Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8m, 10m e 12m. O volume, em m^3 , do sólido formado é:

- a) $15\sqrt{6}$
- b) $5\sqrt{30}$
- c) $6\sqrt{15}$
- d) $30\sqrt{6}$
- e) $45\sqrt{6}$

42. (Uff) Considere o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H representando na figura abaixo.



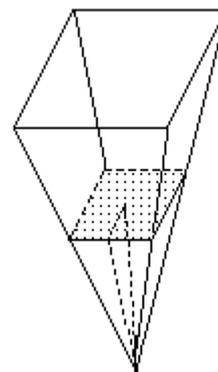
Sabendo que a área do triângulo DEC é $\sqrt{2}/2m^2$, calcule o volume da pirâmide cujos vértices são D, E, G e C.

43. (Ufes) Seja VABC uma pirâmide de vértice V e base ABC. O plano que passa pelo ponto C, pelo ponto médio M da aresta VA e pelo ponto médio N da aresta VB, divide-a em duas pirâmides de vértice C, uma de base triangular e volume V_i e outra de base quadrangular e volume V_j . A razão V_i/V_j é

- a) $1/8$
- b) $1/4$
- c) $1/3$
- d) $3/8$
- e) $1/2$

44. (Ufsm) Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular, para verificar o índice pluviométrico de uma certa região. A água, depois de recolhida, é colocada num cubo de 10cm de aresta. Se, na pirâmide, a água atinge uma altura de 8cm e forma uma pequena pirâmide de 10cm de apótema lateral, então a altura atingida pela água no cubo é de

- a) 2,24 cm
- b) 2,84 cm
- c) 3,84 cm
- d) 4,24 cm
- e) 6,72 cm



45. (Mackenzie) I) Se a razão entre as áreas totais de dois cubos é $4/9$, então a razão entre seus volumes é $8/27$.

II) Se todas as arestas de uma pirâmide triangular regular medem $\sqrt{6}$, então a altura da pirâmide mede 2.

III) Se a geratriz de um cone é o dobro do raio da base, então a área lateral do cone é igual a quatro vezes a área da base.

Das afirmações acima, apenas:

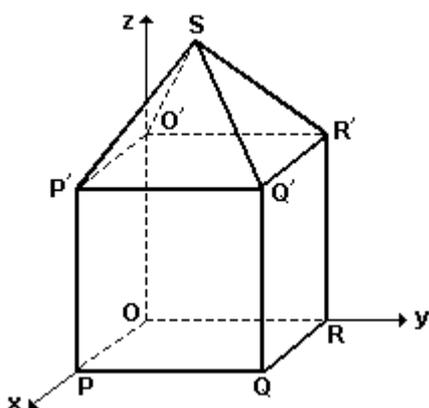
- a) I é verdadeira.
- b) I e II são verdadeiras.
- c) II é verdadeira.
- d) II e III são verdadeiras.
- e) III é verdadeira.

46. (Ufu) Considere um cubo cuja aresta tem comprimento igual 1cm. Sejam A, B, C, D os centros de suas faces laterais e E, o centro de sua base, determine o volume da pirâmide de vértice E, cuja base é o quadrilátero ABCD.

Obs. Considere que o centro de uma face é o ponto de intersecção determinado pelas diagonais dessa face.

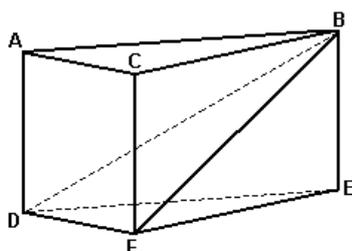
- a) $2/3 \text{ cm}^3$
- b) $1/12 \text{ cm}^3$
- c) $1/3 \text{ cm}^3$
- d) $\sqrt{3/6} \text{ cm}^3$
- e) $\sqrt{3/3} \text{ cm}^3$

47. (Ufrj) O sólido representado na figura é formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular cuja base coincide com a face superior do cubo. O vértice O do cubo é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas Oxyz. Os vértices P, R e O' pertencem respectivamente aos semi-eixos positivos Ox, Oy e Oz. O vértice S tem coordenadas (2,2,8).



Considere o plano $z = k$ que divide o sólido em duas partes de volumes iguais. Determine o valor de k.

48. (Ufmg) Observe a figura.

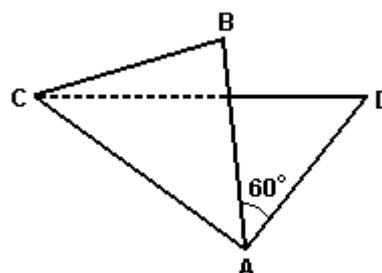


Essa figura representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1 , e DEFB, de volume V_2 .

