ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA
Padrões e relações

3

Adilson Longen

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

3º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora do Brasil

ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

padrões e relações

3

Adilson Longen

Licenciado em Matemática, doutor e mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Autor de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Foi professor universitário e atualmente é professor de Matemática em escolas da rede particular.

Manual do **PROFESSOR**

1ª edição
São Paulo – 2016

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
3º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora do Brasil

Direção geral: Vicente Tortamano Avanso
Direção adjunta: Maria Lúcia Kerr Cavalcante Queiroz

Direção editorial: Cibele Mendes Curto Santos
Gerência editorial: Felipe Ramos Poletti
Supervisão editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte, editoração e produção digital: Adelaide Carolina Cerutti
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes
Supervisão de controle de processos editoriais: Marta Dias Portero
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Consultoria de iconografia: Tempo Composto Col. de Dados Ltda.
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Paula Harue e Renata Garbellini
Coordenação de produção CPE: Leila P. Jungstedt

Concepção, desenvolvimento e produção: Triolet Editorial e Mídias Digitais
Diretora executiva: Angélica Pizzutto Pozzani
Diretor de operações e produção: João Gameiro
Gerente editorial: Denise Pizzutto
Editora de texto: Carmen Lucia Ferrari
Assistentes editoriais: Adriane Gozzo, Tatiane Pedroso
Preparação e revisão: Fernanda A. Umile (coord.), Bruna Lima, Érika Finati, Flávia Venezio, Flávio Frasqueti, Leandra Trindade, Liliane F. Pedroso, Mayra Terin Buaiz, Patrícia Rocco
Projeto gráfico: Triolet Editorial/Arte
Editora de arte: Daniela Fogaça Salvador
Assistente de arte: Wilson Santos, Beatriz Landiosi (estag.), Lucas Boniceli (estag.)
Ilustradores: Adilson Secco, Dawidson França, Felipe Rocha
Cartografia: Allmaps
Iconografia: Pamela Rosa (coord.), Erika Freitas
Tratamento de imagens: Felipe Martins Portella
Capa: Beatriz Marassi
Imagem de capa: VANDERLEI ALMEIDA/AFP/Getty Images/© Niemeyer, Oscar/AUTVIS, Brasil, 2016.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Matemática : padrões e relações, 3 : ensino médio / Adilson Longen. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2016. -- (Coleção matemática padrões e relações)

Componente curricular: Matemática
ISBN 978-85-10-06252-7 (aluno)
ISBN 978-85-10-06253-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.
II. Série.

16-03299 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

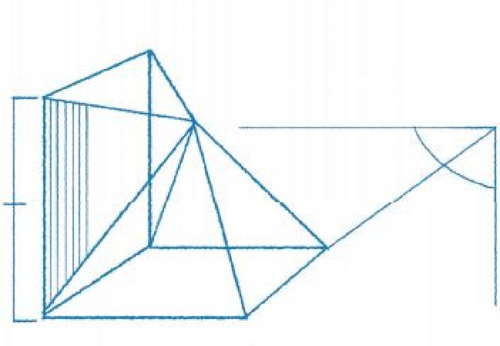
2016
Impresso no Brasil

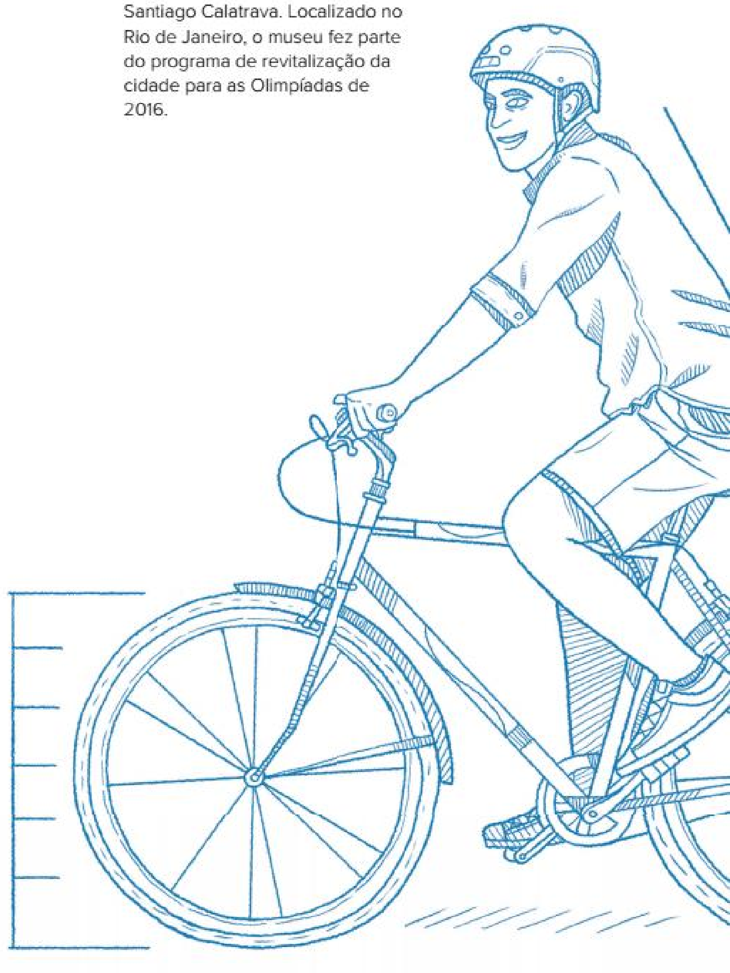
1ª edição / 1ª impressão, 2016

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887 – São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: (11) 3226-0211 – Fax: (11) 3222-5583
www.editoradobrasil.com.br

Imagem de capa:
Vista do Museu do Amanhã, projetado pelo arquiteto espanhol Santiago Calatrava. Localizado no Rio de Janeiro, o museu fez parte do programa de revitalização da cidade para as Olimpíadas de 2016.





Suryara Bernardi

APRESENTAÇÃO

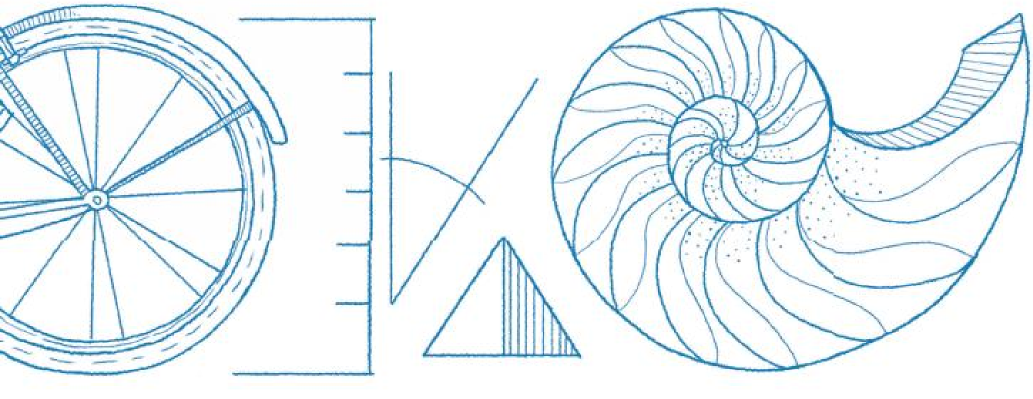
Uma coleção de livros destinados à formação de conhecimentos matemáticos exige de todos os envolvidos certo grau de comprometimento. Ao autor, fica a tarefa de transmissão de conteúdos elencados normalmente para o grau de ensino a que se destina, procurando dar um encaminhamento claro, objetivo e didático. Seu papel também compreende a busca de procedimentos que possibilitem um desenvolvimento adequado das aulas a serem ministradas, tendo o cuidado de levar em conta dois outros personagens extremamente importantes para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra: professor e aluno.

Quanto à Matemática que o aguarda nas próximas páginas, não posso dizer que será um caminho com um acesso imediato e veloz. Antes, prefiro acreditar que é uma trajetória lenta, mas necessária, rica de saberes construídos ao longo de nossa evolução e carregada de dúvidas necessárias, de etapas a serem ultrapassadas. Não pense na Matemática como uma ciência exata, pois antes das certezas, estudamos nela os acasos; antes de termos as medidas precisas, temos as aproximações, que são muito mais reais.

A proposta de nossa coleção de Matemática para o Ensino Médio contempla diversos aspectos importantes que devem ser levandos em conta. Entre eles destacamos a necessidade de ter na matemática um conhecimento historicamente construído, que permite desenvolver habilidades de pensamento importantes na formação do cidadão. Outro aspecto considerado também fundamental e que aqui procurou ser levando em conta, é o de permitir um trabalho voltado à autonomia, pois é desejável cada vez mais pessoas que busquem e construam conhecimentos.

Um bom trabalho!

O Autor



Conheça o livro

Abertura de Unidade

Ao iniciar um tema, convida o aluno a envolver-se no assunto. Isso é realizado por meio contextos diversos, que podem ser do cotidiano ou do desenvolvimento histórico da Matemática, e explora curiosidades a respeito do próprio tema da unidade.

Abertura de capítulo

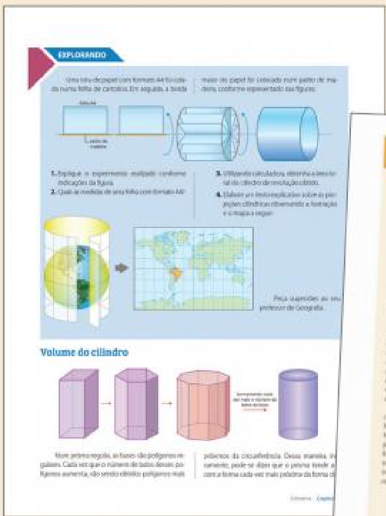
É apresentado o assunto do capítulo.

Questões e reflexões

Perguntas aplicadas ao longo do desenvolvimento da teoria para abordar conhecimento prévio e reflexões sobre o conteúdo.

Explorando

Seção que aparece ao longo da teoria com o objetivo de explorar determinado conteúdo ou a situação com o uso de calculadoras ou programas de computador.

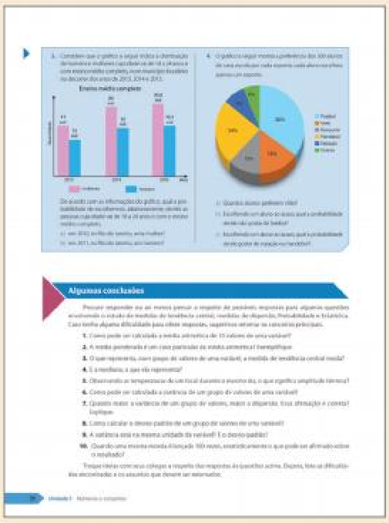


Textos na Matemática

Nessa seção é utilizada a forma textual para abordar explicações necessárias para a compreensão de conteúdos diversos.

História da Matemática

Aqui são abordados a história da Matemática, no decorrer do tempo, e seus personagens.

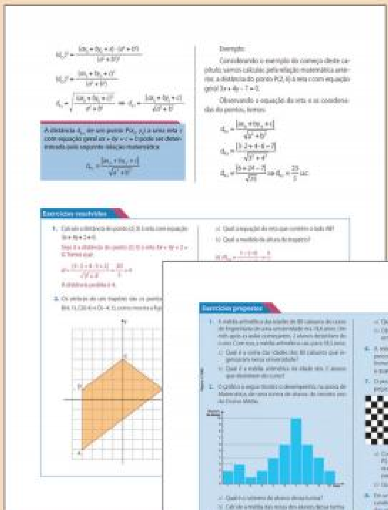


Algumas conclusões

Similar a um roteiro, onde é proposta uma reflexão sobre o que foi desenvolvido na unidade.

Explorando habilidades e competências

Situações elaboradas para explorar conhecimento utilizando um contexto diferente.

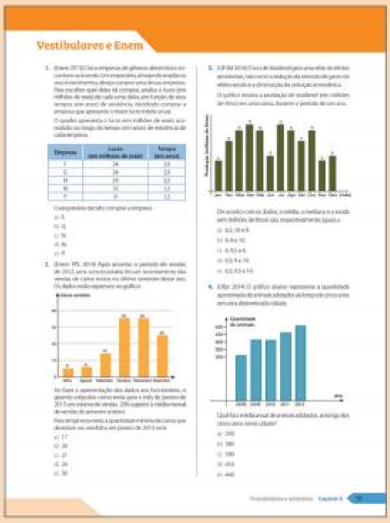


Exercícios resolvidos

Além dos exemplos ao longo da teoria, os exercícios servem como estratégia para a explorar o conteúdo.

Exercícios propostos

Exercícios para fixação, no final de cada tema.



Vestibular e Enem

No final de cada unidade, exercícios relacionados a vestibulares de todo Brasil e questões do Enem.

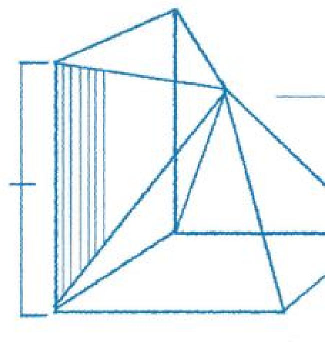
Desafio

Exercício relacionado a Unidade, com nível mais complexo.

Atenção!

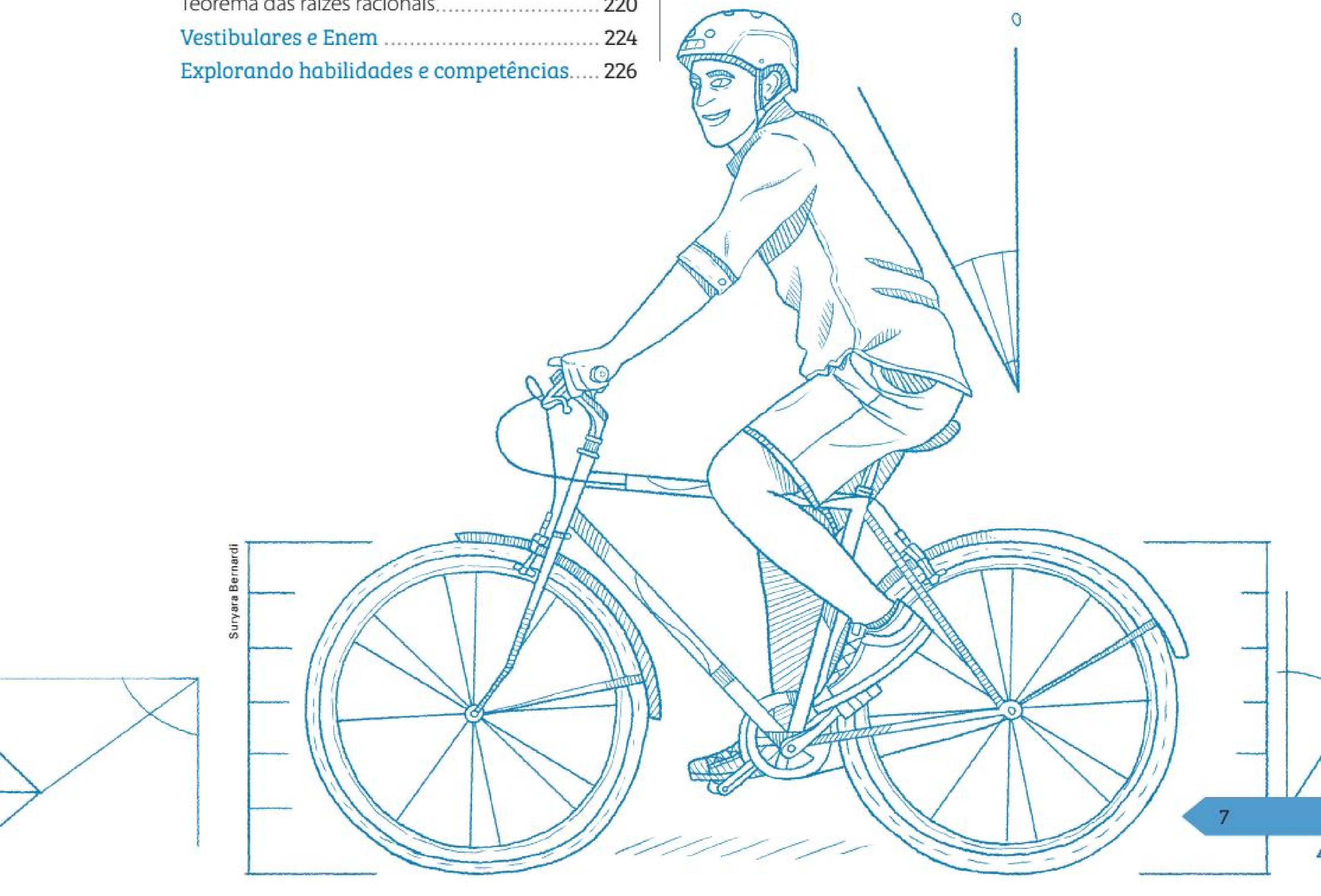
Não escreva no livro. Todos os exercícios devem ser resolvidos no caderno.

Sumário



UNIDADE 5 POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

UNIDADE 6 AS CÔNICAS



Suryara Bernardi

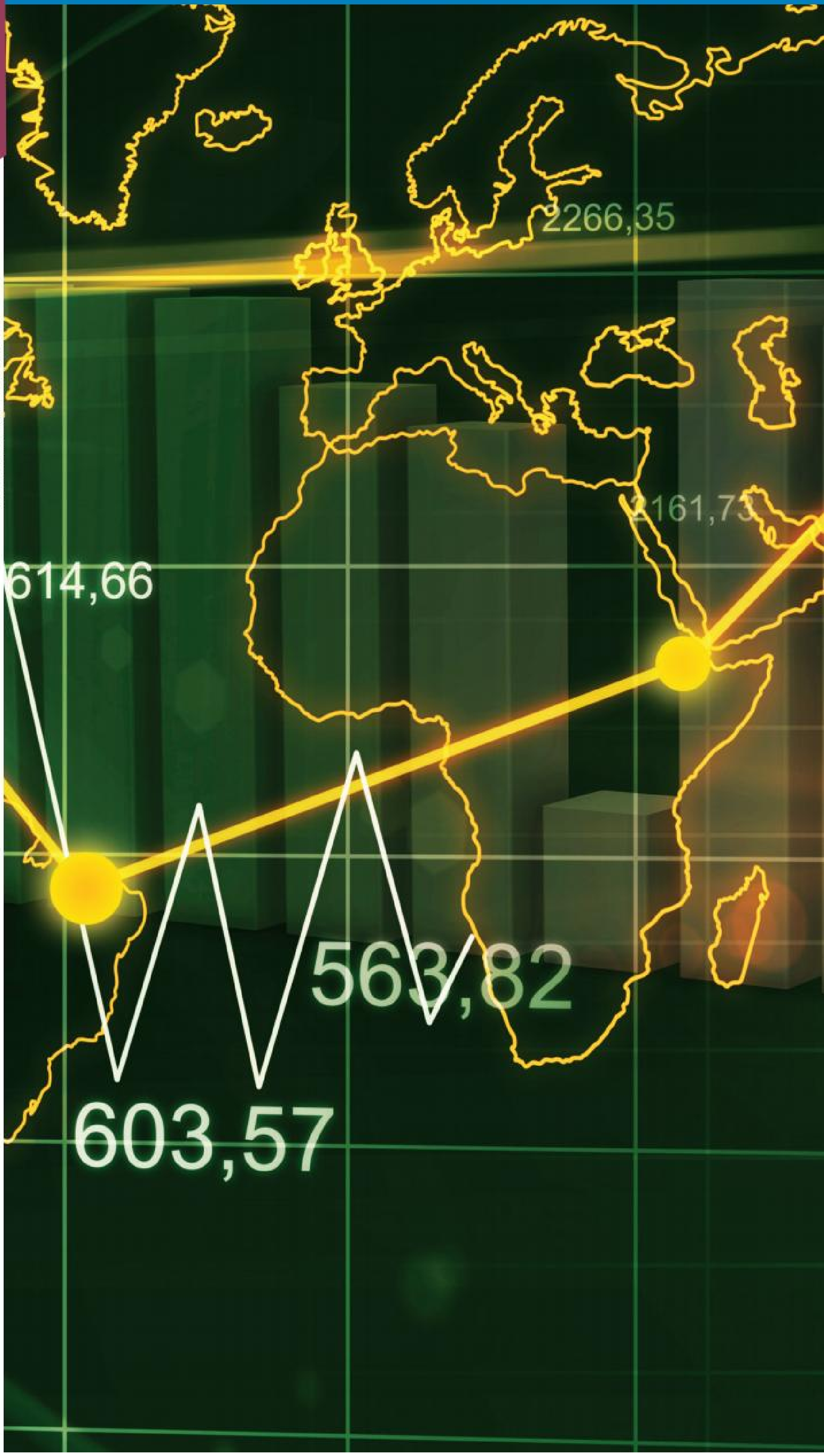
UNIDADE 1

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Decisões importantes são tomadas diariamente, baseadas em dados produzidos por meio de pesquisas e estatísticas.

Nesta Unidade, ampliamos nosso conhecimento sobre Estatística, obtendo medidas de tendência central e medidas de dispersão.

Natanael Ginting/Shutterstock.com



A Estatística, nos dias de hoje, é uma ferramenta muito importante para a profissionais que precisam analisar informações antes de tomar decisões.


00037,04
1,06
1637,03

CAPÍTULO

1 MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Yuriy Ruddy/Shutterstock.com

O conhecimento nos ajuda na tomada de decisões.

Cada vez mais, a tomada de decisões exige profissionais extremamente informados. O conhecimento sobre a diversidade de aspectos de determinado problema leva esses profissionais à busca de informações. Quanto mais abrangentes e confiáveis forem tais informações, maior será a probabilidade de uma decisão a ser tomada obter resultado positivo. Nesse sentido, o conhecimento sobre estatística é fundamental.

No volume anterior desta coleção iniciamos o estudo de Estatística. Agora ampliaremos nosso conhecimento observando o cálculo de medidas de tendência central e medidas de dispersão.

Apresentar informações em tabelas e gráficos tem como objetivo facilitar a leitura daqueles que leem ou analisam dados de pesquisas.

Existem casos em que a quantidade de dados é muito grande e as observações feitas em tabelas ou gráficos não são imediatas. Nesses casos, às vezes, queremos ter uma ideia global dos dados, então, usamos as chamadas **medidas de tendência central**, que são utilizadas para representar o grupo de dados.

As medidas de tendência central são: **média**, **moda** e **mediana**.

Um desses termos é bastante empregado na mídia, em frases como:

- O PIB brasileiro cresceu, em **média**, 1% ao mês neste trimestre.
- Existem três filhos, em **média**, por família brasileira.
- Sete foi, em **média**, a nota que mais ocorreu no exame da Ordem dos Advogados do Brasil.

As afirmações acima foram, aqui, elaboradas apenas como exemplos. Quando aparecem na mídia escrita ou falada, são baseadas em dados numéricos devidamente analisados. Se dissermos que um carro de Fórmula 1, por exemplo, alcança velocidade média de 300 km/h, esse valor está representando um conjunto de valores obtidos.

Este capítulo será composto de três partes, uma parte para cada uma das medidas de tendência central, para que, assim, possamos compreender melhor cada uma delas.

A seguir, iniciamos com média aritmética.

Stefano Garau/Shutterstock.com

Média aritmética

Um vendedor fez um levantamento do número de carros vendidos na concessionária em que trabalha, durante uma semana, considerando domingo dia de folga, e apresentou os dados em uma tabela.

Dias da semana	Número de carros vendidos
Segunda-feira	9
Terça-feira	10
Quarta-feira	15
Quinta-feira	12
Sexta-feira	11
Sábado	21

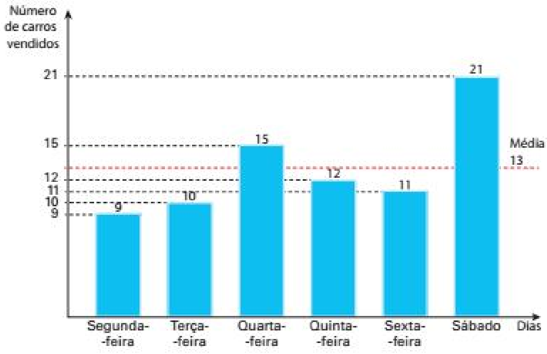
Vamos calcular o número total de carros vendidos durante essa semana e dividir esse resultado pela quantidade de dias, isto é:

$$\frac{9 + 10 + 15 + 12 + 11 + 21}{6} = \frac{78}{6} = 13$$

Pode-se afirmar que foram vendidos, em média, 13 carros por dia nessa concessionária.

Note que, neste exemplo, em nenhum dia foram vendidos exatamente 13 carros (até poderia ocorrer). Esse número representaria o número total de carros vendidos por dia apenas se tivessem sido vendidas quantidades iguais de carros todos os dias.

- Construindo um gráfico de colunas e indicando esse valor médio, observamos que alguns valores estão acima da média, enquanto outros estão abaixo da média.



De modo geral, temos:

Dados os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, a média aritmética é o valor M_A, tal que:

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

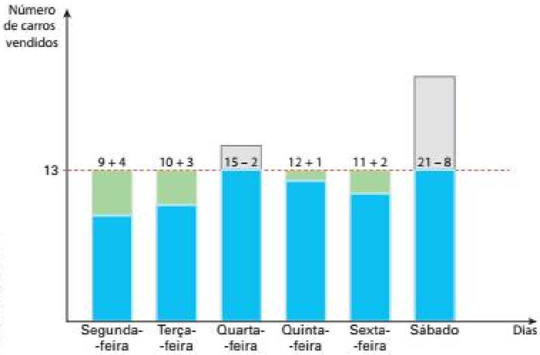
Observações:

1. A soma dos valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ pode ser representada por $\sum_{i=1}^{n} x_i$ (lê-se: somatório dos valores , em que i é um número inteiro que varia de 1 até n). Assim, a média aritmética desses valores pode também ser escrita por:

$$M_A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2. Existe outra observação importante a respeito de média aritmética que você pode constatar com base no exemplo anterior. Veja:

Sabemos que o número total de carros vendidos nessa concessionária nessa semana foi 78. Como foram vendidos, em média, 13 carros por dia, podemos fazer outro gráfico considerando que, em todos os dias, foi vendida a mesma quantidade de carros. Observe:



Gráficos: © DAE

Se, de fato, a cada dia tivessem sido vendidos 13 carros, o número total de carros vendidos nessa semana continuaria sendo 78. Isso significa que os valores que excedem a média (2 e 8) acabam compensando os valores que faltam para chegar à média (4, 3, 1 e 2).

Exemplo:

A tabela abaixo apresenta o total de medalhas conquistadas pelo Brasil em 18 olimpíadas mundiais, de 1920 até 2012. Vamos calcular a média de medalhas por olimpíada.

Ano	Sede	Nº de medalhas
1920	Antuérpia	3
1948	Londres	1
1952	Helsinque	3
1956	Melbourne	1
1960	Roma	2
1964	Tóquio	1
1968	Cidade do México	3
1972	Munique	2
1976	Montreal	2
1980	Moscou	4
1984	Los Angeles	8
1988	Seul	6
1992	Barcelona	3
1996	Atlanta	15
2000	Sydney	12
2004	Atenas	10
2008	Pequim	15
2012	Londres	17
Total		108

Fonte: PIRES, Fátima. Maior número de medalhas na história das Olimpíadas. *RankBrasil recordes brasileiros*, 13 ago. 2012. Disponível em: <http://www.rankbrasil.com.br/Recordes/Materias/06br/Brasil_Conquista_Maior_Numero_De_Medalhas_Na_Historia_Das_Olimpiadas>. Acesso em: 9 mar. 2016.

- Como na tabela anterior é apresentado o número total de medalhas, basta dividir esse número pela quantidade de olimpíadas das quais o Brasil participou. Aqui, levamos em conta apenas as olimpíadas em que o Brasil ganhou alguma medalha, excluindo, portanto, as olimpíadas de 1924, 1932 e 1936, nas quais o Brasil não ganhou medalha, e a olímpiada de 1928 da qual o Brasil não participou. Então:

$$M_a = \frac{108}{18} \Rightarrow M_A = 6$$

Portanto, podemos dizer que o Brasil conquistou, em média, 6 medalhas por olimpíada da qual participou.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Há uma propriedade que você pode constatar em relação à média aritmética de um conjunto de valores de uma variável:

- A soma de todas as diferenças entre cada valor e a média aritmética, em uma mesma ordem, é igual a zero.

Verifique a validade dessa propriedade no exemplo do total de medalhas conquistadas pelo Brasil.

Resposta no Manual do Professor.

Exemplos:

1. De um mesmo time, dois jogadores de basquete que têm a mesma posição na quadra, nos cinco jogos dos quais participaram, tiveram o rendimento, em quantidade de pontos feitos, representado na seguinte tabela:

	1º jogo	2º jogo	3º jogo	4º jogo	5º jogo
Jogador A	9	12	16	12	11
Jogador B	8	15	13	7	10

O técnico vai escalar um desses jogadores e utilizará como critério a maior média de pontos. Qual é o jogador que será escalado?

- Média de pontos do jogador A:

$$M_A = \frac{9 + 12 + 16 + 12 + 11}{5} = \frac{60}{5} \Rightarrow M_A = 12$$

- Média de pontos do jogador B:

$$M_B = \frac{8 + 15 + 13 + 7 + 10}{5} = \frac{53}{5} \Rightarrow M_B = 10{,}6$$

Logo, o jogador A será escalado, pois ele tem a maior média de pontos. Entretanto, isso não significa que o jogador B, se fosse escalado, não pudesse conseguir uma quantidade maior de pontos. O critério adotado foi simplesmente a melhor média.

2. Um estudante queria saber qual era a temperatura média registrada em sua cidade durante 15 dias. Então, observou e registrou as temperaturas em determinado horário. Como existiam repetições, construiu a tabela de frequências a seguir:

Temperatura (em °C)	Frequência absoluta
25	3
26	2
27	1
28	4
29	1
30	2
31	2

- Para saber a temperatura média, adicionamos as 15 temperaturas registradas e dividimos a soma por 15, isto é:

$$T_m = \frac{25 + 25 + 25 + 26 + 26 + 27 + 28 + 28 + 28 + 28 + 29 + 30 + 30 + 31 + 31}{15}$$

Considerando que há valores que se repetem, podemos escrever:

$$T_m = \frac{3 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 1 \cdot 27 + 4 \cdot 28 + 1 \cdot 29 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 31}{15}$$

$$T_m = \frac{75 + 52 + 27 + 112 + 29 + 60 + 62}{15}$$

$$T_m = \frac{417}{15} \Rightarrow T_m = 27{,}8$$

Portanto, podemos dizer que 27,8 °C é a temperatura média das temperaturas 25 °C, 26 °C, 27 °C, 28 °C, 29 °C, 30 °C e 31 °C, com frequências 3, 2, 1, 4, 1, 2 e 2, respectivamente.

3. Em determinada escola, na qual o regime de avaliação é bimestral, o critério adotado para o cálculo da média anual dos alunos, em cada disciplina, é por pesos:

- 1º bimestre ⟶ peso 1
- 2º bimestre ⟶ peso 2
- 3º bimestre ⟶ peso 3
- 4º bimestre ⟶ peso 4

Considerando que as notas de um aluno, em Geografia, nos quatro bimestres, foram 7,0; 9,5; 8,5 e 6,5, respectivamente, vamos calcular a média dessas notas. Como existem pesos, dizemos que será uma **média aritmética ponderada** (representamos por M_p), isto é:

$$M_p = \frac{1 \cdot 7{,}0 + 2 \cdot 9{,}5 + 3 \cdot 8{,}5 + 4 \cdot 6{,}5}{1 + 2 + 3 + 4}$$

- Note que os pesos adotados são números inteiros, então, podem ser interpretados como repetição de notas. Assim, a nota do 1º bimestre aparece 1 vez (peso 1), a do 2º bimestre, 2 vezes (peso 2), a do 3º bimestre, 3 vezes (peso 3), e a do 4º bimestre, 4 vezes (peso 4).

$$M_p = \frac{7{,}0 + 19{,}0 + 25{,}5 + 26{,}0}{10}$$

$$M_p = \frac{77{,}5}{10} \Rightarrow M_p = 7{,}75$$

Logo, a média anual desse aluno, em Geografia, é 7,75.

Observação:

A média ponderada pode ser interpretada como um caso particular de média aritmética em que temos a repetição de valores.

A média ponderada dos n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, respectivamente, é o valor M_p, tal que:

$$M_p = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p3 + ... + p_n}$$

Observação:

Para valores agrupados em classes, consideramos o valor médio de cada classe, e com base nesses valores, obtemos a média.

Exemplo:

Vamos considerar os dados sobre as alturas de 50 alunos do Ensino Médio, conforme exemplo já apresentado no capítulo anterior. Observe como podemos calcular a média das alturas desse grupo.

Alturas (em classes)	Frequência absoluta (f_A)
$1{,}49 \mapsto 1{,}58$	8
$1{,}58 \mapsto 1{,}67$	15
$1{,}67 \mapsto 1{,}76$	10
$1{,}76 \mapsto 1{,}85$	12
$1{,}85 \mapsto 1{,}94$	5
Total	50

- Inicialmente, vamos acrescentar a essa tabela uma nova coluna formada pelos valores médios das classes:

Alturas (em classes)	Frequência absoluta (f_A)	Valor médio
$1{,}49 \mapsto 1{,}58$	8	1,535
$1{,}58 \mapsto 1{,}67$	15	1,625
$1{,}67 \mapsto 1{,}76$	10	1,715
$1{,}76 \mapsto 1{,}85$	12	1,805
$1{,}85 \mapsto 1{,}94$	5	1,895
Total	50	—

- Utilizando a frequência absoluta de cada classe e o valor médio, calculamos a média M:

$$M = \frac{8 \cdot 1{,}535 + 15 \cdot 1{,}625 + 10 \cdot 1{,}715 + 12 \cdot 1{,}805 + 5 \cdot 1{,}895}{8 + 15 + 10 + 12 + 5}$$

$$M = \frac{12{,}28 + 24{,}375 + 17{,}15 + 21{,}66 + 9{,}475}{50}$$

$$M = \frac{84{,}94}{50} \Rightarrow M = 1{,}6988$$

Portanto, a média das alturas dos alunos desse grupo é 1,6988 m.

Empregamos a média aritmética (simples ou ponderada) como uma medida de tendência central. Ao fazer isso, queremos, por meio de um valor, dar uma ideia a respeito das características de determinado grupo de valores. Entretanto, existem situações em que a média aritmética não é um valor adequado. Veremos isto a seguir.

Moda

A utilização da média aritmética pode não ser a mais adequada para representar ou traçar o perfil de um grupo de valores de uma variável. Para que possamos compreender melhor isso, vamos considerar a seguinte situação:

Em um restaurante, 5 amigos estão reunidos. Antes de pedir qualquer refeição ou bebida, eles resolveram verificar a quantia que cada um deles possui. Cada um tem apenas uma cédula, conforme representado a seguir:

Fotos: Banco Central do Brasil

Vamos calcular a média dos valores em reais das quantias que esses amigos possuem.

- Média aritmética dos valores:

$$M_a = \frac{2 + 2 + 2 + 5 + 100}{5}$$

$$M_a = \frac{111}{5} \Rightarrow M_A = 22{,}2$$

Então, em média, cada um dos cinco amigos possui R$ 22,20.

A média aritmética obtida representa o grupo de valores. Porém, note que o valor mais frequente entre os observados nessa situação não é a média aritmética. Nessa situação, o valor correspondente à média nem faz parte do grupo de valores. O valor mais frequente é R$ 2,00. Sendo assim, esse é o valor que melhor representa o grupo de valores.

Em Estatística, esse valor é conhecido como **moda**, representamos por M_o:

$M_o = 2$

Moda é a medida de tendência central correspondente ao valor mais frequente em um grupo de valores observados.

Exemplos:

1. Na 38ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol, série A, em 2015, houve 10 jogos, de acordo com a tabela abaixo, que contém o placar e o número total de gols por jogo. Vamos calcular a média de gols por jogo e a moda.

Campeonato Brasileiro de Futebol – Série A		
Jogo	**Placar**	**Gols (por jogo)**
Coritiba-PR × Vasco da Gama-RJ	0 × 0	0
Atlético-MG × Chapecoense-SC	3 × 0	3
Santos-SP × Atlético-PR	5 × 1	6
Joinville-SC × Grêmio-RS	0 × 2	2
Flamengo-RJ × Palmeiras-SP	1 × 2	3
Corinthians-SP × Avaí-SC	1 × 1	2
Internacional-RS × Cruzeiro-MG	2 × 0	2
Goiás-GO × São Paulo-SP	0 × 1	1
Figueirense-SC × Fluminense-RJ	1 × 0	1
Ponte Preta-SP × Sport-PE	0 × 1	1

Fonte: CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. Tabela do Campeonato Brasileiro de Futebol Série A 2015 (rodada 38). Disponível em: <http://www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a#.VuBJALv2YdU>. Acesso em: 9 mar. 2016.

- Cálculo da média de gols (por jogo):

$$M_a = \frac{0 + 3 + 6 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1}{10}$$

$$M_a = \frac{21}{10} = 2{,}1$$

- Existem dois números de gols (por jogo) mais frequentes: 2 gols (3 vezes) e 1 gol (3 vezes). Então, dizemos que existem duas modas:

$M_o = 2$ e $M_o = 1$

2. Dez amigas estão reunidas para comemorar o aniversário da mais velha da turma. No quadro a seguir, temos as idades delas:

16 anos	17 anos	16 anos	16 anos	18 anos
17 anos	17 anos	16 anos	15 anos	17 anos

Vamos calcular a média dessas idades e obter a moda.

- Cálculo da média aritmética das idades das dez amigas:

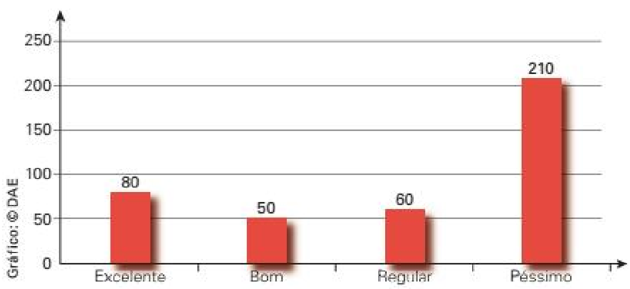
$$M_a = \frac{16 + 17 + 16 + 16 + 18 + 17 + 17 + 16 + 15 + 17}{10}$$

$$M_a = \frac{165}{10} \Rightarrow M_a = 16{,}5$$

Existem dois valores mais frequentes (4 meninas com 16 anos e 4 meninas com 17 anos). Temos um grupo de valores com duas modas:

$M_o = 16$ e $M_o = 17$

3. Em um município, após o primeiro ano de mandato de um prefeito, houve uma pesquisa para avaliar o desempenho da gestão dele. Foram escolhidas, aleatoriamente, entre a população, 400 pessoas. Para avaliar, cada pessoa tinha de escolher entre: excelente, bom, regular e péssimo. O resultado foi apresentado por meio do seguinte gráfico:



- Neste exemplo, a moda é o valor "péssimo" da variável considerada, pois é mais frequente, isto é, possui o maior número de escolhas da população consultada.

4. Vamos novamente considerar os dados sobre as alturas (divididas em classes) de 50 alunos do Ensino Médio e obter a moda dessas alturas.

Na tabela a seguir, observando a frequência de cada classe e o valor médio, temos:

Alturas (em classes)	Frequência absoluta (f_A)	Valor médio
1,49 ↦ 1,58	8	1,535
1,58 ↦ 1,67	15	1,625
1,67 ↦ 1,76	10	1,715
1,76 ↦ 1,85	12	1,805
1,85 ↦ 1,94	5	1,895
Total	50	—

- A frequência maior, 15, indica o intervalo 1,58 ↦ 1,67, represesentado pelo valor médio 1,625. Portanto, temos:

$M_o = 1{,}625$

Observações:

1. Utilizamos a moda quando precisamos informar o valor da variável que mais ocorreu.

2. A moda é empregada em pesquisas que procuram sondar as preferências entre as pessoas. Nesse caso, a moda poderá não ser um valor numérico.

3. A moda poderá, dependendo da situação, ser representada por um valor (**unimodal**), dois valores (**bimodal**), três ou mais valores (**multimodal**). Entretanto, pode ocorrer que não haja moda em uma distribuição (**amodal**).

Mediana

Além da média e da moda, temos ainda outra medida de tendência central: a **mediana**. O próprio termo "mediana" nos remete à posição média, segundo uma ordem. Considere, por exemplo, que em um grupo de nove pessoas as alturas sejam as seguintes:

1,72 m	1,69 m	1,75 m	1,68 m	1,68 m	1,73 m	1,71 m	1,80 m	1,65 m

Organizando esses valores em ordem crescente ou decrescente, o termo do meio (termo médio) será a mediana do grupo de valores. Neste caso, temos:

1,65 m	1,68 m	1,68 m	1,69 m	1,71 m	1,72 m	1,73 m	1,75 m	1,80 m

mediana

Representamos a mediana por M_e. Assim, no exemplo, temos:

$M_e = 1{,}71$ m

Dados *n* valores de uma variável colocados em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- **o valor que ocupar a posição central, caso *n* seja ímpar;**

ou

- **o valor correspondente à média aritmética dos dois valores que ocuparem as posições centrais, caso *n* seja par.**

Exemplos:

1. No quadro a seguir, estão colocados, em ordem crescente, as idades de 12 pessoas de uma mesma família reunidas para a comemoração do aniversário da pessoa com mais idade. Como a quantidade é par, a mediana é calculada pela média aritmética das idades que ocupam as posições centrais:

4 anos	6 anos	7 anos	10 anos	16 anos	18 anos	32 anos	46 anos	54 anos	65 anos	72 anos	80 anos

$$M_e = \frac{18 + 32}{2}$$
$$M_e = 25$$

Portanto, a mediana desse grupo de idades é 25 anos.

2. Vamos calcular agora a mediana do conjunto de valores formado pelos 11 menores números naturais primos.

- Lembrando que um número natural é primo quando apresenta apenas dois divisores naturais (o número 1 e o próprio número).

Então, os 11 menores números naturais primos colocados em ordem crescente, são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$M_e = 13$

Assim, a mediana desse grupo formado por números naturais primos é 13.

3. Uma equipe de cirurgiões-dentistas de um posto de saúde foi visitar a comunidade de uma região para fazer um levantamento da quantidade de cáries das pessoas. Foram examinadas 20 pessoas, e o resultado observado foi organizado na tabela a seguir.

Quantidade de cáries	Quantidade de pessoas
0	4
1	7
2	5
3	3
4	1

Vamos determinar a mediana desses valores.

- Como 20 pessoas foram examinadas, colocamos os valores que indicam as quantidades de cáries em ordem crescente, ou seja:

$$\underbrace{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1,}_{\text{10 observações}}\ \underbrace{1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4}_{\text{10 observações}}$$

$$M_e = \frac{1+1}{2}$$

$$M_e = 1$$

Logo, a mediana é 1.

4. Vamos considerar os dados sobre as alturas (divididas em classes) de 50 alunos do Ensino Médio já observados anteriormente e calcular a mediana dessas alturas.

Na tabela abaixo, observando a frequência de cada classe e o valor médio, temos:

Alturas (em classes)	Frequência absoluta (f_A)	Valor médio
1,49 ⟼ 1,58	8	1,535
1,58 ⟼ 1,67	15	1,625
1,67 ⟼ 1,76	10	1,715
1,76 ⟼ 1,85	12	1,805
1,85 ⟼ 1,94	5	1,895
Total	50	—

Como o total de frequências é 50 (número par), os dois valores centrais são o 25º valor médio e o 26º valor médio. Considerando os valores médios que representam as classes em ordem crescente e de acordo com suas frequências, temos:

25º valor médio = 1,715

26º valor médio = 1,715

Logo:

$$M_e = \frac{1{,}715 + 1{,}715}{2} \Rightarrow M_e = 1{,}715$$

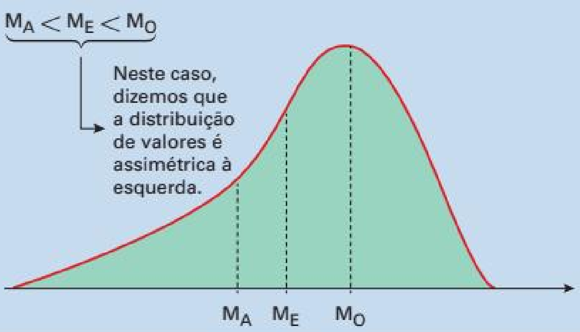
Portanto, a mediana das alturas dos alunos desse grupo é 1,715 m.