Assim sendo, a razão V_1/V_2 é

- a) 1
- b) $3/2$
- c) 2
- d) $5/2$

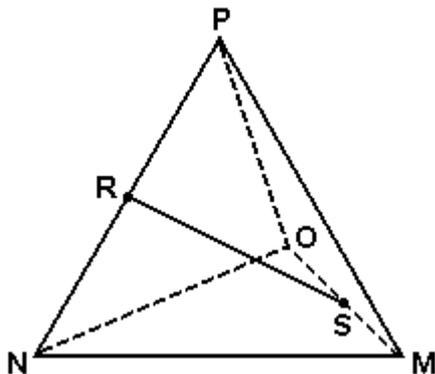
49. (Ufpr) Considere que uma folha de papel, cujo formato é um quadrado ABCD de 10cm de lado, seja dobrada ao longo da diagonal \overline{AC} , conforme a figura a seguir. Sabendo-se que após a dobra a medida do ângulo entre os segmentos \overline{AB} e \overline{AD} é de 60° , é correto afirmar:



- (01) O triângulo ACD é equilátero.
- (02) A distância de B a D é igual a 10cm.
- (04) A distância de B ao plano determinado por A, C e D é maior do que 10cm.
- (08) O tetraedro de vértices A, B, C e D tem área total menor que 200cm^2 .
- (16) O volume da pirâmide de base ACD e vértice B é igual a um terço do volume de um cubo de 10cm de aresta.

Soma ()

50. (Uff) No tetraedro regular representado na figura, R e S são, respectivamente, os pontos médios de NP e OM.



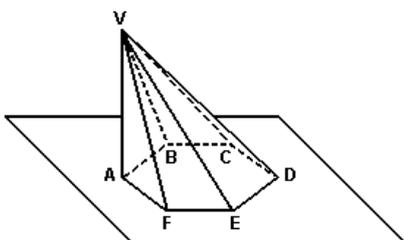
A razão RS/MN é igual a:

- a) $\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{3/2}$
- c) $\sqrt{2}$
- d) $\sqrt{2/2}$
- e) $3\sqrt{2}$

51. (Unirio) Um engenheiro está construindo um obelisco de forma piramidal regular, onde cada aresta da base quadrangular mede 4m e cada aresta lateral mede 6m. A inclinação entre cada face lateral e a base do obelisco é um ângulo α tal que:

- a) $60^\circ < \alpha < 90^\circ$
- b) $45^\circ < \alpha < 60^\circ$
- c) $30^\circ < \alpha < 45^\circ$
- d) $15^\circ < \alpha < 30^\circ$
- e) $0^\circ < \alpha < 15^\circ$

52. (Uff) O hexágono regular ABCDEF é base da pirâmide VABCDEF, conforme a figura.



A aresta VA é perpendicular ao plano da base e tem a mesma medida do segmento AD.

O seguimento AB mede 6cm.
Determine o volume da pirâmide VACD.

53. (Uerj) A figura abaixo representa o brinquedo Piramix.



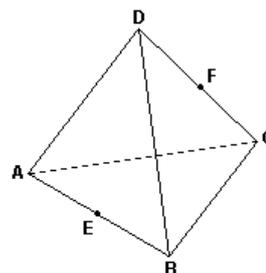
Ele tem a forma de um tetraedro regular, com cada face dividida em 9 triângulos equiláteros congruentes. Se, a partir de cada vértice, for retirada uma pirâmide regular cuja aresta é $1/3$ da aresta do brinquedo, restará um novo sólido.

A razão entre as superfícies totais desse sólido e do Piramix equivale a:

- a) $4/9$
- b) $5/9$
- c) $7/9$
- d) $8/9$

54. (Fuvest) Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado a. Sejam E e F os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente. Então, o valor de EF é:

- a) $a/2$
- b) $(a\sqrt{2})/2$
- c) $(a\sqrt{2})/4$
- d) $(a\sqrt{3})/2$
- e) $(a\sqrt{3})/4$



55. (Ita) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12m^3 , temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

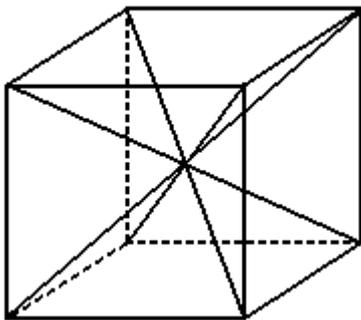
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

56. (Ufc) Em um tetraedro regular VABC, seja M o ponto médio da aresta BC; seja α o ângulo cujo vértice é M e cujos lados são os segmentos da reta MA e MV. Então $\cos\alpha$ é igual a:

- a) $1/3$
- b) $1/2$
- c) $3/4$
- d) $5/6$
- e) $7/8$

57. (Ufpe) Na figura abaixo o cubo de aresta medindo 6 está dividido em pirâmides congruentes de bases quadradas e com vértices no centro do cubo. Qual o volume de cada pirâmide?

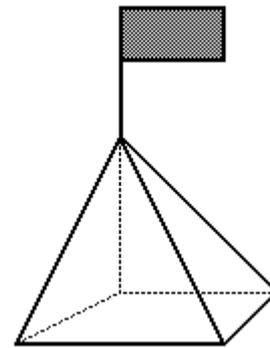
- a) 36
- b) 48
- c) 54
- d) 64
- e) 72



58. (Unicamp) A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado $L=6\text{cm}$ e arestas laterais das faces $A=4\text{cm}$.

- a) Calcule a altura da pirâmide.
- b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?

59. (Unesp) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será

- a) 36.
- b) 27.
- c) 18.
- d) 12.
- e) 4.

60. (Ita) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $1/8$ do volume da pirâmide original?

- a) 2 m.
- b) 4 m.
- c) 5 m.
- d) 6 m.
- e) 8 m.

61. (Uerj) Leia os quadrinhos:

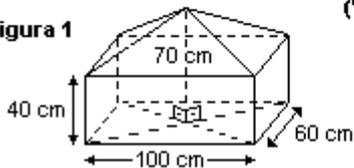
HAGAR, o horrível

Chris Browne



("O Globo", março 2000)

Figura 1

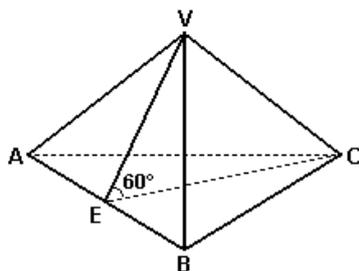


Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm^3 , igual a:

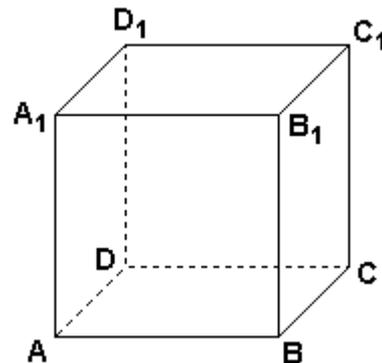
- a) 12
- b) 13
- c) 14
- d) 15

62. (Fuvest) A figura adiante representa uma pirâmide de base triangular ABC e vértice V. Sabe-se que ABC e ABV são triângulos equiláteros de lado l e que E é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Se a medida do ângulo $\widehat{V\hat{E}C}$ é 60° , então o volume da pirâmide é:



- a) $(\sqrt{3} l^3)/4$
- b) $(\sqrt{3} l^3)/8$
- c) $(\sqrt{3} l^3)/12$
- d) $(\sqrt{3} l^3)/16$
- e) $(\sqrt{3} l^3)/18$

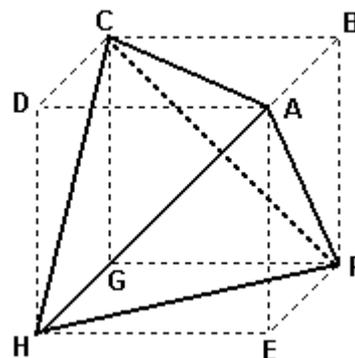
63. (Unicamp) O sólido da figura a seguir é um cubo cuja aresta mede 2cm.



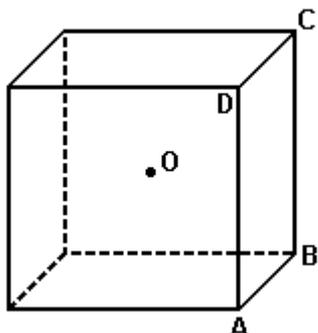
- a) Calcule o volume da pirâmide ABCD
- b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D

64. (Ufscar) Na figura, os pontos ACFH são os vértices de um tetraedro inscrito em cubo de lado 3. O volume do tetraedro é

- a) $27/8$.
- b) $(9\sqrt{39})/8$.
- c) 9.
- d) $(27\sqrt{13})/8$.
- e) 18.