EXPLORANDO

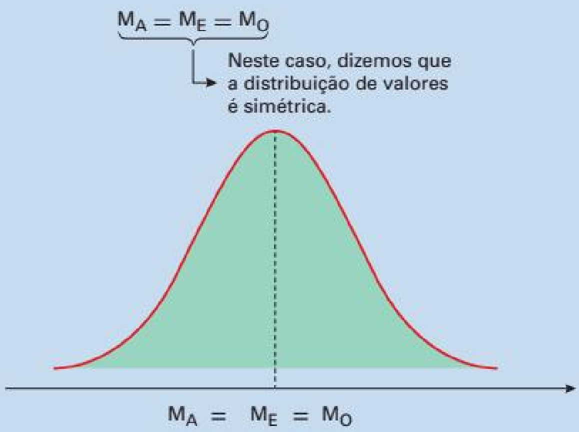
Orientações e respostas no Manual do Professor.

Quando analisamos uma variável contínua, como a massa das pessoas pertencentes a um grupo, dependendo dos valores das medidas de tendência central (média, moda e mediana), existem as seguintes situações:

- a média e a mediana são menores que a moda;



- a média, a moda e a mediana são iguais;



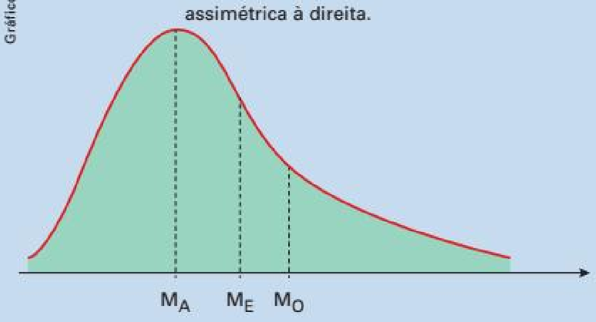
Gráficos: © DAE

- a média e a mediana são maiores que a moda.

$\underbrace{M_O < M_E < M_A}$

Neste caso, dizemos que a distribuição de valores é assimétrica à direita.

Gráfico: © DAE



Para explorar essas ideias, a turma poderá ser organizada em três grupos: A, B e C.

1. O grupo A deverá pesquisar uma distribuição de valores que seja assimétrica à esquerda.

2. O grupo B deverá pesquisar uma distribuição de valores que seja simétrica.

3. O grupo C deverá pesquisar uma distribuição de valores que seja assimétrica à direita.

Cada grupo deverá apresentar para os demais o resultado da pesquisa feita.

Observação:

No próximo capítulo, ampliaremos o conhecimento de Estatística, abordando as chamadas **medidas de dispersão**.

Exercícios resolvidos

1. Calcule o valor de x para que a média aritmética dos números 3, 4, 11 e x seja igual a 6,25.

$$\frac{3 + 4 + 11 + x}{4} = 6{,}25 \Rightarrow 18 + x = 25 \Rightarrow x = 7$$

2. A tabela abaixo mostra as alturas, em centímetros, das 15 jogadoras de uma seleção feminina de vôlei:

187 cm	170 cm	185 cm
193 cm	190 cm	184 cm
196 cm	188 cm	192 cm
169 cm	190 cm	186 cm
185 cm	179 cm	172 cm

a) Determine a altura média das jogadoras dessa seleção.

b) Obtenha a altura mediana dessas jogadoras.

c) Quais são as alturas modais? Existe uma única moda?

a) $M_A = \dfrac{172+187+170+185+193+190+184+196+188+192+169+190+186+185+179}{15}$

$M_A = \dfrac{2766}{15} = 184{,}4$

Portanto, a altura média das jogadoras dessa seleção é 184,4 cm.

b) Escrevendo as alturas em ordem crescente, temos:

169, 170, 172, 179, 184, 185, 185, 186, 187, 188, 190, 190, 192, 193, 196

Como são 15 valores, a mediana é igual ao oitavo valor, ou seja, a altura mediana dessas jogadoras é 186 cm.

c) As alturas modais são 185 cm e 190 cm. Por existirem duas modas, o conjunto é bimodal.

3. Em uma família com 4 pessoas, a média aritmética das alturas é 1,67 m e a mediana é igual a 1,63 m. Calcule:

a) a soma das alturas das 4 pessoas dessa família;

b) a média aritmética das alturas da pessoa mais baixa e da pessoa mais alta dessa família.

a) Representando por *a*, *b*, *c* e *d* as alturas em ordem crescente, das pessoas dessa família, temos:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 1{,}67 \therefore a+b+c+d = 6{,}68$$

Portanto, a soma das alturas é igual a 6,68 m.

b) $\frac{b+c}{2} = 1{,}63 \therefore b+c = 3{,}26 \rightarrow \frac{a+d}{2} = \frac{6{,}68-3{,}26}{2} = \frac{3{,}42}{2} = 1{,}71$

Portanto, a média aritmética das alturas da pessoa mais baixa e da pessoa mais alta dessa família é 1,71 m.

4. (UFPR) Em um levantamento feito numa sala de aula de um curso da UFPR, verificou-se que a média das idades dos 42 alunos matriculados era de 20,5 anos. Nesse levantamento foram considerados apenas os anos completos e desconsideradas todas as frações (meses, dias, etc.). Passadas algumas semanas, a coordenação do curso verificou que um aluno havia desistido, e que a média das idades caiu para 20 anos. Como nesse período nenhum dos alunos da turma fez aniversário, qual a idade do aluno que desistiu?

a) 41 anos
b) 25 anos
c) 29 anos
d) 33 anos
e) 37 anos

Conforme dados do enunciado, considerando a média aritmética, temos:

$$20,5 \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{42}}{42}$$

$$20,5 \cdot 42 = x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{42}$$

$$861 = x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{42}$$

Vamos considerar que a idade do aluno que desistiu é de y anos e a nova média de idades caiu para 20 anos. Então, temos:

$$20 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{42} - y}{42 - 1}$$

$$20 \cdot 41 = x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{42} - y$$

$$820 = 861 - y$$

$$y = 861 - 820 = 41$$

Portanto, a idade do aluno que desistiu é 41 anos.

5. Um automóvel, que pode utilizar como combustível álcool e gasolina misturados em qualquer proporção, é abastecido com 20 litros de gasolina e 10 litros de álcool. Sabe-se que o preço do litro de gasolina e o do litro de álcool são, respectivamente, R$ 3,60 e R$ 2,40. Nessa situação, calcule o preço médio do litro do combustível que foi utilizado.

Como foram utilizados 20 litros de gasolina e 10 litros de álcool, o preço médio do litro pode ser calculado a partir da média ponderada, com pesos correspondentes às quantidades de litros de cada combustível, ou seja:

$$p_{médio} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2}{p_1 + 4_2}$$

$$p_{médio} = \frac{20 \cdot 3{,}60 + 10 \cdot 2{,}40}{20 + 10}$$

$$p_{médio} = \frac{72 + 24}{30}$$

$$p_{médio} = \frac{96}{30} \therefore p_{médio} = 3{,}20$$

Portanto, o preço médio é de R$ 3,20 por litro de combustível.

Exercícios propostos

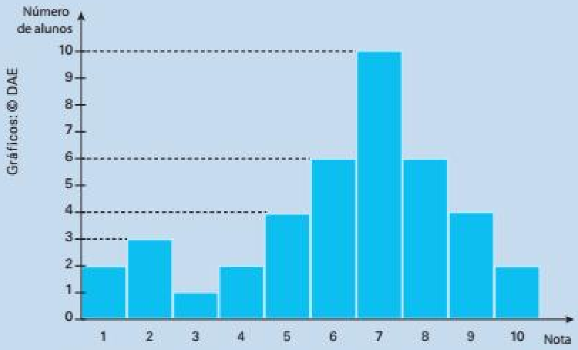
Resolva os exercícios no caderno.

1. A média aritmética das idades de 80 calouros do curso de Engenharia de uma universidade era 18,6 anos. Um mês após as aulas começarem, 2 alunos desistiram do curso. Com isso, a média aritmética caiu para 18,5 anos.

a) Qual é a soma das idades dos 80 calouros que ingressaram nessa universidade? a) 1488 anos.

b) Qual é a média aritmética da idade dos 2 alunos que desistiram do curso? b) 22,5 anos

2. O gráfico a seguir mostra o desempenho, na prova de Matemática, de uma turma de alunos do terceiro ano do Ensino Médio.



Gráficos: © DAE

a) Qual é o número de alunos dessa turma? a) 40

b) Calcule a média das notas dos alunos dessa turma. b) 6,225

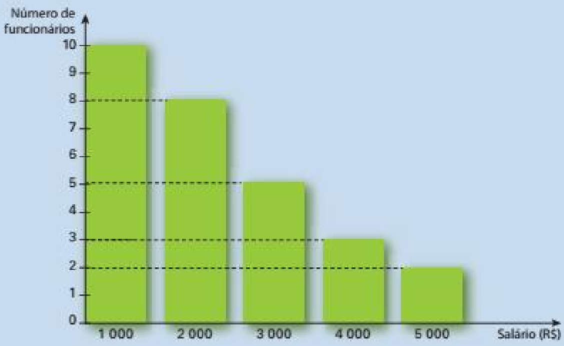
3. A média de gols assinalados por uma equipe de futebol, nos 5 primeiros jogos de um campeonato, foi igual a 2,2.

a) Se, nos próximos 5 jogos, essa equipe assinalar mais 14 gols, qual será a média de gols nos 10 primeiros jogos do campeonato? a) 2,5

b) Qual deverá ser a média de gols nos próximos 10 jogos para que a média dos 15 primeiros jogos seja igual a 2,8? b) 3,1

4. Um professor de Matemática aplica três provas em cada bimestre, com pesos 1, 3 e 2, nessa ordem. Se um aluno obteve 4,0 na primeira prova e 6,0 na segunda prova, que nota ele precisará tirar na terceira prova para que sua média seja igual a 7,0? 10,0

5. O histograma a seguir mostra a distribuição dos salários dos funcionários de uma empresa.



a) Qual é o número de funcionários dessa empresa? 28

b) Obtenha o salário médio dos funcionários dessa empresa. R$ 1 750,00

6. A média aritmética das idades de um grupo de 200 pessoas é 41 anos. A média aritmética das idades dos homens é 50 anos e das mulheres é 35 anos. Determine a quantidade de homens e mulheres desse grupo. 80 homens e 120 mulheres.

7. O piso da sala de uma residência vai ser revestido com peças de cerâmica, como mostra a figura a seguir:

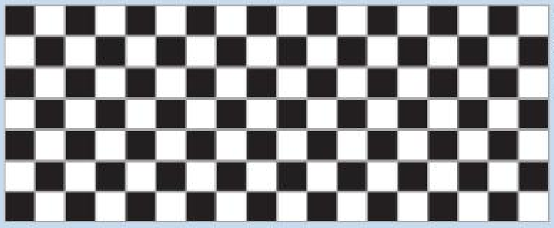
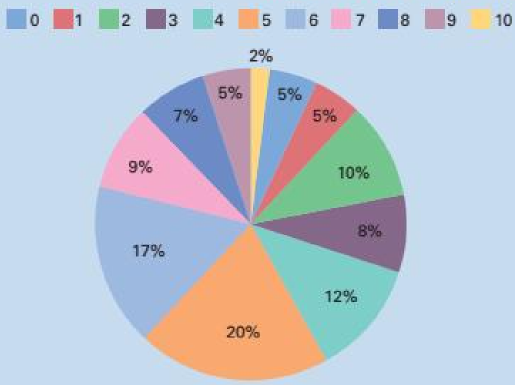


Figura: © DAE

a) Considerando que o preço de cada peça clara é R$ 10,00 e o preço de cada peça escura é R$ 15,00, qual é o custo total das peças de cerâmica necessárias para revestir esse piso? R$ 1 575,00

b) Qual é o preço médio de cada peça? R$ 12,50

8. Em um exame vestibular, as notas obtidas pelos 25 000 candidatos na prova de Matemática estão representadas no gráfico a seguir: Respostas no Manual do Professor.



a) Quantos candidatos obtiveram nota igual ou superior a 7? 5 750

b) Qual é a nota média de todos os candidatos? 4,83

9. Neste capítulo, você estudou três medidas de tendência central: média, moda e mediana. A respeito delas, responda às seguintes questões, justificando suas respostas.

a) A média aritmética sempre representa bem um conjunto de valores?

b) A mediana existe tanto para dados numéricos quanto para dados nominais?

c) A moda existe sempre?

d) Existe uma medida de tendência central mais adequada ou depende do conjunto de dados que estamos analisando? Respostas no Manual do Professor.

10. Em uma cidade, a temperatura média, em graus Celsius, de cada dia foi registrada em uma tabela durante 30 dias.

25	21	23	20	17	15	24	26	28	28
23	19	22	20	16	23	21	23	24	22
25	23	19	18	23	25	19	22	23	20

a) Obtenha a mediana dessa distribuição de temperaturas. a) 22,5 °C

b) Qual é a temperatura modal dessa distribuição de valores? b) 23 °C

11. Em uma turma com 40 alunos, a distribuição das notas de uma prova de Matemática está representada na tabela a seguir:

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alunos	1	2	1	3	2	2	7	10	5	4	3

a) Qual é a nota média dos alunos dessa turma? 6,225

b) Qual é a nota mediana? 7

c) Qual é a nota modal? 7

12. Todos os dias, o inspetor de uma escola anota o número de alunos ausentes. Ao término do período de 20 dias de aula, ele calcula a média, a mediana e a moda do conjunto de valores. Após realizar as anotações e os cálculos, foi entregar os números para o diretor, quando percebeu que, por alguma razão, dois números estavam rasurados.

5	6	3	8	10
5	3	2	4	
5	3	4	2	
7	3	5	4	4

Como o inspetor sabia que a média era igual a 5 e que, em um dos dias, 12 alunos faltaram, conseguiu descobrir quais eram os números rasurados. Determine você também esses números.

Os números rasurados são iguais a 5 e 12, em qualquer ordem.

13. Em uma empresa, a distribuição de salários é apresentada na tabela a seguir:

Nº de funcionários	Salário (R$)
15	1.000,00
10	1.800,00
14	2.200,00
6	2.500,00
4	3.000,00
1	5.000,00

Analise cada afirmação a seguir e indique, em seu caderno, V caso seja verdadeira ou F caso seja falsa.

I. A média aritmética da distribuição de salários dessa empresa é superior a R$ 2.000,00. I. F

II. A mediana da distribuição de salários dessa empresa é igual a R$ 2.000,00. II. V

III. A moda da distribuição de salários dessa empresa é igual a R$ 1.000,00. III. V

IV. Se um funcionário que recebe R$ 3.000,00 for demitido, a mediana da distribuição de salários dessa empresa passará a ser igual a R$ 1.800,00. IV. V

14. (Enem) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a:

a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.

b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.

c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.

d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.

e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

15. Utilizando informações de jornais ou da internet, você acompanhará as temperaturas de sua cidade ao longo de 15 dias. Utilize as informações das temperaturas correspondentes às previsões, escolhendo a temperatura mínima ou a temperatura máxima durante esse período. Com base nessas temperaturas, faça o que se pede a seguir.

a) Elabore um quadro como o apresentado na atividade anterior. A resposta vai depender das informações coletadas.

b) Calcule a média das temperaturas desses 15 dias.

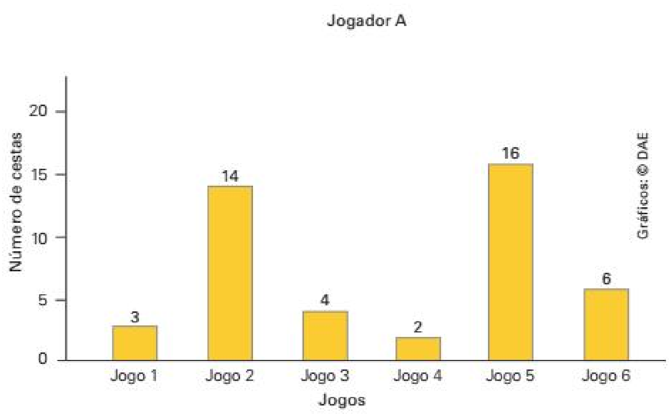
b) O cálculo vai depender das informações do quadro elaborado para responder ao item anterior.

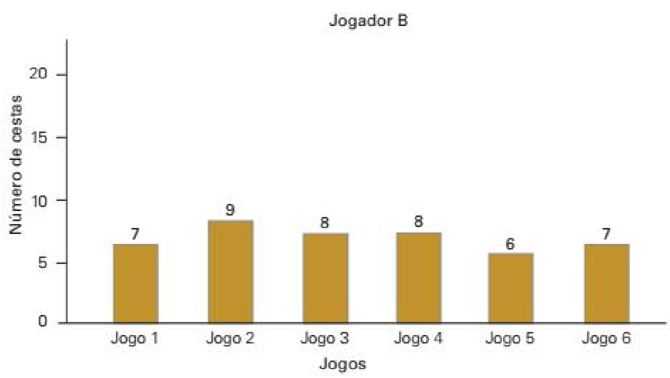
CAPÍTULO 2

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Muitas vezes em Estatística, encontramos casos em que as decisões não podem ser tomadas levando em consideração, apenas, as medidas de tendência central, por exemplo. Em outras palavras, a média aritmética, a moda e a mediana podem mostrar-se insuficientes para caracterizar um grupo de valores. Nesses casos, é possível utilizar outros tipos de medidas: as **medidas de dispersão**.

Considere uma situação em que um técnico de basquete está indeciso para escalar um dos dois jogadores que atuam na mesma posição. Nos últimos seis jogos de que participaram, eles fizeram o seguinte número de cestas de três pontos:





Um critério que o técnico pode utilizar o da melhor média aritmética de cestas de três pontos por partida (representaremos por M_A e M_B as médias dos jogadores A e B, respectivamente):

- Jogador A

$$M_A = \frac{3 + 14 + 4 + 2 + 16 + 6}{6}$$

$$M_A = \frac{45}{6} \Rightarrow M_A = 7{,}5$$

- Jogador B

$$M_B = \frac{7 + 9 + 8 + 8 + 6 + 7}{6}$$

$$M_B = \frac{45}{6} \Rightarrow M_B = 7{,}5$$

Os dois jogadores têm a mesma média de cestas de três pontos por partida. Sendo assim, estamos diante de uma situação em que a média aritmética não é suficiente para o técnico tomar uma decisão. Nesses casos, é possível recorrer a uma **medida de dispersão**. Entre as medidas utilizadas para aferir o grau de dispersão de um grupo de valores estatísticos, veremos aqui a amplitude, a variância e o desvio-padrão.

Amplitude

Você já ouviu falar em **amplitude térmica**?

Amplitude térmica nada mais é do que a diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima. Acessamos, em 9 de janeiro de 2016, a página <http://tempo1.cptec.inpe.br/cidades/tempo/227> para verificar a previsão das temperaturas na cidade de Curitiba, no Paraná. Nela, encontramos as seguintes informações:

9/1/2016

Amplitude A:

A = 29 ºC – 19 ºC = 10 ºC

10/1/2016

Amplitude A:

A = 26 ºC – 19 ºC = 7 ºC

11/1/2016

Amplitude A:

A = 29 ºC – 18 ºC = 11 ºC

12/1/2016

Amplitude A:

A = 30 ºC – 19 ºC = 11 ºC

Ilustrações: Davidson França

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Observe a previsão do tempo para sua cidade para os próximos três dias e verifique qual a temperatura máxima e qual a temperatura mínima.
2. Qual a amplitude dessas temperaturas nos dias verificados?
3. Será que num deserto a amplitude térmica é pequena ou grande? Converse com o professor de Geografia para saber mais a respeito e responder à questão.

Em Estatística, o conceito de amplitude está ligado ao conceito de dispersão.

Dado um conjunto de valores de uma variável estatística, a amplitude A é a diferença entre o valor maior e o menor:

A = (valor maior) – (valor menor)

Por exemplo, se tivermos de calcular a amplitude do número de cestas de três pontos de cada um dos dois jogadores de basquete, conforme dados vistos anteriormente, teremos:

- Jogador A: $A_A = 16 - 2 \Rightarrow A_A = 14$
- Jogador B: $A_B = 9 - 6 \Rightarrow A_B = 3$

Note que o jogador B tem menor amplitude, isto é, a diferença entre o maior número de cestas de três pontos e o menor é apenas 3. O jogador A tem maior amplitude. Maior amplitude significa **maior dispersão** entre os valores e menor amplitude significa **menor dispersão** entre eles.

A maior amplitude do jogador A em relação ao número de cestas de três pontos por partida está indicando que ele é menos regular que o jogador B.

Note que o cálculo da amplitude é simples. A utilização da amplitude como medida de dispersão tem uma desvantagem: não levar em consideração todos os valores; ela considera apenas o valor maior e o menor.

Vejamos outras medidas de dispersão.

Variância e desvio-padrão

Para compreender os conceitos de variância e desvio-padrão, vamos considerar a seguinte situação:

Num processo seletivo para um cargo em uma empresa, um candidato teve de realizar cinco etapas, obtendo, em cada uma delas, as notas indicadas na tabela abaixo. Vamos calcular a diferença entre cada nota e sua média aritmética.

Etapa	Nota
1ª	10
2ª	8
3ª	6
4ª	2
5ª	9

- Cálculo da média aritmética das notas nas cinco etapas:

$$M_A = \frac{10 + 8 + 6 + 2 + 9}{5}$$

$$M_A = \frac{35}{5} \Rightarrow M_A = 7$$

- A partir da média aritmética, vamos calcular a diferença entre cada nota e a média calculada. Estamos obtendo, assim, o **desvio** de cada nota em relação à sua média:

Desvio da 1ª etapa: $D_1 = 10 - 7 = 3$

Desvio da 2ª etapa: $D_2 = 8 - 7 = 1$

Desvio da 3ª etapa: $D_3 = 6 - 7 = -1$

Desvio da 4ª etapa: $D_4 = 2 - 7 = -5$

Desvio da 5ª etapa: $D_5 = 9 - 7 = 2$

Nessa situação, observe que os desvios representados por valores positivos são "desvios para mais", e os valores negativos são "desvios para menos". Note também que a soma dos desvios é zero.

Utilizando esses desvios em módulo e calculando a média aritmética dos valores obtidos, teremos o chamado **desvio médio** (D_M):

$$D_M = \frac{|D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| + |D_5|}{5}$$

$$D_M = \frac{|3| + |1| + |-1| + |-5| + |2|}{5}$$

$$D_M = \frac{12}{5} \Rightarrow D_M = 2{,}4$$

De modo geral, podemos dizer que:

A média aritmética dos módulos dos desvios de valores de um conjunto denomina-se **desvio médio.**

Ainda utilizando os dados da situação anterior, se, em vez de calcular a média aritmética entre os módulos dos desvios dos valores, calcularmos a média aritmética dos quadrados desses desvios, obteremos a medida de dispersão chamada **variância** (V), isto é:

$$V = \frac{(D_1)^2 + (D_2)^2 + (D_3)^2 + (D_4)^2 + (D_5)^2}{5}$$

$$V = \frac{3^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-5)^2 + (2)^2}{5}$$

$$V = \frac{40}{5} \Rightarrow V = 8$$

Dizemos que a variância daquele grupo de valores é 8.

De modo geral, podemos dizer que:

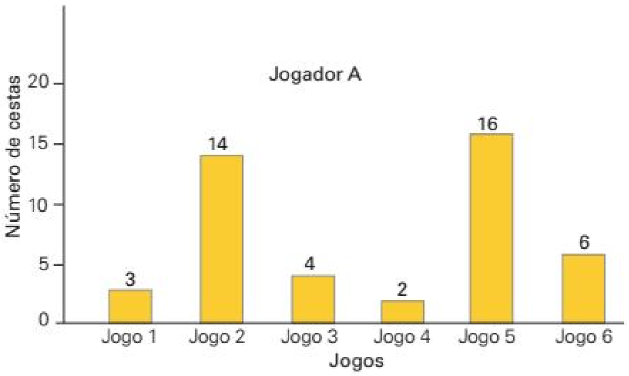
Denomina-se variância de um conjunto de valores de uma variável estatística a média aritmética dos quadrados dos desvios desses valores. Em símbolos:

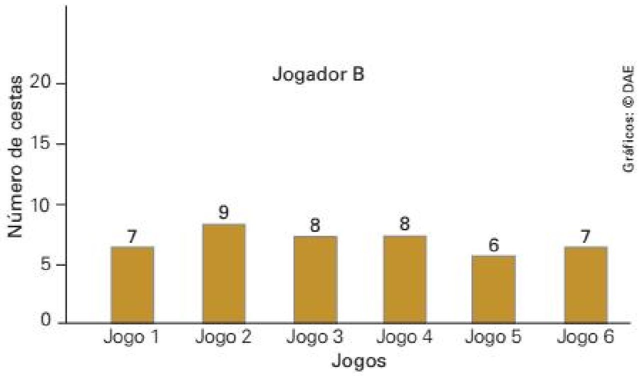
$$V = \frac{(x_1 - M_A)^2 + (x_2 - M_A)^2 + (x_3 - M_A)^2 + ... + (x_n - M_A)^2}{n},$$

sendo $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ os n valores da variável e M_A a média aritmética desses valores.

Exemplo:

Considerando que já calculamos as médias dos números de cestas de três pontos, vamos retomar a situação envolvendo os jogadores de basquete, conforme as informações a seguir:





Média de pontos:

$M_A = 7,5$

Média de pontos:

$M_B = 7,5$

- Variância do número de cestas de três pontos do jogador A:

$$V_A = \frac{(3-7,5)^2 + (14-7,5)^2 + (4-7,5)^2 + (2-7,5)^2 + (16-7,5)^2 + (6-7,5)^2}{6}$$

$$V_A = \frac{20,25 + 42,25 + 12,25 + 30,25 + 72,25 + 2,25}{6}$$

$$V_A = \frac{179,50}{6} \Rightarrow V_A \cong 29,92$$

- Variância do número de cestas de três pontos do jogador B:

$$V_B = \frac{(7-7,5)^2 + (9-7,5)^2 + (8-7,5)^2 + (8-7,5)^2 + (6-7,5)^2 + (7-7,5)^2}{6}$$

$$V_B = \frac{0,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 + 0,25}{6}$$

$$V_B = \frac{5,50}{6} \Rightarrow V_B \cong 0,92$$

Observe que o jogador A apresenta maior variância no número de cestas de três pontos em relação ao jogador B.

Observações:

1. A variância permite observar a dispersão dos grupos valores e compará-las: quanto maior a variância, maior a dispersão.

2. No cálculo da variância, os desvios foram elevados ao quadrado. Dessa forma, não temos a variância na mesma unidade dos valores da variável.

Ao analisar a dispersão, para facilitar a interpretação dos dados, resolveu-se definir desvio-padrão como a raiz quadrada da variância. Assim, temos uma medida de dispersão na mesma unidade dos valores observados no conjunto de dados:

Desvio-padrão, representado por D_P, é a raiz quadrada da variância V. Em símbolos:

$$D_P = \sqrt{V}$$

Exemplo:

Conforme visto, vamos calcular o desvio-padrão do número de cestas de três pontos dos dois jogadores de basquete.

- **Jogador A** – como já conhecemos a variância, temos:

  $D_p = \sqrt{V}$

  $D_p = \sqrt{29{,}92} \Rightarrow D_p \cong 5{,}47$

- **Jogador B** – como já conhecemos a variância, temos:

  $D_p = \sqrt{V}$

  $D_p = \sqrt{0{,}92} \Rightarrow D_p \cong 0{,}96$

O jogador B tem o menor desvio-padrão, por isso dizemos que seu desempenho é mais regular se comparado ao jogador A. Assim, caso o treinador opte pela regularidade, escalará o jogador B. O jogador A tem desvio-padrão maior que o jogador B, isto é, é menos regular. Entretanto note que houve um jogo em que ele marcou 16 cestas de três pontos. Dependendo da situação do time num jogo, o treinador poderá optar por escalar esse jogador. Você concorda?

Observações:

1. Às vezes, é possível, apenas a partir dos valores da variável, analisar a regularidade sem ser necessário calcular o desvio-padrão.

2. Quanto mais próximo de zero for o desvio-padrão, mais homogênea será a distribuição dos valores da variável que estão sendo analisados.

3. O desvio-padrão é dado na mesma unidade da variável; a variância, não.

Exercícios resolvidos

1. Obtenha a amplitude, a variância e o desvio-padrão de cada conjunto de valores a seguir:

a) 3; 5; 5; 7; b) 2; 6; 8; 8; c) 7; 7; 7; 7.

a) Amplitude: $7 - 3 = 4$

$$M_A = \frac{3 + 5 + 5 + 7}{4} = 5$$

$$V = \frac{(5-3)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (5-7)^2}{4} = 2$$

$$D_p = \sqrt{2}$$

b) Amplitude: $8 - 2 = 6$

$$M_A = \frac{2 + 6 + 8 + 8}{4} = 6$$

$$V = \frac{(6-2)^2 + (6-6)^2 + (6-8)^2 + (6-8)^2}{4} = 6$$

$$D_p = \sqrt{6}$$

c) Amplitude: $7 - 7 = 0$

$$M_A = \frac{7 + 7 + 7 + 7}{4} = 7$$

$$V = \frac{(7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2}{4} = 0$$

$$D_p = \sqrt{0} = 0$$

2. As médias bimestrais de dois alunos, no decorrer do ano letivo, na disciplina Matemática, estão apresentadas na tabela a seguir:

	Aluno	
Bimestre	**A**	**B**
1º	5	6
2º	9	8
3º	4	7
4º	10	7

a) Qual foi a média anual do aluno A?

b) Qual foi a média anual do aluno B?

c) Sem realizar cálculo algum, responda: qual aluno possui desempenho mais regular?

d) Comprove a resposta dada no item **c** por meio do cálculo do desvio-padrão das notas de cada aluno.

a) $M_A = \frac{5 + 9 + 4 + 10}{4} = 7$

b) $M_B = \frac{6 + 8 + 7 + 7}{4} = 7$

c) O aluno mais regular foi B.

b) $D_{P_A} = \sqrt{\frac{(7-5)^2 + (7-9)^2 + (7-4)^2 + (7-10)^2}{4}} = \sqrt{6{,}5}$

$D_{P_B} = \sqrt{\frac{(7-6)^2 + (7-8)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2}{4}} = \sqrt{0{,}5}$

O aluno B possui desempenho mais regular.

3. Hoje em dia, é comum haver fila única em estabelecimentos comerciais. Acredita-se que, dessa forma, o tempo de espera é mais regular. Em uma agência bancária foi realizada a experiência a seguir em dois dias consecutivos, das 10 às 11 horas:

- No primeiro dia, foi formada uma fila única e 10 pessoas foram selecionadas aleatoriamente.
- No segundo dia, foram formadas várias filas e 10 pessoas foram selecionadas aleatoriamente.

O tempo de espera em cada dia foi registrado em minutos:

primeiro dia $\rightarrow$ 4, 5, 6, 7, 3, 4, 6, 5, 7, 3
segundo dia $\rightarrow$ 2, 8, 3, 7, 9, 3, 4, 5, 6, 3

a) Obtenha o tempo médio de espera em cada fila. Eles são iguais?

b) Calcule os desvios-padrão dos tempos de espera em cada fila. Os valores obtidos são iguais?

c) Em qual dia o tempo de espera foi mais regular?

d) Com base nessa experiência, a opção pela fila única é coerente?

a) Tempo médio no primeiro dia: $\frac{4 + 5 + 6 + 7 + 3 + 4 + 6 + 5 + 7 + 3}{10} = 5$

Tempo médio no segundo dia: $\frac{2 + 8 + 3 + 7 + 9 + 3 + 4 + 5 + 6 + 3}{10} = 5$

Os tempos médios de espera são iguais.

b) Primeiro dia:

$$\sqrt{\frac{(5-4)^2+(5-5)^2+(5-6)^2+(5-7)^2+(5-3)^2+(5-4)^2+(5-6)^2+(5-5)^2+(5-7)^2+(5-3)^2}{10}} = \sqrt{2}$$

Segundo dia:

$$\sqrt{\frac{(5-2)^2+(5-8)^2+(5-3)^2+(5-7)^2+(5-9)^2+(5-3)^2+(5-4)^2+(5-5)^2+(5-6)^2+(5-3)^2}{10}} = \sqrt{5{,}2}$$

Os valores obtidos não são iguais.

c) No primeiro dia.

d) Sim, a opção é coerente.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Analise cada afirmação e indique, em seu caderno, V ou F, conforme seja verdadeira ou falsa.

I. A amplitude de um conjunto de valores é sempre positiva. I. F

II. A variância é medida na mesma unidade da variável. II. F

III. O desvio-padrão não pode ser igual a zero. III. F

2. Considere o seguinte conjunto de valores: 2; 4; 6; 8. Em seguida, calcule:

a) a média aritmética; a) 5

b) a variância; b) 5

c) o desvio padrão. c) $\sqrt{5}$

3. Em relação ao conjunto de valores da questão 2, adicione duas unidades a cada um deles e, em seguida, responda:

a) Qual é a média aritmética? a) 7

b) Qual é a variância? b) 5

c) Qual é o desvio padrão? c) $\sqrt{5}$

d) O que você observou nos valores da média aritmética, da variância e do desvio padrão do novo conjunto de valores em relação ao conjunto inicial?

d) A média aritmética aumentou duas unidades. A variância e o desvio padrão não foram alterados.

4. Ainda em relação ao conjunto de valores da questão 2, multiplique cada um deles por 2 e, em seguida, responda:

a) Qual é a média aritmética? a) 10

b) Qual é a variância? b) 20

c) Qual é o desvio-padrão? c) $2\sqrt{5}$

d) O que você observou nos valores da média aritmética, da variância e do desvio-padrão do novo conjunto de valores em relação ao conjunto inicial?

d) A média aritmética foi multiplicada por dois. A variância foi multiplicada por 2^2 e o desvio-padrão foi multiplicado por 2.

5. A distribuição dos salários em um supermercado é apresentada na tabela a seguir:

Salário (em R$)	Número de funcionários
700,00	10
900,00	5
1500,00	3
2000,00	2

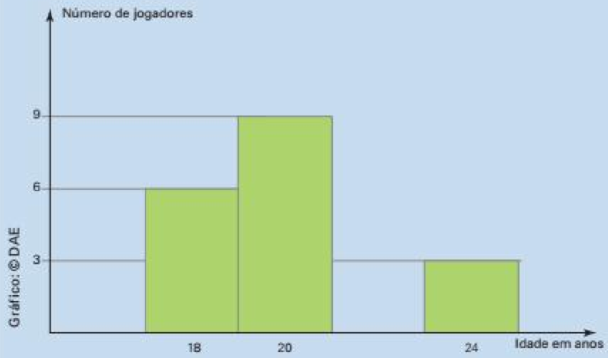
Determine:

a) o salário médio dos funcionários dessa empresa;
a) R$ 1000,00

b) a mediana e a moda dessa distribuição de salários;
b) Mediana: R$ 800,00 e Moda: R$ 700,00

c) o desvio médio e o desvio padrão dessa distribuição de salários. c) Desvio médio: R$ 350,00 e Desvio-padrão: aproximadamente R$ 430,00

6. O gráfico a seguir mostra a distribuição da idade de 18 jogadores de um time de futebol.



Se forem contratados N jogadores com 20 anos, a média não será alterada, mas o desvio padrão será 3/4 do que é. Calcule o valor de N. N = 14

7. Em Estatística, podemos utilizar a média aritmética e o desvio padrão para verificar a probabilidade de ocorrer um fenômeno.

Se é representado por um valor pertencente ao intervalo $[M_A - 2 \cdot D_p , MA + 2 \cdot D_p]$, o fenômeno é considerado comum.

Os fenômenos representados por valores que não pertencem ao intervalo anterior são considerados raros. Observe o diagrama a seguir:

Considere que a média das notas de uma turma tenha sido 6 e o desvio padrão $\sqrt{2}$. Quatro alunos dessa turma foram sorteados, aleatoriamente; suas notas foram 3, 5, 7,5 e 9. Utilizando o diagrama anterior, analise, de acordo com a Estatística, cada uma das notas e classifique o desempenho desses alunos em raro ou comum.
3 : raro; 5 : comum; 7,5 : comum; 9 : raro

8. Realize esta atividade com um colega.

a) Procurem obter a altura, em centímetros, de 10 pessoas com a mesma idade (Estipulem a idade que deverá ter cada pessoa).

b) Desse mesmo grupo de pessoas, obtenham o "peso", em quilograma.

c) Construam uma tabela formada por duas colunas (uma para a altura e outra para o "peso").

d) Calculem o desvio-padrão das duas distribuições (altura e "peso"). Qual delas é mais homogênea?
Respostas pessoais.

CAPÍTULO 3

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Você já participou de alguma pesquisa, seja ela eleitoral ou sobre algum produto? E algum parente seu, já participou?

nasirkhan/Shutterstock.com

Quando uma pesquisa é elaborada e colocada em prática, deve estar claro o conjunto da população que fará parte dela, ou seja, a amostra. A definição da amostra dependerá do tipo de pesquisa e do objeto que será pesquisado. Existem maneiras diferentes para escolha dos indivíduos que constituirão a amostra. Uma das maneiras é por meio de sorteio. Assim, já na escolha da amostra (indivíduos que serão pesquisado), deparamos com o caráter probabilístico.

freesoulproduction/Shutterstock.com

Não é apenas em relação às pesquisas que Probabilidade e Estatística podem estar relacionadas de forma direta. Um exemplo interessante dessa relação é o valor cobrado em apólices de seguro: pessoas diferentes contratam apólices de seguro idênticas e pagam valores diferentes.

Isso acontece porque as seguradoras consideram diversas características no perfil de quem está contratando a apólice. Se a apólice é para seguro de vida, as seguradoras valem-se de dados estatísticos referentes a aspectos diversos do futuro segurado. Esses dados evidenciam que algumas pessoas representam um risco maior para a seguradora. Assim, a apólice é mais cara para essas pessoas.

Neste capítulo, procuramos recordar o conceito de Probabilidade observando também sua relação com a Estatística.

Retomando probabilidades

Inicialmente, observe o conceito de probabilidade, visto no volume 2 da coleção. Nesse conceito é necessário você observar, nos exemplos dados, o que é um evento, um espaço amostral e como podemos calcular a probabilidade de esse evento ocorrer.

> De modo geral, se A é um evento qualquer de um espaço amostral equiprovável finito (Ω), a probabilidade p(A) de ocorrência desse evento é
>
> $$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

A probabilidade de ocorrência de um evento A também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número total de casos possíveis do espaço amostral}}$$

Observe, a seguir, algumas propriedades estudadas anteriormente.

Considerando Ω um espaço amostral finito e equiprovável, correspondente a um experimento aleatório, são válidas as seguintes propriedades:

Propriedade 1

A probabilidade de ocorrência de um evento A igual ao próprio espaço amostral Ω é 1.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

Nesse caso dizemos que o evento é certo.

Propriedade 2

A probabilidade de ocorrência de um evento A igual ao conjunto vazio é zero.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$$

Nesse caso dizemos que o evento é impossível.

Propriedade 3

A probabilidade de ocorrência de um evento A qualquer do espaço amostral Ω é tal que:

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$

- Justificativa:

Como A é um subconjunto de Ω, temos $n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(\Omega)$. Dividindo todos os termos dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$, decorre:

$$\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

$$p(\varnothing) \leqslant p(A) \leqslant p(\Omega) \Rightarrow 0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$

Observação:

Na propriedade 3, o menor valor da probabilidade do evento A é zero (evento impossível) e o maior valor é 1 (evento certo). Também é comum indicarmos a probabilidade utilizando porcentagem. Assim, podemos dizer que um evento A tem probabilidade de ocorrência p(A) tal que:

$$0\% \leqslant p(A) \leqslant 100\%$$

Propriedade 4

A probabilidade de ocorrência de um evento A adicionada à probabilidade de ocorrência do evento $\overline{A}$ (complementar de A em relação ao espaço amostral Ω) é 1, isto é:

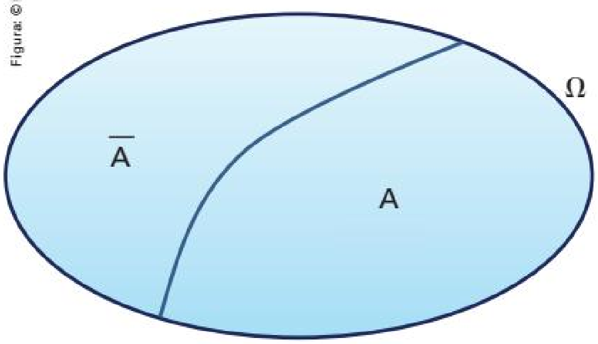
$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

- Justificativa:

Pela teoria dos conjuntos, temos que $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, como sugere o diagrama a seguir:

Assim, podemos escrever:

Figura: © DAE



$$n(A) + n(\overline{A}) = n(\Omega)$$

Dividindo cada um dos membros por $n(\Omega) > 0$, vem:

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Essa propriedade equivale a dizer que a probabilidade de ocorrer um evento A adicionada à probabilidade de ele não ocorrer é certa.

A seguir, apresentamos exemplos de probabilidades.

1. No lançamento de um dado, vamos calcular a probabilidade de obter um número divisível por 3.

- Espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$

- Evento:

$A = \{3, 6\} \rightarrow n(A) = 2$

- Cálculo da probabilidade de ocorrência do evento A:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$$

2. De um baralho com 52 cartas, retiramos 1 carta. Vamos calcular a probabilidade de ela ser rei. (Representamos esse evento por A.)

charnsitr/Shutterstock.com

- Como queremos retirar uma carta que seja rei, calculamos o quociente entre o número de situações favoráveis e o número de resultados possíveis, ou seja:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

$$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

3. Uma pessoa fez uma aposta simples na Mega Sena, isto é, escolheu exatamente 6 números. Vamos calcular a probabilidade de a pessoa não ganhar.

- Como está apostando um único cartão com 6 números, a probabilidade p(A) de a pessoa ganhar é:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A) = \frac{C_6^6}{C_{60}^6} = \frac{1}{50\,063\,860} \cong 0{,}00000002$$

- Utilizando a propriedade da probabilidade complementar, sendo $p(\overline{A})$ a probabilidade de a pessoa não ganhar, temos:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

$$p(\overline{A}) = 1 - 0{,}00000002$$

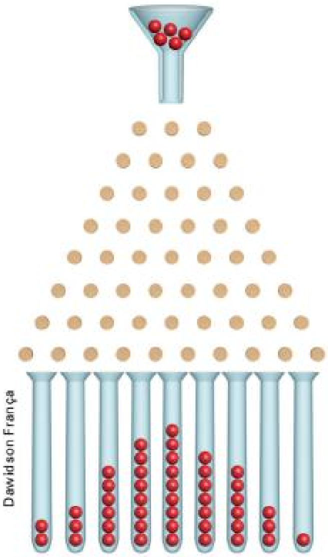
$$p(\overline{A}) \cong 0{,}99999998$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Observando o exemplo, escreva a porcentagem correspondente à probabilidade de uma pessoa que escolheu 6 números não ganhar na Mega Sena.
2. Como calcular C_{60}^6? Respostas no Manual do Professor.

Probabilidades e Estatística



Dawidson França

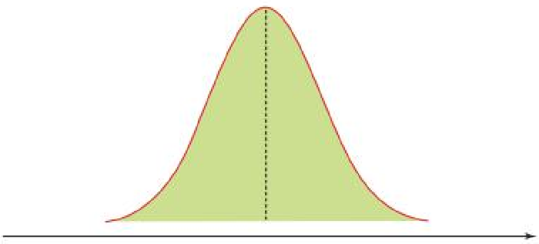
Leia o texto a seguir:

Em 1873 – 1874, Sir Francis Galton (primo de Charles Darwin) projetou um dispositivo que ele mais tarde batizou de *quincunx*. Essa máquina era um engenhoso modelo físico da teoria dos erros, a qual ele acreditava ser aplicável a muitos fenômenos no campo da biologia e da física. Encerrada atrás de um vidro, havia uma seção transversal de um funil que se abria para uma pirâmide de pinos dispostos a intervalos iguais, com compartimentos verticais abaixo dos pinos. Ao cair pelo funil, um certo número de bolinhas se distribuiriam, à direita e à esquerda pelos espaços entre pinos (que representavam, na teoria de Galton, as perturbações aleatórias independentes da natureza), terminando por se acumular nos compartimentos inferiores em pilhas que lembram uma curva normal [...] Galton chamou esse fenômeno de lei do desvio. Ele acreditava que as importantes influências que atuavam sobre uma característica herdada, tal como a altura, eram um "exército de influências perturbadoras insignificantes" (representadas pelos pinos) e que a lei do desvio genético era puramente numérica e seguia universalmente a lei genérica da distribuição normal. Dispositivos semelhantes ao quincunx podem ser vistos em museus científicos. Em alguns lugares eles são enormes, com bolas de tênis no lugar das bolinhas.