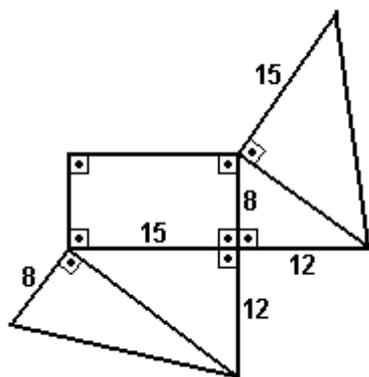
65. (Ufrs) Na figura, O é o centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base ABCD e vértice O é

- a) 1/2.
- b) 1/3.
- c) 1/4.
- d) 1/6.
- e) 1/8.

66. (Ufrs) A figura abaixo representa a planificação de um sólido.



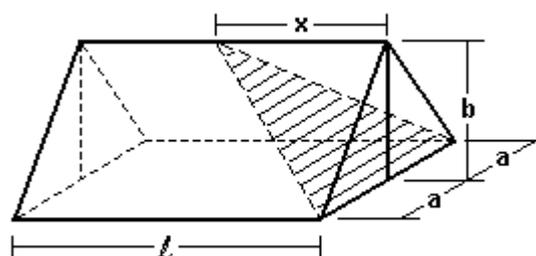
O volume desse sólido, de acordo com as medidas indicadas, é

- a) 180.
- b) 360.
- c) 480.
- d) 720.
- e) 1440.

67. (Ufes) Um grupo de esotéricos deseja construir um reservatório de água na forma de uma pirâmide de base quadrada. Se o lado da base deve ser $\frac{4}{5}$ da altura e o reservatório deve ter capacidade para 720m^3 , qual deverá ser a medida aproximada do lado da base?

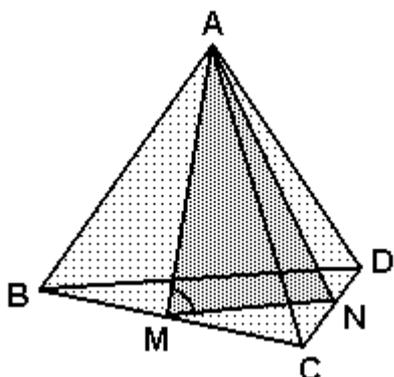
- a) 8,7 m
- b) 12,0 m
- c) 13,9 m
- d) 15,0 m
- e) 16,0 m

68. (Ufes) A cobertura de um galpão tem duas águas (faces) iguais de mesma declividade; o vão mede $2a$ metros e a flecha mede b metros, tal como mostra a figura.



Projeta-se reformar o telhado, criando uma terceira água (triângulo hachurado). O material será reutilizado; não se quer comprar novas telhas. Nessas condições, estima-se que haverá uma perda de 20% de telhas, devido a quebras e recortes necessários ao acabamento. Chamando de x o comprimento do trecho a ser eliminado na cumeeira, ache os valores possíveis de x e discuta os valores de a , b e do comprimento l , para que a reforma proposta possa ser executada.

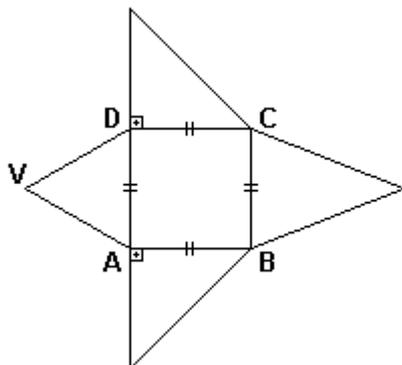
69. (Ufrs) O tetraedro regular ABCD está representado na figura abaixo. M é o ponto médio da aresta \overline{BC} e N é o ponto médio da aresta \overline{CD} .



O cosseno do ângulo NMA é

- a) $1/6$.
- b) $(\sqrt{3})/6$.
- c) $1/3$.
- d) $(\sqrt{3})/3$.
- e) $(\sqrt{3})/2$.

70. (Ufrs) A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide de base quadrada com $AB = 6$ cm, sendo ADV triângulo equilátero.



O volume da pirâmide é

- a) $12\sqrt{3}$.
- b) $27\sqrt{3}$.
- c) $36\sqrt{3}$.
- d) $72\sqrt{3}$.
- e) $108\sqrt{3}$.

71. (Ufc) Um tetraedro regular tem arestas medindo $\sqrt{6}$ cm. Então a medida de suas alturas é igual a:

- a) $1/2$ cm
- b) 1 cm
- c) $3/2$ cm
- d) 2 cm
- e) $5/2$ cm

72. (Ufc) Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer interiores a um tetraedro regular. Sejam d_1 a soma das distâncias de P_1 às faces do tetraedro regular, e d_2 a soma das distâncias de P_2 às faces do tetraedro regular. Mostre que $d_1 = d_2$.