BENNETT, Débora J. Trad. Waldéa Barcellos. *Aleatoriedade*. São Paulo: Martins Fontes, 2003. p. 117 e 118.

No texto, é mencionada uma curva normal. O que vem a ser uma curva normal de distribuição de frequências?

Dizemos que uma curva de distribuição de valores de uma variável é normal quando apresenta o seguinte aspecto:



Certos fenômenos com comportamento de eventos aleatórios podem ser descritos por meio de distribuições de probabilidades, tendo particularmente a distribuição normal, isto é, em forma de sino, como na figura anterior.

Dawidson França

Exemplo: Cara ou coroa?

Vamos examinar o número de vezes provável de sair cara em:

1 lançamento da moeda

2 lançamentos da moeda

3 lançamentos da moeda

4 lançamentos da moeda

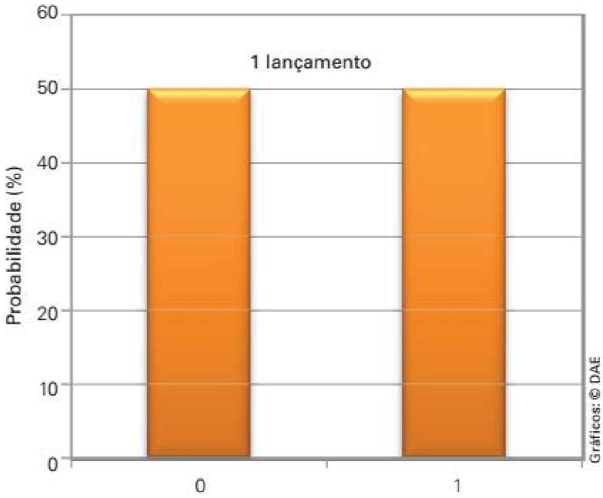
- Ao lançar 1 vez a moeda, podemos ter:

  0 cara (se o resultado for coroa)

  ou

  1 cara

Como esses resultados são equiprováveis, o gráfico de probabilidades, conforme demonstrado a seguir, evidencia que as barras têm altura igual (probabilidades iguais a 50%).



Gráficos: © DAE

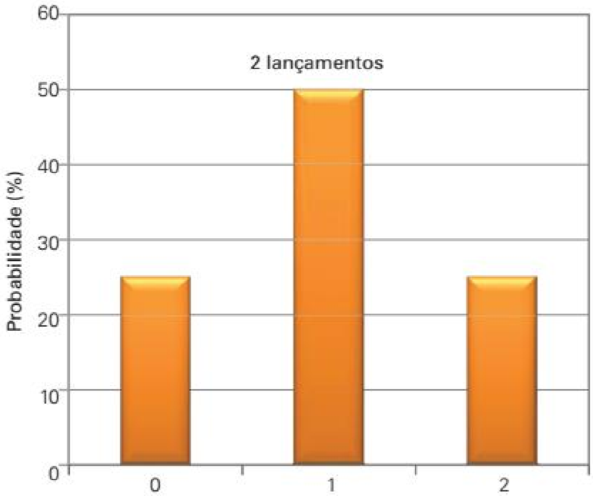
- Ao lançar 2 vezes a moeda, podemos ter:

  0 cara (se os resultados forem coroa e coroa)

  1 cara (se os resultados forem cara e coroa)

  2 caras

Observe que a probabilidade de sair 0 cara é 25%, 1 cara é 50% e 2 caras é 25%. Assim, temos o seguinte gráfico:



- Ao lançar 3 vezes a moeda, podemos ter os totais:

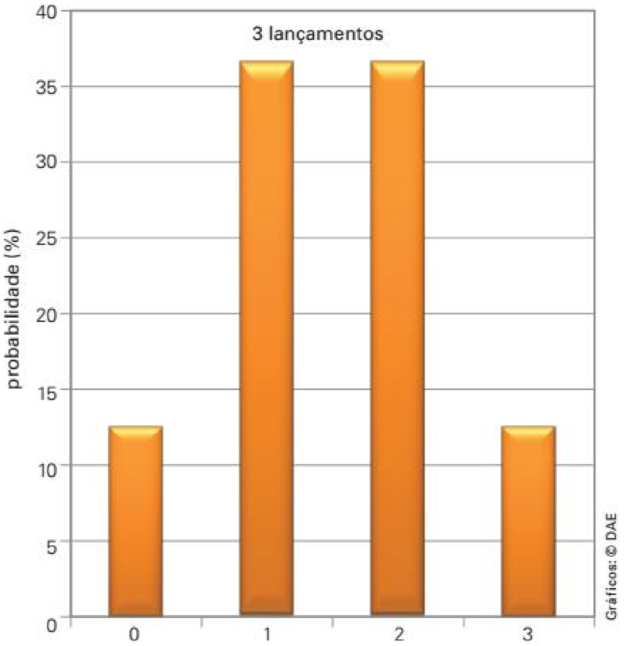
  0 cara (se os resultados forem 3 coroas)

  1 cara (se os resultados forem 1 cara e 2 coroas)

  2 caras (se os resultados forem 2 caras e 1 coroa)

  3 caras

Observe que a probabilidade de sair 0 cara é 12,5%, 1 cara é 37,5%, 2 caras é 37,5% e 3 caras é 12,5%. Assim, temos o gráfico a seguir:



- Ao lançar 4 vezes a moeda, podemos ter:

  0 cara (se os resultados forem 4 coroas)

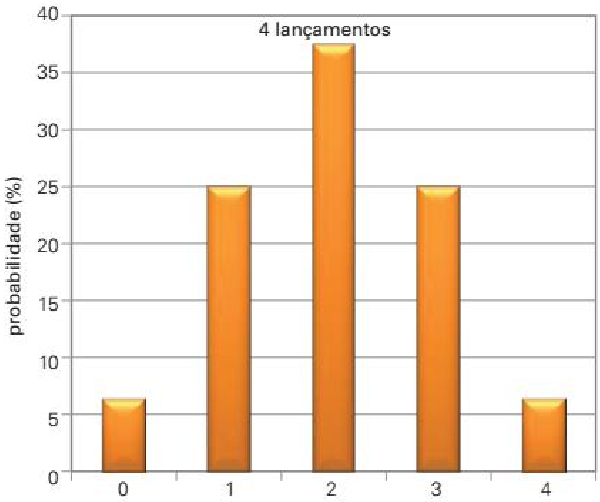
  1 cara (se os resultados forem 1 cara e 3 coroas)

  2 caras (se os resultados forem 2 caras e 2 coroas)

  3 caras (se os resultados forem 3 caras e 1 coroa)

  4 caras

Observe que a probabilidade de sair 0 cara é 6,25%, 1 cara é 25%, 2 caras é 37,5%, 3 caras é 25% e 4 caras é 6,25%. Assim, temos o seguinte gráfico:



Assim, se os lançamentos continuarem, observaremos a distribuição dessas probabilidades em forma de sino (curva normal).

No estudo de probabilidades, devemos compreender que, por exemplo, quando lançamos uma moeda 1 vez, é possível ocorrer face **cara**. Entretanto, não é garantido que irá ocorrer face cara. Estatisticamente, quanto maior for o número de lançamentos dessa moeda, o número de vezes (frequência) da ocorrência de cara aproxima-se da metade do total de lançamentos.

Exemplo:

Um experimento foi realizado em duas turmas do Ensino Médio. Nele, cada aluno deveria lançar uma moeda 40 vezes e anotar o número de vezes em que o resultado fosse cara. Como tal experimento foi realizado por 50 alunos, foram computados 2 000 lançamentos. A tabela a seguir foi elaborada observando os resultados para alguns números até o total de 2 000 lançamentos.

Nº de lançamentos	f_A (resultado cara)	f_R (resultado cara)
40	23	57,5%
80	44	55%
160	83	51,875%
200	98	49%
400	195	48,75%
800	410	51,25%
1200	612	51%
1600	817	51,0625%
2000	996	49,8%

Note que, neste experimento aleatório, o resultado cara fica próximo de 50%, oscilando para mais e para menos conforme o número de lançamentos foi sendo computado.

Exemplo:

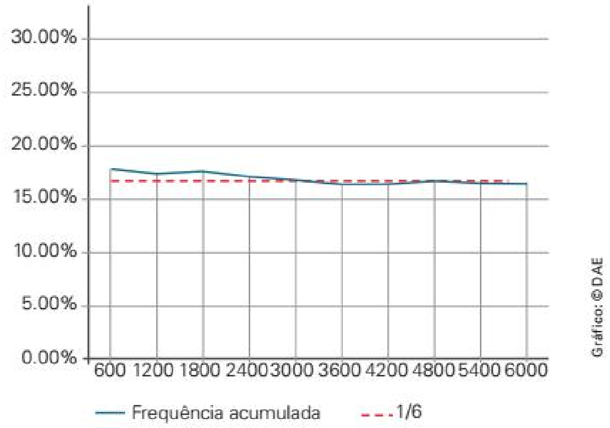
Em planilhas eletrônicas é possível fazer simulações de eventos aleatórios. Utilizando um simulador de planilha eletrônica, simulou-se o lançamento de um dado 6 000 vezes. As frequências de cada face aparece na seguinte tabela:

E	f_A	f_R
1	994	16,57%
2	977	16,28%
3	992	16,53%
4	1 058	17,63%
5	941	15,68%
6	1 038	17,30%

Se, nesse mesmo simulador, analisarmos o evento "ocorrer a face 3", em intervalos de 600 em 600 vezes até acumular as 6 000 simulações, teremos a tabela a seguir:

Evento	Intervalo	f_A	f_R
3	600	107	17,83%
	1200	209	17,42%
	1800	318	17,67%
	2400	410	17,08%
	3000	502	16,73%
	3600	590	16,39%
	4200	689	16,40%
	4800	803	16,73%
	5400	889	16,46%
	6000	992	16,53%

Colocando esses valores num gráfico de segmentos, em que $\frac{1}{6}$ corresponde a aproximadamente 16,67%, temos:



Portanto, a frequência de ocorrer a face 3 tende ao valor correspondente da probabilidade de ocorrer essa face, isto é, $\frac{1}{6}$.

Orientações e respostas no Manual do Professor.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Dada a grande quantidade de informações a que estamos submetidos, a Estatística mostra-se útil e vem configurando-se como uma das habilidades fundamentais para quem precisa tomar decisões. Embora esteja associada ao aumento populacional e ao avanço tecnológico, esta ciência, voltada para a captação de dados numéricos, sua análise, comparação e interpretação, é utilizada há milhares de anos. Leia o texto para conhecer um pouco mais a respeito da história da Estatística.

A origem da palavra Estatística está associada à palavra latina *status* (estado). O primeiro dado estatístico disponível foi o de registros egípcios de presos de guerra na data de 5000 a.C. Em 3000 a.C. existem também registros egípcios da falta de mão-de-obra relacionada a construção de pirâmides. No ano de 2238 a.C., o Imperador da China, Yao, ordenou que fosse feito o primeiro recenseamento com fins agrícolas e comerciais. Em 600 a.C., no Egito, todos os indivíduos tinham que declarar todos os anos ao governo de sua província a sua profissão e suas fontes de rendimento. Caso não o fizessem, seria declarada a pena de morte. Até mesmo o 4º livro do Velho Testamento faz referência à uma instrução dada a Moisés, para que fizesse um levantamento dos homens de Israel que estivessem aptos para guerrear. Usualmente, estas informações eram utilizadas para a taxação de impostos ou para o alistamento militar. O Imperador César Augusto, por exemplo, ordenou que se fizesse o Censo de todo o Império Romano.

A palavra "censo" é derivada da palavra *censere*, que em latim significa "taxar". Em 1085, Guilherme, O Conquistador, solicitou um levantamento estatístico da Inglaterra, que deveria conter informações sobre terras, proprietários, uso da terra, empregados e animais. Os resultados deste censo foram publicados em 1086 no livro intitulado "Domesday Book" e serviram de base para o cálculo de impostos.

Contudo, mesmo que a prática de coletar dados sobre colheitas, composição da população humana ou de animais, impostos, etc, fosse conhecida pelos egípcios, hebreus, caldeus e gregos, e se atribuam a Aristóteles cento e oitenta descrições de Estados, apenas no século XVII a Estatística passou a ser considerada disciplina autônoma, tendo como objetivo básico a descrição dos bens do Estado.

A palavra Estatística foi cunhada pelo acadêmico alemão Gottfried Achenwall (1719-1772), que foi um notável continuador dos estudos de Hermann Conrig (1606-1681). A escola alemã atingiu sua maturidade com A. L. von Schlozer (1735-1809), mas sempre com ideias diferentes daquelas que fundamentaram a Estatística Moderna. Com algum exagero, pode-se dizer que o seu principal legado foi o termo "Staatenkunde", que deu origem à designação atual. Na Enciclopédia Britânica, o verbete "Statistics" apareceu em 1797.

Em contraposição à natureza eminentemente qualitativa da escola alemã, na Inglaterra do século XVII surgiram os aritméticos políticos, dentre os quais destacam-se John Graunt (1620-1674) e William Petty (1623-1687). Eles preocuparam-se com o estudo numérico dos fenômenos sociais e políticos, na busca de leis quantitativas que pudessem explicá-los. O estudo consistia essencialmente de exaustivas análises de nascimentos e mortes, realizadas através das Tábuas de Mortalidade, que deram origem às atuais Tábuas de Mortalidade usadas pelas companhias de seguros. Um dos resultados mais importantes foi a constatação de que o percentual de nascimento de crianças do sexo masculino (51%) é levemente superior ao do sexo feminino (49%). Dessa forma, a escola dos aritméticos políticos pode ser considerada o berço da Demografia. Um de seus mais notáveis adeptos foi o pastor alemão Sussmilch (1707-1767), com o qual pode-se dizer que a Estatística aparece pela primeira vez como meio indutivo de investigação.

Na última metade do século XIX, os alemães Helmert (1843-1917) e Wilhelm Lexis (1837-1914), o dinamarquês Thorvald Nicolai Thiele (1838-1910) e o inglês Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) obtiveram resultados extremamente valiosos para o desenvolvimento da Inferência Estatística, muitos dos quais só foram completamente compreendidos mais tarde. Contudo, o impulso decisivo deve-se a Karl Pearson (1857-1936), William Sealey Gosset (1876-1937) e, em especial, a Ronald Aylmer Fisher (1890-1962).

Karl Pearson (1857-1936) formou-se em 1879 pela Cambridge University e inicialmente dedicou-se ao estudo da evolução de Darwin, aplicando os métodos estatísticos aos problemas biológicos relacionados com a evolução e hereditariedade. Em 1896, Pearson foi eleito membro da Royal Society of London. Entre 1893 e 1912 escreveu um conjunto de 18 artigos denominado Mathematical Contribution to the Theory Evolution, com contribuições extremamente importantes para o desenvolvimento da teoria da Análise de Regressão e do Coeficiente de Correlação, bem como do teste de hipóteses de qui-quadrado.

William Sealey Gosset (1876-1937) estudou Química e Matemática na New College Oxford. Em 1899 foi contratado como químico da Cervejaria Guiness em Dublin, desenvolvendo um trabalho extremamente importante na área de Estatística. Devido à necessidade de manipular dados provenientes de pequenas amostras, extraídas para melhorar a qualidade da cerveja, Gosset derivou o teste t de Student baseado na distribuição de probabilidades.

A contribuição de Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) para a Estatística Moderna é, sem dúvida, a mais importante e decisiva de todas. Formado em astronomia pela Universidade de Cambridge em 1912, foi o fundador do célebre Statistical Laboratory da prestigiosa Estação Agronômica de Rothamsted, contribuindo enormemente tanto para o desenvolvimento da Estatística quanto da Genética. Ele apresentou os princípios de planejamento de experimentos, introduzindo os conceitos de aleatorização e da Análise da Variância, procedimentos muito usados atualmente.

No princípio do século XX, estabeleceu o que a maioria aceita como a estrutura da moderna Estatística Analítica, através do conceito da verossimilhança (likelihood, em inglês). O seu livro intitulado "Statistical Methods for Research Workers", publicado pela primeira vez em 1925, foi extremamente importante para familiarizar os investigadores com as aplicações práticas dos métodos estatísticos e, também, para criar a mentalidade estatística entre a nova geração de cientistas. Os trabalhos de Fisher encontram-se dispersos em numerosas revistas, mas suas contribuições mais importantes foram reunidas em "Contributions to Mathematical Statistics".

Com base em: <www.ufrgs.br/mat/graduacao/estatistica/historia-da-estatistica>. Acesso em: 11 mar 2016. <www.exatas.net/ssbec_estatistica_e_sua_historia.pdf>. Acesso em: 11 mar 2016.

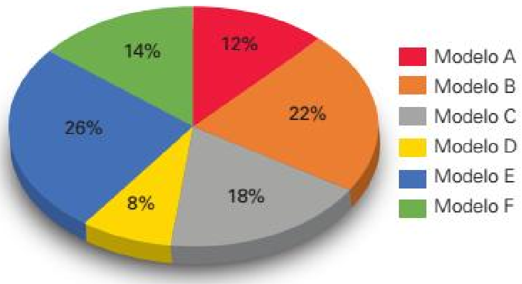
O advento do computador e sua evolução, que o torna cada vez mais eficaz, possibilitou, de certa forma, que a Estatística tornasse-se acessível a seus usuários, pois imensas quantidades de informação, por meio de *softwares*, são compiladas em uma fração de segundos, processo que antes era manual e maçante, além de consumir muito tempo. Hoje, a Estatística é empregada não somente em trabalhos acadêmicos, mas em jornais, revistas e na televisão, meios de comunicação que atingem grande variedade de pessoas, muitas leigas nesta área, que depara com gráficos, tabelas e outras informações estatísticas.

De acordo com o texto, responda:

1. Qual o primeiro dado estatístico disponível da história?
2. Qual o estudo desenvolvido pelos aritméticos políticos John Graunt e William Petty que deu origem a um modelo utilizado atualmente por companhias de seguros?
3. Quais as contribuições de Ronald Aylmer Fisher para a Estatística moderna?

Exercícios resolvidos

1. Uma empresa fabrica 6 modelos diferentes de sapato. O gráfico a seguir mostra a distribuição da produção dos pares de sapato de acordo com o modelo.



Gráficos: © DAE

Escolhendo um par de sapatos ao acaso, qual a probabilidade de:

a) ser do modelo C? b) não ser do modelo C?

c) não ser do modelo B nem do modelo E?

a) A probabilidade é 18%.

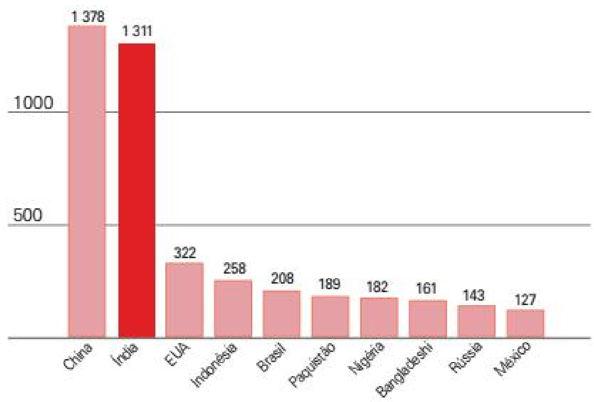
b) A probabilidade é 100% − 18% = 82%.

c) A probabilidade é 100% − 22% − 26% = 52%.

2. Observe o gráfico a seguir com a projeção dos 10 países mais populosos do mundo em 2015.

ÍNDIA SERÁ PAÍS MAIS POPULOSO DO MUNDO

Projeções de população em 2015, em milhões de habitantes



Fonte: <http://insider.pro/pt/article/33628/?pride=true>. Acesso em: 10 junho 2016.

De acordo com o gráfico, qual a probabilidade de escolhermos aleatoriamente uma pessoa dentre esses 10 países,

a) e ela morar na China? b) e ela morar em um país que não seja a China nem a Índia?

a) A probabilidade é dada por $\frac{1378}{1378 + 1311 + 322 + 258 + 208 + 189 + 182 + 161 + 143 + 127} =$

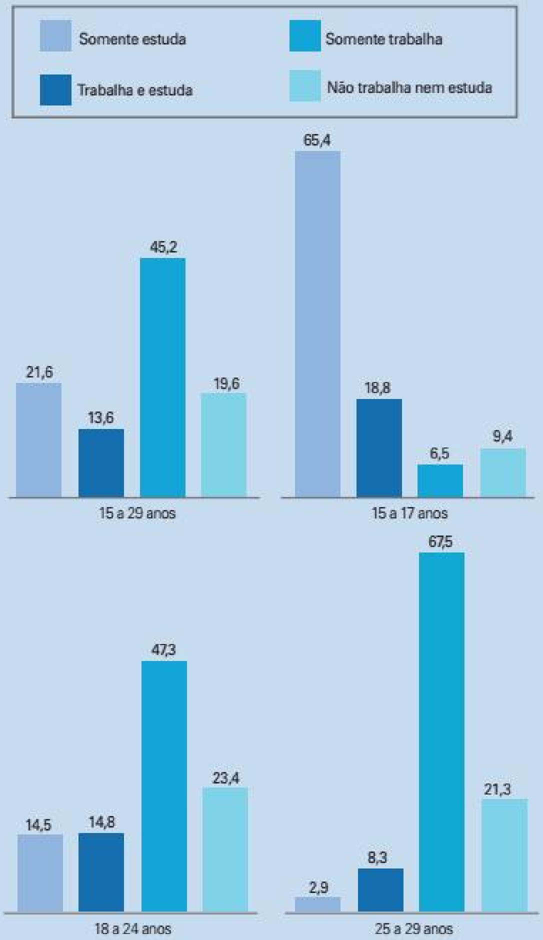
$= \frac{1378}{4279} \cong 32{,}20\%$.

b) A probabilidade é dada por $\frac{4279 - 1378 - 1311}{4279} = \frac{1590}{4279} \cong 37{,}16\%$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. O gráfico a seguir mostra a distribuição por idade dos 200 sócios de um clube de natação.

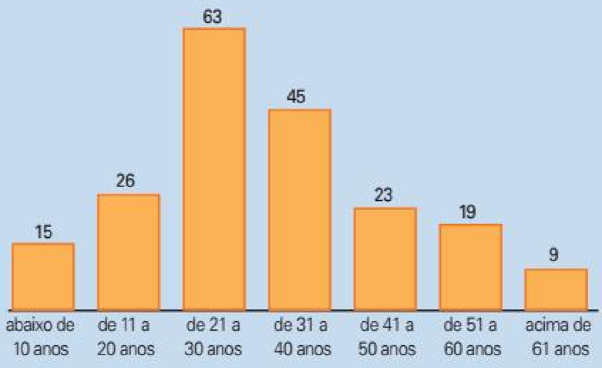


Escolhendo um sócio ao acaso,

a) qual é a probabilidade de esse sócio ter entre 31 e 40 anos? 22,5%

b) qual é a probabilidade de esse sócio ter menos de 31 anos? 52%

2. Considere que o gráfico a seguir tenha sido elaborado com base em atividades de jovens brasileiros com 15 a 29 anos.



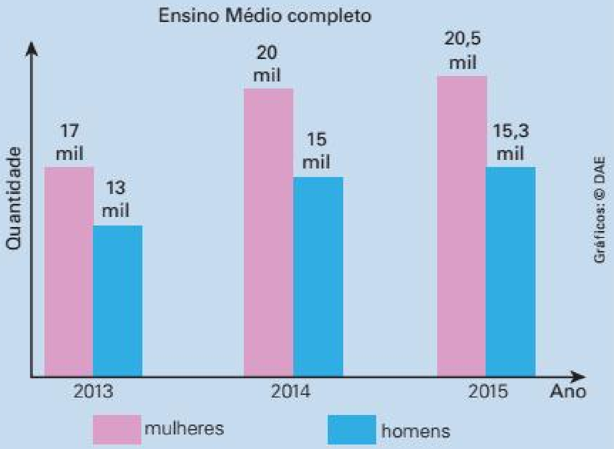
Gráficos: © DAE

De acordo com as informações presentes no gráfico, qual a probabilidade de escolhermos, aleatoriamente, do grupo de jovens com idade entre

a) 15 e 17 anos, um jovem que só estude? 65,4%

b) 18 e 24 anos, um jovem que trabalhe? 62,1%

3. Considere que o gráfico a seguir indica a distribuição de homens e mulheres cuja idade vai de 18 a 24 anos e com ensino médio completo, num município brasileiro no decorrer dos anos de 2013, 2014 e 2015.

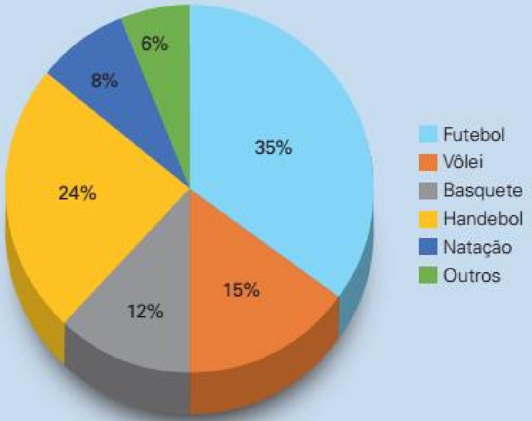


De acordo com as informações do gráfico, qual a probabilidade de escolhermos, aleatoriamente, dentre as pessoas cuja idade vai de 18 a 24 anos e com o ensino médio completo,

a) em 2010, no Rio de Janeiro, uma mulher? 57,14%

b) em 2011, no Rio de Janeiro, um homem? 42,74%

4. O gráfico a seguir mostra a preferência dos 300 alunos de uma escola por cada esporte; cada aluno escolheu apenas um esporte.



a) Quantos alunos preferem vôlei? 45

b) Escolhendo um aluno ao acaso, qua é a probabilidade de ele não gostar de futebol? 65%

c) Escolhendo um aluno ao acaso, qual a probabilidade de ele gostar de natação ou handebol? 32%

Algumas conclusões

Procure responder ou ao menos pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo o estudo de medidas de tendência central, medidas de dispersão, Probabilidade e Estatística. Caso tenha alguma dificuldade para obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais.

1. Como pode ser calculada a média aritmética de 10 valores de uma variável?

2. A média ponderada é um caso particular da média aritmética? Exemplifique.

3. O que representa, num grupo de valores de uma variável, a medida de tendência central moda?

4. E a mediana, o que ela representa?

5. Observando as temperaturas de um local durante o mesmo dia, o que significa amplitude térmica?

6. Como pode ser calculada a variância de um grupo de valores de uma variável?

7. Quando maior a variância de um grupo de valores, maior a dispersão. Essa afirmação é correta? Explique.

8. Como calcular o desvio-padrão de um grupo de valores de uma variável?

9. A variância está na mesma unidade da variável? E o desvio-padrão?

10. Quando uma mesma moeda é lançada 100 vezes, estatisticamente o que pode ser afirmado sobre o resultado?

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas às questões acima. Depois, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (Enem) Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

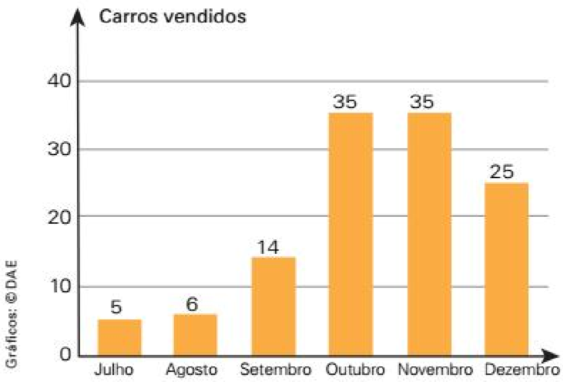
O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

a) F.
b) G.
c) H.
d) M.
e) P.

2. (Enem PPL) Após encerrar o período de vendas de 2012, uma concessionária fez um levantamento das vendas de carros novos no último semestre desse ano. Os dados estão expressos no gráfico:



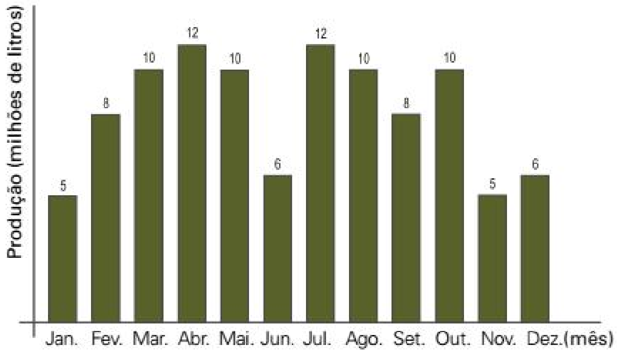
Ao fazer a apresentação dos dados aos funcionários, o gerente estipulou como meta para o mês de janeiro de 2013 um volume de vendas 20% superior à média mensal de vendas do semestre anterior.

Para atingir essa meta, a quantidade mínima de carros que deveriam ser vendidos em janeiro de 2013 seria

a) 17
b) 20
c) 21
d) 24
e) 30

3. (UFSM-RS) O uso de biodiesel gera uma série de efeitos ambientais, tais como a redução da emissão de gases do efeito estufa e a diminuição da poluição atmosférica.

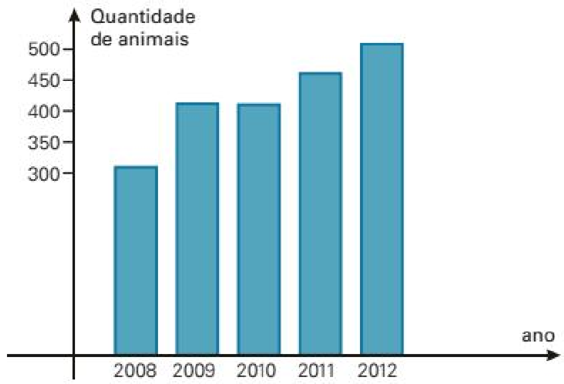
O gráfico mostra a produção de biodiesel (em milhões de litros) em uma usina, durante o período de um ano.



De acordo com os dados, a média, a mediana e a moda (em milhões de litros) são, respectivamente, iguais a

a) 8,5; 10 e 9.
b) 8; 9 e 10.
c) 8; 9,5 e 8.
d) 8,5; 9 e 10.
e) 8,5; 9,5 e 10.

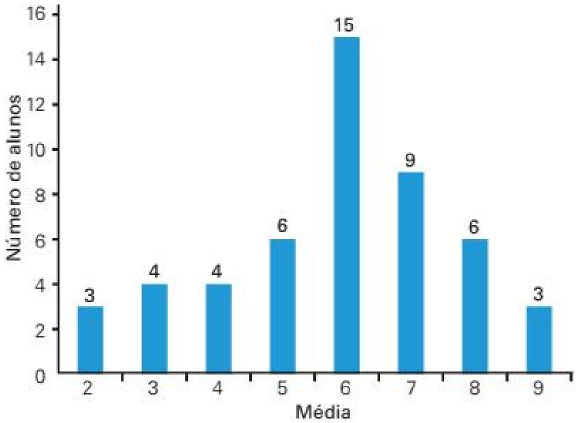
4. (UFPR) O gráfico abaixo representa a quantidade aproximada de animais adotados ao longo de cinco anos em uma determinada cidade.



Qual foi a média anual de animais adotados, ao longo dos cinco anos nessa cidade?

a) 350
b) 380
c) 390
d) 410
e) 440

5. (FGV-SP) A média mínima para um aluno ser aprovado em certa disciplina de uma escola é 6. A distribuição de frequências das médias dos alunos de uma classe, nessa disciplina, é dada abaixo:



A porcentagem de alunos aprovados foi:

a) 62%

b) 63%

c) 64%

d) 65%

e) 66%

6. (Ueba)

De acordo com o gráfico, a diferença entre a altura mediana e a média das alturas desses seis jogadores, em cm, é aproximadamente igual a

a) 0,93

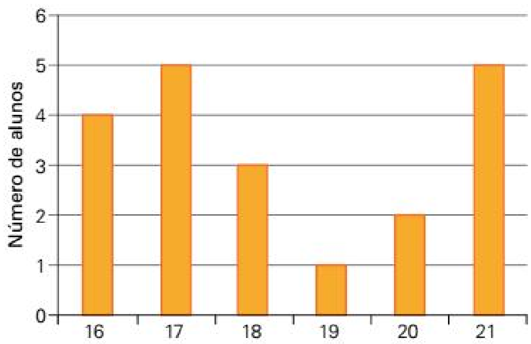
b) 1,01

c) 1,09

d) 1,17

e) 1,25

7. (Unifor-CE) O diretor de um curso de inglês resolve montar as turmas fazendo uma distribuição por idade dos alunos do curso. O gráfico a seguir representa a quantidade de alunos por idade.



Qual a porcentagem de alunos que irá formar uma turma com idades de 16 e 17 anos?

a) 20%

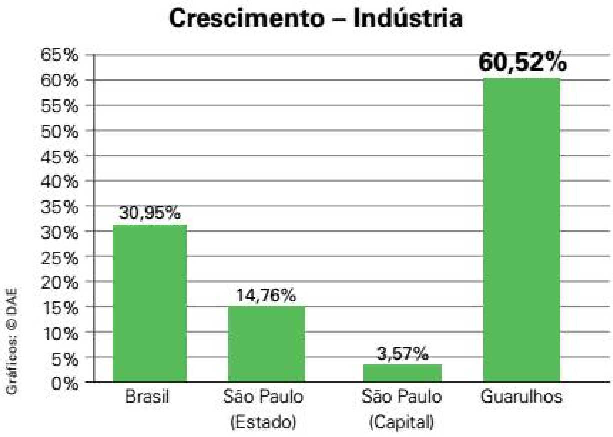
b) 30%

c) 45%

d) 55%

e) 65%

8. (Enem) A cidade de Guarulhos (SP) tem o oitavo PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

a) 75,28

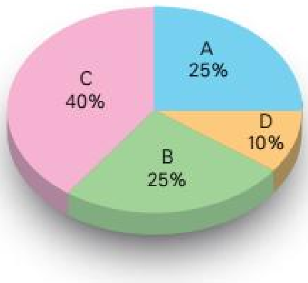
b) 64,09

c) 56,95

d) 45,76

e) 30,07

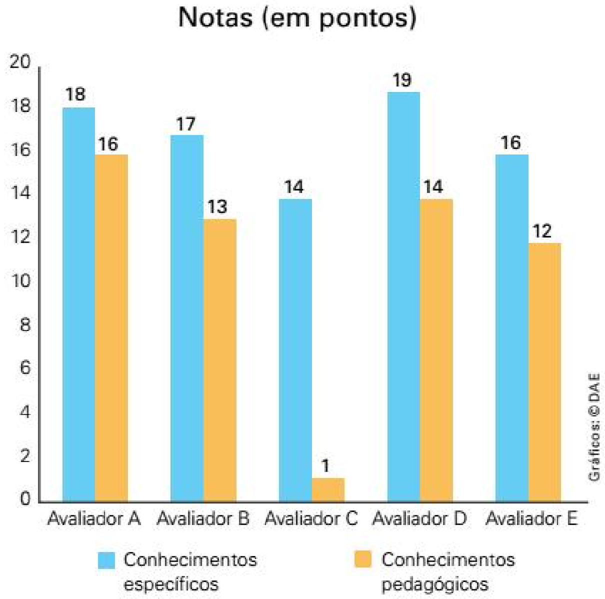
9. (Enem) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram A = R$200,00; B = R$300,00; C = R$400,00 e D = R$600,00. No gráfico, as áreas representam a quantidade de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é

a) 300,00.
b) 345,00.
c) 350,00.
d) 375,00.
e) 400,00.

10. (Enem) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

a) 0,25 ponto maior.
b) 1,00 ponto maior.
c) 1,00 ponto menor.
d) 1,25 ponto maior.
e) 2,00 pontos menor.

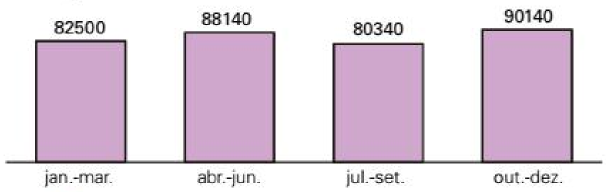
Texto para a questão 11:

Num restaurante localizado numa cidade do Nordeste brasileiro são servidos diversos tipos de sobremesas, dentre as quais sorvetes. O dono do restaurante registrou numa tabela as temperaturas médias mensais na cidade para o horário do jantar e a média diária de bolas de sorvete servidas como sobremesa no período noturno.

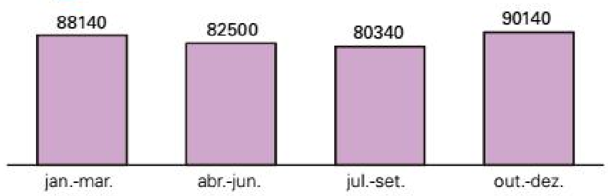
Mês	Temperatura média mensal (graus Celsius)	Bolas de sorvete
jan.	29	980
fev.	30	1000
mar.	28	960
abr.	27	940
maio	25	900
jun.	24	880
jul.	23	860
ago.	24	880
set.	24	880
out.	28	960
nov.	30	1000
dez.	29	980

11. (Insper-SP) Para fazer seu planejamento de compras e estoque, o dono do restaurante precisa organizar os dados por trimestre do ano. O gráfico que melhor representa os totais trimestrais de bolas servidas é

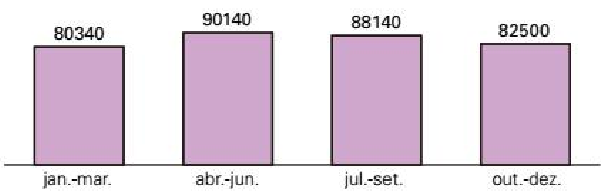
a)



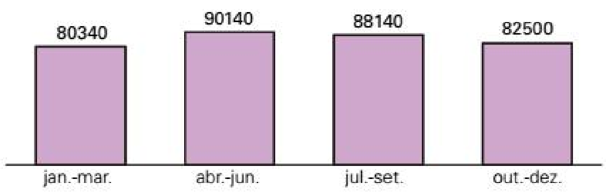
b)



c)



d)



e)

Figuras: © DAE

12. (Enem) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

Brasil – Comportamento do Emprego Formal no período de janeiro a outubro de 2010 – CAGED

Gráfico: © DAE

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

a) 212 952.

b) 229 913.

c) 240 621.

d) 255 496.

e) 298 041.

13. (Enem PPL) Em uma escola, cinco atletas disputam a medalha de ouro em uma competição de salto em distância. Segundo o regulamento dessa competição, a medalha de ouro será dada ao atleta mais regular em uma série de três saltos. Os resultados e as informações dos saltos desses cinco atletas estão no quadro.

Atleta	1º salto	2º salto	3º salto	Média	Mediana	Desvio-padrão
I	2,9	3,4	3,1	3,1	3,1	0,25
II	3,3	2,8	3,6	3,2	3,3	0,40
III	3,6	3,3	3,3	3,4	3,3	0,17
IV	2,3	3,3	3,4	3,0	3,3	0,60
V	3,7	3,5	2,2	3,1	3,5	0,81

A medalha de ouro foi conquistada pelo atleta número

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

14. (Enem PPL) Para as pessoas que não gostam de correr grandes riscos no mercado financeiro, a aplicação em caderneta de poupança é indicada, pois, conforme a tabela (período 2005 até 2011), a rentabilidade apresentou pequena variação.

Ano	Rentabilidade (%)
2005	7.0
2006	4,9
2007	6,4
2008	6,2
2009	7,2
2010	6,8
2011	7,0

Com base nos dados da tabela, a mediana dos percentuais de rentabilidade, no período observado, é igual a

a) 6,2

b) 6,5

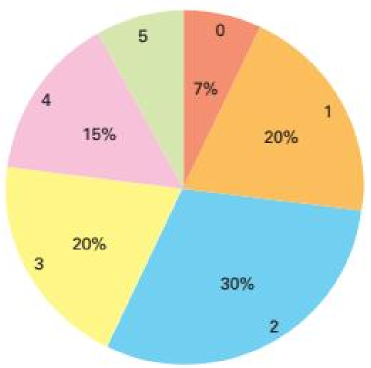
c) 6,6

d) 6,8

e) 7,0

15. (UFMG) Uma pesquisa em um segmento populacional registrou o número de filhos por mulher. Em uma comunidade, à época da pesquisa, foram consultadas 1 200 mulheres, revelando uma distribuição conforme mostra o gráfico da página seguinte.

Distribuição de filhos por mulher



Observe que o gráfico informa o número de filhos por mulher e a porcentagem correspondente de mulheres com esse número de filhos, exceto na faixa correspondente a 5 filhos.

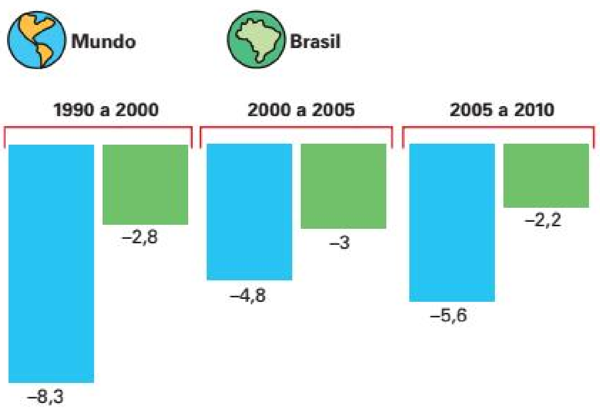
Com essas informações,

a) DETERMINE o número de mulheres entrevistadas com 5 filhos. 96

b) CALCULE a média de filhos por mulher. 2,4

c) CALCULE a probabilidade de uma mulher, escolhida ao acaso, ter 3 filhos ou mais. 43%

16. (UFRN 2013) O gráfico abaixo, publicado na revista *Veja* de 13 jun. 2012, a partir dos dados da Unep, revela uma desaceleração no ritmo de desmatamento das florestas.



Gráficos: © DAE

Com base nesse gráfico, é correto afirmar:

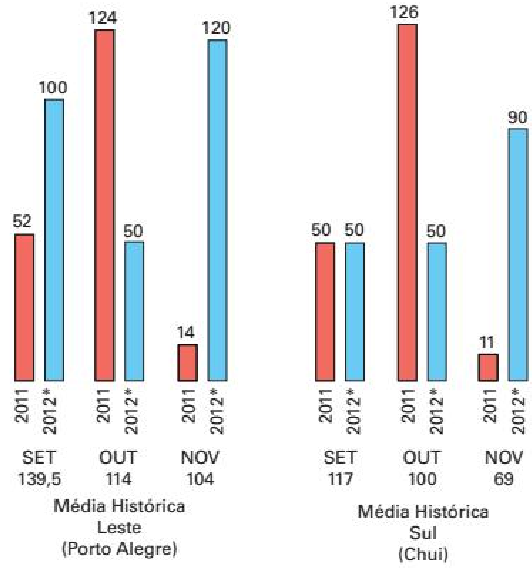
a) No Brasil, de 2000 a 2010, o ritmo do desmatamento caiu na ordem de 5,2 milhões de hectares por ano.

b) No Brasil, de 2000 a 2010, o ritmo do desmatamento caiu na ordem de 2,6 milhões de hectares por ano.

c) Durante o período apresentado no gráfico, a desaceleração do ritmo do desmatamento no mundo foi três vezes maior que a desaceleração no Brasil.

d) Na década de noventa, a desaceleração do ritmo do desmatamento das florestas no mundo foi aproximadamente quatro vezes maior que a desaceleração no Brasil.

17. (UFRGS-RS) O gráfico e os dados a seguir mostram a precipitação de chuva que ocorreu nos meses de setembro, outubro e novembro no ano de 2011 e a previsão para os mesmos meses em 2012. Também apresentam a média histórica dessa precipitação para as regiões leste e sul do estado do Rio Grande do Sul.



Com base nesses dados, é correto afirmar que

a) a previsão de chuvas para o mês de novembro de 2012, na região leste, é exatamente 25% superior à média histórica da região.

b) a quantidade de chuvas, na região sul, foi igual à média histórica da região, no mês de setembro dos anos de 2011 e 2012.

c) a previsão de chuvas para a região leste, no mês de outubro de 2012, é 60% da quantidade de chuvas, na mesma região, no mesmo mês de 2011.

d) a quantidade de chuvas, na região sul, em outubro de 2011, superou a média histórica dessa região em 26%.

e) a quantidade de chuvas prevista para o mês de novembro de 2012, na região leste, supera exatamente em 150% a quantidade de chuvas da região, no mesmo mês, em 2011.

DESAFIO

(FGV) Ao conjunto {5, 6, 10, 11} inclui-se um número natural n, diferente dos quatro números que compõem esse conjunto. Se a média aritmética dos cinco elementos do novo conjunto é igual a sua mediana, então, a soma de todos os possíveis valores de *n* é igual a

a) 20.
b) 22.
c) 23.
d) 24.
e) 26.

EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Provavelmente a Estatística é o setor da Matemática mais utilizado em outras áreas do conhecimento. Isso porque ela não busca resultados exatos acerca de questões lógicas, mas, sim, o tratamento matemático acerca de questões humanas, analisando riscos e intervalos de confiabilidade, sem garantir respostas exatas, oferecendo, contudo, estudos sobre as diferentes maneiras como uma determinada variável pode comportar-se.

Esse fator humano e inexato da Estatística torna-a apta para dialogar com várias áreas do conhecimento com linguagem comum, como podemos ver no exemplo a seguir.

Estatística na Geografia

Uma nova projeção para a população brasileira, divulgada nesta quinta-feira pelo IBGE, mostra que o país vai atingir o seu ápice populacional em 2042, quando terá 228,4 milhões de habitantes. A partir daí, a população começa a decrescer [...]. O principal motivo para a redução no nível de crescimento populacional no Brasil, já esperada, é a queda na taxa de fecundidade, ou seja, o fato de que as mulheres estão tendo cada vez menos filhos. Este ano, o número médio de filhos por mulher é de 1,77 – o que já faz com que o país esteja abaixo da chamada taxa de reposição da população (que é de 2,1 filhos por mulher). Em 2020, estima-se que seja de 1,61. Em 2030, vai chegar a 1,5. [...] Além da queda da fecundidade, ocorre no país atualmente um processo de "envelhecimento da fecundidade", já que está havendo um adiamento da idade média em que a brasileira está sendo mãe: este ano, essa idade média é 26,9 anos; vai passar a 28 anos em 2020, e a 29,3 em 2030.

IBGE projeta que Brasil vai parar de crescer em 2042. O globo. Disponível em: <http://oglobo.globo.com/brasil/ibge-projeta-que-brasil-vai-parar-de-crescer-em-2042-9735933#ixzz3zA6VNqJf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

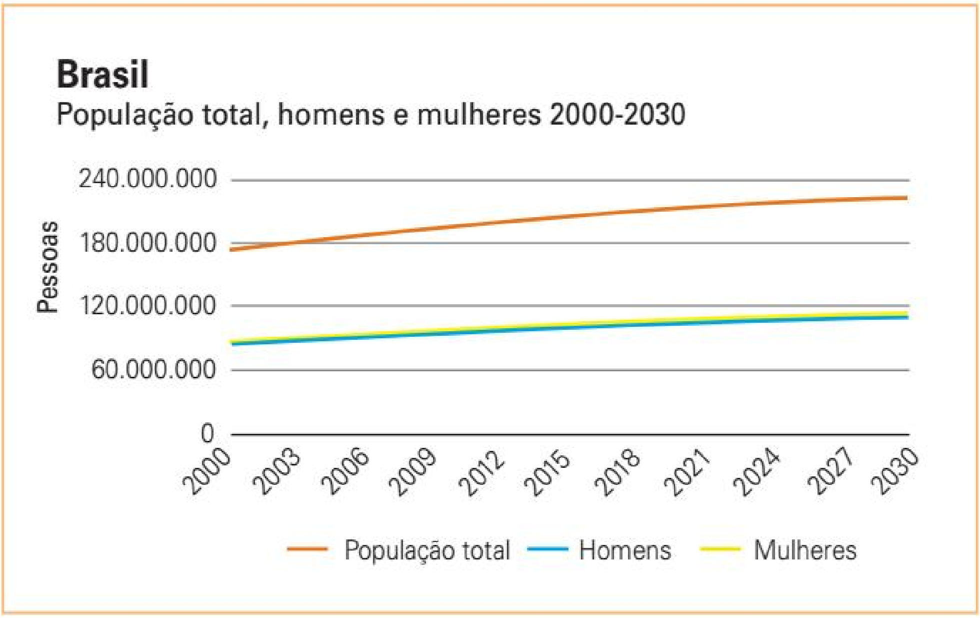


Gráfico: © DAE

Fonte: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 24 maio 2016.

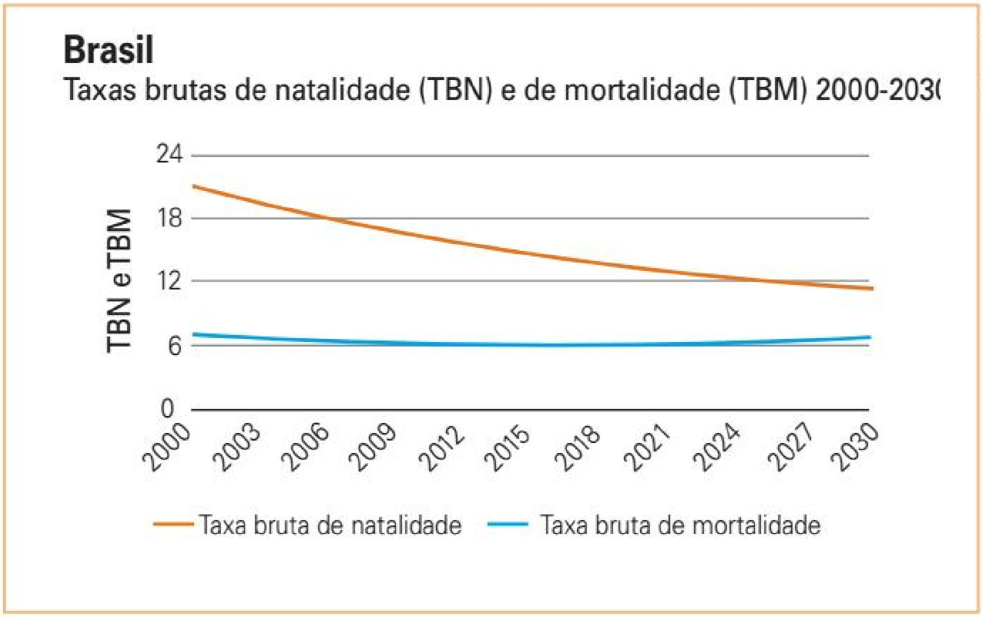


Gráfico: © DAE

Fonte: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 24 maio 2016.

Considere a tabela abaixo com a frequência de mulheres com idade entre 20 e 40 anos que possuem 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 filhos em uma determinada amostra.

Nº de filhos	Frequência absoluta
0	157
1	298
2	219
3	195
4	84
5	47

Questões e investigações

Resolva os exercícios no caderno.

Com base nesses dados, responda às questões a seguir.

1. Complete a tabela com as frequências relativas e acumuladas, arredondando o resultado para uma casa decimal e cuidando para que o total fique em 100%.

2. Qual é o valor mediano de filhos por mulher? E o valor modal?

3. Qual é a média de filhos por mulher nessa amostra? Essa média está quantos por cento abaixo da taxa de reposição?

4. Escolhendo aleatoriamente uma mulher desse grupo, qual a probabilidade de que ela tenha uma quantidade de filhos superior à quantidade tida como taxa de reposição?

5. Suponha que essa pesquisa tenha sido feita com diferentes amostras em 10 regiões do país no mesmo ano em que saiu a reportagem acima. Nessa pesquisa, as médias de filho por mulher foram 1,5; 1,67; 1,67; 1,7; 1,81; 1,9; 2,1; 2,2; 2,2 e a média que você calculou no exercício 3. Qual a amplitude dessas médias e o desvio-padrão em relação à média brasileira citada no texto?

UNIDADE 2

GEOMETRIA ANALÍTICA

Podemos localizar um ponto na superfície da terra por meio de duas coordenadas geográficas: latitude e longitude.

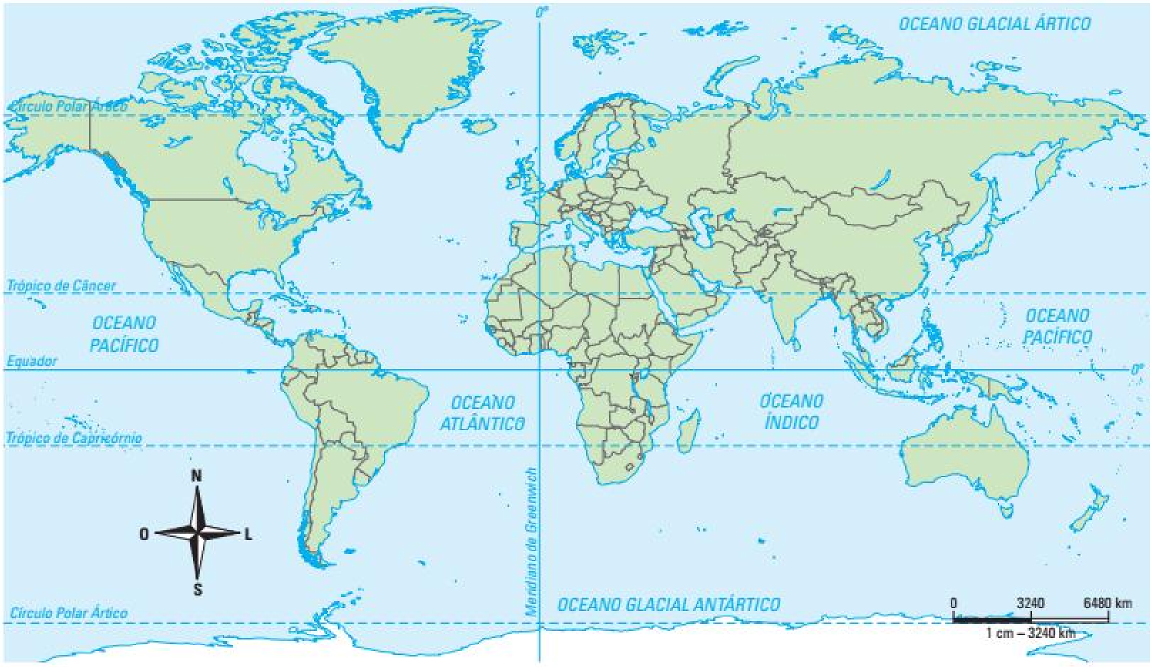
No plano cartesiano associamos cada ponto a um par ordenado. Assim, nesta unidade estudaremos ponto, reta e circunferência no plano cartesiano. É a geometria das coordenadas.

A nossa posição sobre a Terra baseia-se na latitude e longitude. Na imagem a representação gráfica dessas linhas.

Zlatko Guzmic/iStockphoto.com

CAPÍTULO 4 COORDENADAS CARTESIANAS

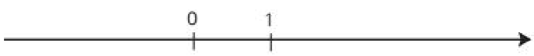
© DAE/All Maps

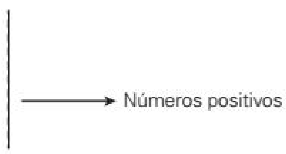


Fonte: IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. Rio de Janeiro, 2012. p. 94.

Utilizamos as coordenadas geográficas para localizar pontos na superfície terrestre. Quando queremos localizar uma residência, utilizamos o endereço. Assim, se for uma casa, por exemplo, necessitamos do nome da rua e, também, do número dessa casa na rua.

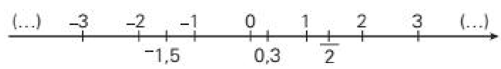
Já vimos que podemos associar qualquer número real a um ponto em uma reta (a reta dos números reais). Como fazemos isso? Marcamos, na reta, um ponto qualquer e a ele associamos o número 0 (zero). Escolhemos, então, outro ponto dessa reta à direita do zero e associamos a ele o número 1.





Assim, o ponto representado pelo zero é a origem, e a distância entre a origem e o ponto correspondente ao número 1 é a unidade de comprimento. Pontos à direita da origem representarão números positivos e pontos à esquerda, números negativos. A reta em que fixamos a origem e estabelecemos a unidade e o sentido é denominada reta numérica ou, simplesmente, eixo.

Observe, agora, outros pontos que indicam números reais na reta:



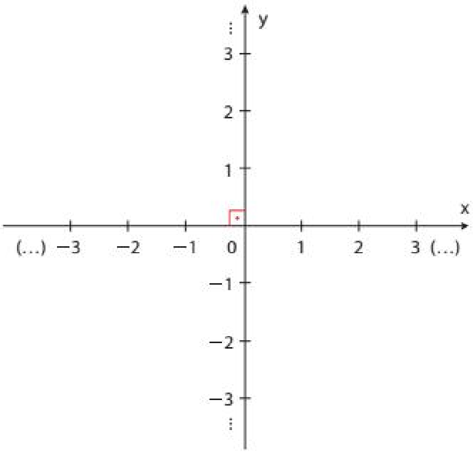
Como fizemos anteriormente, dizemos que a cada ponto da reta é associado um número real, que pode ser chamado de **abscissa** do ponto. Note que esse número é a distância entre a origem e o ponto, acrescido de um sinal: positivo se estiver à direita da origem, ou negativo se estiver à esquerda.

Neste capítulo estudaremos as coordenadas cartesianas num plano.

O plano cartesiano

Ampliando a ideia de associação de qualquer número real a um ponto na reta dos números reais, também podemos localizar um ponto em um plano. No entanto não será suficiente informar se esse ponto está à direita ou à esquerda da origem; precisaremos de mais informações.

Para localizar pontos em um plano qualquer, traçamos duas retas perpendiculares (dois eixos), de tal forma que as origens coincidam, isto é:

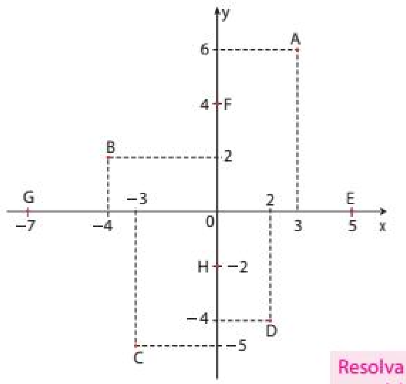


Os dois eixos, geralmente, são posicionados horizontalmente (**eixo das abscissas** ou eixo *x*) e verticalmente (**eixo das ordenadas** ou eixo *y*). Esses dois eixos são orientados; dessa forma qualquer ponto localizado à direita da origem terá abscissa positiva, e qualquer ponto à esquerda terá abscissa negativa. Já os pontos acima da origem (na vertical) terão ordenadas positivas e qualquer ponto abaixo, ordenadas negativas. O plano, assim dividido, será denominado **plano cartesiano**.

A qualquer ponto do plano associamos um par **ordenado** (coordenadas do ponto) e, reciprocamente, a qualquer par ordenado associamos um ponto do plano. Para um ponto P qualquer do plano, utilizamos a notação **P(*a*; *b*)**, em que o primeiro número do par ordenado é a **abscissa** e o segundo é a **ordenada**.

Exemplo:

Observe os pontos A, B, C, D, E, F, G e H localizados no plano cartesiano a seguir:



Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

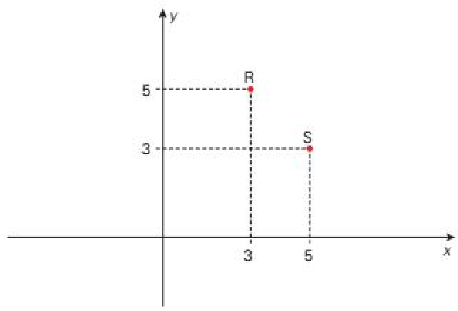
Respostas no Manual do Professor.

Observando o plano cartesiano exemplificado, responda às questões abaixo:

1. Quais dos pontos representados no plano cartesiano pertencem ao eixo das abscissas? Quais suas coordenadas?
2. O ponto F e o ponto H estão sobre o eixo das ordenadas. Sobre suas coordenadas, o que possuem em comum?
3. Considerando os pontos A, B ou D, qual deles possui abscissa maior? E ordenada menor?

Como foi dito, as coordenadas de um ponto qualquer são representadas por um par ordenado.

Isso significa que a ordem relativa de *a* e *b* é importante. Observe no plano cartesiano a seguir, a localização dos pontos R(3; 5) e S(5; 3).



Gráficos: © DAE

Observações:

Figura: © DAE

1. No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (ângulo reto entre os eixos), o plano é dividido, pelos dois eixos coordenados, em quatro regiões, denominadas quadrantes. A identificação desses quadrantes pode ser observada na figura acima. Note que os sinais das coordenadas dos pontos, conforme os quadrantes, estão indicados na figura. Se, portanto, for considerado um ponto genérico P(a; b), teremos, em símbolos:

- $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow$ P é um ponto do primeiro quadrante.
- $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow$ P é um ponto do segundo quadrante.
- $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow$ P é um ponto do terceiro quadrante.
- $a > 0$ e $b < 0 \Rightarrow$ P é um ponto do quarto quadrante.

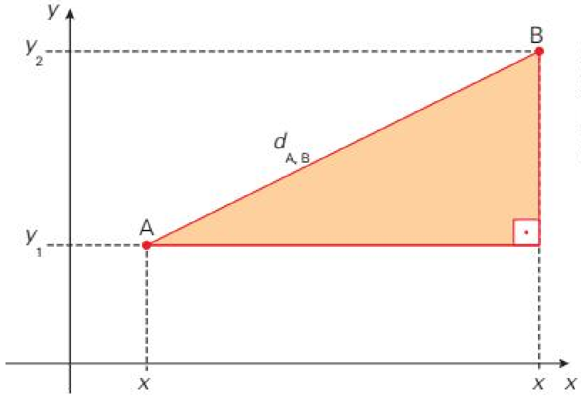
2. Qualquer ponto que pertença ao eixo das abscissas terá ordenada zero. Sendo assim, se a é um número real, qualquer ponto P(a; 0) pertence ao eixo das abscissas.

3. Qualquer ponto que pertença ao eixo das ordenadas terá abscissa zero. Sendo assim, se b é um número real, qualquer ponto P(0; b) pertence ao eixo das ordenadas.

Distância entre dois pontos

Vimos que podemos associar, a cada ponto de um plano cartesiano, um par ordenado de números reais utilizados para localizar o ponto no plano: são as coordenadas do ponto. Agora veremos que, conhecidas as coordenadas de dois pontos quaisquer no plano cartesiano, poderá ser obtida a distância entre eles.

A seguir, localizamos dois pontos A(x_1; y_1) e B(x_2; y_2) no plano cartesiano.



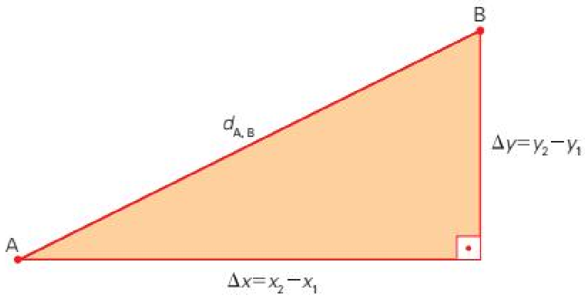
Gráficos: © DAE

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, podemos calcular a distância $d_{A,B}$ (distância do ponto A ao ponto B), isto é,

$$d_{A,B}{}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Destacando apenas o triângulo retângulo representado no plano cartesiano acima e considerando que Δx e Δy representam a diferença das abscissas e a diferença das ordenadas (variação das abscissas e variação das ordenadas dos dois pontos), respectivamente, também poderíamos escrever:



$$d^2_{A,B} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$d_{A,B} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

A distância entre dois pontos A e B quaisquer do plano cartesiano, tais que A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2), é dada por:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x^2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

A distância entre os pontos A e B, conforme a fórmula apresentada anteriormente, seria a mesma se mudássemos a ordem das abscissas e a ordem das ordenadas, isto é:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Resposta no Manual do Professor.

Exemplos:

1. Sabemos que o ponto A(m; 2) é equidistante aos pontos P(1; 3) e Q(4; 2). Vamos determinar o valor real de m.

- Se o ponto A está na mesma distância dos pontos P e Q (equidistante), então, temos

$$d_{A,P} = d_{A,Q}$$

$$\sqrt{(1-m)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(4-m)^2 + (2-2)^2}$$

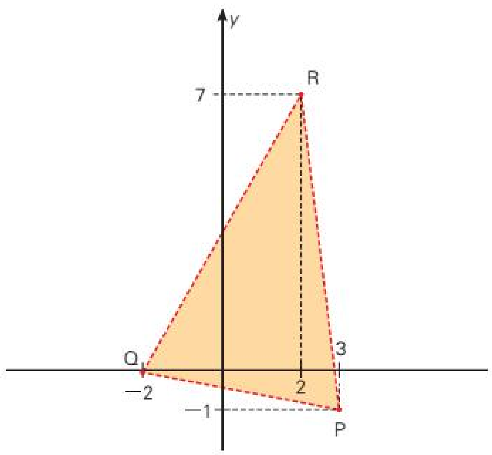
$$(1-m)^2 + (3-2)^2 = (4-m)^2 + (2-2)^2$$

$$1 - 2m + m^2 + 1 = 16 - 8m + m^2 + 0$$

$$6m = 14 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$$

2. Vamos calcular o perímetro do triângulo, cujos vértices no plano cartesiano são os pontos P(3, –1), Q(–2, 0) e R(2, 7).

- Para começar, podemos localizar os pontos no plano cartesiano, conforme figura a seguir:



- Para obter a medida de cada lado desse triângulo, calculamos a distância entre os vértices, isto é,

$$d_{P,Q} = \sqrt{(-2-3)^2 + (0+1)^2} \Rightarrow d_{P,Q} = \sqrt{26}$$

$$d_{P,R} = \sqrt{(2-3)^2 + (7+1)^2} \Rightarrow d_{P,R} = \sqrt{65}$$

$$d_{Q,R} = \sqrt{(2+2)^2 + (7-0)^2} \Rightarrow d_{Q,R} = \sqrt{65}$$

- Representamos o perímetro com $2p$. Como o perímetro do triângulo é a medida de seu contorno, temos

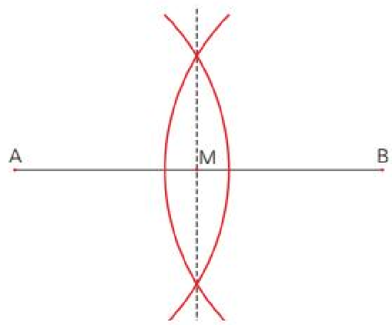
$$2p = \sqrt{26} + \sqrt{65} + \sqrt{65}$$

$$2p = \sqrt{26} + 2\sqrt{65}$$

Note que, neste caso, como dois dos lados do triângulo têm a mesma medida, dizemos que o triângulo é isósceles.

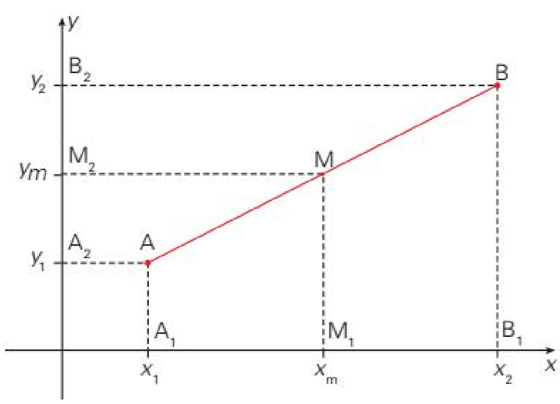
Coordenadas do ponto médio de um segmento

Como determinar, em Geometria, o ponto médio **M** de um segmento AB qualquer desenhado, por exemplo, numa folha de papel? A resolução é simples. Com o auxílio de régua e compasso, é possível determinar tal ponto, como sugerimos na figura a seguir.



No plano cartesiano, como poderemos obter as coordenadas do ponto médio **M** de um segmento AB se forem conhecidas as coordenadas de seus extremos?

Considere que os pontos extremos desse segmento tenham as coordenadas A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2). Além disso, as coordenadas do ponto médio são representadas por M(x_M; y_M), conforme mostrado a seguir:



Figuras: © DAE

- Conforme o teorema de Tales, temos:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{A_1M_1}{M_1B_1}$$

$$1=\frac{x_M-x_1}{x_2-x_M}$$

$$x_2-x_M=x_M-x_1 \Rightarrow x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{A_2M_2}{M_2B_2}$$

$$1=\frac{y_M-y_1}{y_2-y_M}$$

$$y_2-y_M=y_M-y_1 \Rightarrow y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

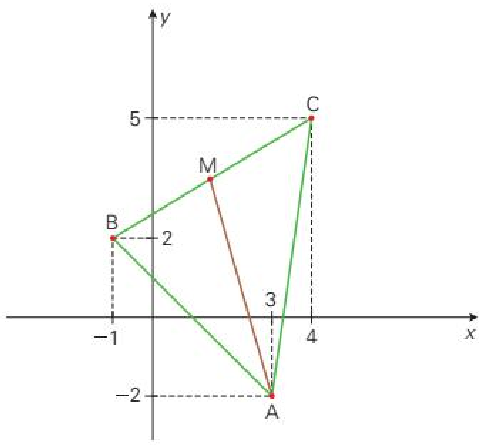
Portanto, chegamos a:

Dado um segmento no plano cartesiano com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ são tais que:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Exemplo:

Sabemos que os vértices de um triângulo ABC no plano cartesiano são representados pelos pontos A(3; −2), B(−1; 2) e C(4; 5). A mediana $\overline{AM}$ é o segmento que liga o vértice A ao ponto médio do lado BC, oposto ao vértice A. Vamos calcular o comprimento dessa mediana.



Figuras: © DAE

- Cálculo da abscissa do ponto M:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$x_M=\frac{-1+4}{2} \Rightarrow x_M=\frac{3}{2}$$

- Cálculo da ordenada do ponto M:

$$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

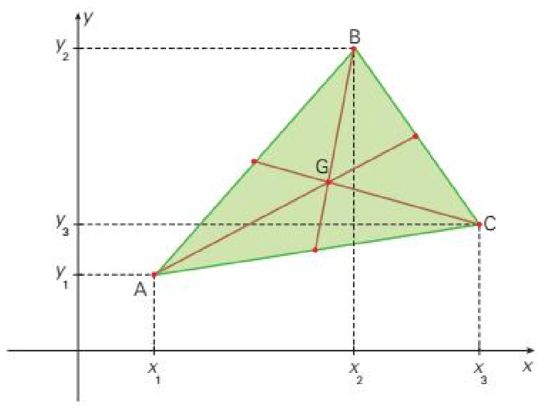
$$y_M=\frac{2+5}{2} \Rightarrow y_M=\frac{7}{2}$$

- Como conhecemos as coordenadas dos pontos A e M, o comprimento da mediana será a distância entre esses dois pontos:

$$d_{A,M}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+\left(\frac{7}{2}+2\right)^2}$$

$$d_{A,M}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{121}{4}} \Rightarrow d_{A,M}=\frac{\sqrt{130}}{2}$$

OBSERVAÇÃO:
Um triângulo possui três medianas, que se encontram em um ponto chamado **baricentro**. No plano cartesiano demonstra-se que a abscissa do baricentro é a média aritmética das abscissas dos vértices do triângulo e a ordenada, a média aritmética das ordenadas de seus vértices.



Sendo G o ponto correspondente ao baricentro do triângulo, temos, conforme as coordenadas dos pontos A, B e C indicadas na figura:

$$x_G=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}$$

e

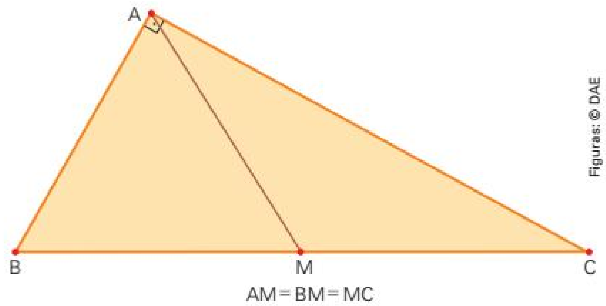
$$y_G=\frac{y_1+y_2+y_3}{2}$$

Demonstrações analíticas

Por meio da Geometria Analítica, podemos demonstrar propriedades da Geometria Plana. Essa demonstração de propriedades constitui o que é denominada demonstração analítica.

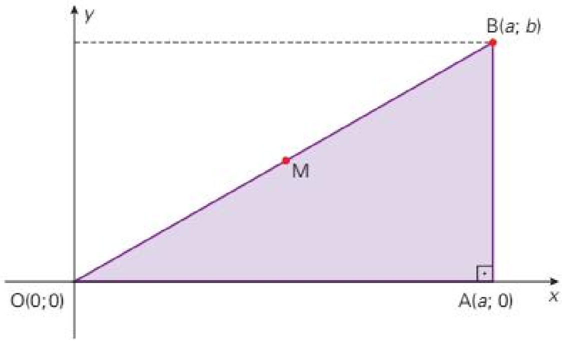
Exemplo:

Conforme propriedade da Geometria Plana, o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo está situado na mesma distância dos três vértices do triângulo, conforme sugere a figura a seguir.



Figuras: © DAE

Vamos chegar a esse resultado pela geometria analítica. Para isso, representamos, no plano cartesiano, os pontos O(0; 0), A(a; 0) e B(a; b), vértices de um triângulo retângulo em A. O ponto médio da hipotenusa é **M**, tal que:



$$x_M = \frac{x_B + x_0}{2} = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_0}{2} = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2}$$

- Calculamos as distâncias do ponto M aos vértices desse triângulo:

$$d_{O,M} = \sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{b}{2}\right)^2} \Rightarrow d_{O,M} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

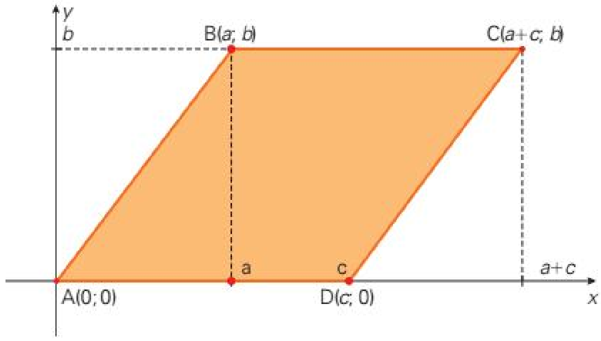
$$d_{A,M} = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{b}{2}\right)^2} \Rightarrow d_{A,M} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$d_{B,M} = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{b}{2}\right)^2} \Rightarrow d_{B,M} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Portanto, como as três distâncias são iguais, analiticamente verificamos a veracidade da propriedade geométrica.

Exemplo:

Vamos provar analiticamente que, em todo paralelogramo, as diagonais intersectam-se no meio (nos pontos médios). Para tanto, consideremos, no plano cartesiano, o paralelogramo com vértices A(0, 0), B(a, b), C($a + c$, b) e D(c, 0). Notemos, na figura abaixo, que os lados AB e DC são paralelos, como também os lados BC e AD.



- Temos de mostrar que o ponto médio **M** da diagonal AC tem as mesmas coordenadas do ponto médio **N** da diagonal BD.

Ponto médio da diagonal AC:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+a+c}{2} \Rightarrow x_M = \frac{a+c}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+b}{2} \Rightarrow y_M = \frac{b}{2}$$

Logo: $M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Ponto médio da diagonal BD:

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{a+c}{2} \Rightarrow x_N = \frac{a+c}{2}$$

$$y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{b+0}{2} \Rightarrow y_N = \frac{b}{2}$$

Logo: $N\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Como as coordenadas dos pontos médios **M** e **N** são iguais, as duas diagonais intersectam-se no meio.

Exercícios resolvidos

1. As coordenadas de um ponto no sistema de coordenadas cartesianas são dadas por $(m + n; 2m - n)$ e por $(2m + 3; 9 - 2n)$.

a) Calcule os valores de m e n.

b) Determine as coordenadas desse ponto.

a) $\begin{cases} m+n = 2m+3 \\ 2m-n = 9-2n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m+n = 3 \\ 2m+n = 9 \end{cases} \therefore\ m = 2 \text{ e } n = 5$

b) $(m+n; 2m-n) \rightarrow (2+5; 2 \cdot 2 - 5) \rightarrow (7; -1)$

Assim, as coordenadas do ponto são $(7; -1)$.

2. Dados os pontos A(2; 3) e B(6; 6) do plano cartesiano, determine:

a) a distância entre eles;

b) as coordenadas do ponto médio do segmento AB.

a) $d_{A,B} = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} =$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ u. c.

b) Seja M o ponto médio do segmento AB. Assim,

$$\left(\frac{2+6}{2}; \frac{3+6}{2}\right) = \left(4; \frac{9}{2}\right)$$

3. Os vértices de um triângulo são os pontos M(2; 7), N(6; 3) e a origem do sistema cartesiano.

a) Quais são as coordenadas do ponto médio do segmento MN?

b) Qual é a medida da mediana relativa ao lado MN?

a) $\left(\frac{2+6}{2}; \frac{7+3}{2}\right) = (4; 5)$

b) O comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado MN é $\sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{41}$ u. c.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Localize os pontos A(1; 4), B(−3; −2), C(4; −3), D(−2; 5), E(7; 0) e F(0; − 4) em um plano cartesiano. Em seguida, analise as afirmações abaixo e indique, em seu caderno, V ou F, conforme sejam verdadeiras ou falsas.

I. O ponto C pertence ao segundo quadrante. F

II. O ponto B pertence ao terceiro quadrante. V

III. O segmento AD contém algum ponto pertencente ao eixo das ordenadas. V

IV. Os pontos E e F pertencem, respectivamente, aos eixos das abscissas e das ordenadas. V

V. A área do triângulo formado pelo segmento EF e pelos eixos coordenados é 14 unidades de área. V

2. Determine os valores de x de modo que o ponto $P(x^2 - 5x + 6; 5 - x)$ pertença ao eixo das ordenadas. Em seguida, para cada um dos valores encontrados para x, determine as coordenadas do ponto. Para $x = 2 \Rightarrow P(0; 3)$
Para $x = 3 \Rightarrow P(0; 2)$

3. Dois números reais a e b são tais que $a > 0$ e $b < 0$. Determine o quadrante a que pertence cada um dos pontos a seguir:

a) $A(a; b)$;

b) $A(-a; b)$;

c) $A(a; -b)$;

d) $A(-a; -b)$.

Respostas no Manual do Professor.

4. As coordenadas de um ponto P são $(k^2 - 6k + 5; 3k - 9)$. Para quais valores de k o ponto P pertence ao:

a) primeiro quadrante?

b) segundo quadrante?

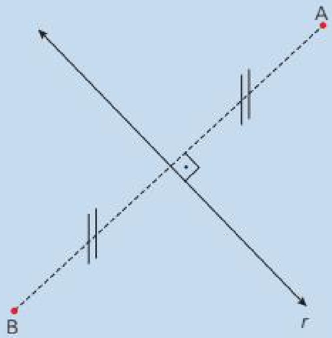
c) terceiro quadrante?

d) quarto quadrante?

e) eixo das abscissas?

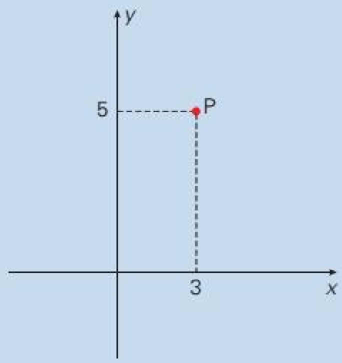
f) eixo das ordenadas?

5. Na figura, os pontos A e B são simétricos em relação à reta r.



Gráficos: © DAE

No plano cartesiano a seguir, as coordenadas do ponto P são (3; 5).



a) Quais são as coordenadas do ponto Q, simétrico a P no eixo das abscissas? Q(3; –5)

b) Quais são as coordenadas do ponto M, simétrico a P no eixo das ordenadas? M(–3; 5)

c) Quais são as coordenadas do ponto R, simétrico a Q no eixo das ordenadas? R(–3; –5)

d) Quais são as coordenadas do ponto S, simétrico a M no eixo das abscissas? S(–3; –5)

6. Um ponto P pertence ao eixo das abscissas e é equidistante aos pontos A(–2; 2) e B(2; 6).

a) Qual é a ordenada do ponto P? A ordenada do ponto P é zero.

b) Quais são as coordenadas do ponto P? P(4; 0)

7. Qual é o valor de m para M(–3; 1) ser o ponto médio do segmento com extremidades A(1; m) e B(–7; –2)? $m = 4$

8. Os pontos A(0; 0), B(1; 5) e C(5; 1) são vértices de um triângulo. Quais as coordenadas do:

a) ponto médio do segmento BC? (3; 3)

b) baricentro do triângulo ABC? (2; 2)

9. Quais são as coordenadas do ponto simétrico a A(–1; 3) em relação a B(3; 1)? (7; –1)

10. Os vértices de um triângulo são os pontos A(3; 5), B(2; 3) e C(–4; 6).

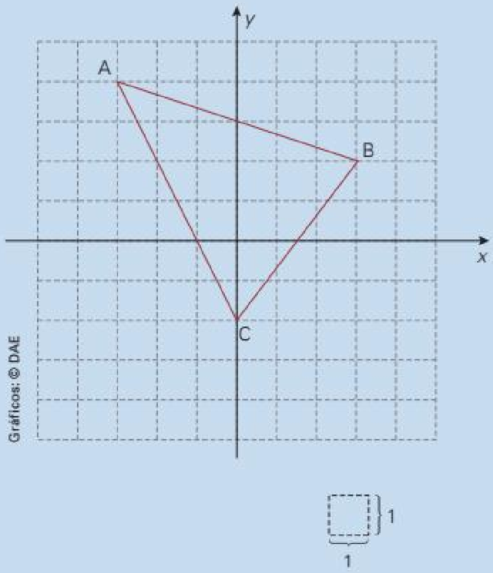
a) Calcule a medida dos segmentos AB, AC e BC.

b) Calcule o perímetro do triângulo ABC.

c) Mostre que o triângulo ABC é retângulo no vértice B.

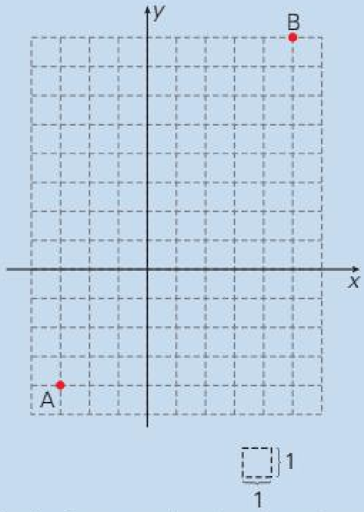
Respostas no Manual do Professor.

11. Na figura, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.



Calcule o perímetro do triângulo ABC e informe se ele é escaleno, isósceles ou equilátero. O triângulo é escaleno.

12. Na figura, estão representados os pontos A e B.



a) Quais são as coordenadas do ponto médio do segmento AB? (1; 2)

b) Quais são as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em quatro segmentos congruentes? (–1; –1), (1; 2) e (3; 5)

13. Dados os pontos A(–1; 1), B(2; 5) e C(x; 2), determine:

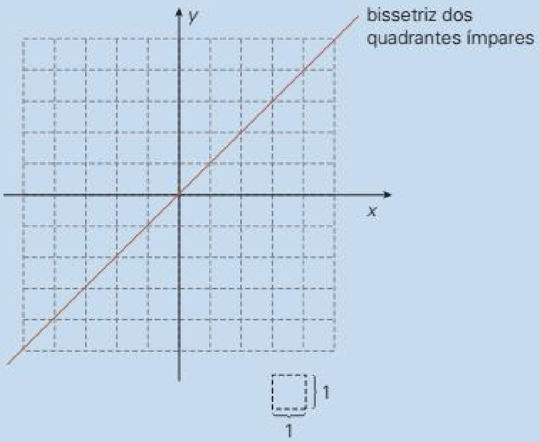
a) a distância entre os pontos A e B; $d_{A,B} = 5$ u. c.

b) a distância, em função de x, entre os pontos A e C; $d_{A,B} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ u. c.

c) a distância, em função de x, entre os pontos B e C; $d_{B,C} = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$ u. c.

d) o valor de x para o triângulo ABC ser retângulo em B. $x = 6$

14. A região dos pontos do plano, cuja abscissa e ordenada são iguais, é uma reta denominada bissetriz dos quadrantes ímpares.



a) Qual é a abscissa de um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares e tem ordenada 5? 5.

b) Quais são as coordenadas de um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares tal que a soma da abscissa e da ordenada é 7? $\frac{7}{2}; \frac{7}{2}$

c) Quais são as coordenadas de um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares equidistante aos pontos (1; 2) e (–2; 3)? (2; –2)

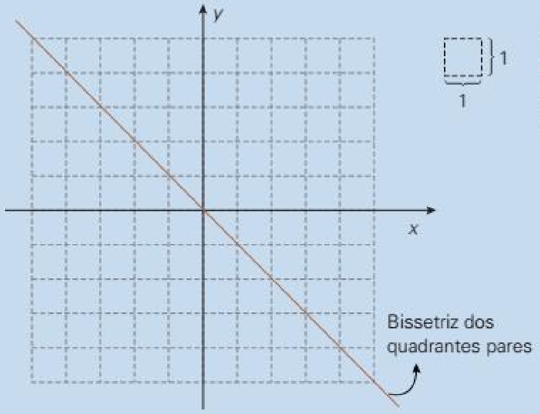
15. A região dos pontos do plano cuja abscissa e ordenada são opostas é uma reta denominada bissetriz dos quadrantes pares.

a) Qual é a ordenada de um ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes pares e tem abscissa 3? -3.

b) Qual é a soma das coordenadas de um ponto qualquer pertencente à bissetriz dos quadrantes pares? zero

c) Quais são as coordenadas de um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes pares equidistante aos pontos (1; 4) e (−4; −3)?

(2; −2)



TEXTOS DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

O texto a seguir fornece informações sobre René Descartes, personagem importante não apenas para a Matemática como também para a Filosofia. Autor do livro *Discurso sobre o método de bem conduzir a razão na busca da verdade nas ciências*, Descartes queria, com seu "método", a unificação das ciências. Segundo ele, o "método" deveria ser empregado sempre que ocorresse a busca do conhecimento em qualquer ramo da ciência. Basicamente sua ideia era pautada em: a) aceitar somente aquilo que esteja claro em nossa mente, excluindo quaisquer dúvidas; b) dividir os grandes problemas em problemas menores; c) argumentar partindo do simples para o mais complexo; d) verificar o resultado final.

Leia o texto e conheça um pouco sobre este filósofo, físico e matemático francês, Descartes.

No dia 31 de março de 1596, uma nobre francesa doente com uma tosse seca, talvez indicando tuberculose, deu à luz seu terceiro filho. Era um bebê fraco, doentio. Alguns dias mais tarde, a mãe morreu. Os doutores predisseram que o bebê morreria em seguida. Deve ter sido uma ocasião horrível para o pai do bebê, mas ele não desistiu. Nos oito anos seguintes, ele manteve a criança em casa, a maior parte do tempo na cama, assistido por uma enfermeira e sob o próprio cuidado amoroso. A criança viveria por 53 anos antes que a fraqueza de seus pulmões finalmente a derrotasse. Desse modo, foi salvo para o mundo um dos maiores filósofos e arquitetos da revolução seguinte em Matemática, René Descartes.

Quando Descartes tinha 8 anos de idade (alguns historiadores dizem 10), seu pai o mandou para La Flèche, uma escola jesuíta nova, mas que em breve se tornaria famosa. O diretor da escola permitiu que o jovem Descartes ficasse na cama até mais tarde todas as manhãs, quando ele se sentisse pronto para se juntar aos demais. Não é um mau hábito, se você puder mantê-lo, e isso Descartes fez, até os últimos meses de sua vida. Descartes se saiu bem na escola, mas após ter concluído os estudos, oito anos depois, ele já exibia o ceticismo pelo qual sua filosofia se tornaria famosa: ele estava convencido de que tudo o que aprendera na escola La Flèche era inútil ou estava equivocado. Apesar dessa conclusão, seguindo a vontade de seu pai,

Coleção Particular/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

René Descartes (1596-1650)

ele passou os dois anos seguintes envolvido em mais um aprendizado inútil, que dessa vez o conduziu a um diploma de Direito.

Finalmente, Descartes abandonou o estudo das letras e mudou-se para Paris. Lá, passou as noites vagueando pelo circuito social. De dia, ele ficava na cama estudando Matemática (começando a estudar, é claro, à tarde). Ele adorava fazer isso, que lhe deu lucro algumas vezes, pois aplicou sua matemática nas mesas de jogo. Após um curto espaço de tempo, no entanto, Paris ficou tediosa e desinteressante para ele.

O que um jovem rapaz de meios independentes, nos dias de Descartes, fazia a fim de viajar e achar aventura? Ele se alistou no exército, ou melhor, no exército do príncipe de Nassau. Era realmente um exército de voluntários: Descartes não era pago por seu serviço, e o príncipe Maurício de Nassau recebeu o que pagou.

Não somente Descartes nunca viu uma batalha, mas no ano seguinte ele se juntou às forças oponentes do duque da Bavária. Isso pode parecer muito estranho – primeiro, não ter lutado de um lado, depois lutar pelo outro. Mas, naquele tempo, a guerra da França e da Holanda com a monarquia hispano-austríaca estava em uma pausa. Descartes tinha se alistado no exército para viajar, não por razões políticas.