73. (Ufsm) Uma pirâmide tem altura H. A que distância do vértice deve-se passar um plano paralelo à base, para dividi-la em duas partes de mesmo volume?

- a) $H^3\sqrt{2}$
- b) $\sqrt[3]{H/2}$
- c) $3\sqrt{H}$
- d) $H/3$
- e) $H/2$

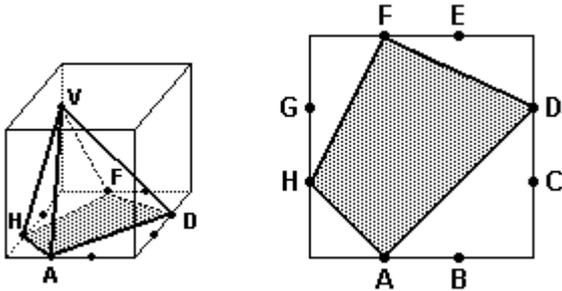
74. (Ufsc) Em uma pirâmide quadrangular regular a aresta lateral mede 5cm e a altura mede 4cm. O volume, em cm^3 , é:

75. (Ita) Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

76. (Fuvest) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1m^2 . Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

- a) 90
- b) 100
- c) 110
- d) 120
- e) 130

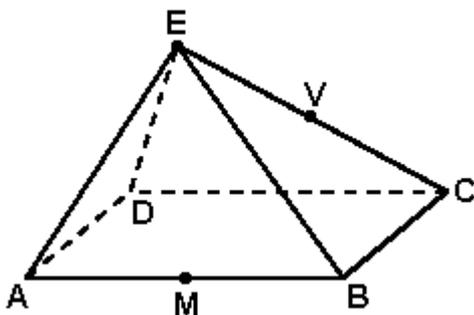
77. (Ufes) Os pontos A, B, C, D, E, F, G, H dividem, respectivamente, cada uma das arestas da base de um cubo em três partes iguais, conforme as figuras a seguir. Um ponto está sobre uma aresta do cubo e a uma distância da base igual a $\frac{2}{3}$ da aresta.



A razão entre o volume do cubo e o volume da pirâmide de vértice V e base ADFH é

- a) 9
- b) 8
- c) 7
- d) 6
- e) 5

78. (Fuvest) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:



- a) 1
- b) 1,5
- c) 2
- d) 2,5
- e) 3

79. (Ufpe) As duas pirâmides ilustradas abaixo (figura 1) têm base quadrada e faces laterais formadas por triângulos equiláteros de lado $10\sqrt{3}$. As bases das pirâmides estão no mesmo plano, têm pares de lados opostos paralelos e distâncias indicadas na figura. Qual a menor distância a ser percorrida para se ir do vértice A de uma das pirâmides ao vértice B da outra, caminhando ou sobre a superfície das pirâmides ou pelo plano?

Sugestão: Planifique as faces a serem percorridas para se obter a menor distância como a seguir (figura 2).

Figura 1

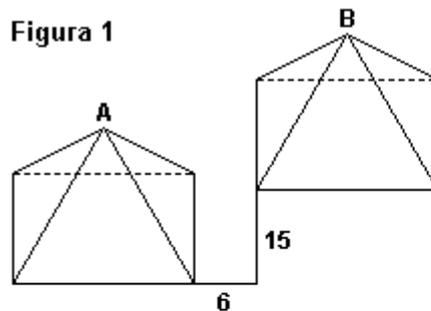
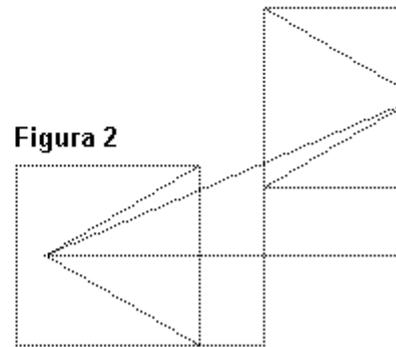


Figura 2



80. (Ita) Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi \text{ cm}^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2 ,

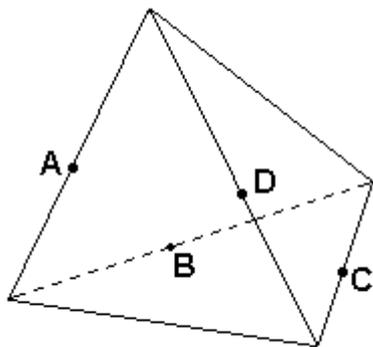
- a) $18\sqrt{427}$
- b) $27\sqrt{427}$
- c) $36\sqrt{427}$
- d) $108\sqrt{3}$
- e) $45\sqrt{427}$

81. (Ufes) O comprimento do lado da base de uma pirâmide regular de base quadrada é igual ao raio de um cilindro circular reto. A interseção da pirâmide com o plano passando pelo seu vértice e por uma diagonal de sua base tem a mesma área que a interseção do cilindro com um plano passando pelo seu eixo.