Ele apreciou seus dias no exército, encontrando pessoas de diferentes países e também encontrando a solidão que desejava ardentemente a fim de estudar Matemática e Ciência, além de ponderar sobre a natureza do Universo. Suas viagens renderam frutos quase imediatamente.

Um dia, em 1618, o soldado Descartes se encontrava na pequena cidade de Breda, Holanda, quando viu uma multidão em torno de um anúncio na rua. Ele vagueou pelo meio da multidão e pediu a um espectador idoso que lhe traduzisse o anúncio para o francês. Há muitas coisas que um anúncio pode ser hoje – uma propaganda, um sinal proibindo estacionar, um anúncio de procurado pela polícia. No entanto, era realmente um tipo de anúncio que não encontraremos hoje em dia nas ruas: um desafio matemático ao público.

Descartes considerou o problema e comentou imediatamente que o considerava bastante fácil. Seu tradutor, talvez aborrecido, talvez se divertindo, disse que o estranho estava blefando e desafiou-o a resolvê-lo. Foi o que Descartes fez. O velho, um homem chamado Issac Beeckman, ficou impressionado – o que não era uma proeza fácil, pois esse transeunte era um dos maiores matemáticos holandeses de seu tempo.

Descartes e Beeckman tornaram-se tão bons amigos que, mais tarde, Descartes descreveu Beeckman como "a inspiração e o pai espiritual de meus estudos". Quatro meses mais tarde, foi para Beeckman que Descartes primeiro descreveu o seu modo revolucionário de considerar a Geometria. As cartas de Descartes para o seu amigo holandês nos dois anos seguintes são generosamente temperadas com referências à sua nova compreensão da relação entre os números e o espaço.

MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides:* a história da Geometria – das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. Almeida Filho, Enézio E. de. São Paulo: Geração Editorial, 2004, p. 85-87.

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

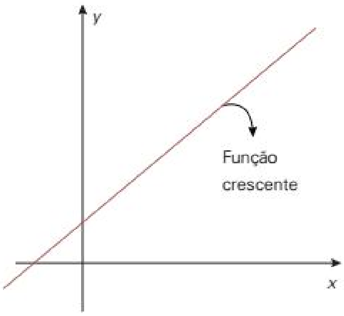
1. Faça uma pesquisa sobre o livro *Discurso sobre o método* e descreva seu objetivo principal.

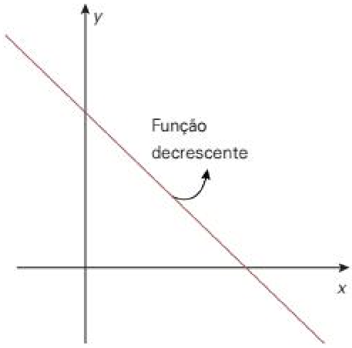
De acordo com o texto, responda:

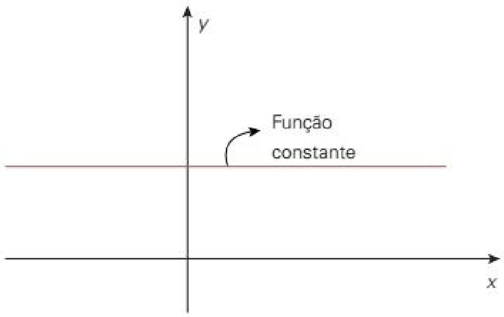
2. Quais eram as reais intenções de Descartes ao alistar-se no exército?
3. Quem Descartes descreveu como "a inspiração e o pai espiritual" de seus estudos?

CAPÍTULO 5 A RETA NO PLANO CARTESIANO

Quando estudamos, no Volume 1 desta Coleção, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ (para $a, b \in \mathbb{R}$), vimos que o gráfico no plano cartesiano é uma reta. Também vimos que existem as seguintes possibilidades:







Note que cada gráfico acima é uma reta. Dizemos que o gráfico de qualquer função da forma $f(x) = ax + b$ (para $a, b \in \mathbb{R}$), sendo x um número real, é uma reta.

Neste capítulo, estudaremos a reta no plano cartesiano, ampliando o que já conhecemos.

Sabemos, pela geometria euclidiana, que dois pontos distintos determinam uma reta. Na Geometria Analítica, cada ponto é interpretado por um par ordenado de números reais. A reta é interpretada por uma equação, como veremos a seguir.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

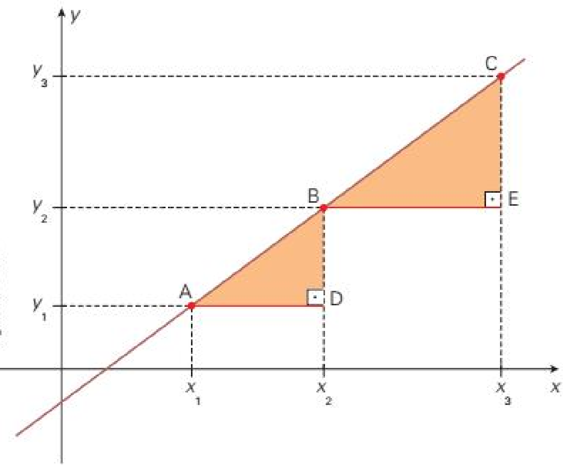
A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ (para $a, b \in \mathbb{R}$), é denominada função afim. Sobre essa função, recorde o que foi estudado no Volume 1 desta Coleção, procurando responder:

1. O que é taxa de crescimento dessa função?
2. Qual é a condição para que a função afim seja crescente? E para ser decrescente? E para ser constante?

Respostas no Manual do Professor.

Condição de alinhamento de três pontos

Inicialmente vamos estabelecer a condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano com base nas suas coordenadas. Consideremos os três pontos **A**(x_1, y_1), **B**(x_2, y_2) e **C**(x_3, y_3) alinhados, isto é, pontos de uma mesma reta r representada no plano cartesiano ortogonal.



Figuras: © DAE

Nessa figura estão destacados dois triângulos retângulos. Como são triângulos semelhantes, temos que

$$\frac{AD}{BE} = \frac{BD}{CE}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

$$x_2y_3 - x_2y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 = x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_2 + x_2y_1$$

$$x_2y_3 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 = 0$$

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \qquad \text{(I)}$$

A igualdade (I), considerando o que vimos no Volume 2 desta Coleção sobre determinantes, poderia ser escrita da seguinte maneira:

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ou ainda observando o teorema de Laplace para o seguinte determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nesse determinante, a primeira coluna é formada pelas abscissas dos três pontos e a segunda, pelas ordenadas.

Se os pontos A(x_1, $-1y_1$), B(x_2, y_2) e C(x_3, y_3) estão alinhados, então

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A recíproca é verdadeira, ou seja,

Se $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, **então os pontos A($x_1$, y_1), B(x_2, y_2) e C(x_3, y_3) estão alinhados.**

Essas duas conclusões compõem a condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano de acordo com as suas coordenadas.

Exemplo:

Vamos determinar o valor de m para que os pontos A(−2, 3), B(1, 4) e C(0, m) estejam alinhados.

- Impomos a condição de que o determinante formado nas coordenadas desses três pontos seja zero, isto é,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-8 + 0 + m + 0 - 3 + 2m = 0$$

$$3m = 11 \Rightarrow m = \frac{11}{3}$$

Assim, se $m = \frac{11}{3}$ os pontos A, B e C estarão alinhados.

Equação geral da reta

Como conhecemos a condição de alinhamento de três pontos, podemos obter a equação da reta. Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta; dessa forma, obtemos a equação da reta com as coordenadas de dois pontos.

Consideremos a reta r, conforme figura a seguir, e dois pontos A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) pertencentes a ela.

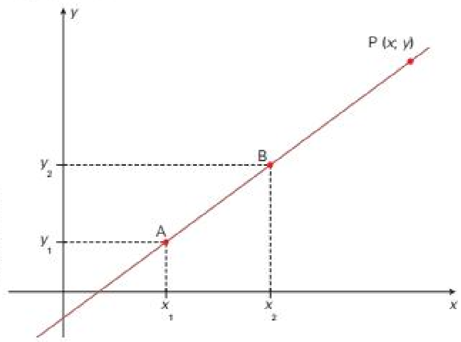


Gráfico: © DAE

Na figura, indicamos um ponto P(x, y) para representar qualquer ponto dessa reta. Considerando que os pontos A, B e P estão alinhados (colineares), conforme a condição de alinhamento de três pontos vista anteriormente, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↓calculando o determinante

$$xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y - xy_2 = 0$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

↓ Fazendo: $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$

$$x \cdot a + y \cdot b + c = 0$$

ou

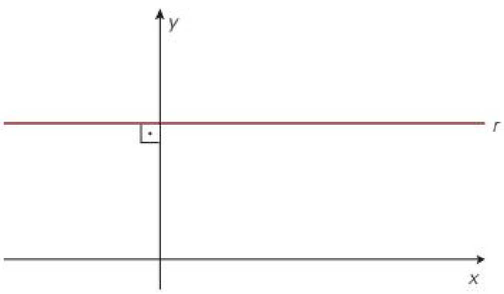
$$ax + by + c = 0$$

Esta igualdade é a equação geral da reta

Toda reta no plano cartesiano possui uma equação da forma ***ax + by + c = 0***, em que ***a***, ***b*** e ***c*** são constantes reais e ***a*** e ***b*** não são simultaneamente nulas. Essa equação é denominada **equação geral da reta**.

Observações:

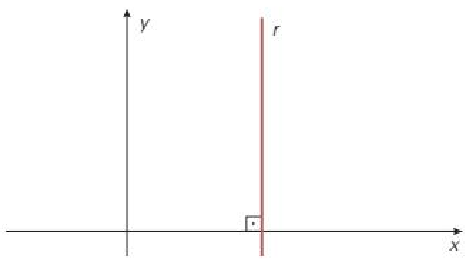
Ocorrem os seguintes casos particulares da reta no plano cartesiano e sua equação geral:



1. A reta *r* é perpendicular ao eixo das ordenadas. Neste caso: $a = 0$ e $b \neq 0$;

- a equação da reta será $by + c = 0$.

Note que, se neste caso $c = 0$, a reta será o próprio eixo *x*.

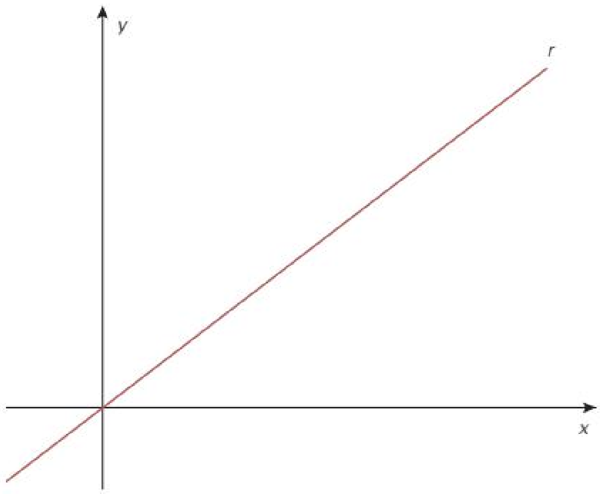


Figuras: © DAE

2. A reta *r* é perpendicular ao eixo das abscissas. Neste caso:

- $a \neq 0$ e $b = 0$;
- a equação da reta será $ax + c = 0$.

Note que, se neste caso $c = 0$, a reta será o próprio eixo *y*.



3. A reta *r* **passa pela origem** do plano cartesiano. Neste caso:

- $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$;
- a equação da reta será $ax + by = 0$.

Note que, quando o termo independente de *x* e de *y* na equação da reta é igual a zero ($c = 0$), a reta passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

Exemplo:

Vamos determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos A(3, − 4) e B(−5, 8).

Substituímos as coordenadas desses pontos no seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4x - 5y + 24 - 20 - 8x - 3y = 0$$

$$\underbrace{-12x - 8y + 4 = 0}_{(:\,-4)} \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$$

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

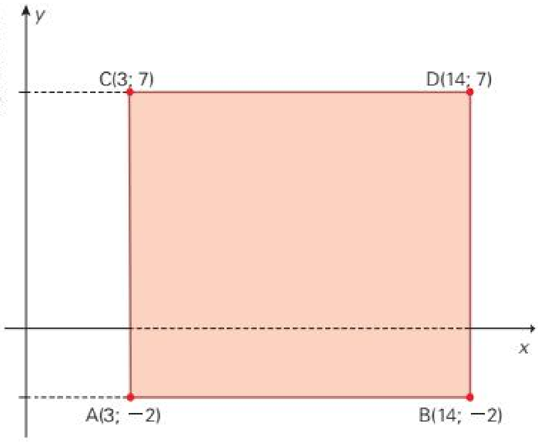
Questões e reflexões

1. Observando o exemplo, como você verifica se o ponto C(7, −10) pertence à reta, ou não, conhecendo sua equação?
2. Verifique se o ponto P(−3,5) pertence ou não pertence à reta de equação geral $2x - 4y - 10 = 0$. Qual a conclusão?

Exemplo:

Vamos obter a equação de cada reta que é suporte dos lados do quadrilátero representado na figura a seguir.

Figuras: © DAE



Equação da reta suporte do lado $\overline{AB}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 14 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x + 14y - 6 + 28 + 2x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11y + 22 = 0 \text{ ou } y + 2 = 0$$

Equação da reta suporte do lado $\overline{AC}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x + 3y + 21 + 6 - 7x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x + 27 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$

Equação da reta suporte do lado $\overline{CD}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$7x + 14y + 21 - 98 - 7x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11y - 77 = 0 \text{ ou } y - 7 = 0$$

Equação da reta suporte do lado $\overline{BD}$

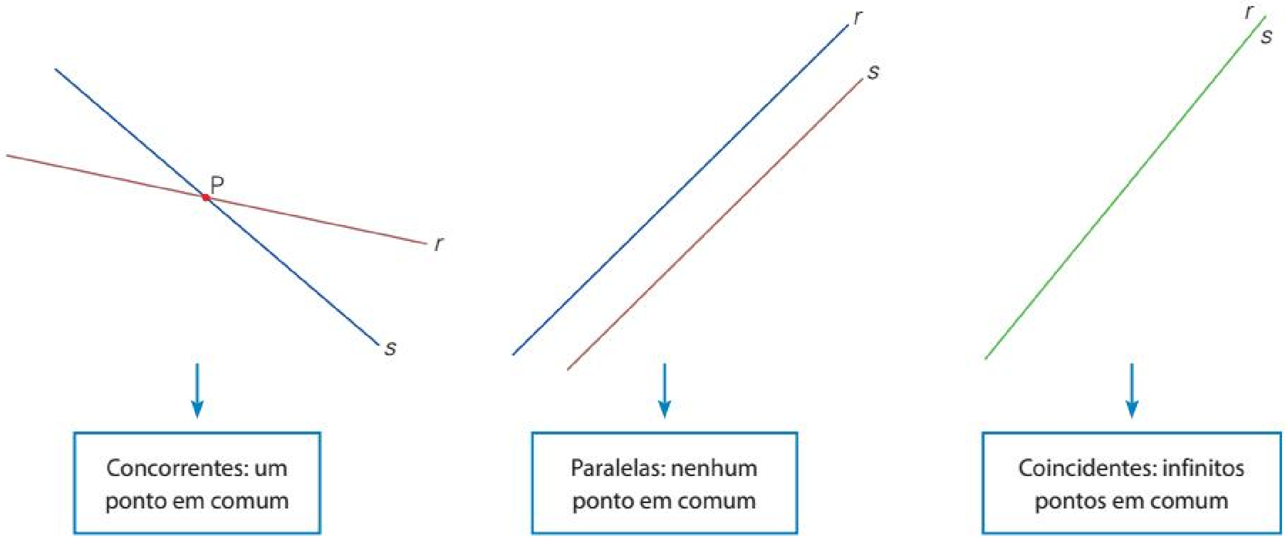
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 14 & -2 & 1 \\ 14 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x + 14y + 98 + 28 - 7x - 14y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x + 126 = 0 \text{ ou } x - 14 = 0$$

Intersecção de retas no plano cartesiano

Observe a seguir as três possibilidades de posição relativa entre duas retas representadas no plano cartesiano e a quantidade de pontos em comum:



Como vimos anteriormente a equação geral de uma reta, vamos considerar duas retas *r* e *s* no plano cartesiano dadas pelas seguintes equações:

Reta *r*: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

Reta *s*: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

A partir dos coeficientes de *x* e *y* e também do termo independente de *x* e *y*, podemos estabelecer condições sobre a posição relativa entre as duas retas. Isolando o termo independente de *x* e de *y* no segundo membro de cada uma dessas equações, formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Vamos escalonar esse sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por $-a_2$ e adicionamos a segunda equação multiplicada por a_1

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ (a_1b_2 - b_1a_2)\,y = a_2c_1 - a_1c_2 \end{cases}$$

Note que o sistema está escalonado.

Podemos analisar a posição relativa dessas retas no plano cartesiano conforme as possibilidades de soluções do sistema:

Sistema possível e determinado (uma solução)

Para que o sistema seja possível e determinado, conforme o escalonamento feito anteriormente, o coeficiente de *y* na segunda equação deverá ser diferente de zero:

$$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$$

$$a_1b_2 \neq b_1a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

As retas dadas serão concorrentes.

Sistema impossível (nenhuma solução)

Para que o sistema seja impossível, conforme o escalonamento feito anteriormente, o coeficiente de *y* na segunda equação deverá ser zero e o termo independente de *y* na mesma equação deverá ser diferente de zero:

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

e

$$a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Portanto, juntando as duas condições, temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Sistema possível e indeterminado (infinitas soluções)

Para que o sistema seja possível e indeterminado, conforme o escalonamento feito anteriormente, o coeficiente de *y* na segunda equação deverá ser zero e o termo independente de *y* na mesma equação deverá ser também igual a zero:

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

e

$$a_2c_1 - a_1c_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Portanto, juntando as duas condições, temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

OBSERVAÇÃO:
As condições estabelecidas acima permitem verificar se duas retas representadas no plano cartesiano são concorrentes, paralelas ou coincidentes, examinando apenas os coeficientes de suas equações na forma geral.

Resposta no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Dadas as retas de equação geral $4x + 5y = 0$ e $8x + 10y + k = 0$, qual o valor da constante real ***k*** para que as retas sejam coincidentes?

Exercícios resolvidos

1. Verifique se os pontos A(1; 4), B(3; 8) e C(−1; 0) estão alinhados.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 4 + 8 - 12 = 0$$

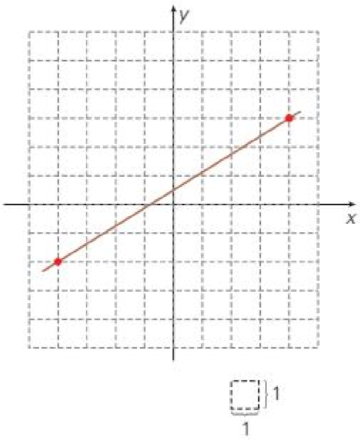
Assim os pontos estão alinhados.

2. Calcule o valor de m de modo que os pontos M(−1; −7), N(1; 3) e P(m; 8) sejam colineares.

$$\begin{vmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$-3 - 7m + 8 - 3m + 7 + 8 = 0 \therefore m = 2$

3. Determine a equação geral da reta r representada na figura abaixo. Em seguida, explique se o ponto (1; 1) pertence a essa reta.



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$3x - 4y - 8 + 12 - 4y + 2x = 0$
$5x - 8y + 4 = 0$

Como $5 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + 4 = 1 \neq 0$, o ponto (1; 1) não pertence à reta $5x - 8y + 4 = 0$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. O segmento com extremidades nos pontos (−5; 3) e (6; −8) intersecta os eixos das abscissas e das ordenadas nos pontos P e Q, respectivamente.

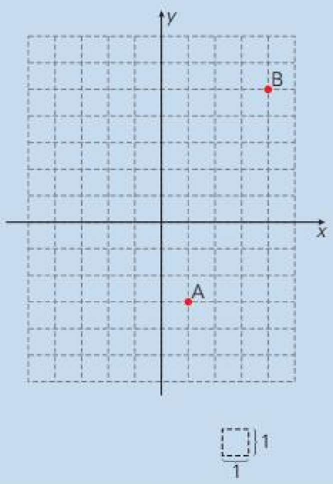
a) Quais as coordenadas do ponto P? P(−2; 0)

b) Quais as coordenadas do ponto Q? Q(0; −2)

c) Qual a área do triângulo OPQ, em que O é a origem do sistema cartesiano? 2 u.a.

2. Encontre o valor de $\boldsymbol{k}$ para os pontos A(0; 0), B(2; 2) e C(−3; k) estarem alinhados. $k = -3$

3. Na figura ao lado, no sistema cartesiano, as extremidades do segmento AB são os pontos A(1; −3) e B(4; 5). Determine as coordenadas do ponto C pertencente ao eixo das abscissas, de modo que AC + CB tenha o menor comprimento possível. Resposta no Manual do Professor.



Figuras: ©DAE

4. A equação geral de uma reta é dada por $2x + 3y - 7 = 0$. Verifique se cada um dos pontos a seguir pertence a essa reta. Respostas no Manual do Professor.
   a) (1; 2)
   b) (2; 1)
   c) (0; 0)
   d) (−1; 2)
   e) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

5. Os vértices de um triângulo são os pontos A(0; 0), B(1; 7) e C(5; 3).
   a) Determine a equação da reta que contém o lado AB. $7x - y = 0$
   b) Determine a equação da reta que contém a mediana relativa ao lado BC. $5x - 3y = 0$
   c) A reta que contém o lado BC passa pelo ponto (4; 4)? Sim.

6. Indique, em seu caderno, V ou F, caso as afirmações a seguir sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.
   I. A reta cuja equação é $y - 3 = 0$ é paralela ao eixo das abscissas. V
   II. A reta cuja equação é $2x + 3 = 0$ é paralela ao eixo das ordenadas. V
   III. A reta cuja equação é $3x - y = 0$ passa pela origem do sistema cartesiano. V
   IV. A reta da equação $x - y - 1 = 0$ passa pelo ponto (0; −1). V
   V. A área do triângulo determinado pela reta cuja equação é $2x - y - 4 = 0$ e os eixos coordenados são 8 unidades de área. F

7. Os quatro vértices de um trapézio são os pontos (4; 1), (1; 4), (3; −4) e (−2; 1).
   a) Determine as equações das diagonais desse trapézio. $4x + y - 8 = 0$ e $y - 1 = 0$
   b) Calcule o perímetro desse trapézio. (11 + 26) u.c.

8. Em qual ponto a reta determinada pelos pontos (1; 3) e (4; −1) intersecta o eixo das abscissas? E o eixo das ordenadas? Respostas no Manual do Professor.

9. Para determinar o ponto de intersecção de duas retas concorrentes, basta resolver o sistema formado por suas equações, pois o ponto comum às duas retas verifica simultaneamente suas equações. Sendo assim, qual o ponto de intersecção de cada par de retas a seguir?
   a) $x + y - 1 = 0$ e $x - y - 5 = 0$ (3; −2)
   b) $2x + 3y - 9 = 0$ e $3x + 2y - 1 = 0$ (−3; 5)
   c) $x - 2 = 0$ e $y - 3 = 0$ (2; 3)

10. Qual o ponto de intersecção das retas que contêm as diagonais do quadrilátero cujos vértices são os pontos (−1; 2), (0; −5), (5; 1) e (3; 4)? Resposta no Manual do Professor.

11. Os vértices de um quadrado representado no plano cartesiano estão nos pontos A(0; 0), B(0; 5), C(5; 5) e D(5; 0).
   a) Determine a medida do perímetro desse quadrado. 20 u.c.
   b) Obtenha as equações das retas que contêm as diagonais AC e BD. Diagonal AC: $x - y = 0$; Diagonal BD: $x + y - 5 = 0$

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

No Volume 1 desta Coleção mencionamos o Winplot, um *software* que, dentre outras, oferece ferramentas para elaborar gráficos. Seu *download* é seguro e gratuito. Similar ao *Winplot*, o *software* GeoGebra é utilizado em escolas e universidades de diversos países. Há uma versão em português e seu *download* também é gratuito.

Para você ter ideia de suas possibilidades, o GeoGebra permite fazer diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferências e outras curvas. Nosso interesse principal com esse *software* é a elaboração de gráficos a partir de suas equações.

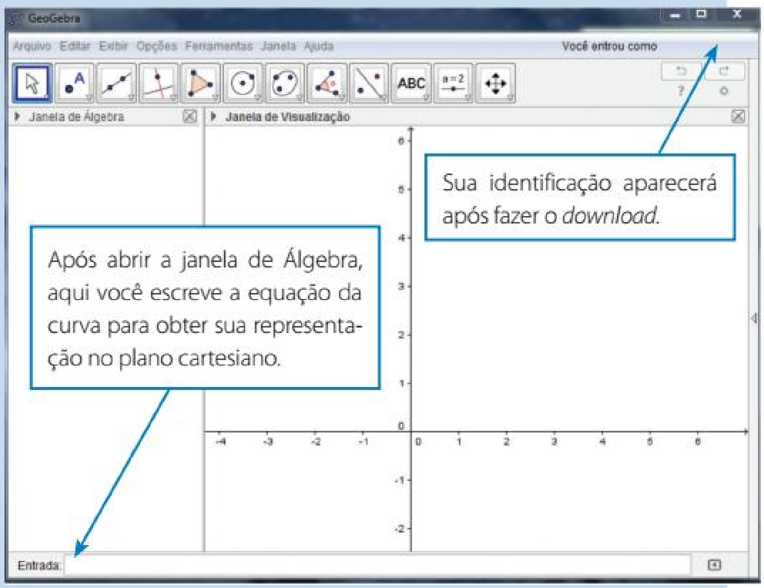
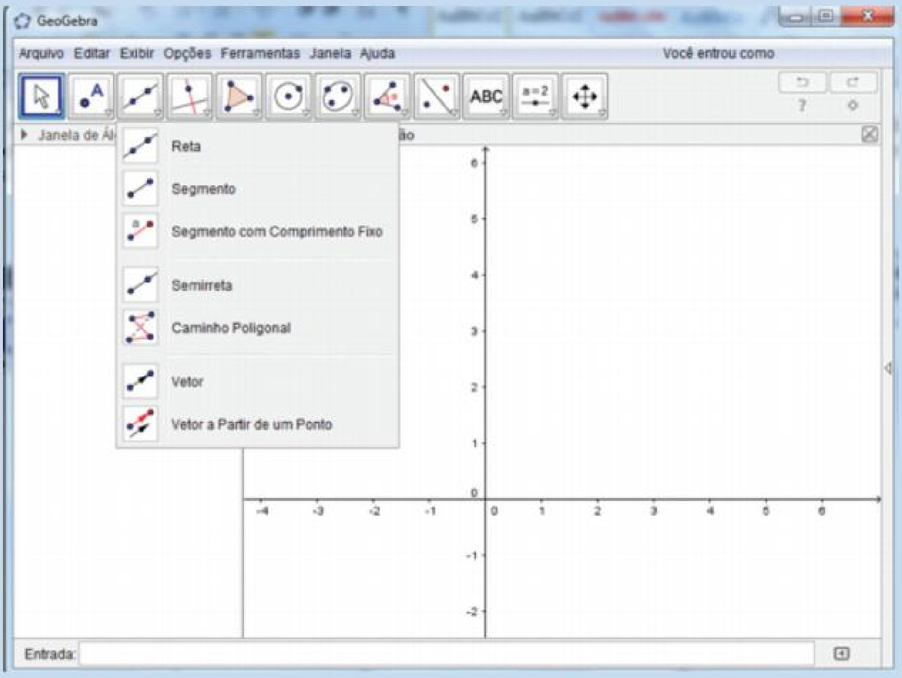
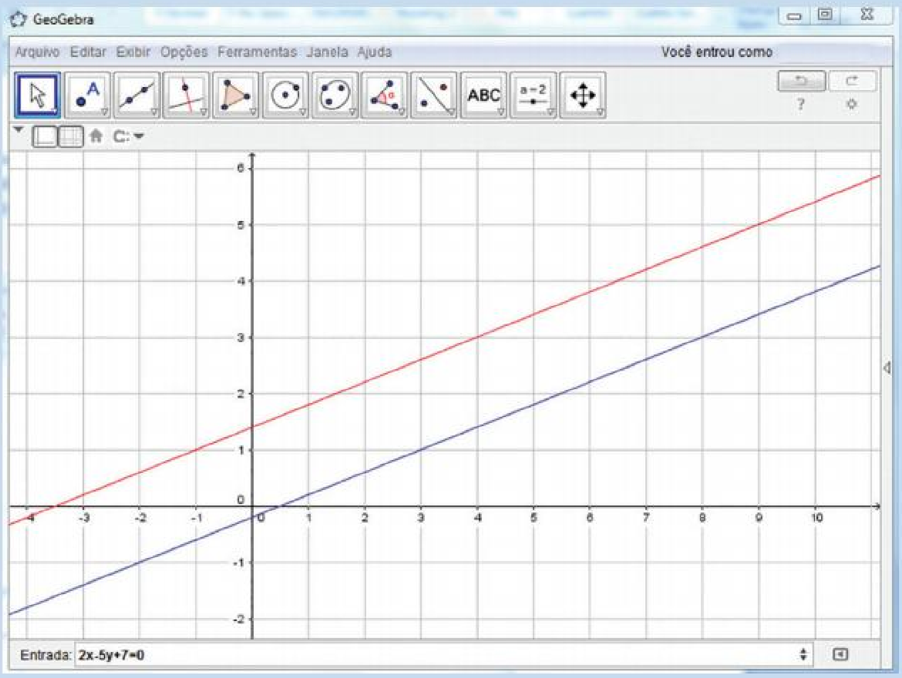


Figura: © DAE

1. Após fazer o *download*, explore o GeoGebra com algum colega. Observem, na barra de ferramentas, a descrição indicada em cada ícone. Cada vez que for escolhido um desses ícones e o cursor for colocado no triângulo inferior, aparecerá uma breve descrição de como usar a ferramenta correspondente. Observe o exemplo:



2. Saiba como deixar o plano cartesiano como uma malha quadriculada.
3. Construa o gráfico de retas a partir de equações que você elaborar. Observe o exemplo abaixo em que foram obtidas as retas paralelas de $2x - 5y - 1 = 0$ e $2x - 5y + 7 = 0$.

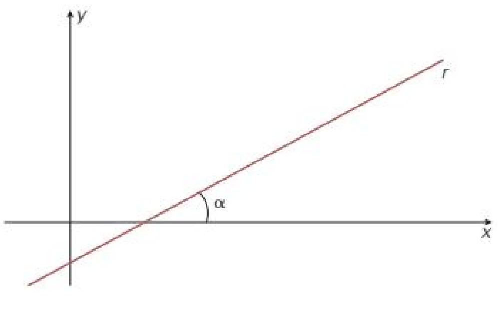


Figuras: © DAE

Coeficiente angular

Vimos que a equação geral de uma reta no plano cartesiano é da forma $ax + by + c = 0$. Além dessa, existem outras formas. Veremos, também neste capítulo, a chamada **equação reduzida da reta**. No plano cartesiano, a partir da equação reduzida obtemos, entre outras, informações do ângulo que ela forma com o eixo das abscissas.

Antes de chegar à equação reduzida da reta, vamos examinar duas ideias importantes: inclinação de uma reta e coeficiente angular. Iniciemos com uma reta *r*, conforme a figura a seguir, não paralela ao eixo das ordenadas, formando um ângulo α com o eixo das abscissas. O ângulo é marcado iniciando no eixo das abscissas no sentido anti-horário.



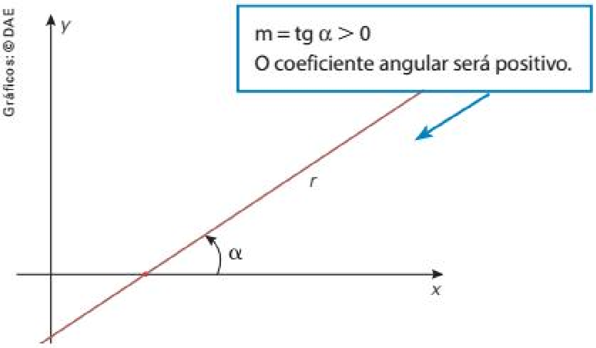
A medida do ângulo α, assim considerado, é chamada **inclinação da reta** *r*. Além disso, tem-se o coeficiente angular da reta:

Denomina-se **coeficiente angular** ou declividade da reta *r* o número ***m*** que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α com o eixo das abscissas. Em símbolos: $m = \text{tg}\ \alpha$.

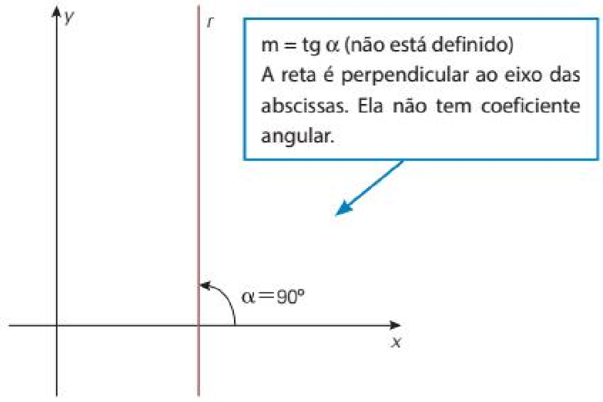
Existem quatro possibilidades de coeficiente angular conforme o ângulo que a reta forma com o eixo *x* no sentido positivo:

Primeiro caso – Quando $0° < \alpha < 90°$

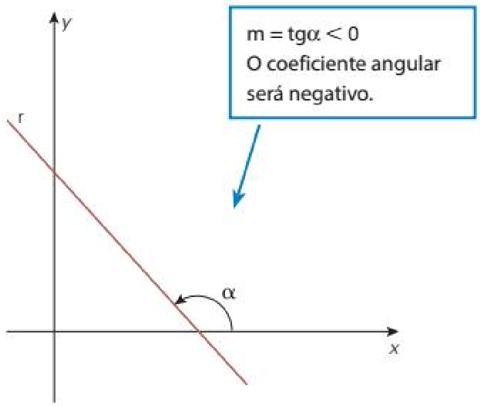
Gráficos: © DAE



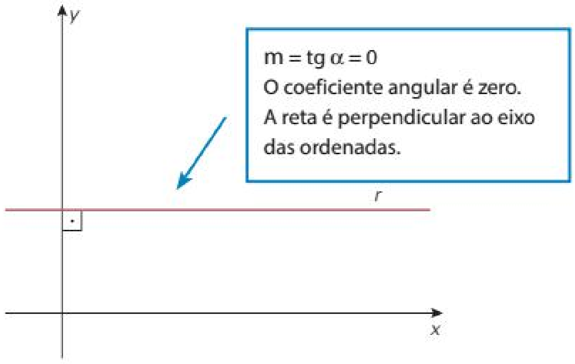
Segundo caso – Quando $\alpha = 90°$



Terceiro caso – Quando $90° < \alpha < 180°$

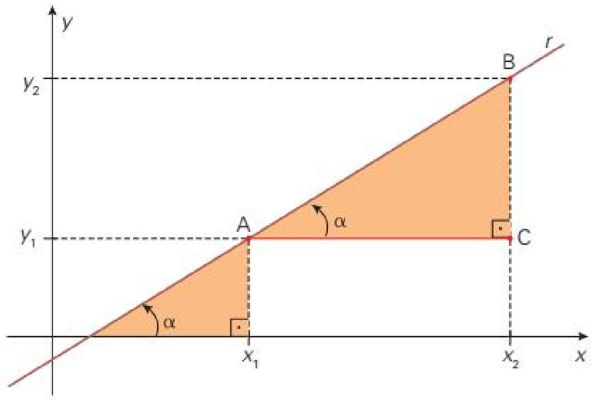


Quarto caso – Quando $\alpha = 0°$



Nos casos apresentados, pode ser observado que, quando a inclinação é 90°, a reta não tem declividade, isto é, não tem coeficiente angular. Quando a inclinação é 0°, a declividade é zero, ou seja, o coeficiente angular é zero. Resta saber como calcular o coeficiente angular da reta nos outros dois casos, isto é, quando $0° < \alpha < 90°$ e quando $90° < \alpha < 180°$.

Para esses dois casos, vamos considerar uma reta *r* passando (ou determinada) pelos pontos $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, conforme mostrado a seguir:

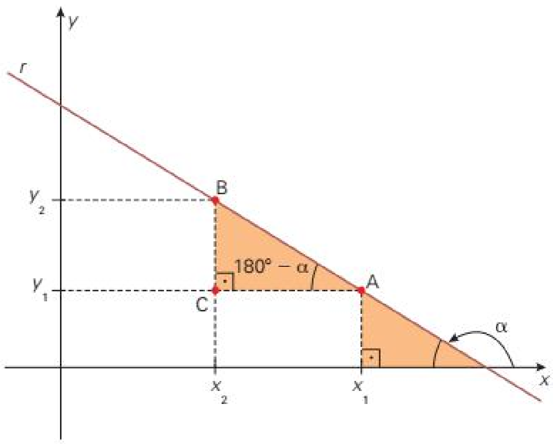


- $0° < \alpha < 90°$

No triângulo retângulo ABC destacado na figura acima, temos:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Gráficos: © DAE

- $90° < \alpha < 180°$

No triângulo retângulo ABC destacado na figura acima, temos:

$$m = \text{tg}(180° - \alpha) = \frac{BC}{AC}$$

$\downarrow \text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

$$-\text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{-(x_1 - x_2)}$$

$\downarrow$ multiplicando por -1

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A partir dos casos observados, podemos dizer que:

Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são dois pontos distintos quaisquer de uma reta *r*, com $x_1 \neq x_2$, o coeficiente angular *m* dessa reta é dado por:

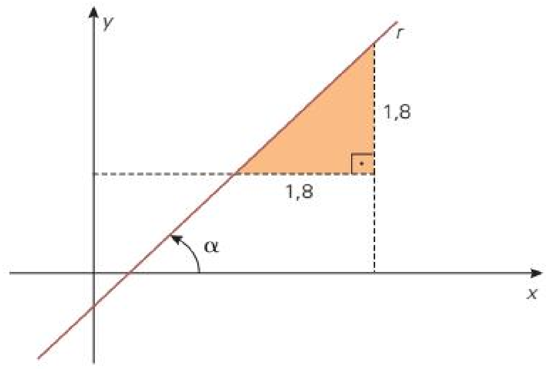
$$m = \text{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

OBSERVAÇÕES:

1. Pelo que foi visto até aqui, há duas maneiras de obter o coeficiente angular de uma reta não paralela ao eixo *y*: a partir da inclinação (medida do ângulo α) e pelas coordenadas de dois pontos distintos da reta.
2. Na demonstração que apresentamos anteriormente para o cálculo do coeficiente angular da reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos, também é possível escrever $m = \text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, com Δy e Δx representando a variação de *y* e a variação de *x*, respectivamente.
3. Na relação matemática acima, no numerador da fração pode ser utilizado $y_1 - y_2$ desde que, no denominador, utilizemos $x_1 - x_2$.

Exemplo:

Vamos calcular o coeficiente angular da reta *r* conforme os dados da figura a seguir.



No triângulo retângulo destacado na figura, os catetos (cada um paralelo a um dos eixos coordenados) têm a medida indicada (são as variações de *y* e de *x*). Assim temos:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{1{,}8}{1{,}8} \Rightarrow m = 1$$

Como a tangente do ângulo é 1 e conforme indicação na figura, podemos afirmar que a inclinação da reta *r* com o eixo das abscissas é 45º.

Coeficiente angular e equação geral da reta

Para obter o coeficiente angular da reta *r* com equação geral $ax + by + c = 0$, considera-se que os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são distintos da reta *r*, em que $x_1 \neq x_2$. Como esses pontos pertencem à reta, satisfazem a equação da reta, isto é:

$A \in r \Rightarrow ax_1 + by_1 + c = 0$ (I)

$B \in r \Rightarrow ax_2 + by_2 + c = 0$ (II)

Fazendo (I) – (II), membro a membro:

$$ax_1 + by_1 + c - (ax_2 + by_2 + c) = 0$$
$$ax_1 + by_1 - ax_2 - by_2 = 0$$
$$a \cdot (x_1 - x_2) + b \cdot (y_1 - y_2) = 0$$
$$b \cdot (y_1 - y_2) = -a \cdot (x_1 - x_2)$$
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{a}{b} \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

Assim, o coeficiente angular da reta *r* de equação geral $ax + by + c = 0$ pode ser obtido a partir dos coeficientes de *x* e de *y* da equação, ou seja:

$$m = -\frac{a}{b}$$

Exemplo:

Vamos calcular o coeficiente angular da reta *r* com equação geral $4x - 7y - 10 = 0$.

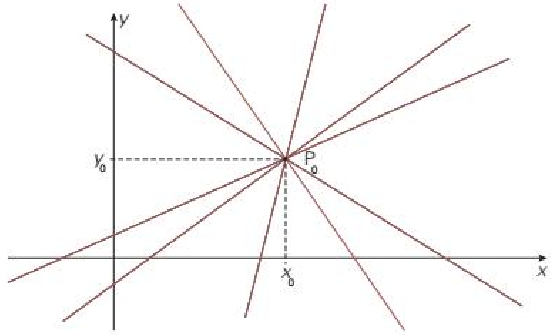
Observando os coeficientes de *x* e de *y* na equação geral, temos:

$$m = -\frac{a}{b}$$
$$m = -\frac{4}{-7} \Rightarrow m = \frac{4}{7}$$

Equação geral da reta por um ponto, conhecido o coeficiente angular

Conforme a geometria euclidiana, num plano, infinitas retas passam por um ponto.

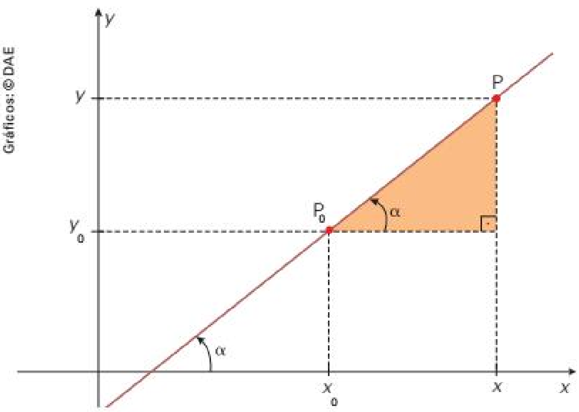
Considerando o plano cartesiano, conforme consta na figura a seguir, são indicadas algumas das retas que passam pelo ponto $\mathbf{P_0(x_0, y_0)}$.



Cada uma das retas representadas tem uma inclinação diferente. Assim, se conhecêssemos especialmente sua inclinação, poderíamos identificar uma dessas retas no plano. Essa observação possibilita obter a equação de uma reta que passa pelo ponto indicado, conhecida sua declividade.

Considere-se que o ponto $\mathbf{P_0(x_0, y_0)}$ pertence à reta *r* com coeficiente angular ***m***. Além disso, o ponto $P(x, y)$ representa um ponto genérico dessa reta.

Gráficos: © DAE



Pelo visto sobre coeficiente angular, é possível escrever:

$$m = \text{tg}\,\alpha$$
$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$m(x - x_0) = y - y_0$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Equação da reta que passa pelo ponto $\mathbf{P_0(x_0, y_0)}$ com coeficiente angular ***m***.

A equação da reta *r* não perpendicular ao eixo *x* que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e com coeficiente angular *m* é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Assim, conhecendo as coordenadas de um ponto e o coeficiente angular, pode-se determinar a equação da reta.

OBSERVAÇÕES:

1. Quando a reta *r* for paralela ao eixo *x*, sabe-se que o coeficiente angular será zero ($m = \text{tg}0^{\circ} = 0$). Dessa forma, tem-se:

$y - y_0 = 0 \cdot (x - x_0)$

$y - y_0 = 0 \Rightarrow y = y_0$

2. Quando a reta *r* for perpendicular ao eixo *x*, todos os pontos da reta terão a mesma abscissa. Assim ocorre:

$x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0$

Exemplo:

Vamos determinar a equação da reta que passa pelos pontos M(−1; 2) e N(5; 3).