A razão V_c/V_p entre os volumes V_c do cilindro e V_p da pirâmide é

- a) $[(\sqrt{2})/4]\pi$
- b) $[3(\sqrt{2})/8]\pi$
- c) $[(\sqrt{2})/2]\pi$
- d) $[3(\sqrt{2})/4]\pi$
- e) $[3(\sqrt{2})/2]\pi$

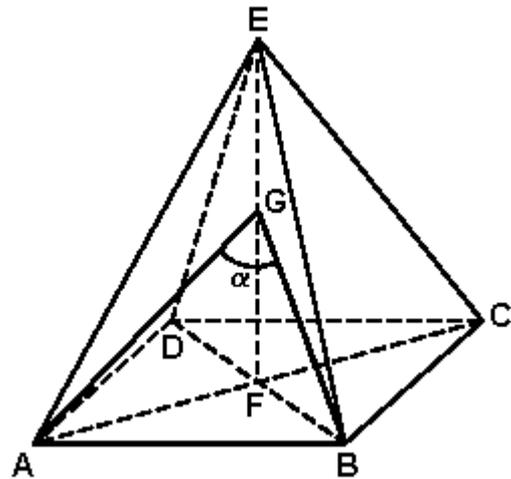
82. (Ufrs) Na figura abaixo, os vértices do quadrilátero ABCD são pontos médios de quatro das seis arestas do tetraedro regular.



Se a aresta desse tetraedro mede 10, então a área do quadrilátero ABCD é

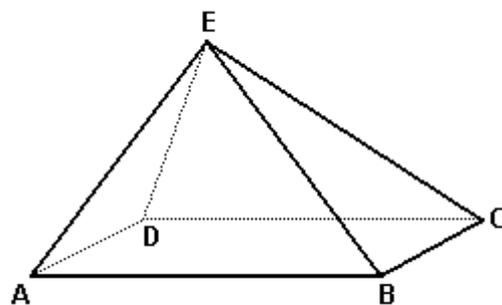
- a) 25.
- b) $25\sqrt{3}$.
- c) 75.
- d) $50\sqrt{3}$.
- e) 100.

83. (Fuvest) A figura a seguir mostra uma pirâmide reta de base quadrangular ABCD de lado 1 e altura $EF = 1$. Sendo G o ponto médio da altura EF e α a medida do ângulo AGB, então $\cos\alpha$ vale



- a) 1/2
- b) 1/3
- c) 1/4
- d) 1/5
- e) 1/6

84. (Fuvest) A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados $AB = 4$ e $BC = 3$. As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



85. (Ita) Em relação a um sistema de eixos cartesianos ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0; 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

- a) $8/3$.
- b) 3.
- c) $(3\sqrt{3})/2$.
- d) $(5\sqrt{3})/2$.
- e) 8.

86. (Pucpr) Dadas três retas paralelas não situadas no mesmo plano, toma-se sobre uma delas um comprimento AB dado e, arbitrariamente, um ponto C sobre a segunda reta e um ponto D sobre a terceira reta.

A respeito do volume da pirâmide triangular ABCD, podemos afirmar que é diretamente proporcional a:

- a) AD
- b) AC
- c) AB
- d) BC
- e) BD

87. (Uff) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m.

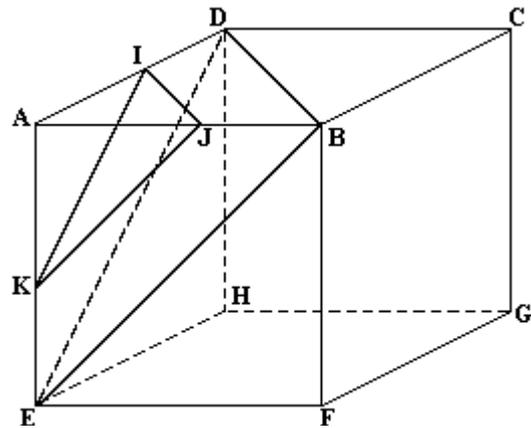
A área da base dessa pirâmide, em m^2 , é:

- a) 13.272
- b) 26.544
- c) 39.816
- d) 53.088
- e) 79.432

88. (Ufc) Um cone circular reto e uma pirâmide de base quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. Se r é a medida do raio da base do cone, e b é a medida do lado da base da pirâmide, então o quociente b/r é igual a:

- a) $1/3$
- b) 1
- c) $\sqrt{\pi}$
- d) π
- e) 2π

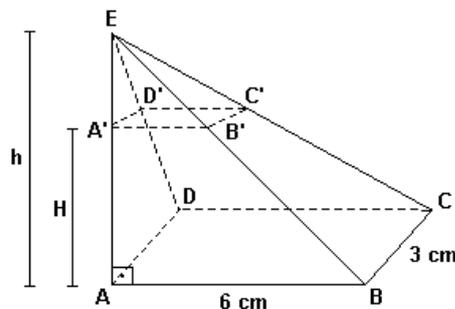
89. (Unesp) Secciona-se o cubo ABCDEFGH, cuja aresta mede 1m, pelo plano BDE, passando por vértices do cubo e pelo plano IJK, passando por pontos médios de lados do cubo, como na figura a seguir. Calcule o volume do tronco de pirâmide IJKDBE, assim formado.



90. (Ufmg) Uma pirâmide regular tem altura 6 e lado da base quadrada igual a 4. Ela deve ser cortada por um plano paralelo à base, a uma distância d dessa base, de forma a determinar dois sólidos de mesmo volume. A distância d deve ser:

- a) $6 - 3\sqrt[3]{2}$
- b) $3 - (3\sqrt[3]{4/2})$
- c) $6 - 3\sqrt[3]{4}$
- d) $6 - 2\sqrt[3]{2}$

91. (Unesp) A figura representa uma pirâmide com vértice num ponto E. A base é um retângulo ABCD e a face EAB é um triângulo retângulo com o ângulo reto no vértice A. A pirâmide apresenta-se cortada por um plano paralelo à base, na altura H. Esse plano divide a pirâmide em dois sólidos: uma pirâmide $EA'B'C'D'$ e um tronco de pirâmide de altura H.

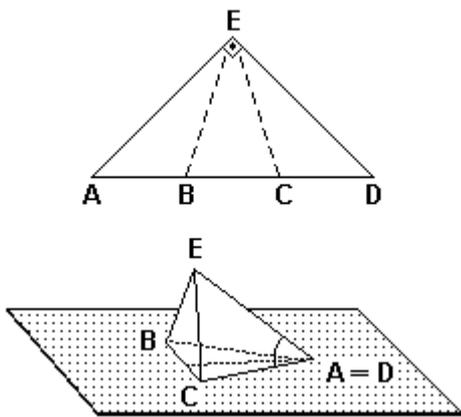


Sabendo-se que $H=4\text{cm}$, $AB=6\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$ e a altura $h=AE=6\text{cm}$, determine:

- o volume da pirâmide $EA'B'C'D'$;
- o volume do tronco de pirâmide.

92. (Uerj) A figura 1 representa uma chapa de metal com a forma de um triângulo retângulo isósceles em que $AB=BC=CD=2\text{m}$.

Dobrando-a nas linhas BE e CE , constrói-se um objeto que tem a forma de uma pirâmide.



Desprezando a espessura da chapa, calcule o cosseno do ângulo formado pela aresta AE e o plano ABC .

GABARITO

1. [B]

2. $02 + 04 + 16 = 22$

3. $5(\sqrt{2})^3/12$

4. [C]

5. [E]

6. [B]

7. a) $a\sqrt{2}$

b) $(a^2\sqrt{6})/2$

c) $a^3/3$

8. $V = l^3/6$

9. [A]

10. $8a^3\sqrt{3}$

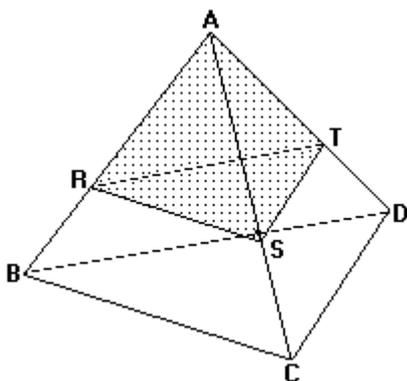
11. [E]

12. 2

13. [C]

14. a) $3\sqrt{6}$ cm

b) Observe a figura a seguir:



Os planos das faces BCD e RST são paralelos e os segmentos RS e BC são coplanares, então o

segmento RS // BC; da mesma forma o segmento ST // CD e RT // BD. Assim, $\Delta ARS \sim \Delta ABC$, $\Delta AST \sim \Delta ACD$ e $\Delta ART \sim \Delta ABD$.