Calculamos o coeficiente angular dessa reta a partir das coordenadas desses dois pontos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3-2}{5-(-1)} \Rightarrow m = \frac{1}{6}$$

Utilizando o ponto N(5; 3) na equação da reta por um ponto M, por exemplo:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1}{6} \cdot (x - 5)$$

$$6y - 18 = x - 5 \Rightarrow x - 6y + 13 = 0$$

Outra maneira para obter a equação dessa reta é utilizar o determinante formado pelas coordenadas dos dois pontos dados, isto é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x + 5y - 3 - 10 - 3x + y = 0 \Rightarrow x - 6y + 13 = 0$$

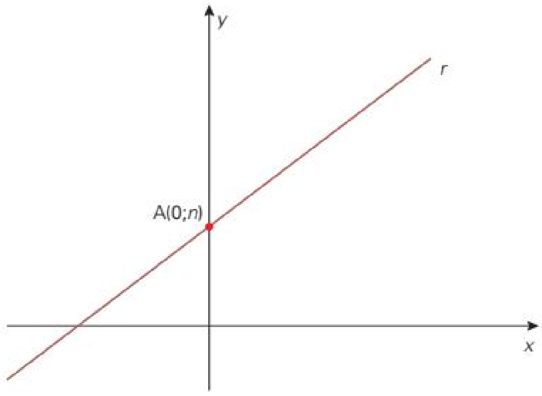
Equação reduzida da reta

Agora vamos apresentar a você a equação reduzida da reta. Essa equação tem uma vantagem em relação à equação geral: fornecer dados importantes a respeito não apenas do coeficiente angular (tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas), como também dados do chamado coeficiente linear.

Quando se conhece um ponto $P_0(x_0, y_0)$ de uma reta e o seu coeficiente angular ***m***, sua equação é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Gráfico: © DAE



Vamos utilizar essa informação com outra.

Considere, de forma particular, que sabemos que o coeficiente angular de uma reta *r* seja *m* e, além disso, que ela passa pelo ponto A(0; *n*), conforme indicado na figura acima.

Escolhemos o ponto em que a reta intersecta o eixo das ordenadas. Assim, considerando a equação anterior, temos:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$\downarrow$ Considerando o ponto A(0; *n*)

$y - n = m(x - 0)$

$y - n = mx \Rightarrow y = mx + n$

Essa forma é conhecida como equação **reduzida da reta**. Nela, *m* é o coeficiente angular e *n* é o **coeficiente linear** (ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas).

Equação reduzida da reta:

$y = mx + n$

n → coeficiente linear

m → coeficiente angular

OBSERVAÇÕES:

1. A forma reduzida de representar uma reta é importante, pois, se o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas e o coeficiente angular são conhecidos, tem-se a equação da reta.

2. A forma reduzida expressa y em função de x. Trata-se da lei de formação de uma função afim, representada por $y = f(x) = ax + b$.

Resposta no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Em relação à função afim da forma $y = f(x) = ax + b$, o que indica o valor de a (coeficiente de x)?

Exemplo:

Vamos obter a equação reduzida da reta representada no plano cartesiano a seguir:

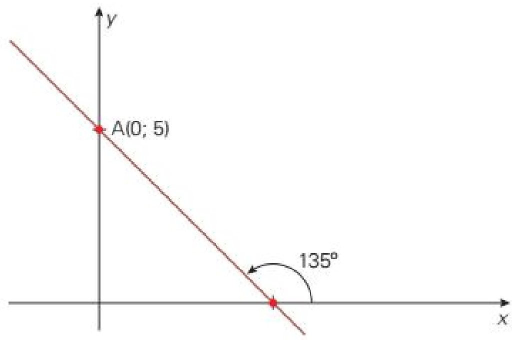


Gráfico: © DAE

Calculamos o coeficiente angular da reta a partir da inclinação indicada no gráfico:

$m = tg\ \alpha$

$m = tg\ 135°$

$m = -tg\ 45° \Rightarrow m = -1$

Como a reta intersecta o eixo das ordenadas no ponto A(0; 5), temos o coeficiente linear $n = 5$. Assim, a equação reduzida da reta é:

$y = mx + n$

$y = -1 \cdot x + 5 \Rightarrow y = -x + 5$

Exemplo:

Ainda em relação ao exemplo anterior, vamos obter a equação da reta que passa pelo mesmo ponto A(0; 5), mas forma com o eixo das abscissas no sentido anti-horário um ângulo de 60°.

Calculamos inicialmente o coeficiente angular:

$m = \text{tg } 60°$

$m = \sqrt{3}$

Como a reta intersecta o eixo das ordenadas no ponto A(0; 5), temos o coeficiente linear $n = 5$. Assim, a equação reduzida da reta é:

$y = mx + n$

$m = \sqrt{3}x + 5$

Exercícios resolvidos

1. Determine o coeficiente angular de uma reta que passa pelos pontos A(1; 7) e B(5; 4). Essa reta representa o gráfico de função crescente ou decrescente?

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e B é igual a $\frac{4-7}{5-1} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$. Assim, a reta representa o gráfico de uma função decrescente.

2. Uma reta r passa pelos pontos A(0; 4) e B(6; 0).

a) Qual é o coeficiente angular da reta r?

b) Escreva a equação geral da reta r.

c) Calcule a área do triângulo determinado pela reta r e os eixos coordenados.

a) $m_r = \frac{0-4}{6-0} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

b) $y - 0 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 6) \therefore 2x + 3y - 12 = 0$

c) $S_{\text{Triângulo}} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ u. a.

3. Uma reta r tem inclinação de 60° e intersecta a bissetriz dos quadrantes pares em um ponto P, cuja ordenada é 4.

a) Quais as coordenadas do ponto P?

b) Qual é a equação geral da reta r?

c) Quais os pontos de intersecção da reta r com os eixos coordenados?

a) $P(-4; 4)$

b) $y - 4 = \text{tg}\,(60°) \cdot (x + 4)$

$y - 4 = \sqrt{3} \cdot (x + 4) \therefore \sqrt{3}x - y + 4\sqrt{3} = 0$

c) $x = 0 \rightarrow y = 4 + 4\sqrt{3}$

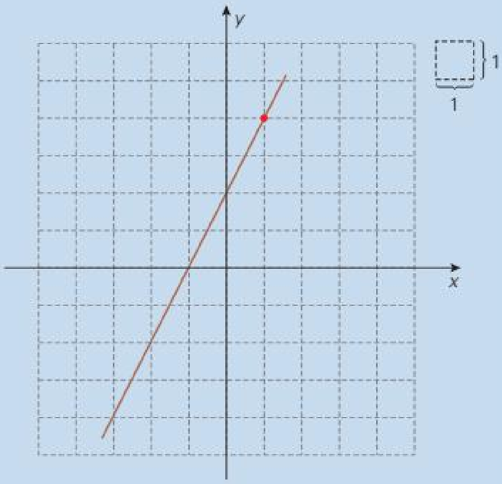
$y = 0 \rightarrow x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 4$

Assim, os pontos de intersecção da reta r com os eixos coordenados são $(0; 4 + 4\sqrt{3})$ e $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} - 4; 0\right)$.

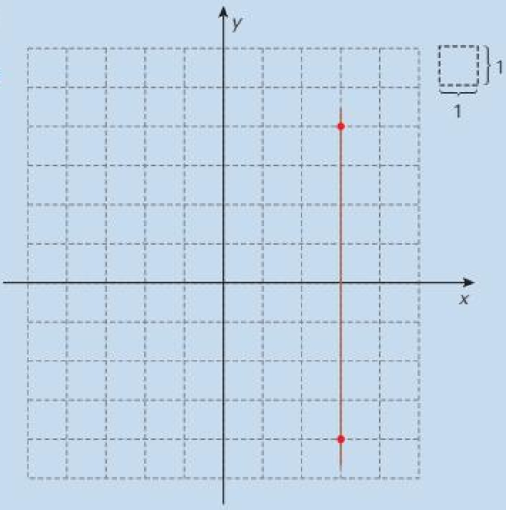
Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o coeficiente angular de cada uma das retas representadas a seguir.

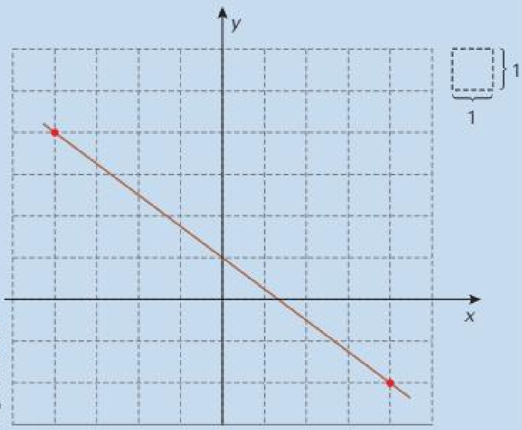
a) 2



b) Não tem coeficiente angular.



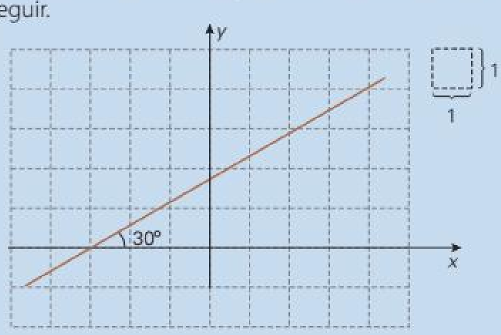
c) $-\frac{3}{4}$



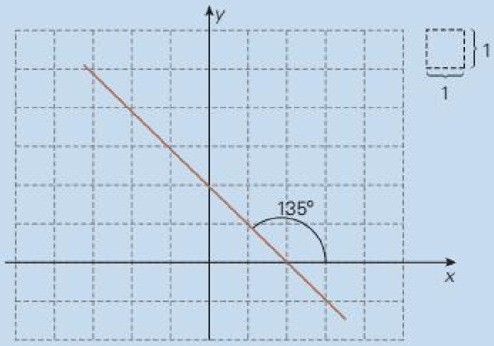
Figuras: © DAE

2. Determine o coeficiente angular de cada uma das retas a seguir.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



b) -1



3. Uma reta *r* é paralela ao eixo das abscissas, e uma reta *s* é perpendicular ao eixo das abscissas.

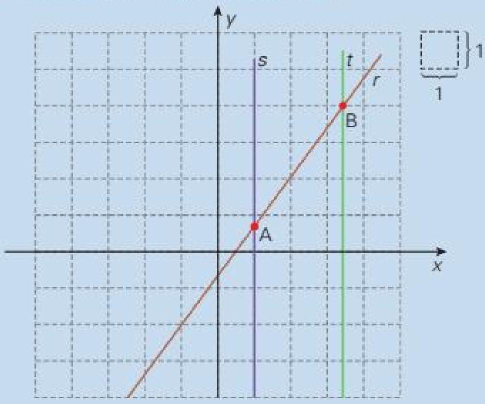
a) Qual é a inclinação da reta *r*? E da reta *s*?
A inclinação da reta *r* é 0° e a da reta *s*, 90°.

b) Qual é a declividade da reta *r*? E da reta *s*?
A declividade da reta *r* é 0 e não existe declividade na reta *s*.

4. Determine a inclinação de uma reta cuja declividade é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 30°
b) -1; 135°
c) $-\sqrt{3}$; 120°
d) 0; 0°
e) 1. 45°

5. Como mostra a figura a seguir, nos pontos A e B, uma reta *r* intersecta as retas *s* e *t*, paralelas entre si e perpendiculares ao eixo das abscissas.



A distância entre as retas *s* e *t* é 2,4 e entre os pontos A e B é 4. Calcule o coeficiente angular da reta *r*. $\frac{4}{3}$

6. Determine a equação de cada uma das retas que passam pelo ponto P e têm coeficiente angular m.

a) r: P(1; 3) e $m = 2$. $2x - y + 1 = 0$

b) s: P(−2; 5) e $m = -3$. $3x + y + 1 = 0$

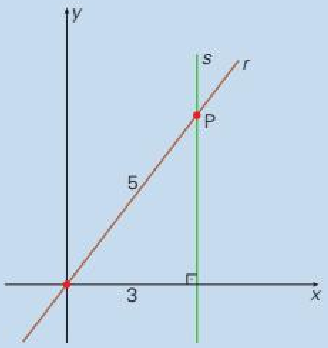
c) t: P(2; 2) e $m = 1$. $x - y = 0$

7. Uma reta passa pelo ponto P(3; 4) e tem inclinação de 135°.

a) Qual é o coeficiente angular dessa reta? -1

b) Qual é a sua equação geral? $x + y - 7 = 0$

8. Na figura a seguir, a reta r passa pela origem do sistema cartesiano e intersecta a reta s no ponto P.



a) Qual é a equação da reta r? $4x - 3y = 0$

b) Qual é a área do triângulo determinado pelas retas r e s e pelo eixo das abscissas? $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. A equação geral de uma reta é $2x + 3y - 6 = 0$.

a) Escreva a equação reduzida dessa reta. $y = -\frac{2}{3}x + 2$

b) Quais são seus coeficientes angular e linear? Coeficiente angular: $-\frac{2}{3}$ e coeficiente linear: 2.

10. A equação reduzida da reta s é dada por $y = \sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3}$.

a) Qual é o coeficiente angular da reta s? $m_s = \sqrt{3}$

b) Qual é a sua inclinação? 60°

c) Quais são as coordenadas do ponto em que a reta s intersecta o eixo das abscissas? (2; 0)

11. Uma reta t passa pelo ponto (1; 5) e pelo ponto de interseção das retas $x + 2y - 18 = 0$ e $5x - y - 2 = 0$.

a) Qual é o coeficiente angular dessa reta? $m_t = 3$

b) Qual é a sua equação reduzida? $3x - y + 2 = 0$

12. Uma função afim é definida por $f(x) = 3x + 5$.

a) Quais são os valores de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$?

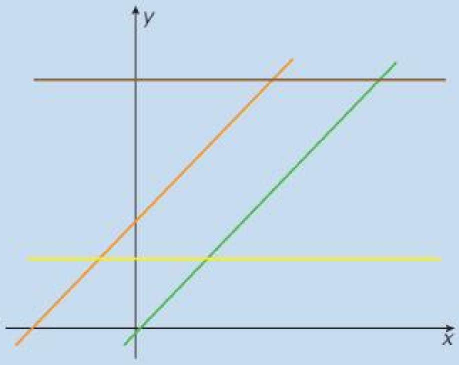
b) A sequência formada pelos valores obtidos anteriormente é uma progressão aritmética. Qual a razão dessa progressão?

c) Qual é o coeficiente angular da reta que representa a função f?

d) Qual é a relação entre o coeficiente angular da reta que representa a função f e a razão da progressão aritmética ($f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(5)$)?

Respostas no Manual do Professor.

13. Na figura a seguir estão representadas as retas r, s, t e v, cujas equações são, respectivamente, $y = x + 3$, $y = x$, $y = 2$ e $y = 7$. Respostas no Manual do Professor.

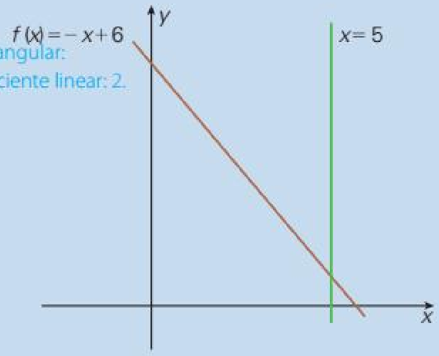


a) As quatro retas limitam um quadrilátero. Quais são os pontos que representam os vértices desse quadrilátero?

b) Quais são as equações reduzidas das diagonais desse quadrilátero?

c) Qual é a área desse quadrilátero?

14. O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + 6$, a reta de equação $x = 5$ e os eixos coordenados determinam um trapézio, como mostra a figura a seguir.



Figuras: © DAE

a) Quais são os valores de $f(0)$ e $f(5)$? $f(0) = 6$ e $f(5) = 1$

b) Qual é coeficiente angular da reta que representa a função f? -1

c) Qual a área do trapézio limitado pela função f, pela reta $x = 5$ e pelos eixos coordenados? 17,5 u.a.

15. Considerando que a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = ax + b$, tem o gráfico passando pelos pontos A(2; −3) e B(−1; 4), obtenha:

a) a lei de formação da função f.

b) a equação geral da reta correspondente ao gráfico da função f.

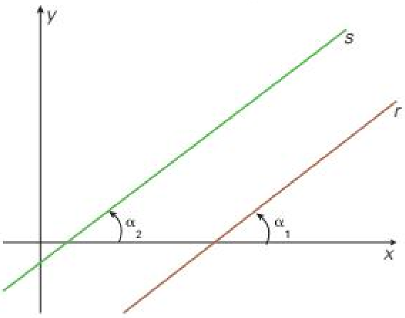
Respostas no Manual do Professor.

Paralelismo e perpendicularidade

Neste capítulo já observamos as posições relativas entre duas retas no plano cartesiano. Como vimos a forma reduzida da reta, precisamos estabelecer as condições para que duas retas sejam paralelas (paralelismo entre retas) examinando apenas o coeficiente angular. Também a partir dele, chegaremos à condição para que duas retas sejam perpendiculares.

Paralelismo entre retas

O paralelismo entre duas retas pode ser constatado quando elas são representadas no plano cartesiano. Dessa forma, considerem-se as retas *r* e *s* distintas e paralelas, conforme a seguir:



Figuras: © DAE

Sendo $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 90°$ e considerando as equações reduzidas dessas retas sendo $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ tem-se:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\text{tg}\ \alpha_1 = \text{tg}\ \alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

Coeficientes angulares iguais

Assim, é possível concluir que duas retas distintas, se são paralelas entre si e não perpendiculares ao eixo *x*, possuem coeficiente angular igual. Reciprocamente, pode-se demonstrar que duas retas distintas, se possuem coeficiente angular igual, são paralelas.

Duas retas distintas e não perpendiculares ao eixo *x* são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais.

Exemplo:

Obtenha a equação da reta *r* paralela à reta *s*, com equação $y = -4x + 5$, que passa pelo ponto A(2; 3).

Como *r* deverá ser paralela a *s*, as duas têm o mesmo coeficiente angular. Pela equação reduzida da reta *s*, sabemos que seu coeficiente angular é -4 (representamos por $m = -4$). Assim, considerando a equação da reta por um ponto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

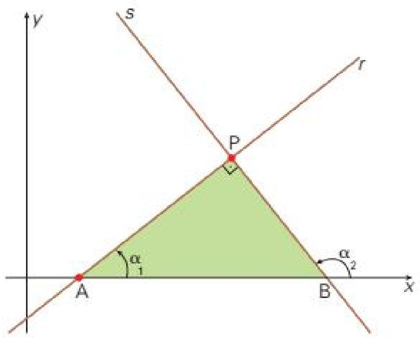
$$y - 3 = --4 \cdot (x - 2)$$

$$y - 3 = --4x + 8 \Rightarrow y = -4x + 11$$

Logo, a equação reduzida da reta *r* é $y = -4x + 11$.

Perpendicularidade de duas retas

Agora, a partir dos coeficientes angulares, vamos estabelecer uma condição para que duas retas do plano cartesiano sejam perpendiculares. Inicialmente, vamos considerar duas retas que são perpendiculares para observar a relação entre seus coeficientes angulares. Assim, a seguir estão representadas as retas *r* e *s* com inclinações α_1 e α_2, respectivamente. Além disso, observe que elas são perpendiculares.



Observando o triângulo retângulo destacado, tem-se:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \text{tg}\ (\alpha_1 + 90°)$$

$$\downarrow \text{(I)}$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{\text{sen}\ (\alpha_1 + 90°)}{\cos\ (\alpha_1 + 90°)}$$

$$\downarrow \text{(II)}$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{\text{sen}\ \alpha_1 \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_1 \text{sen}\ 90°}$$

$$\downarrow \text{(III)}$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{\cos \alpha_1}{-\text{sen}\ \alpha_1}$$

↓ (IV)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{-\operatorname{tg} \alpha_1}$$

↓ Considerando que $\operatorname{tg} \alpha_2 = m_2$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = m_1$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ (com } m_1 \neq 0 \text{ e } m_2 \neq 0)$$

Resposta no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Explique cada uma das passagens (I), (II), (III) e (IV) dos cálculos anteriores.

Demonstramos que, se uma reta s (com coeficiente angular igual a m_2) é **perpendicular** a outra reta r (com coeficiente angular igual a m_1), $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Não demonstraremos aqui, mas a recíproca é verdadeira, ou seja, dadas a reta s (com coeficiente angular igual a m_2) e a reta r (com coeficiente angular igual a m_1), se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ então as duas retas são perpendiculares entre si.

Duas retas r e s, com coeficientes angulares m_1 e m_2, são perpendiculares se, e somente se, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, com $m_1 \neq 0$ e $m_2 \neq 0$.

Exemplo:

A reta r passa pelos pontos $A(5, -2)$ e $B(-1, 0)$ e é perpendicular à reta s, que contém o ponto $C(4, 3)$. Vamos determinar a equação de s.

Determinamos o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e B:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_r = \frac{0-(-2)}{-1-5} \Rightarrow m_r = -\frac{1}{3}$$

Conforme condição de perpendicularidade, determinamos o coeficiente angular da reta s.

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$m_s = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m_s = 3$$

Equação da reta s que contém o ponto $C(4, 3)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = 3 \cdot (x - 4)$$

$$y - 3 = 3x - 12 \Rightarrow y = 3x - 9 \rightarrow \text{Equação da reta } s$$

Exercícios resolvidos

1. Para qual valor positivo de **k**, as retas com equações $k \cdot x + 2y - 5 = 0$ e $4x + 8y + 13 = 0$ são paralelas? É possível as retas serem coincidentes para algum valor de k? E concorrentes?

$$-\frac{k}{2} = -\frac{4}{8} \Rightarrow k = 1$$

Assim, as equações de retas são $x + 2y - 5 = 0$ e $4x + 8y + 13 = 4\left(x + 2y + \frac{13}{4}\right) = 0$. Como $-5 \neq \frac{13}{4}$, as retas não são coincidentes independentemente do valor de $\boldsymbol{k}$.

Assim, para $\boldsymbol{k} = 1$ as retas são paralelas e não há valor de k que faça as retas serem coincidentes. Para $k \neq 1$, as retas são concorrentes.

2. Com relação às retas com equações $(k + 1) \cdot x + (k - 1) \cdot y = 2$ e $(k - 2) \cdot x + k \cdot y = 3$:

a) determine o valor de $\boldsymbol{k}$ para que as retas sejam paralelas;

b) determine os valores de $\boldsymbol{k}$ para que as retas sejam concorrentes;

c) verifique se existe valor de $\boldsymbol{k}$ para as retas serem coincidentes.

a) $-\frac{k+1}{k-1} = -\frac{k-2}{k} \Rightarrow k^2 + k = k^2 - k - 2k + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

b) $k \neq \frac{1}{2}$

c) Para $k = \frac{1}{2}$, as equações das retas são $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 2$ e $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 3$. Logo, não existe valor de ***k*** para que as retas sejam coincidentes.

3. A reta *t* é perpendicular à reta de equação $x - 3y + 5 = 0$ no ponto $(-2; 1)$.

a) Qual é o coeficiente angular da reta *t*?

b) Qual é a equação geral da reta *t*?

c) Qual é a equação reduzida da reta *t*?

a) $x - 3y + 5 = 0$

$-3y = -x - 5$

$y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{5}{3}$

Assim, o coeficiente angular da reta *r* é igual a –3.

b) $y - 1 = -3 \cdot (x + 2) \rightarrow 3x + y + 5 = 0$

c) $3x + y + 5 = 0 \rightarrow y = -3x - 5$

4. Determine a equação da reta que passa pelo ponto de interseção das retas com equações $x + y = 11$ e $x - y = 1$ e é paralela à reta de equação $3x - 5y + 1 = 0$.

Inicialmente determinamos as coordenadas do ponto correspondente a interseção das retas, isto é

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$2x = 12$

$x = 6$ e $y = 5$

$(6,5)$

Obtemos agora o coeficiente angular da reta, escrevendo-a na forma reduzida

$3x - 3y + 5 = 0$

$5y = -3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

A equação da reta será:

$y - 5 = \frac{3}{5}(x - 6)$

$5y - 25 = 3x - 18$

$3x - 5y + 7 = 0$

5. Observando um paralelogramo ABCD no plano cartesiano, conhecemos três de seus vértices A(0,1), B(7,2) e C(10,5). Obtenha as equações das retas que contém os lados AB e CD, considerando que o lado CD é paralelo ao lado AB.

A equação da reta que contém o lado AB

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 7y - 2x = 0$

$-x + 7y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + 1$

Como a reta que contém AB é paralela à reta que contém CD, podemos obter a equação da reta CD

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 5 = \frac{1}{7} \cdot (x - 10)$

$y - 5 = \frac{1}{7}x - \frac{10}{7} \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{25}{7}$

6. No plano cartesiano foram marcados os pontos A(3,5) e B(9,11). Determine a equação da reta que é perpendicular à reta que contém AB e passa pelo ponto médio de AB, isto é, obtenha a equação da reta mediatriz do segmento AB.

Calculamos as coordenadas do ponto médio M do segmento AB

$x_M = \frac{3 + 9}{2} \Rightarrow x_M = 6$

$y_M = \frac{5 + 11}{2} \Rightarrow y_M = 8$

Coeficiente angular da reta que contém AB

$m_{AB} = \frac{11 - 5}{9 - 3} = 1$

Coeficiente angular da reta mediatriz

$m = -\frac{1}{m_{AB}}$

$m = -\frac{1}{1} \Rightarrow m = -1$

Equação da mediatriz

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 8 = -1 \cdot (x - 6)$

$y - 8 = -x + 6 \Rightarrow y = -x + 14$

Exercícios propostos

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Verifique a posição relativa das retas de cada um dos pares a seguir.

a) $2x + y - 1 = 0$ e $x - y + 5 = 0$ Concorrentes.

b) $3x - 6y - 6 = 0$ e $-x + 2y + 2 = 0$ Coincidentes.

c) $x + 2y + 4 = 0$ e $4x - 2y - 1 = 0$ Perpendiculares (concorrentes)

d) $3x - 2y + 5 = 0$ e $-3x + 2y + 3 = 0$ Paralelas

e) $x + 1 = 0$ e $y - 2 = 0$ Perpendiculares (concorrentes)

2. As equações das retas que contêm os lados de um triângulo são $x + y - 5 = 0$, $x - y - 1 = 0$ e $2x - 3y - 15 = 0$. Respostas no Manual do Professor.

a) Determine os vértices do triângulo.

b) Calcule o perímetro do triângulo.

c) Verifique se o triângulo é retângulo.

3. Em seu caderno, indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente:

I. Duas retas paralelas e não verticais têm coeficiente angular igual. V

II. Duas retas com coeficiente angular igual são paralelas. V

III. Duas retas paralelas têm coeficiente linear igual. F

IV. O produto do coeficiente angular de duas retas perpendiculares é 1. Considere que nenhuma das retas é vertical. F

V. Duas retas em um plano que não são paralelas são perpendiculares. F.

4. A reta *r* é paralela à reta com equação $2x + 3y + 1 = 0$ e passa pelo ponto (1; 1).

a) Qual é o coeficiente angular da reta *r*? $--\frac{2}{3}$

b) Qual é sua equação geral? $2x + 3y - 5 = 0$

c) Qual é sua equação reduzida? $y = -\frac{2}{3}x = \frac{5}{3}$

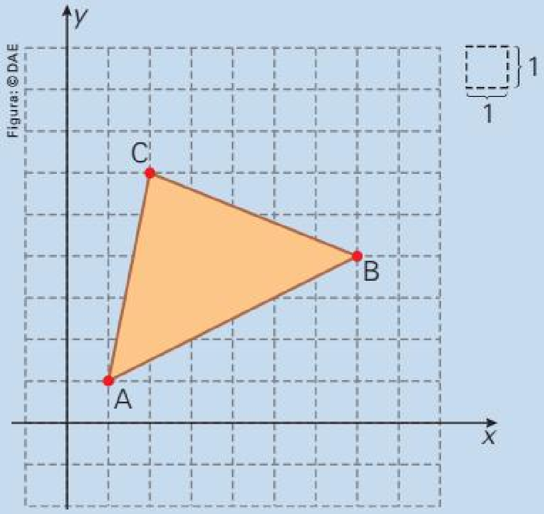
5. As equações das retas *r* e *s* são dadas por $2x + 3y + 1 = 0$ e $x + k \cdot y - 1 = 0$, respectivamente.

a) Qual é o valor de $\boldsymbol{k}$ para que as retas *r* e *s* sejam paralelas? $k = \frac{3}{2}$

b) Qual é o valor de $\boldsymbol{k}$ para que as retas *r* e *s* sejam perpendiculares? $k = -\frac{2}{3}$

6. Determine a equação da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas com equações $2x - y - 7 = 0$ e $3x + 5y - 17 = 0$ e é perpendicular à reta com equação $x + 2y = 5$. $2x - y - 7 = 0$

7. Na figura, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.



a) Qual é o coeficiente angular da reta que contém o lado AB?

b) Qual é o coeficiente angular da reta que contém a altura relativa ao lado AB?

c) Qual é a equação da reta que contém a altura relativa ao lado AB?

d) Qual é o coeficiente angular da reta que contém o lado AC?

e) Qual é o coeficiente angular da reta que contém a altura relativa ao lado AC?

f) Qual é o coeficiente angular da reta que contém o lado BC?

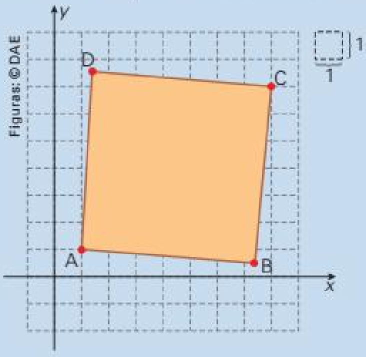
g) Qual é o coeficiente angular da reta que contém a altura relativa ao lado BC?

Respostas no Manual do Professor.

8. Denomina-se mediatriz de um segmento AB a reta perpendicular ao segmento em seu ponto médio. Assim, determine a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos A(1; 1) e B(5; 9). $x + 2y - 13 = 0$

9. Qual é a equação da reta equidistante das retas r: $3x - y - 7 = 0$ e s: $3x - y + 5 = 0$?
$3x - y - 1 = 0$

10. Os vértices de um quadrado são os pontos A, B, C e D, como mostra a figura a seguir.

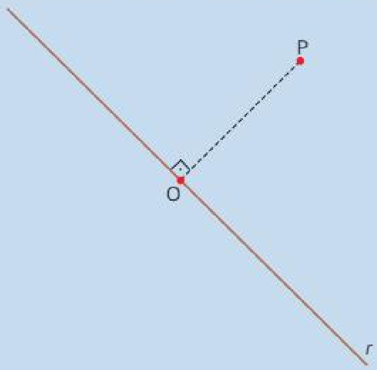


a) Qual é o coeficiente angular da reta que contém a diagonal AC? $m_{AC} = \frac{6}{7}$

b) Qual é o ponto de interseção das diagonais AC e BD? $\left(\frac{9}{2}; 4\right)$

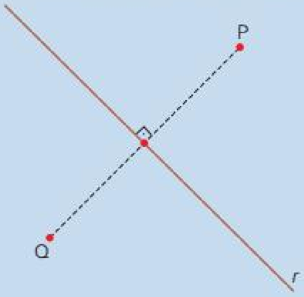
c) Qual é a equação da reta que contém a diagonal BD? $14x + 12y - 111 = 0$

11. Na figura, o ponto O denomina-se projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r.



Se a equação da reta r é $x + y - 3 = 0$ e P(5; 4), determine a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r. O(2; 1)

12. Na figura abaixo, os pontos P e Q são simétricos em relação à reta r.



Se a equação da reta r é $x + y - 4 = 0$ e P(4; 2), determine as coordenadas do ponto Q. Q(2; 0)

13. Represente, no plano cartesiano, três pontos A, B e C não alinhados. Você escolhe as coordenadas desses pontos. A seguir, obtenha: Respostas pessoais.

a) os coeficientes angulares das retas suportes desses lados;

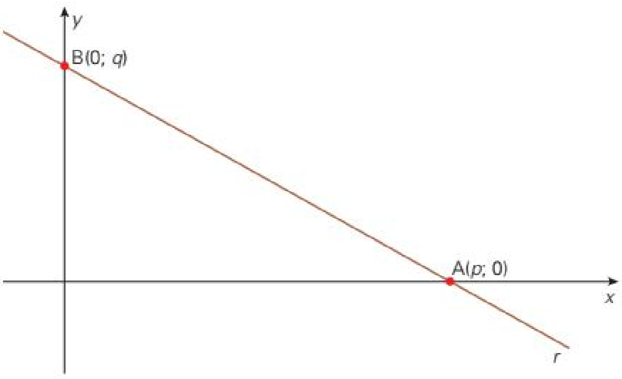
b) as equações dessas retas.

Outras formas de equações da reta

As duas formas de equações da reta apresentadas (a forma geral e a forma reduzida) são as mais utilizadas em Geometria Analítica quando estudamos as retas. Outras duas formas de equação serão apresentadas aqui: a equação **segmentária** e a equação **paramétrica**.

Equação segmentária da reta

Considere que uma reta *r* intersecta o eixo das abscissas no ponto **A(*p*, 0)** e o eixo das ordenadas no ponto **B(0, *q*)**, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$, conforme representado a seguir:



Como se conhecem dois pontos da reta, pode-se determinar seu coeficiente angular:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_r = \frac{q-0}{0-p} \Rightarrow m_r = -\frac{q}{p}$$

Considerando o coeficiente linear da reta igual a *q* (ordenada em que a reta intersecta o eixo *y*), pode-se obter a equação reduzida de *r*:

$$y = mx + n$$

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

Essa equação, após algumas operações, pode ser escrita de outra forma:

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

$$py = -qx + pq$$

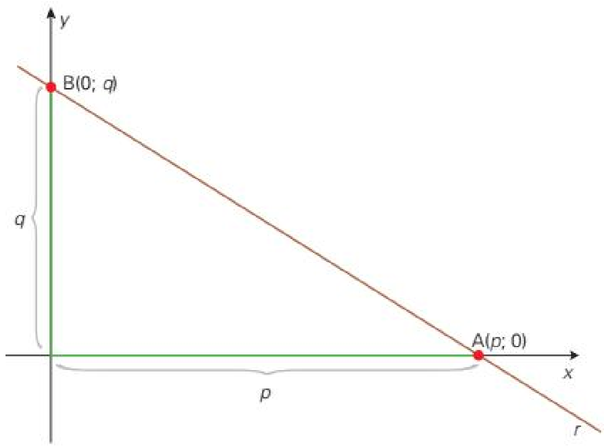
$$qx + py = pq$$

$\downarrow$dividindo por pq

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Equação da reta na **forma segmentária**

Essa forma é denominada equação **segmentária** da reta. Como o nome sugere, a equação segmentária está relacionada, de forma direta, aos segmentos determinados pela reta quando intersecta os eixos coordenados. Na figura a seguir estão destacados os segmentos que a intersecção determina:



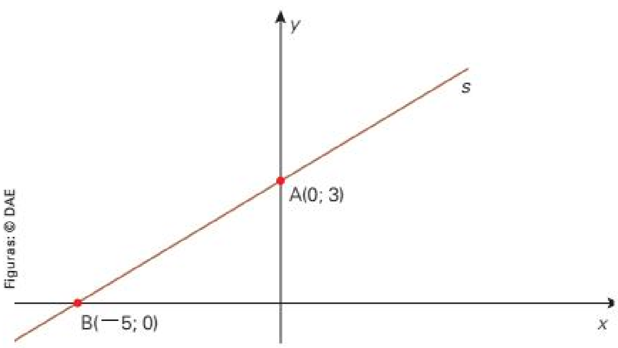
Observação:

Uma reta poderá ter equação com forma segmentária quando intersectar os dois eixos coordenados em pontos distintos, isto é, a reta não poderá passar pela origem do sistema de coordenadas cartesianas e também não poderá ser paralela a nenhum dos eixos coordenados.

Exemplo:

No plano cartesiano a seguir está representada a reta *s*. Vamos obter sua equação geral.

Figuras: © DAE



Inicialmente podemos obter a equação da reta na forma segmentária a partir dos pontos em que intersecta os eixos coordenados:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$$

Multiplicando membro a membro por 15 (número que é múltiplo dos denominadores):

$$15\cdot\left(\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}\right)=15\cdot 1$$

$$-3x+5y=15 \Rightarrow 3x-5y+15=0$$

Equações paramétricas da reta

As três formas de equação da reta apresentadas até aqui (geral, reduzida e segmentária) relacionam apenas x e y, isto é, são escritas em função das coordenadas de um ponto genérico $P(x; y)$. Nas **equações paramétricas**, utiliza-se uma terceira variável (será representada pela letra t), que se denomina **parâmetro**. Nessa forma, x e y são representados em função do parâmetro t.

Exemplo:

Consideremos que a reta r seja dada pelas seguintes equações paramétricas:

$$r \rightarrow \begin{cases} x=9-2t \\ y=4+5t \end{cases}$$

Como estamos expressando x e y em função do parâmetro t, para obter pontos quaisquer dessa reta, podemos atribuir valores a t:

$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=9-2\cdot 0 \Rightarrow x=9 \\ y=4+5\cdot 0 \Rightarrow y=4 \end{cases} \longrightarrow$ (9; 4) é um ponto da reta

$t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=9-2\cdot 1 \Rightarrow x=7 \\ y=4+5\cdot 1 \Rightarrow y=9 \end{cases} \longrightarrow$ (7; 9) é um ponto da reta

$t=2 \Rightarrow \begin{cases} x=9-2\cdot(-2) \Rightarrow x=13 \\ y=4+5\cdot(-2) \Rightarrow y=-6 \end{cases} \longrightarrow$ (13; −6) é um ponto da reta

A partir das equações paramétricas, podemos obter as outras formas de equações da reta, eliminando o parâmetro t. Para tanto, isolamos t nas duas equações:

$$\begin{cases} x=9-2t \Rightarrow \dfrac{x-9}{-2}=t \\ y=4+5t \Rightarrow \dfrac{y-4}{5}=t \end{cases}$$

Comparando as duas equações obtidas, temos:

$$\frac{x-9}{-2}=\frac{y-4}{5}$$

$$5x-45=-2y+8$$

$$5x+2y-53=0$$

A partir dessa equação geral, podemos, se quisermos, obter as demais formas.

Exercícios resolvidos

1. Considere a reta r de equação $3y+4x-2=0$ e o ponto $P(4; 6)$. Determine a equação segmentária da reta s que é perpendicular à reta r e passa pelo ponto P.

$3y+4x-2=0 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$m_r=\frac{4}{3}$, assim, $m_s=-\frac{1}{m_r} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_s=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$

A equação geral de s é

$y-6=\frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow 3x-4y+12=0$

Logo,

$3x-4y+12=0 \Rightarrow -3x+4y=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}=\frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$

A equação segmentária da reta s é:

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1.$

2. Uma reta é definida pelas equações paramétricas a seguir:

$$\begin{cases} x=5-1 \\ y=2t+3 \end{cases}$$

a) Escreva a equação geral dessa reta.

b) Escreva sua equação reduzida.

a) $x = 5 - t \therefore t = 5 - x$

$y = 2t + 3$

$y = 2 \cdot (5 - x) + 3 \therefore 2x + y - 13 = 0$

b) $y = -2x + 13$

3. Qual é a distância entre os pontos de interseção da reta cuja equação é $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$ com os eixos coordenados?

$\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$

$x = 0 \rightarrow y = 8 \therefore A(0; 8)$

$y = 0 \rightarrow x = -6 \therefore B(-6; 0)$

$d_{A,B} = \sqrt{(-6-0)^2 + (0-8)^2} = 10$

4. No plano cartesiano foi esboçada a seguinte reta que passa pelos pontos (0,2) e (4,0). A partir do gráfico, obtenha

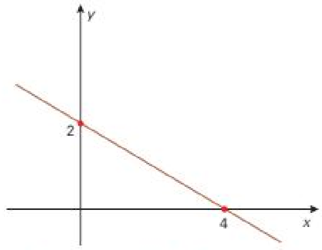


Figura: © DAE

a) a equação segmentária da reta;

b) a equação geral da reta.

a) Observando os segmentos determinados pela reta nos eixos coordenados, temos:

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \qquad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

b) A partir da equação segmentária, podemos determinar a equação geral

$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

$\downarrow \cdot 4$

$4\left\{\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right\} = 4 \cdot 1$

$x + 2y = 4 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. A equação geral de uma reta é dada por $2x + 4y - 16 = 0$. Escreva sua equação:

a) reduzida; $y = -\frac{1}{2}x + 4$

b) segmentária. $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$

2. Observe no plano cartesiano a seguir a reta representada. Obtenha: Respostas no Manual do Professor.

a) a equação segmentária dessa reta;

b) a equação geral dessa reta.

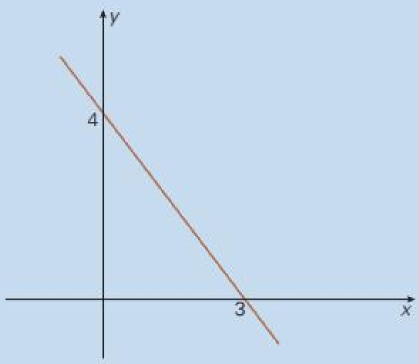


Figura: © DAE

3. Duas partículas, A e B, movimentam-se no plano de tal forma que, em cada instante t, a posição de cada uma é dada, respectivamente, pelos pontos $(t + 1; 4 - t)$ e $(3t - 4; 2t - 1)$. Indique, em seu caderno, V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. No instante $t = 2$, a partícula A encontra-se no ponto (3; 2). V

II. No instante $t = 3$, a partícula B encontra-se no ponto (7; 6). F

III. As partículas A e B passam pelo ponto (2; 3). V

IV. As partículas chocam-se no ponto (2; 3). F

V. No instante $t = 5$, a distância entre as partículas é $5\sqrt{5}$ u. V

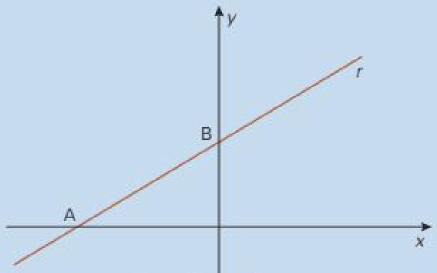
4. A posição de duas partículas X e Y é dada, em cada instante t, em segundos, pelas equações paramétricas a seguir.

$X: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 3 \end{cases}$ e $Y: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 1 \end{cases}$

a) Determine o ponto em que as trajetórias descritas pelas partículas X e Y intersectam-se. (10; 3)

b) As partículas chocam-se ao longo de suas trajetórias? Em caso afirmativo, em qual ponto esse choque ocorre? Não.

5. No plano cartesiano está representada a reta r, que passa pelos pontos $A(-10; 0)$ e $B(0; 5)$.



Respostas no Manual do professor.

a) Escreva, na forma segmentária, a equação dessa reta.

b) A partir da equação segmentária, escreva sua equação reduzida.

c) Obtenha a área do triângulo limitado pela reta r e pelos eixos coordenados.

6. No plano cartesiano, a reta que divide o primeiro quadrante e o terceiro é chamada bissetriz dos quadrantes ímpares e a reta que divide o segundo quadrante e o quarto é chamada bissetriz dos quadrantes pares.

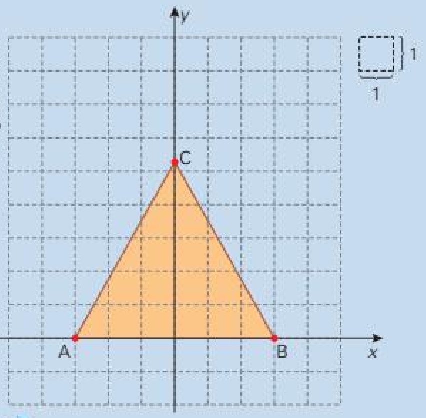
a) Escreva a equação reduzida da bissetriz dos quadrantes ímpares e a equação reduzida da bissetriz dos quadrantes pares.

b) Qual é o ângulo formado pelas duas bissetrizes?

Respostas no Manual do Professor.

7. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero.

Figuras: © DAE



$y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$

a) Qual é a equação da reta que contém o lado AC?

b) Qual é a equação da reta que contém a altura relativa ao lado BC? $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

8. A equação reduzida da reta r é dada por $y = 3x + 4$. Determine os pontos pertencentes a essa reta que estão distantes 5 unidades do ponto com coordenadas $(4; 3)$. Respostas no Manual do Professor.

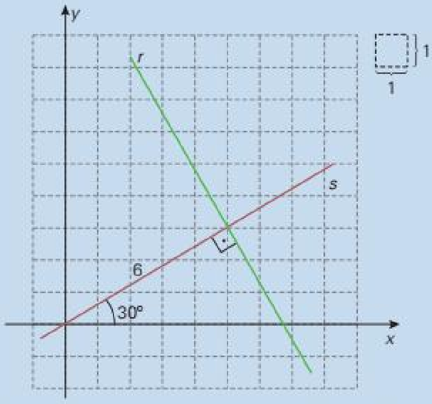
9. Uma reta passa pelos vértices das parábolas com equações $y = x^2 - 6x + 5$ e $y = -x^2 + 2x + 3$.

a) Qual é o coeficiente angular dessa reta? -4

b) Qual é sua equação geral? $4x + y - 8 = 0$

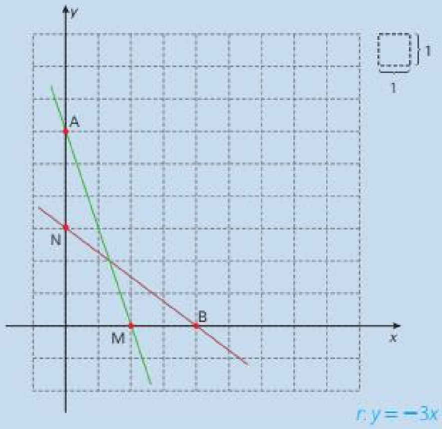
c) Qual é sua equação reduzida? $y = -4x + 8$

10. Na figura a seguir, as retas r e s são perpendiculares.



Se a distância da origem à reta r é 6, qual é a equação geral da reta r? $-\sqrt{3}x + 12$

11. As retas r e s são determinadas, respectivamente, pelos pontos A e M e B e N, como mostra a figura a seguir:



$r: y = -3x + 6$

a) Determine a equação das retas r e s. e $s: y = -\frac{3x}{4} + 3$

b) Determine as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s. $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$

12. As equações paramétricas de duas retas r e s no plano cartesiano são:

$$r \rightarrow \begin{cases} x = 3 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \end{cases} \qquad s \rightarrow \begin{cases} x = 3 - k \\ y = 2 \cdot t \end{cases}$$

Considerando que t e k são parâmetros reais, determine

a) a equação reduzida da reta r; $y = \frac{2}{3}x$

b) a equação reduzida da reta s; $y = -x + 5$

c) o ponto de intersecção das retas r e s. $(3; 2)$

13. Elabore uma equação da reta na forma paramétrica e depois obtenha a equação dessa mesma reta na forma:

a) geral;

b) reduzida;

c) segmentária.

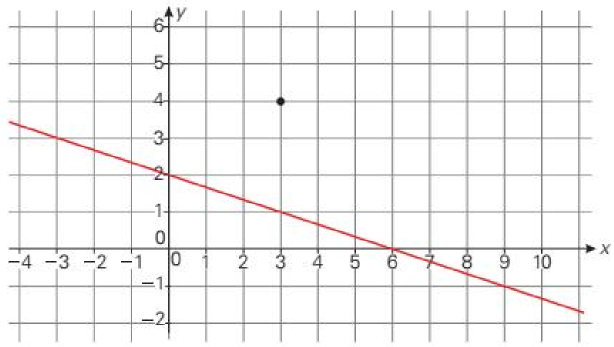
Em seguida, represente no plano cartesiano a reta correspondente. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 6 DISTÂNCIA, ÁREA E ÂNGULOS

Nesta unidade vimos como é possível calcular a distância entre dois pontos conhecendo suas coordenadas no plano cartesiano. Vimos também que o coeficiente angular de uma reta, escrita na forma reduzida, nada mais é que a tangente do ângulo formado por ela com o eixo x, no sentido anti-horário. Veremos agora outras relações entre pontos e retas no plano cartesiano.

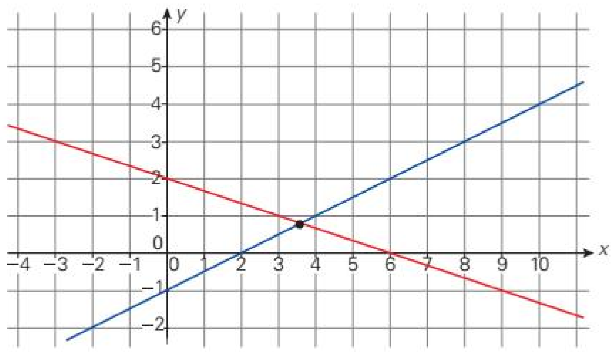
Os objetivos são:

1. calcular a distância de um ponto, conhecendo suas coordenadas, a uma reta conhecendo sua equação;

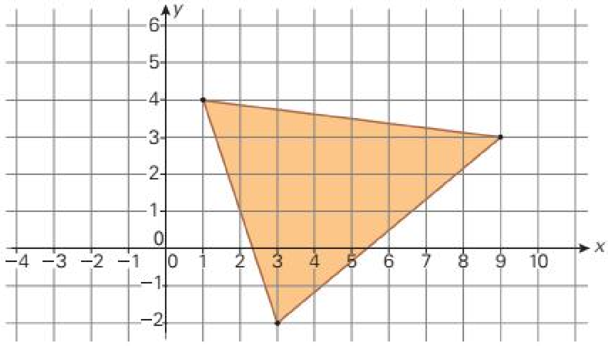


Gráficos: © DAE

2. obter a medida do ângulo entre duas retas concorrentes conhecendo suas equações;



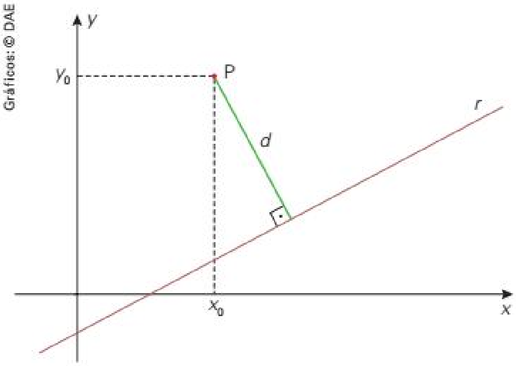
3. calcular a área de um triângulo conhecendo as coordenadas de seus vértices.



Distância de ponto a reta

Considere, agora, outra situação também relacionada à distância: dado um ponto $\mathbf{P}(x_0, y_0)$ do plano cartesiano e uma reta *r* com equação $ax + by + c = 0$, pretende-se determinar a distância do ponto à reta, conforme indicado na figura abaixo:

Gráficos: © DAE



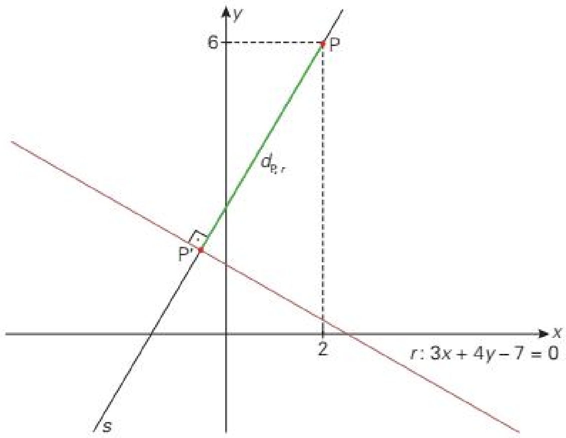
Conforme representado na figura acima, essa distância é a "menor das distâncias", isto é, na direção perpendicular à reta. Esse problema poderá ser reduzido a outro mais simples: distância entre dois pontos.

Para reduzir o problema à distância entre dois pontos, é necessário obter as coordenadas do ponto correspondente à projeção ortogonal do ponto P dado na reta *r*.

Exemplo:

Vamos determinar a distância do ponto P(2, 6) à reta *r*, com equação geral $3x + 4y - 7 = 0$. Para reduzir esse problema à distância entre dois pontos, precisaremos determinar as coordenadas do ponto P', correspondente à projeção ortogonal do ponto P sobre a reta *r* dada.

Para isso, conforme esboçado no gráfico, vamos determinar a equação da reta *s*, perpendicular à reta *r*. Assim, as coordenadas do ponto P' serão obtidas pela interseção das duas retas, isto é, resolveremos o sistema formado por suas equações.



Coeficiente angular da reta *r*:

$$3x + 4y - 7 = 0$$

$$4y = -3x + 7$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow m_r = -\frac{3}{4}$$

Coeficiente angular da reta s, perpendicular à reta r:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$m_s = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} \Rightarrow m_s = \frac{4}{3}$$

Obtemos a equação da reta *s*, que contém o ponto P(2, 6):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{4}{3} \cdot (x - 2)$$

$$3y - 18 = 4x - 8 \Rightarrow 4x - 3y + 10 = 0$$

Determinamos a interseção das duas retas, resolvendo o sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ 4x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ resolvendo, temos:

$$x = -\frac{19}{25} \text{ e } y = \frac{58}{25}$$

Portanto, o ponto P' tem coordenadas $\left(-\frac{19}{25}, \frac{58}{25}\right)$

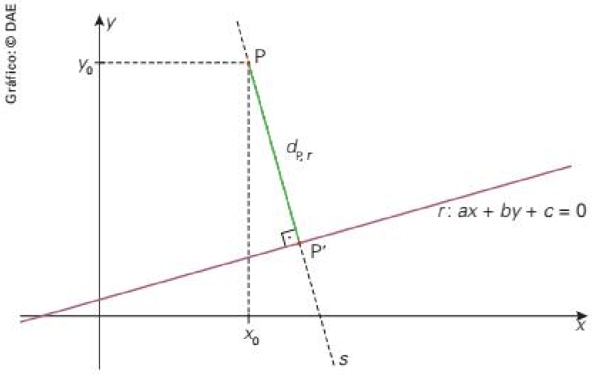
Assim, a distância do ponto à reta corresponde à distância entre os pontos P e P':

$$d_{P,P'} = \sqrt{\left(-\frac{19}{25} - 2\right)^2 + \left(\frac{58}{25} - 6\right)^2}$$

$$d_{P,P'} = \sqrt{\frac{4761 + 8464}{625}} \Rightarrow d_{P,P'} = \frac{23}{5}$$

Observando todas as etapas para determinação da distância do ponto à reta, conforme exemplo dado, constata-se tratar de uma resolução trabalhosa. Seguindo a mesma estratégia desenvolvida no exemplo, procura-se obter uma relação matemática que torne mais simples este cálculo.

Genericamente se consideram um ponto **P(x_0, y_0)** e uma reta *r* com equação geral dada por $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, representados, a seguir, no plano cartesiano. Deve-se considerar que a reta *s* passa pelo ponto P e é perpendicular à reta *r*. Além disso, o ponto P' é a interseção das retas *r* e *s*.



Como *r* e *s* são perpendiculares, a partir da equação da reta *r* e da condição de perpendicularidade de retas, é possivel obter os dois coeficientes angulares.

Coeficiente angular da reta *r*:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow m_r = -\frac{a}{b}$$

Coeficiente angular da reta *s*:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$m_s = -\frac{1}{-\frac{a}{b}} \Rightarrow m_s = \frac{b}{a}$$

Obtendo a equação da reta *s*:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$ay - ay_0 = bx - bx_0 \Rightarrow -bx + ay + bx_0 - ay_0 = 0$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas *r* e *s*, são obtidas as coordenadas do ponto P' (a resolução do sistema não será demonstrada aqui). Dessa forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay + bx_0 - ay_0 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ resolvendo o sistema

$$x = \frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} \text{ e } y = \frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}$$

Como foram obtidas as coordenadas do ponto P', utiliza-se agora a fórmula da distância entre dois pontos para calcular a distância entre os pontos P e P', ou seja:

$$d_{P,r} = d_{P,P'}$$

$$d_{P,r} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$(d_{P,r})^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$\downarrow$ substituindo *x* e *y*

$$(d_{P,r})^2 = \left[\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} - x_0\right]^2 + \left[\frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2} - y_0\right]^2$$

$$(d_{P,r})^2 = (-a)^2 \cdot \left(\frac{c + by_0 + ax_0}{a^2 + b^2}\right)^2 + (-b)^2 \cdot \left(\frac{c + ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}\right)^2$$

$$(d_{P,r})^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$(d_{P,r})^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)}$$

$$d_{P,r} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} \Rightarrow d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A distância $d_{P,r}$ de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta r com equação geral $ax + by + c = 0$ pode ser determinada pela seguinte relação matemática:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo:

Considerando o exemplo do começo deste capítulo, vamos calcular, pela relação matemática anterior, a distância do ponto P(2, 6) à reta r com equação geral $3x + 4y - 7 = 0$.

Observando a equação da reta e as coordenadas do pontos, temos:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|6 + 24 - 7|}{\sqrt{25}} \Rightarrow d_{P,r} = \frac{23}{5} \text{ u.c.}$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule a distância do ponto (2; 3) à reta com equação $3x + 4y + 2 = 0$.

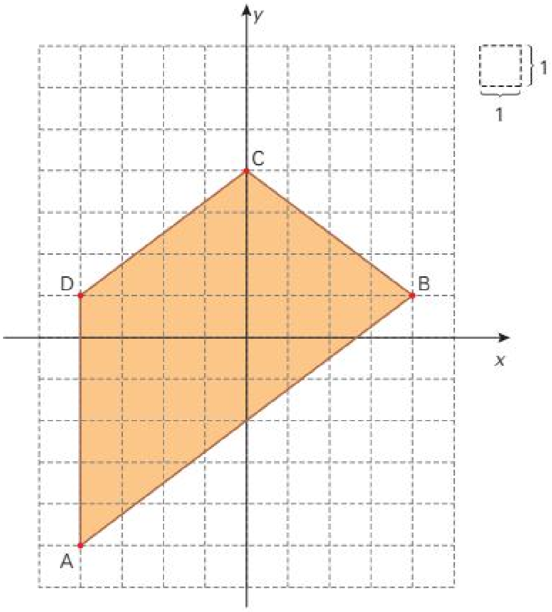
Seja d a distância do ponto (2; 3) à reta $3x + 4y + 2 = 0$. Temos que:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

A distância pedida é 4.

2. Os vértices de um trapézio são os pontos A(−4; −5), B(4; 1), C(0; 4) e D(−4; 1), como mostra a figura a seguir.

Gráfico: © DAE



a) Qual é a equação da reta que contém o lado AB?

b) Qual é a medida da altura do trapézio?

a) $m_{AB} = \frac{1 - (-5)}{4 - (-4)} = \frac{3}{4}$

$y - 1 = \frac{3}{4} \cdot (x - 4) \rightarrow 3x - 4y - 8 = 0$

b) Seja h a medida da distância do ponto C à reta que contém o lado AB. Temos que:

$$h = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{24}{5}$$

Assim, a altura do trapézio é $\frac{24}{5}$.

3. A distância do ponto (3; k) à reta com equação $x - 3y + 3 = 0$ é 5. Determine os possíveis valores de k.

$$5 = \frac{|1 \cdot 3 - 3 \cdot k + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \Rightarrow 5\sqrt{10} = |6 - 3k|$$

Assim:

$5\sqrt{10} = 6 - 3k \Rightarrow k = \frac{6 - 5\sqrt{10}}{3}$

ou

$5\sqrt{10} = -6 + 3k \Rightarrow k = \frac{6 + 5\sqrt{10}}{3}$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

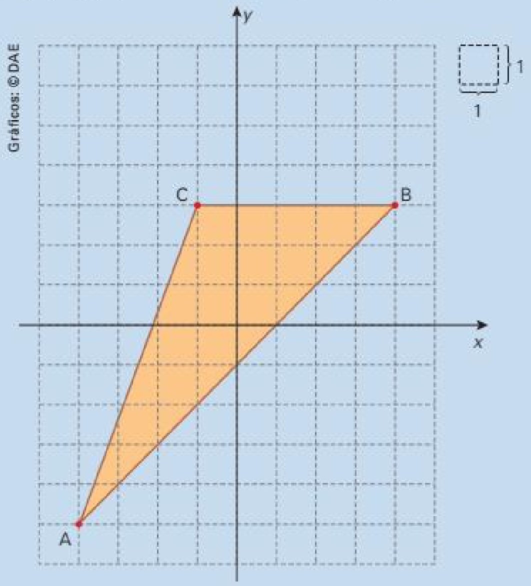
1. Indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.
   I. A distância de um ponto a uma reta é sempre um número positivo. F
   II. A distância de um ponto a uma reta pode ser nula. V
   III. A distância da origem do sistema cartesiano à reta com equação $3x - 4y + 1 = 0$ é 1. F
   IV. A distância do ponto (2; –5) à reta com equação $3x + y - 1 = 0$ é zero. V
   V. A distância de um ponto a uma reta pode ser um número negativo. F

2. Uma reta *r* passa pelos pontos (1; 2) e (3; 1).
   a) Qual a equação da reta *r*? $x + 2y - 5 = 0$
   b) Qual a distância da reta *r* à origem do sistema cartesiano? $\sqrt{5}$

3. Vamos considerar duas retas paralelas com equações $2x - y - 1 = 0$ e $2x - y - 10 = 0$, respectivamente. Para obter a distância entre essas duas retas, uma maneira é obter um ponto de uma reta (atribuindo um valor a *x* e obtendo o valor correspondente de ***y***) e calcular a distância desse ponto à outra reta. A (4; 7)
   a) Determine o ponto A pertencente à primeira reta, considerando que a abscissa desse ponto é 4.
   b) Calcule a distância do ponto A, determinado no item anterior, à segunda reta, cuja equação foi dada. $\frac{9}{\sqrt{5}}$

4. Os vértices de um triângulo ABC são os pontos (–4; –5), (–1; 3) e (4; 3), como mostra a figura a seguir:

Gráficos: © DAE



   a) Qual o coeficiente angular da reta que contém o lado AB? 1
   b) Qual a equação da reta que contém o lado AB? $x - y - 1 = 0$
   c) Qual a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado AB? $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

5. Em um quadrado ABCD, o vértice A é o ponto (1; 3) e a diagonal BD está contida na reta com equação $5x + 12y + 11 = 0$.
   a) Qual é a medida da diagonal desse quadrado? 8 u
   b) Qual é a área desse quadrado? 32 u²

6. Calcule a distância entre as retas com equações $3x + 4y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 8 = 0$, respectivamente. $\frac{7}{5}$

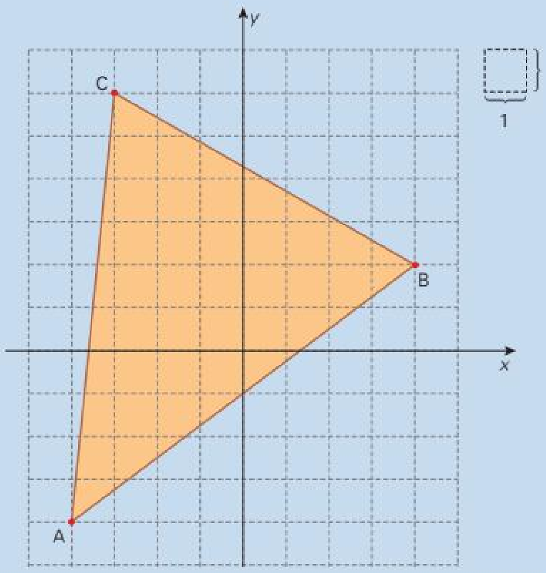
7. A distância do ponto P(*k*; 1) à reta com equação $3x + 4y - 2 = 0$ é igual a 4. Determine a soma dos possíveis valores de ***k***. $-\frac{4}{3}$

8. Quais os pontos que pertencem à reta com equação $y = 3$ e distam 5 unidades da reta com equação $12x - 5y - 4 = 0$? (7; 3) e $\left(-\frac{23}{6}; 3\right)$

9. Uma reta passa pelo ponto P(0; 1) e dista $\sqrt{5}$ unidades do ponto (5; 1).
   a) Escreva a equação reduzida da reta em função do coeficiente angular ***m***. $y = mx + 1$
   b) Quais os possíveis valores para ***m*** e as correspondentes equações de retas? Respostas no Manual do Professor.

10. Considere um triângulo limitado pelos eixos coordenados e a reta com equação $x + 3y - 6 = 0$.
   a) Quais as coordenadas dos vértices desse triângulo?
   b) Qual a medida da altura do triângulo em relação ao lado contido na reta dada? $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

11. Na figura a seguir, representa-se o triângulo ABC.



a) Qual é a medida do lado AB? 10

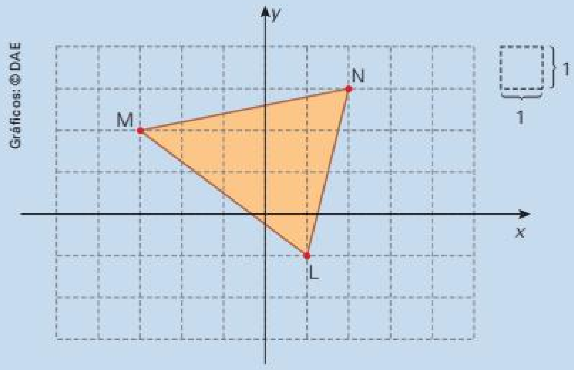
b) Qual é o coeficiente angular da reta que contém o lado AB? $\frac{3}{4}$

c) Qual é a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado AB? $\frac{37}{5}$

d) Qual é a área do triângulo ABC? $37\ u^2$

12. Observe o triângulo MNL representado no plano cartesiano abaixo:

Gráficos: © DAE

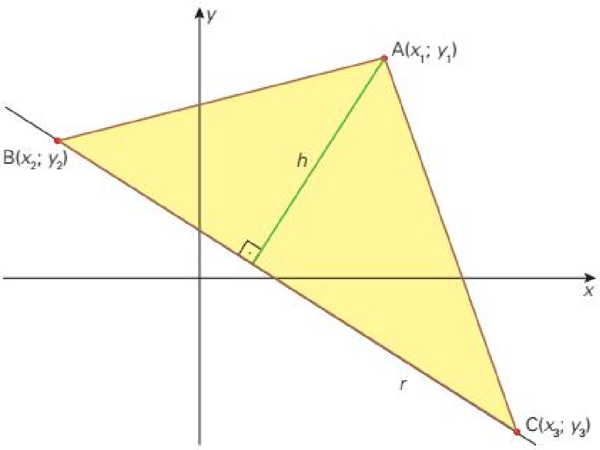


a) Elabore um problema que relacione o vértice M e a reta que passa pelos pontos L e N.

b) Elabore um problema que relacione a origem do sistema de coordenadas cartesianas e a reta que passa pelos pontos M e N. Respostas pessoais.

Área de um triângulo

Anteriormente foi visto como calcular a distância de um ponto a uma reta a partir das coordenadas do ponto e da equação da reta. Observe que, a partir da distância do ponto à reta, podemos calcular a altura de um triângulo, relativa a um dos lados, quando se conhecem as coordenadas dos três vértices.



Conforme a figura acima, obtém-se a equação da reta *r* que contém os pontos B e C. Na sequência, utilizando a relação matemática para a distância do ponto à reta, encontra-se a altura ***h***.

E para calcular a área do triângulo?

Da Geometria Plana, sabe-se que a área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da correspondente altura. Sendo assim, no triângulo ABC representado anteriormente, tem-se:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r}$$

$d_{B,C}$: distância entre os pontos B e C

$d_{A,r}$: distância do ponto A à reta *r*

Essa ideia será utilizada para estabelecer uma forma de calcular a área de um triângulo no plano cartesiano, conhecendo as coordenadas de seus vértices. Considerando o triângulo genérico ABC representado antes no plano cartesiano:

- inicialmente, obtém-se a distância entre os vértices $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$:

$$d_{B,C} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

• determina-se a equação da reta *r* que passa pelos vértices B (x_2, y_2) e C (x_3, y_3):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$xy_2 + x_3y + x_2y_3 - x_3y_2 - xy_3 - x_2y = 0$$

$$(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$$

↓Fazemos: $y_2 - y_3 = a,\ x_3 - x_2 = b$ e $x_2y_3 - x_3y_2 = c$

e, então, podemos escrever $ax + by + c = 0$

• calcula-se a distância do vértice A à reta *r*:

$$d_{A,r} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

↓substituindo a, b e c

$$d_{A,r} = \frac{|(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

Área do triângulo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{|(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |y_2x_1 - y_3x_1 + x_3y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2|$$

• observando o determinante D formado pelas coordenadas dos vértices do triângulo, tem-se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2$$

• dessa forma, pode-se dizer que a área do triângulo ABC é:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

A área do triângulo no plano cartesiano, com vértices nos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pode ser calculada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ sendo } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Resposta no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Qual conclusão podemos tirar, se o determinante D formado a partir das coordenadas dos vértices do triângulo ABC for zero?

Exemplos:

1. Vamos calcular a área do triângulo PQR, conforme representado no plano cartesiano abaixo.

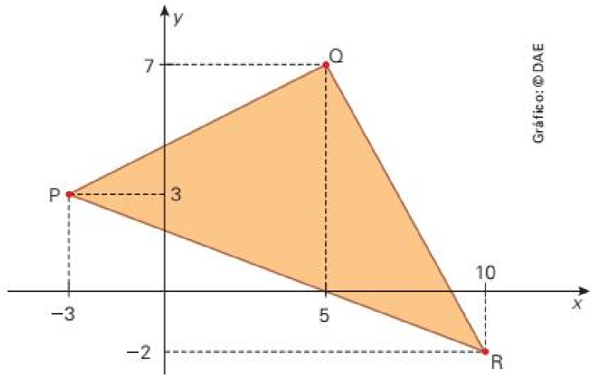


Gráfico: © DAE

Calculamos inicialmente o determinante D:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 10 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -21 + 30 - 10 - 70 - 15 - 6 \Rightarrow D = -92$$

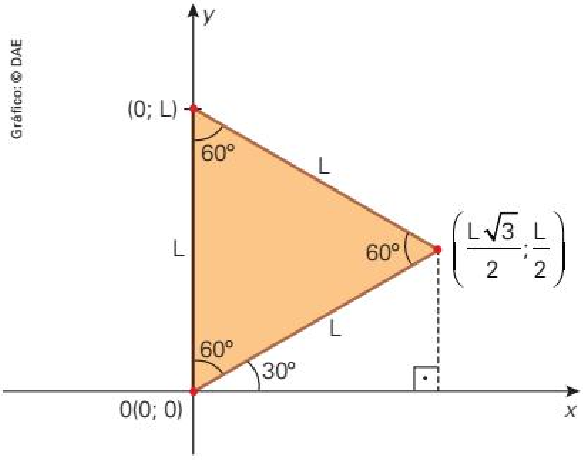
Cálculo da área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |-92| \Rightarrow \text{Área} = 46 \text{ u.a.}$$

2. Utilizando essa relação, podemos estabelecer, analiticamente, a área de um triângulo equilátero com lado L. Para tanto, determinamos os três vértices, conforme a figura a seguir:

Gráfico: © DAE



Observe que consideramos um dos vértices a origem do sistema de coordenadas cartesianas, o outro o ponto (0, L) e, para determinar as coordenadas do outro vértice, utilizamos as relações trigonométricas:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{y}{L}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{L} \Rightarrow y = \frac{L}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{L} \Rightarrow x = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Como temos as coordenadas dos três vértices, calculamos o determinante D:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & L & 1 \\ \frac{L\sqrt{3}}{2} & \frac{L}{2} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$$

Área do triângulo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{L^2\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow \text{Área} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \text{ u.a.}$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule a área do triângulo formado pelos pontos A(0; 2), B(-3; 5) e C(-4; 1).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |-8 - 3 + 20 + 6| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{15}{2} \text{ u.a.}$$

2. Seja T o ponto de interseção das retas $y = x + 2$ e $y = -2x + 5$. Calcule a área do triângulo formado pelo ponto T e pelas interseções das retas com o eixo das abscissas.

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 3$$

A reta $y = x + 2$ intersecta o eixo das abcissas no ponto $(-2; 0)$ e a reta $y = -2x + 5$ intersecta o eixo das abscissas no ponto $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$. Assim:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{15}{2} + 6\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{2} = \frac{27}{4} \text{ u.a.}$$

3. A área do triângulo MNP formado pelos pontos M(-2; 1), N(4; 0) e P(8; k) é 14 unidades de área. Determine os possíveis valores de k.

$$14 = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & k & 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot |8 + 4k + 2k - 4| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28 = |6k + 4|.$$

Logo: $28 = 6k + 4 \Rightarrow k = 4$ ou $-28 = 6k + 4 \Rightarrow k = -\frac{16}{3}$.

4. Num plano cartesiano estão indicados os pontos A(0,1) e B(3,8). Outro ponto C, de abscissa igual a 6, deverá ser representado de tal maneira que o triângulo ABC tenha área igual a 18 u.a. Quais as possibilidades para a ordenada desse ponto C?

Considerando a ordenada desconhecida y do ponto C e utilizando a relação que fornece a área do triângulo, temos:

$$S = \frac{1}{2}|D|$$

$$18 = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow |D| = 36$$

$$36 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 6 & y & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$36 = |0 + 6 + 3y - 48 - 3|$$

$$36 = |3y - 45|$$

$$3y - 45 = 36 \Rightarrow y = 27$$

ou

$$3y - 45 = -36 \Rightarrow y = 3$$

Assim, o ponto C terá coordenadas (6, 27) ou (6, 3).

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Os vértices de um triângulo são os pontos A(0; 0), B(3; 4) e C(6; –8).

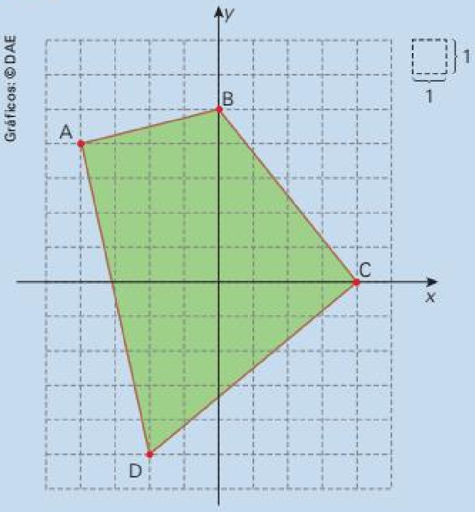
a) Calcule o perímetro desse triângulo. $(15 + 3\sqrt{17})$ u

b) Ele é escaleno, isósceles ou equilátero? O triângulo ABC é escaleno

c) Calcule sua área. 24 u²

2. Para calcular a área de um polígono qualquer, podemos dividi-lo em triângulos. Sendo assim, calcule a área do quadrilátero ABCD representado na figura a seguir. 44 u.a.

Gráficos: © DAE

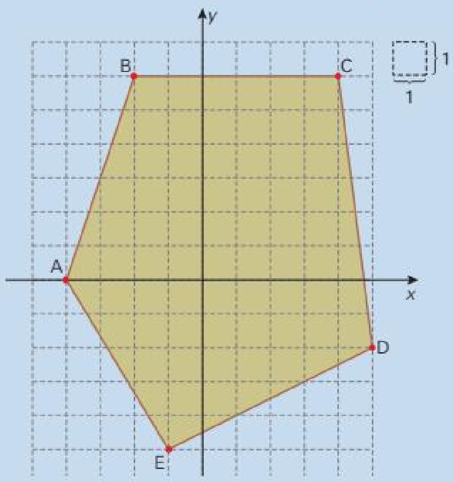


3. Determine os possíveis valores de ***k*** de modo que a área do triângulo cujos vértices são (0; 0), (4; 2) e (1; *k*) seja 15 unidades de área. 8 ou –7

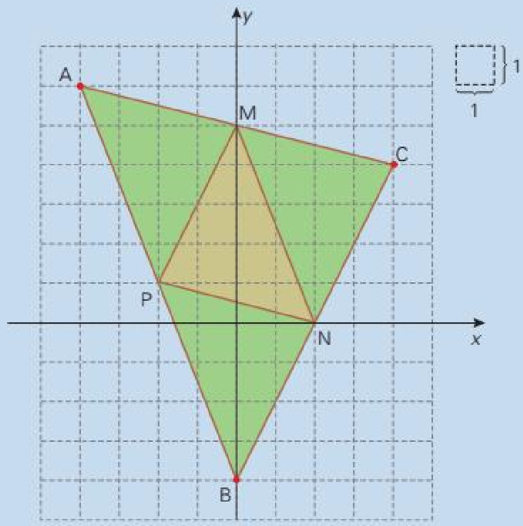
4. Utilize o mesmo procedimento da atividade 2 para calcular a área do pentágono ABCDE.

Sugestão:

- Escreva as coordenadas dos vértices.
- Escolha um vértice para, a partir dele, traçar diagonais dividindo o polígono em triângulos. 72,5 u.a.



5. Na figura a seguir, o triângulo MNP foi construído a partir dos pontos médios dos lados do triângulo ABC.



a) Calcule é a área do triângulo ABC. 36 u.a.

b) Calcule é a área do triângulo MNP. 9 u.a.

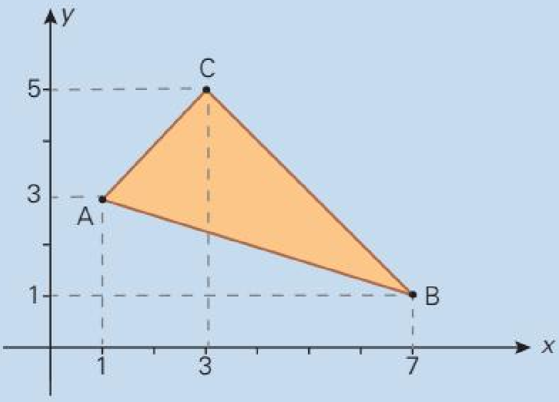
c) Qual é a razão entre cada medida dos lados do triângulo MNP e do triângulo ABC? $\frac{1}{2}$

d) Qual é a razão entre a área do triângulo MNP e do triângulo ABC? $\frac{1}{4}$

6. As retas suportes dos lados de um triângulo são $y = x + 4$, $y = -x + 6$ e $y = \frac{x}{2}$. Calcule a área da região triangular. 27 u.a.

7. Calcule a área do quadrilátero formado pelos pontos A(2; 0), B(–1; –3), C(–5; –1) e D(–2; 3). $\frac{43}{2}$ u. a.

8. No plano cartesiano a seguir foi representado um triângulo ABC. Respostas no Manual do Professor.



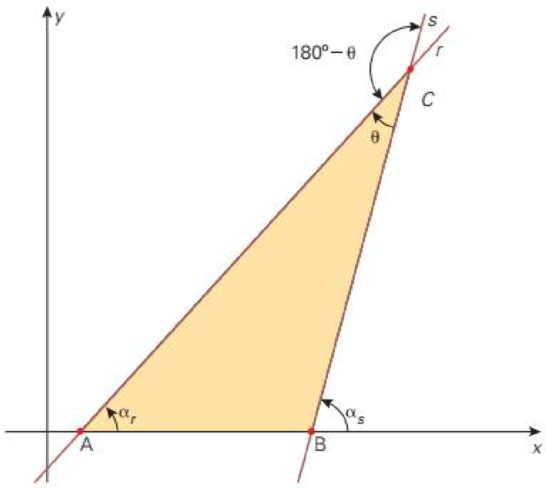
a) Determine a área desse triângulo.

b) Calcule a altura desse triângulo relativamente ao lado AB.

Ângulo entre duas retas concorrentes

Foram estudadas as posições relativas entre duas retas no plano cartesiano. Agora será observado um procedimento que permite determinar o ângulo entre duas retas concorrentes oblíquas aos eixos coordenados e não perpendiculares entre si. Serão utilizados os coeficientes angulares das retas concorrentes.

Observe, no plano cartesiano a seguir, as retas concorrentes *r* e *s* formando o ângulo θ.



Em relação às retas *r* e *s* representadas, serão considerados os coeficientes angulares:

$m_r = \text{tg}\ \alpha_r$ e $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$

Observando os ângulos no triângulo ABC e utilizando a razão trigonométrica tangente, chega-se a:

$$\alpha_s = \alpha_r + \theta$$

$$\theta = \alpha_s - \alpha_r$$

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ (\alpha_s - \alpha_r)$$

$$\text{tg}(A - B) = \frac{\text{tg}\ A - \text{tg}\ B}{1 + \text{tg}\ A \cdot \text{tg}\ B}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{tg}\ \alpha_s - \text{tg}\ \alpha_r}{1 + \text{tg}\ \alpha_s \cdot \text{tg}\ \alpha_r}$$

Substituindo as tangentes pelos correspondentes coeficientes angulares, essa última igualdade poderá ser expressa por:

$$\text{tg}\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}$$

Para o **ângulo agudo** θ entre as duas retas concorrentes *r* e *s*, oblíquas aos eixos coordenados e não perpendiculares entre si, tem–se que:

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|$$

sendo m_r e m_s os coeficientes angulares das retas *r* e *s*, respectivamente.

Observações:

1. Se as retas *r* e *s* forem paralelas entre si, então $\theta = 0°$. Logo:

$$\text{tg}\ 0 = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|$$

$$0 = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| \Rightarrow m_s - m_r = 0 \text{ ou } m_s = m_r$$

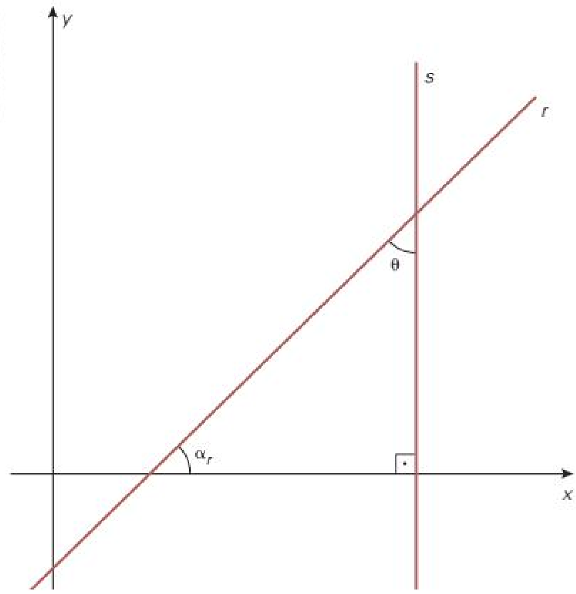
Conforme visto nesta unidade, essa é a condição de paralelismo entre duas retas no plano cartesiano.

2. Se as retas *r* e *s* forem perpendiculares entre si, então $\theta = 90°$. Como a tangente não é definida, ocorre que:

$$1 + m_s m_r = 0 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Após essas duas observações, é necessário considerar, ainda, a situação em que uma das duas retas é perpendicular ao eixo das abscissas, conforme indica a figura a seguir.

Gráficos: © DAE



Como os θ e α_r são complementares, tem-se:

$$\alpha_r + \theta = 90°$$

$$\theta = 90° - \alpha_r$$

$$tg\ \theta = tg\left(90° - \alpha_r\right)$$

$$tg\ \theta = \frac{sen\left(90° - \alpha_r\right)}{\cos\left(90° - \alpha_r\right)} = \frac{sen\,90°\cos\alpha_r - sen\,\alpha_r\cos 90°}{\cos 90°\cos\alpha_r + sen\,90°\,sen\,\alpha_r}$$

$$tg\ \theta = \frac{1\cdot\cos\alpha_r - sen\,\alpha_r\cdot 0}{0\cdot\cos\alpha_r + 1\cdot sen\,\alpha_r}$$

$$tg\ \theta = \frac{\cos\alpha_r}{sen\,\alpha_r} = \frac{1}{tg\alpha_r} \Rightarrow tg\ \theta = \frac{1}{m_r}$$

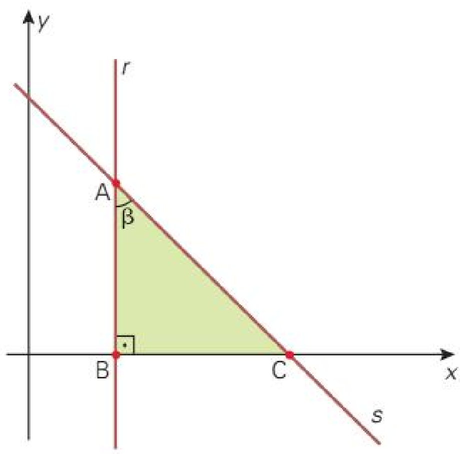
Se for considerado o ângulo agudo, então se chega a:

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

Exemplo:

Vamos determinar o ângulo agudo β indicado no triângulo ABC representado a seguir, considerando que a reta *r* tem equação $x - 2 = 0$ e a reta *s* tem equação $2\sqrt{3}x + 2y - 7 = 0$.

Gráfico: © DAE



Escrevemos a equação reduzida da reta *s* para obter seu coeficiente angular:

$$2\sqrt{3}x + 2y - 7 = 0$$

$$2y = -2\sqrt{3}x + 7$$

$$y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{2} \Rightarrow m_s = -\sqrt{3}$$

Podemos, então, obter a medida do ângulo β:

$$\text{tg}\ \beta = \left|\frac{1}{m_s}\right|$$

$$\text{tg}\ \beta = \left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right|$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30°$$

Exemplo:

Vamos determinar a medida do ângulo agudo formado pelas retas *r* e *s* de equações $2x + 3y - 1 = 0$ e $x + y - 2 = 0$, respectivamente.

Observe que inicialmente vamos determinar os coeficientes angulares dessas retas, escrevendo-as na forma reduzida

Reta *r*:

$$2x + 3y - 1 = 0$$

$$3y = -2x + 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

Reta *s*:

$$x + y - 2 = 0$$

$$y = -x + 2 \Rightarrow m_s = -1$$

Agora podemos determinar a medida do ângulo agudo formado pelas duas retas

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$$

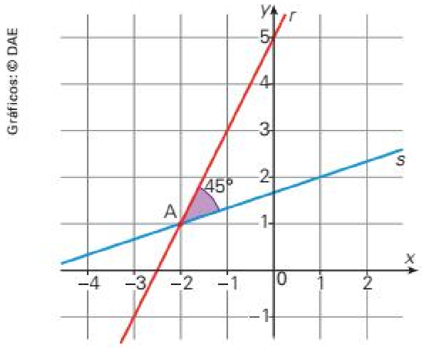
$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{-\frac{2}{3} - (-1)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1)}\right|$$

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}\right|$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{1}{5}\right)$$

Exercícios resolvidos

1. Uma reta *r* com equação $y = 2x + 5$ e uma reta *s* formam um ângulo de 45° entre elas, como indicado na figura. Considerando que as duas retas passam pelo ponto A(−2; 1), determine a equação da reta *s*.



O coeficiente angular da reta *r* é 2. Seja *m* o coeficiente angular da reta *s*. Temos que:

$$\text{tg } 45° = \frac{2-m}{1+2\cdot m} \Rightarrow 1 = \left|\frac{2-m}{1+2\cdot m}\right|$$

Assim:

$$1 = \frac{2-m}{1+2\cdot m} \therefore m = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad -1 = \frac{2-m}{1+2\cdot m} \therefore m = -3$$

Pelo gráfico, a reta *s* é crescente. Logo:

$$y - 1 = \frac{1}{3}\cdot(x+2) \therefore x - 3y + 5 = 0$$

A equação da reta *s* é, portanto, $x - 3y + 5 = 0$.

2. Determine o ângulo agudo formado pelas retas *r*:

$y = \sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}$ e *s*: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$.

Temos que $m_r = \sqrt{3}$ e $m_s = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Seja θ o ângulo agudo entre as retas *r* e *s*. Temos que:

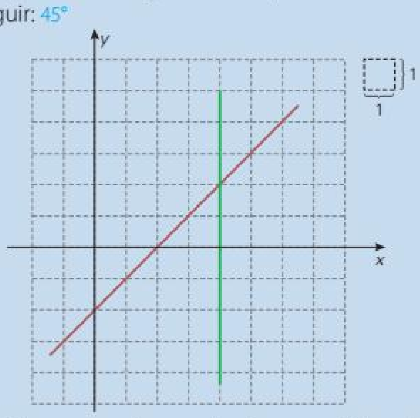
$$\text{tg } \theta = \left|\frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore \theta = 30°$$

Logo, o ângulo agudo formado pelas retas *r* e *s* mede 30°.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o ângulo agudo formado pelas retas com equações $x = 4$ e $x - y - 2 = 0$ e representadas na figura a seguir: 45°

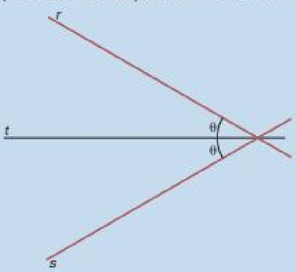


2. Considere, num plano cartesiano, um triângulo com vértices nos pontos A(−1; −3), B(7; −3) e C(5; 5). Obtenha os valores das tangentes dos ângulos internos desse triângulo. $\text{tg}(A\hat{B}C) = 4$, $\text{tg}(A\hat{C}B) = \frac{16}{13}$ e $\text{tg}(B\hat{A}C) = \frac{4}{3}$

3. Calcule o ângulo agudo formado pelos seguintes pares de retas: $4x - 2y - 1 = 0$ e $3x + y - 5 = 0$. 45°

4. Na figura, a reta *t* forma, com as retas *r* e *s*, ângulos iguais.

$x = -\frac{3}{2}$



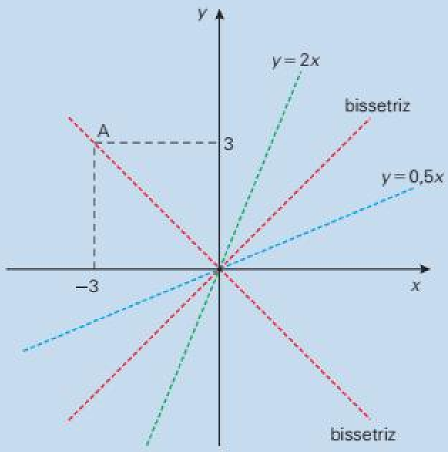
Se as equações de *r* e *s* são dadas por $2x - y + 1 = 0$ e $2x + y + 5 = 0$, qual a equação da reta *t*? $y = -2$ ou $x = \frac{3}{2}$

5. As retas *r* e *s* formam, entre si, um ângulo agudo α cuja tangente é $\frac{2}{3}$. Se a reta *r* passa pela origem e pelo ponto (1; 1), comum às duas retas, qual a equação da reta *s*?