c) $(9 - \sqrt{6})$ cm

15. [E]

16. $H = a\sqrt{6}/3$

$\text{sen } \alpha = 2\sqrt{2}/3$

17. [B]

18. [E]

19. [A]

20. 81 cm^3

21. [B]

22. [B]

23. [C]

24. [D]

25. [B]

26. [B]

27. [C]

28. [E]

29. O volume do tetraedro APDQ é igual a $\sqrt{3}$.

30. [B]

31. [D]

32. [E]

33. $[3/16 (8 - h)^3 + 36h - 96] \text{ m}^3$

34. [D]

35. [E]

36. [D]
37. [A]
38. a) $3\sqrt{2}$ cm
b) $\sqrt{6/2}$ cm
39. [A]
40. [D]
41. [A]
42. $1/6$ m³
43. [C]
44. [C]
45. [B]
46. [B]
47. $k = 8/3$
48. [C]
49. $02 + 08 = 10$
50. [D]
51. [A]
52. Volume = $72\sqrt{3}$ cm³
53. [C]
54. [B]
55. [C]
56. [A]
57. [A]
58. a) 2 cm
b) 4 cm
59. [D]
60. [C]
61. [D]
62. [D]
63. a) $4/3$ cm³
b) $\sqrt{2}$ cm
64. [C]
65. [D]
66. [C]
67. [B]
68. $x = a \cdot b / \sqrt{0,64 b^2 - 0,36 a^2}$, tal que $0 < x < l$ e $b > 3a/4$.
69. [B]
70. [C]
71. [D]
72. Seja ABCD um tetraedro regular. Seja P um ponto qualquer interior a esse tetraedro. Considere as pirâmides ABCP, ABDP, BCDP e ACDP. A soma dos volumes dessas quatro pirâmides é obviamente igual ao volume do tetraedro. Sejam h_1 , h_2 , h_3 e h_4 , respectivamente, as alturas dessas pirâmides e h , a altura do tetraedro. Temos:
- $$\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_1 + \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot h_2 + \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h_3 + \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot h_4 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

Como o tetraedro é regular, os triângulos ABC, ABD, BCD e ACD são todos congruentes. Logo

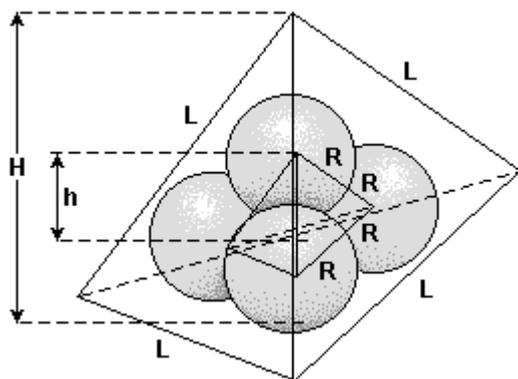
$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$$

Como h_1, h_2, h_3 e h_4 são as distâncias de P às quatro faces do tetraedro, provamos que independente da posição de P essa soma é constante e igual à altura do tetraedro.

73. [A]

74. 24

75.



Sendo h a altura do tetraedro regular t cujos vértices são os centros das quatro esferas, H a altura do tetraedro regular T circunscrito a elas, L a medida de cada aresta de T e V o volume do tetraedro T , têm-se:
1°) $h = (2R\sqrt{6})/3$

$$2^\circ) H/4 = h/4 + R \Leftrightarrow H = h + 4R$$

$$\text{Assim: } H = (2R\sqrt{6})/3 + 4R \Leftrightarrow H = [2R(\sqrt{6} + 6)]/3$$

$$3^\circ) H = (L\sqrt{6})/3$$

$$\text{Assim: } [2R(\sqrt{6} + 6)]/3 = (L\sqrt{6})/3 \Leftrightarrow L = 2R(1 + \sqrt{6})$$

$$4^\circ) V = (L^3\sqrt{2})/12 = [2R(1 + \sqrt{6})]^3 \cdot \sqrt{2}/12 \Leftrightarrow$$

$$V = [2\sqrt{2}(1 + \sqrt{6})^3 R^3]/3$$

76. [A]

77. [A]

78. [B]

79. 39 unidades de comprimento

80. [A]

81. [D]

82. [A]

83. [B]

84. 24 u.v.

85. [A]

86. [C]

87. [D]

88. [C]

89. $7/48 \text{ m}^3$

90. [C]

91. a) $4/3 \text{ cm}^3$
b) $104/3 \text{ cm}^3$

92. $(\sqrt{6})/3$