6. Determine as equações das retas que passam pelo ponto (1; 5) e formam um ângulo de 45° com a reta com equação $2x + y + 3 = 0$. $3x - y + 2 = 0$ ou $x + 3y - 16 = 0$

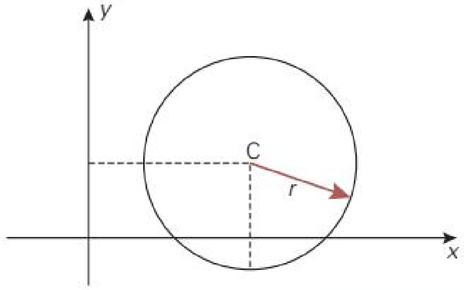
7. Elabore um problema similar ao da atividade anterior. A seguir, apresente o problema a um colega para que ele o resolva determinando equações de retas. Resposta pessoal.

8. Numa folha de papel quadriculado, represente o plano cartesiano. Indique nele o ponto A(−3; 3), as retas de equações $y = 2x$ e $y = 0{,}5x$ e as bissetrizes dos ângulos formados por essas retas.



CAPÍTULO 7 A CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO CARTESIANO

Um ponto, na Geometria Analítica, é representado por um par ordenado **(x, y)** de números reais. Uma reta qualquer é associada a uma equação da forma $ax + by + c = 0$. E uma circunferência, como será que é representada?



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Como você define uma circunferência com centro num ponto C e raio medindo *r* unidades de comprimento?

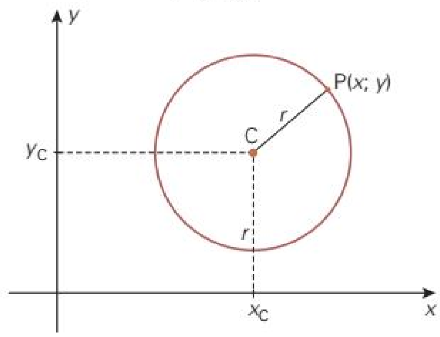
Resposta no Manual do Professor.

Neste capítulo, veremos que uma circunferência no plano cartesiano também pode ser representada ou associada a uma equação em ***x*** e ***y***.

Equação reduzida de uma circunferência

Observando que uma circunferência é o lugar geométrico formado por todos os pontos do plano que estão situados à mesma distância *r* do centro C, é possível obter sua equação.

Sendo assim, se for considerado um ponto genérico **P(*x*, *y*)** pertencente à circunferência com raio **r** e centro no ponto $\mathbf{C(x_C, y_C)}$, ocorrerá:



Gráficos: © DAE

A partir da relação que permite obter a distância entre dois pontos, obtém-se a equação da circunferência:

$$d_{P,C} = r$$

$$\sqrt{(x+x_C)^2 \cdot (y+y_C)^2} = r$$

$$(x+x_C)^2 \cdot (y+y_C)^2 = r^2$$

Equação reduzida da circunferência

A equação de uma circunferência no plano cartesiano, com centro no ponto $C(x_C, y_C)$ e raio *r*, é dada por

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Exemplos:

1. Vamos determinar a equação da circunferência com raio 3 com centro no ponto (4, 8).

Como conhecemos as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência, temos:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 3^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 9$$

2. Vamos verificar se o ponto A(2, 3) pertence à circunferência do exemplo anterior.

Para que o ponto A(2, 3) pertença à circunferência, suas coordenadas devem verificar a equação, ou seja:

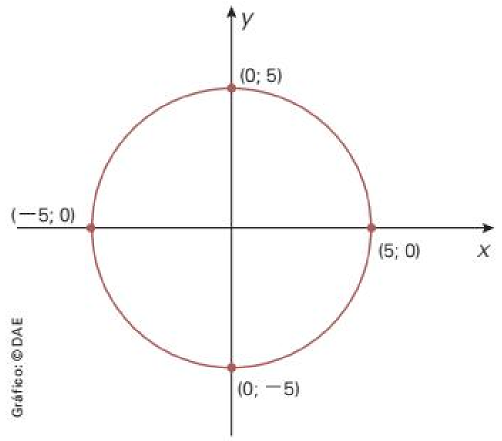
$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 9$$

↓ substituindo *x* por 2 e *y* por 3

$$(2 - 4)^2 + (3 - 8)^2 \neq 9$$

Como as coordenadas do ponto não "satisfazem" a equação, dizemos que o ponto não pertence à circunferência com equação $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 9$.

3. Vamos obter a equação da circunferência representada no plano cartesiano a seguir:



Conforme representação no plano cartesiano, temos que o raio da circunferência é 5 e o centro é a origem (0, 0). Assim:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

4. Vamos determinar a equação de uma circunferência no plano cartesiano, tal que um diâmetro tenha extremidades nos pontos A(−4, 8) e B(2, −6).

Como o centro é o ponto médio de qualquer diâmetro da circunferência, temos:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+2}{2} \qquad x_C = -1$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+(-6)}{2} \qquad y_C = 1$$

Cálculo do raio (metade da medida do diâmetro AB):

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-4-2)^2 + (8+6)^2}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36+196} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{232}}{2}$$

Equação da circunferência:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{232}}{2}\right)^2$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 58$$

Exercícios resolvidos

1. Determine a equação reduzida de uma circunferência com centro em (−3; 2) e raio com 7 unidades.

$(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 7^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 49$

2. Determine a equação reduzida da circunferência cujos pontos A(5; 1) e B(−3; −5) são extremidades de um diâmetro dessa circunferência.

Seja o ponto C o centro da circunferência. Temos que $C\left(\frac{5+(-3)}{2}; \frac{1+(-5)}{2}\right) \Rightarrow C(1; -2)$.

Seja r o raio da circunferência. Temos que:

$$r = d_{A,C} = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} \Rightarrow r = 5$$

Logo:

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

3. A reta r: $2x - 3y + 4 = 0$ é tangente a uma circunferência centrada em C(3; −1). Determine a equação reduzida dessa circunferência.

Seja r o raio da circunferência. Temos que:

$$r = d_{C,r} = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \Rightarrow r = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Logo:

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{13})^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Escreva a equação de cada circunferência cujo centro é o ponto C e o raio mede R. Respostas no Manual do Professor.

a) C(2; 3) e R = 5.

b) C(−1; 2) e R = 3.

c) C(0; 0) e R = 1.

d) C(−3; −1) e R = 2.

e) C(5; −2) e R = 4.

2. Determine o centro e o raio de cada uma das circunferências cujas equações são: Respostas no Manual do Professor.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

b) $x^2+(y-3)^2=25$

c) $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{3})^2=6$

3. Os pontos A(1; 3) e B(5; 7) são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência.

a) Quais são as coordenadas do centro da circunferência? (3; 5)

b) Qual é a medida do raio da circunferência? $2\sqrt{2}$

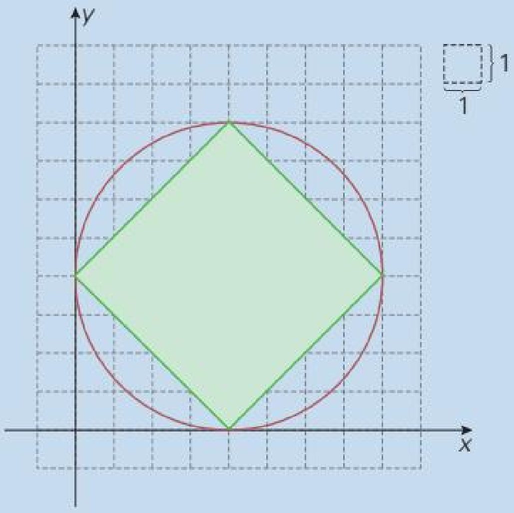
c) Qual é a equação da circunferência? $(x-3)^2+(y-5)^2=8$

4. O centro de uma circunferência é o ponto (−1; 3).

a) Se o ponto (3; 6) pertence à circunferência, qual é a medida do raio? 5

b) Escreva a equação da circunferência. $(x+1)^2+(y-3)^2=25$

5. Na figura a seguir, o quadrado está inscrito na circunferência cuja equação é $(x-4)^2+(y-4)^2=16$.



a) Qual é a medida do raio da circunferência? 4

b) Qual é a medida dos lados do quadrado? $4\sqrt{2}$

c) Qual é a área do quadrado? 32 u.a.

d) Qual é a área da região interna à circunferência e externa ao quadrado? $(16\pi-32)$ u.a.

6. Quais os pontos de interseção da reta com equação $x-y-2=0$ e da circunferência com equação $(x-3)^2+(y-1)^2=50$? (8; 6) e (−2; −4)

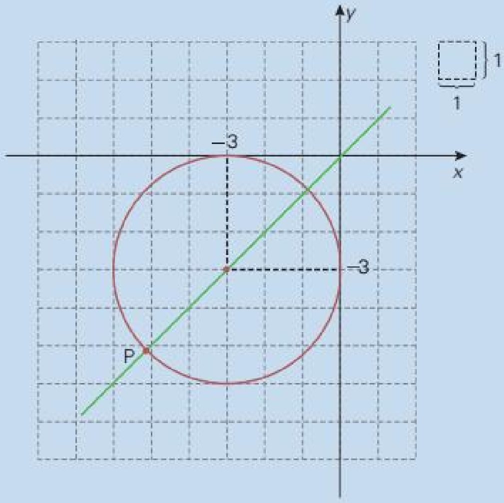
7. Considere as circunferências representadas no plano cartesiano pelas equações $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ e $(x-1)^2+(y-1)^2=9$.

a) Determine o comprimento de cada circunferência. 4π e 6π.

b) Essas circunferências são concêntricas? Sim.

c) Calcule a área da coroa circular limitada pelas duas circunferências. 5π u.a.

8. No plano cartesiano representado a seguir estão indicadas uma circunferência com centro no ponto (−3; −3) e tangente aos eixos coordenados e está indicada também uma reta que passa pela origem do plano cartesiano, pelo centro dessa circunferência e pelo ponto P. Respostas no Manual do Professor.



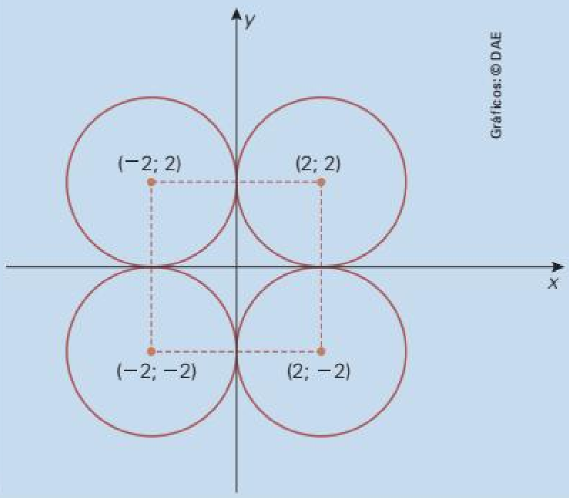
a) Qual é a medida do raio dessa circunferência?

b) Obtenha a equação da reta representada.

c) Escreva a equação da circunferência.

d) Obtenha as coordenadas do ponto P.

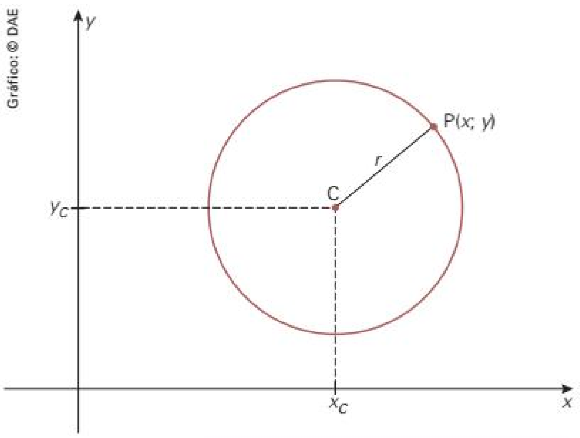
9. Elabore um problema relacionando às quatro circunferências representadas a seguir. Peça a um colega que o resolva e você resolverá o elaborado por ele.
Resposta pessoal.



Gráficos: © DAE

Equação geral de uma circunferência

Conforme visto, a equação reduzida da circunferência com centro no ponto $C(x_C; y_C)$ e raio r, representada na figura abaixo, é:



Equação reduzida

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

A equação reduzida apresenta a soma dos quadrados de dois binômios. Essa equação poderá ser desenvolvida assim:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x_C x + x_C^2 + y^2 - 2y_C y + y_C^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 0$$

Equação geral

A **equação geral** da circunferência com centro no ponto $C(x_C; y_C)$ e raio r é:

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 0$$

Em Geometria Analítica, é frequente uma circunferência ser representada pela sua equação geral. Um problema que é preciso saber resolver consiste em obter o raio e as coordenadas do centro da circunferência, conhecendo sua equação geral. Antes de esse problema ser resolvido, a equação anterior será retomada, considerando algumas observações:

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + \underbrace{x_C^2 + y_C^2 - r^2}_{F} = 0$$

O termo independente de x e de y na equação será representado por F, isto é:

$$x_C^2 + y_C^2 - r^2 = F$$

$$-r^2 = -x_C^2 - y_C^2 + F$$

$$r^2 = x_C^2 + y_C^2 - F$$

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - F} \quad (r > 0)$$

A equação geral da circunferência é do 2º grau em x e y, sendo os coeficientes de x^2 e y^2 iguais e diferentes de zero. A equação geral não apresenta o termo em xy.

A partir dessas observações, podemos, por comparação, obter o centro e o raio de uma circunferência por sua equação geral. É preciso um cuidado: nem sempre uma equação do 2º grau em x e y representa uma equação geral de uma circunferência.

Acompanhe os exemplos a seguir observando como, a partir de uma equação geral da circunferência, obtêm-se as coordenadas de seu centro e a medida de seu raio.

Exemplos:

1. Vamos verificar se a equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ representa a equação geral de uma circunferência. Caso represente, vamos determinar as coordenadas do centro e do raio.

Comparando a equação dada com a equação geral da circunferência, temos:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 0$$

Coeficientes correspondentes:

$$\begin{cases} -2x_C = -2 \Rightarrow x_C = 1 \\ -2y_C = -2 \Rightarrow y_C = 1 \\ F = -5 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - r^2 = -5 \end{cases}$$

Conforme a segunda observação:

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - F}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 - (-5)} \Rightarrow r = \sqrt{7}$$

Portanto, a equação apresentada é a de uma circunferência com centro em C(1, 1) e raio $r = \sqrt{7}$ u.c.

2. Vamos verificar se a equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 15 = 0$ representa a equação geral de uma circunferência. Caso represente, vamos determinar as coordenadas do centro e do raio.

Comparamos a equação dada com a equação geral da circunferência:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 15 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 0$$

Coeficientes correspondentes:

$$\begin{cases} -2x_C = 4 \Rightarrow x_C = -2 \\ -2y_C = -2 \Rightarrow y_C = 1 \\ F = 15 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 15 \end{cases}$$

Calculando a medida do raio:

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - F}$$
$$r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 15}$$
$$r = \sqrt{-10} \Rightarrow \text{não é um número real.}$$

Portanto, a equação dada não representa uma circunferência no plano cartesiano.

Nos exemplos, vimos como verificar se uma equação do 2º grau em x e y representa uma circunferência ou não. Além disso, se representa uma circunferência, também vimos como obter as coordenadas do centro e a medida do raio. Esse procedimento é o de comparação. Há, entretanto, outro procedimento, mais simples, conhecido como **método de completar os quadrados**.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Qual deverá ser o valor de k para o trinômio $4x^2 + 6x + k$ ser um trinômio quadrado perfeito?
Resposta no Manual do Professor.

Nesse procedimento, o objetivo é obter os quadrados perfeitos a partir da equação apresentada. Observe os exemplos.

1. Determinar o raio e as coordenadas do centro da circunferência com equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 10 = 0$.

Precisamos obter, no primeiro membro da equação dada, dois trinômios quadrados perfeitos, um em x e outro em y:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 10 = 0$

↓ Separamos os termos em x dos termos em y

$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 10$

↓ Adicionamos 4 e 9 aos dois membros

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 10 + 4 + 9$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} + \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = 23$$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \left(\sqrt{23}\right)^2$

Essa última equação é a equação reduzida da circunferência com centro $C(2, -3)$ e raio $r = \sqrt{23}$ u.c.

2. Vamos verificar se a equação $x^2 + y^2 + x - 6y + 10 = 0$ representa uma circunferência no plano cartesiano.

Precisamos obter, no primeiro membro da igualdade correspondente à equação, dois trinômios quadrados perfeitos, um em x e outro em y.

$x^2 + y^2 + x - 6y + 10 = 0$

↓ Separamos os termos em x dos termos em y

$x^2 + x + y^2 - 6y = -10$

↓ Adicionamos $\frac{1}{4}$ e 9 aos dois membros

$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 = -10 + \frac{1}{4} + 9$

$$\underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -\frac{3}{4}$$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = -\frac{3}{4}$

Observe que, apesar de termos conseguido dois trinômios quadrados perfeitos no primeiro membro da igualdade, não existe número real r tal que $r^2 = -\frac{3}{4}$. Portanto, a equação dada não representa uma circunferência.

Exercícios resolvidos

1. Qual é a equação geral de uma circunferência cujo centro é o ponto (2; 4) e o raio mede 3?

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

2. Determine a equação da reta que passa pelos centros das circunferências com equações $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$.

Completando os quadrados nas equações, temos:

$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 + 2y + 1^1 + 1 = 2^2 + 1^1$

$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

e

$x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$

$x^2 + y^2 - 6y + 3^2 + 8 = 3^2.$

$x^2 + (y - 3)^2 = 1$

Assim, a reta passa pelos pontos (–2; –1) e (0; 3). Logo

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 6 - 3x + 2y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

A equação da reta pedida é $2x - y + 3 = 0$.

3. Determine a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência com equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ e é paralela à reta com equação $2x + 5y - 4 = 0$.

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 6y + 3^2 = -2 + 1^2 + 3^2$

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$

centro (1; 3)

$2x + 5y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{4}{5} \therefore m = -\frac{2}{5}$

Logo:

$y - 3 = -\frac{2}{5} \cdot (x - 1) \Rightarrow 2x + 5y - 17 = 0$

Exercícios propostos

4. O ponto com abscissa mínima é $(2 - 2\sqrt{3}\,; -2)$ e o ponto com ordenada máxima é $(2; -2 + 2\sqrt{3})$.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Verifique se cada uma das equações a seguir representa uma circunferência. Em caso afirmativo, determine as coordenadas do centro e a medida do raio.

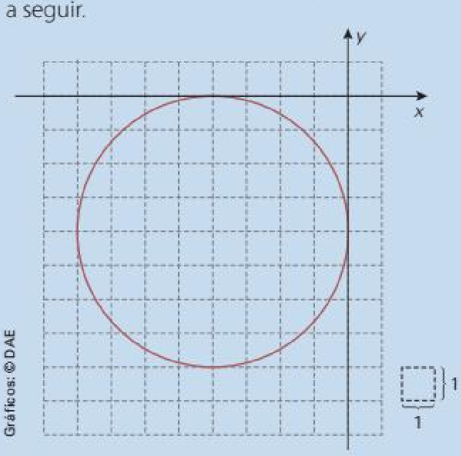
a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ Centro (2; 3) e raio 4.

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$ Não é uma circunferência.

c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$ Não é uma circunferência. É o ponto (3; 2).

2. Qual é a área limitada pela circunferência com equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$? 10π u.a.

3. Uma circunferência pertence ao terceiro quadrante e é tangente aos eixos coordenados, como mostra a figura a seguir.



Gráficos: © DAE

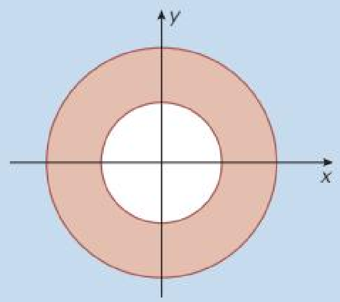
a) Quais são as coordenadas do centro da circunferência? (–4; –4)

b) Qual é a medida do seu raio? 4

c) Escreva a equação geral da circunferência. $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 16 = 0$

4. Qual o ponto da circunferência com equação $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ que tem abscissa mínima? E qual o ponto tem ordenada máxima?

5. Na figura a seguir, estão representadas duas circunferências concêntricas cujas equações são $x^2 + y^2 = 8$ e $x^2 + y^2 = 16$.



a) Calcule a área da coroa circular limitada pelas circunferências. 8π u.a.

b) Calcule o comprimento de um segmento de reta tangente à circunferência menor cujas extremidades pertencem à circunferência maior. $4\sqrt{2}$ u.c.

6. Obtenha a equação geral de cada circunferência conforme coordenadas do centro e medida do raio indicados.

a) Circunferência de centro no ponto (2; 2) e raio 3.

b) Circunferência de centro no ponto (–2; –2) e raio 3.

c) Circunferência de centro no ponto (2; –2) e raio 3.

d) Circunferência de centro no ponto (–2; 2) e raio 3.

Respostas no Manual do Professor.

Respostas no Manual do Professor.

7. O centro de uma circunferência, cujo raio mede 5, pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

a) Sabendo que um dos pontos da circunferência é (1; 0), determine as coordenadas do centro.

b) Escreva a equação reduzida da circunferência.

c) Escreva a equação geral da circunferência.

8. Determine a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência com equação $3x^2 + 3y^2 + 3x - 9y - 6 = 0$ e é perpendicular à reta com equação $3x - 5y + 1 = 0$. $5x + 3y - 2 = 0$

9. Dois vértices opostos de um quadrado são os pontos (1; −1) e (5; 3). Escreva a equação geral da circunferência:

a) circunscrita a esse quadrado; $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

b) inscrita nesse quadrado. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$.

10. Uma circunferência tem centro no ponto (3; 5) e é tangente ao eixo das abscissas.

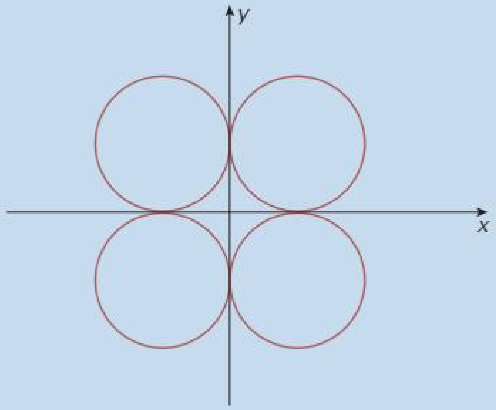
a) Qual a medida do raio dessa circunferência? 5

b) Escreva sua equação geral. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

11. Escreva a equação geral de uma circunferência λ com as seguintes características:

- concêntrica à circunferência γ com equação $2x^2 + 2y^2 + 8x - 6y = 0$; e $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 4 = 0$.
- uma corda da circunferência γ, a qual é tangente à circunferência λ, com comprimento 4.

12. Considere as quatro circunferências representadas abaixo. Elas são tangentes aos eixos coordenados.



Sabendo que essas quatro circunferências têm, todas, o raio medindo 2, obtenha:

a) as coordenadas do centro dessas quatro circunferências; (2; 2), (−2; 2), (−2; −2) e (2; −2)

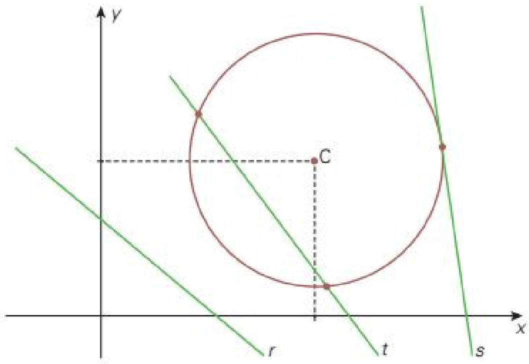
b) a equação geral de cada uma delas.
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$.

Posições relativas no plano cartesiano

Anteriormente, no Capítulo 6, foram vistas as posições relativas entre duas retas, por exemplo, no plano cartesiano. Também foram vistas as posições relativas entre um ponto e uma circunferência, entre uma reta e uma circunferência e entre duas circunferências. Aqui, serão enfatizadas as posições relativas entre reta e circunferência.

Posições relativas entre reta e circunferência

No plano cartesiano a seguir, estão representadas três retas (r, s e t) e uma circunferência. A reta r e a circunferência não possuem pontos em comum. Já para a reta s e a circunferência, há um ponto em comum. Considerando a reta t e a circunferência, verifica-se que elas possuem dois pontos em comum.



Gráficos: © DAE

São três as posições relativas entre uma reta e uma circunferência:

- Caso uma reta e uma circunferência não possuam pontos em comum, a reta é **exterior** à circunferência.
- Caso uma reta e uma circunferência possuam apenas um ponto em comum, a reta é **tangente** à circunferência.
- Caso uma reta e uma circunferência possuam dois pontos em comum, a reta é **secante** à circunferência.

Como na Geometria Analítica a reta e a circunferência são representadas por equações, pode-se analisar, algebricamente, essas posições relativas conforme possibilidades de solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \end{cases}$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Se o sistema acima não admitir solução, qual a posição relativa entre a reta e a circunferência correspondentes às equações?
2. Para a reta e a circunferência serem exteriores, o sistema deverá admitir quantas soluções?
3. Se esse sistema admitir exatamente duas soluções, qual a posição relativa entre a reta e a circunferência? Respostas no Manual do Professor.

A resolução do sistema permite não apenas verificar a posição relativa como também, em caso de o sistema admitir, obter a(s) solução(ões).

Exemplo:

Vamos determinar a posição relativa entre a circunferência com equação $x^2 + y^2 = 5$ e a reta s com equação $y = x - 1$.

- Vamos resolver o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Substituímos a segunda equação na primeira:

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5$$
$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 1$$
ou
$$x = -1 \Rightarrow y = -2$$

Portanto, como encontramos dois valores para x e dois para y, isto é, dois pontos, a reta e a circunferência são secantes. Os pontos em comum têm coordenadas (2, 1) e (−1, −2).

Quando o objetivo é verificar apenas as posições relativas entre a reta e a circunferência, basta calcular a distância do centro da circunferência e compará-la com a medida do raio.

Sendo r o raio da circunferência com centro em C, s uma reta e $d_{C,s}$ distância do centro à reta s, temos as seguintes possibilidades:

- $d_{C,s} > r \Rightarrow$ **a reta e a circunferência são exteriores;**
- $d_{C,s} = r \Rightarrow$ **a reta é tangente à circunferência;**
- $d_{C,s} < r \Rightarrow$ **a reta é secante à circunferência.**

Exemplo:

Vamos determinar a posição relativa entre a circunferência com equação $(x^2 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ e a reta s com equação $4x + 3y + 1 = 0$.

- Como foi dada a equação reduzida da circunferência, temos a medida do raio e as coordenadas do centro, ou seja:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \Rightarrow C(2,4) \text{ e } r = 5$$

- Utilizando a fórmula da distância de ponto à reta, calculamos a distância do centro da circunferência à reta s, isto é:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

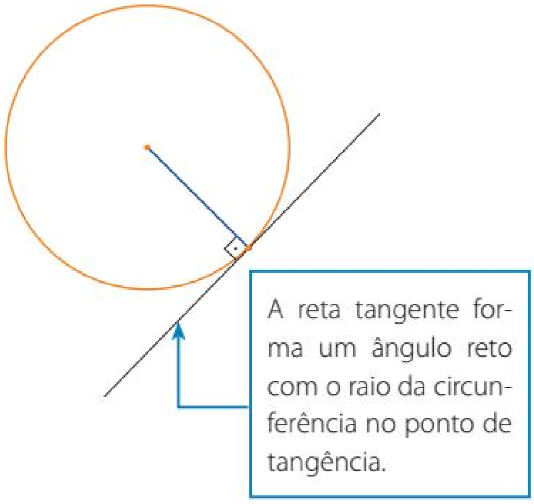
$$d_{C,s} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$d_{C,s} = \frac{|8 + 12 + 1|}{\sqrt{25}}$$

$$d_{C,s} = \frac{21}{5} \Rightarrow d_{C,s} = 4{,}2 \text{ u.c}$$

Como o raio da circunferência é 5 u.c., temos que a distância do centro da circunferência à reta s é 4,2 u.c., isto é, menor que o raio. Assim, a reta e a circunferência são secantes.

OBSERVAÇÃO:
Existem problemas envolvendo retas tangentes à circunferência. Por isso, além de saber que a distância do centro da circunferência à reta tangente é igual à medida do raio, também é necessário lembrar que a reta tangente é sempre perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência.



Exemplo:

Vamos obter a equação da reta tangente à circunferência com equação $(x^2 + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ no ponto A(2, 6).

- Como a equação dada da circunferência é a reduzida, temos C(−1, 2), isto é, conhecemos as coordenadas do centro. Vamos determinar o coeficiente angular da reta que contém os pontos A e C:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

$$m_{AC} = \frac{2-6}{-1-2} \Rightarrow m_{AC} = \frac{4}{3}$$

- Utilizando a condição de perpendicularidade e sendo t a reta tangente à circunferência no ponto A(2, 6), vamos determinar seu coeficiente angular:

$$m_t = -\frac{1}{m_{AC}}$$

$$m_t = -\frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow m_t = -\frac{3}{4}$$

- Equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 6 = -\frac{3}{4} \cdot (x-2)$$

$$4y - 24 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 4y - 30$$

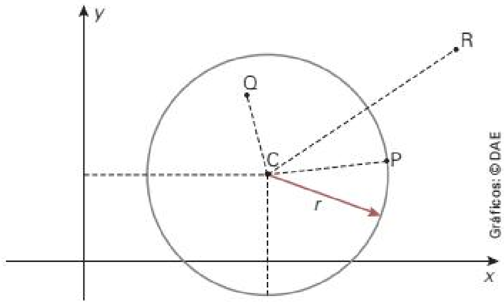
Portanto, a equação da reta tangente é $3x + 4y - 30 = 0$

Posição relativa entre ponto e circunferência

Se forem considerados uma circunferência no plano cartesiano e um ponto qualquer do plano, existirão três possibilidades de posições relativas:

- o ponto pertence à circunferência;
- o ponto é interior à circunferência;
- o ponto é externo à circunferência.

No plano cartesiano a seguir, temos essas três possibilidades ilustradas.



Note que o ponto P **pertence** à circunferência, o ponto Q é **interior** à circunferência e o ponto R é **exterior** à circunferência.

Questões e reflexões

Resposta no Manual do Professor.

Conhecendo as coordenadas de um ponto qualquer, as coordenadas do centro e a medida do raio de uma circunferência, o que é possível concluir sobre a posição relativa entre o ponto e a circunferência?

Exemplo:

Vamos obter a posição relativa entre o ponto A(0, 5) e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ no plano cartesiano.

- Vamos escrever a equação da circunferência na forma reduzida para obter as coordenadas do centro e a medida do raio:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 + 1 + 1$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} C(-1, -1) \\ r = 2 \text{ u.c.} \end{cases}$$

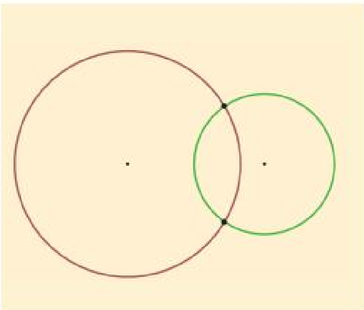
- Calculando a distância do ponto A(0, 5) ao centro da circunferência, temos:

$$d_{A,C} = \sqrt{(0+1)^2 + (5+1)^2}$$
$$d_{A,C} = \sqrt{37}\ \text{u.c.}$$

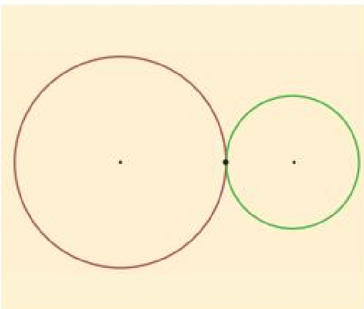
Como a distância do ponto A ao centro da circunferência é maior que a medida do raio, o ponto A é exterior à circunferência.

Posição relativa entre circunferência e circunferência

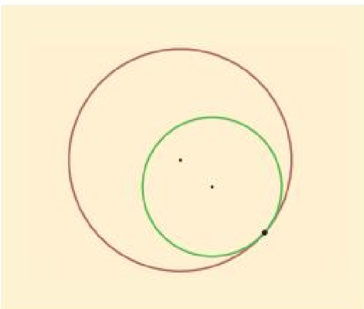
Observando duas circunferências desenhadas no mesmo plano, é possível constatar as seguintes posições relativas entre elas:



As circunferências possuem 2 pontos em comum: são **secantes**.

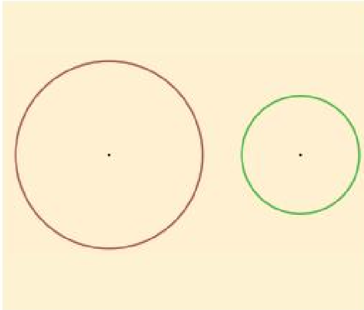


As circunferências possuem 1 ponto em comum: são **tangentes externamente**.

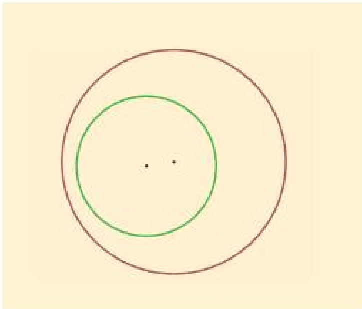


As circunferências possuem 1 ponto em comum: são **tangentes internamente**.

Figuras: © DAE



As circunferências não possuem ponto em comum: são **disjuntas externas**.



As circunferências não possuem ponto em comum: são **disjuntas internas**.

No caso em que ocorre tangência, as circunferências podem ser tangentes internas ou externas. Observando o caso em que são disjuntas, também há duas possibilidades: as circunferências são disjuntas internas ou externas.

Como saber quais são as posições, considerando que se conhecem apenas suas equações?

Diante das equações de duas circunferências, deve ser formado e resolvido o sistema a partir das equações das circunferências. Como o sistema é formado por duas equações com duas incógnitas, o conjunto solução poderá ter:

- duas soluções (dois pontos em comum): as circunferências são secantes.
- uma solução (um ponto em comum): as circunferências são tangentes (internas ou externas).
- Nenhuma solução: as circunferências são disjuntas (internas ou externas).

Tanto no caso das circunferências **disjuntas** (nenhum ponto em comum) como no das **tangentes** (um ponto em comum apenas), é necessário verificar se são internas ou externas. Se são conhecidos as coordenadas dos centros e seus raios, utilizando a distância entre pontos, pode-se verificar se essas duas circunferências são internas ou externas. Assim, sendo C_1 e r_1 o centro e o raio de uma circunferência e C_2 e r_2 o centro e o raio da outra circunferência, têm-se as seguintes situações observando a distância d_{C_1,C_2}:

- Circunferências tangentes

  $d_{C_1,C_2} = r_1 + r_2 \rightarrow$ tangentes externas

  $d_{C_1,C_2} = |r_1 - r_2| \rightarrow$ tangentes internas

- Circunferências disjuntas

  $d_{C_1,C_2} > r_1 + r_2 \rightarrow$ disjuntas externas

  $d_{C_1,C_2} < |r_1 - r_2| \rightarrow$ disjuntas internas

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Qual denominação é dada a duas circunferências que possuem o mesmo centro? Qual a posição relativa entre elas? Respostas no Manual do Professor.

Exercícios resolvidos

1. Determine a posição relativa entre a circunferência $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ e a reta r com equação $3x - 5y + + 12 = 0$.

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow$ raio $2\sqrt{2}$ e centro (-1; 2)

$$d_{centro,\, r} = \frac{|3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}}$$

$$d_{centro,\, r} = \frac{1}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{34}$$

Como a distância do centro da circunferência é menor que o raio, isto é, $\frac{\sqrt{34}}{34} < 2\sqrt{2}$, a reta é secante à circunferência.

2. Determine as equações das retas tangentes à circunferência $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ e paralelas à reta s com equação $-2x + 3y + 9 = 0$.

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \rightarrow$ raio 2 e centro $(-1; -2)$

Toda reta paralela à reta com equação $-2x + 3y + 9 = 0$ tem equação da forma $-2x + 3y + c = 0$. Assim:

$d_{centro,\, s} =$ raio

$$\frac{|(-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + c|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow |-4 + c| = 2\sqrt{13}.$$

Logo:

$-4 + c = 2\sqrt{13} \therefore c = 2\sqrt{13} + 4$

ou

$-4 + c = -2\sqrt{13} \therefore c = -2\sqrt{13} + 4,$

Do que se conclui que as equações das retas tangentes são $-2x + 3y + 2\sqrt{13} + 4 = 0$ e $-2x + 3y - 2\sqrt{13} + + 4 = 0$.

3. A reta r com equação $3x + 4y - 24 = 0$ é tangente à circunferência centrada em $(1; -1)$. Determine a equação reduzida dessa circunferência.

raio $= d_{centro,\, r}$

$$\text{raio} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

Logo, a equação reduzida da circunferência é $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$.

4. As circunferências de equações $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, quando representadas no plano cartesiano, são secantes. Vamos determinar as coordenadas dos pontos em comum.

Os pontos em comum são determinados pela resolução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a segunda equação, membro a membro, temos:

$-2x + 2y - 2 = 0$

$x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$

Substituindo a equação obtida na equação de uma das circunferências, vem:

$x^2 + (x + 1)^2 - 8x - 2(x + 1) + 7 = 0$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 8x - 2x - 2 + 7 = 0$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Portanto, os pontos em comum são (1,2) e (3,4)

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Indique a posição relativa entre a reta r e a circunferência λ em cada uma das alternativas. Respostas no Manual do Professor.

a) $\lambda: x^2 + y^2 = 25$ e $r: 3x + 4y + 15 = 0$.

b) $\lambda: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ e $r: 12x + 5y + 17 = 0$.

c) $\lambda: x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$ e $r: x + y + 2 = 0$.

2. A reta com equação $x + 2y - 3 = 0$ é tangente à circunferência cujo centro é o ponto $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$:

a) Qual a medida do raio da circunferência? $\sqrt{5}$

b) Qual a equação geral da circunferência? $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$

3. Considere uma circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$. Calcule os valores para k de modo que a reta com equação $2x - y + k = 0$ seja:

a) tangente à circunferência; $k = 8$ ou $k = -2$

b) secante à circunferência; $-2 < k < 8$

c) exterior à circunferência. $k < -2$ ou $k > 8$

4. Determine a equação das retas tangentes à circunferência com equação $x^2 + y^2 = 16$ e perpendiculares à reta de equação $6x + 8y - 1 = 0$. $4x - 3y + 20 = 0$ e $4x - 3y - 20 = 0$

5. A equação de uma circunferência é dada por $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

a) Determine a equação das retas tangentes a essa circunferência e paralelas à reta com equação $5x + 12y - 1 = 0$. $5x + 12y + 2 = 0$ e $5x + 12y - 128 = 0$

b) Determine a equação da reta tangente à circunferência no ponto (6; 8). $3x + 4y - 50 = 0$

6. A reta s com equação $3x - 4y + 5 = 0$ determina, na circunferência com equação $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, uma corda cujas extremidades são os pontos A e B.

a) Qual a distância do centro da circunferência à reta s? 3

b) Qual a medida do raio da circunferência? 5

c) Qual o comprimento da corda, ou seja, qual a distância entre os pontos A e B? 8

7. Determine a posição relativa entre a circunferência $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ e a reta s com equação $-4x + y - 4 = 0$. A reta é secante à circunferência.

8. Determine a posição relativa entre a circunferência $x^2 + (y+3)^2 = 4$ e a reta r com equação $-2x + 5y + 4 = 0$. A reta é externa à circunferência.

Algumas conclusões

Procure responder ou ao menos pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo ponto, reta e circunferência no plano cartesiano. Caso tenha dificuldade para obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais:

1. Qual relação matemática permite calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano?

2. Dadas as coordenadas de dois pontos no plano cartesiano, como determinar as coordenadas do ponto médio?

3. Como saber se dois pontos estão alinhados com base em suas coordenadas?

4. Qual expressão representa a equação geral de uma reta?

5. Com qual expressão é representada a equação reduzida?

6. O que indica o coeficiente angular de uma reta? E o coeficiente linear?

7. Como pode ser calculada a distância de um ponto a uma reta no plano cartesiano?

8. Com base nas equações reduzidas de duas retas concorrentes e não perpendiculares ao eixo das abscissas, qual relação permite obter o ângulo entre elas?

9. Qual a equação reduzida de uma circunferência com centro no ponto (a, b) e raio r?

10. Quais as posições relativas entre reta e circunferência no plano cartesiano?

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas a estas questões. Depois, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

Resolva os exercícios no caderno.

1. (Uema) O método analítico em Geometria é uma ferramenta muito utilizada em estudo de coordenadas. Para fazer uma aplicação desse método, um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos: Teriam de construir, em sistema de coordenadas, a figura de um paralelogramo ABCD, cujo ponto A está na origem; o ponto D(5, 0) e a diagonal maior com extremidade no ponto C(9, 4).

Respostas no Manual do Professor.

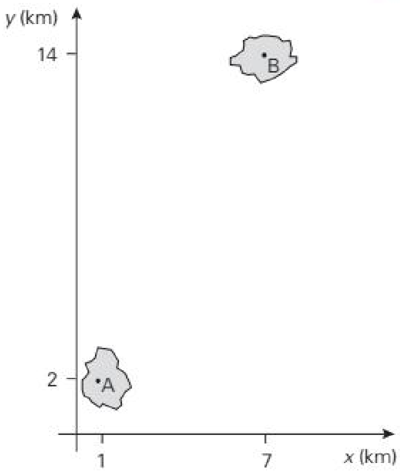
Com base nas informações,

a) faça o esboço da figura que representa o paralelogramo em um sistema de coordenadas cartesianas.

b) determine a equação da reta que contém a diagonal maior.

2. (Uerj) Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos centros A e B de dois municípios. Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que A = (1, 2) e B(7, 14). Observe o gráfico:

$x + 2y - 20 = 0$



Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.

3. (UEA-AM) Num plano cartesiano, sabe-se que os pontos A, B (1, 2) e C (2, 3) pertencem a uma mesma reta, e que o ponto A está sobre o eixo *Oy*. O valor da ordenada de A é

a) 0.

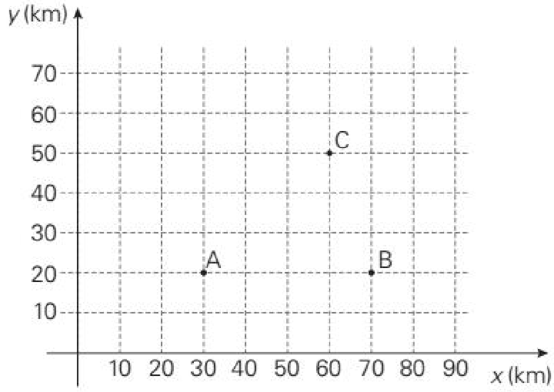
b) 3.

c) −1.

d) 2.

e) 1.

4. (Enem) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35).

b) (53; 30).

c) (45; 35).

d) (50; 20).

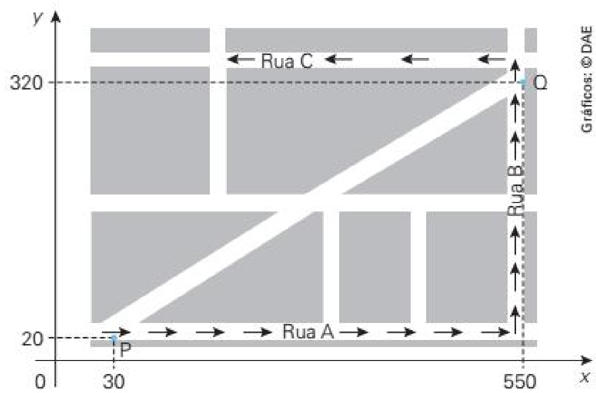
e) (50; 30)

5. (UFPR) Uma reta passando pelo ponto P(16, -3) é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em um ponto Q. Sabendo que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é 12 unidades, calcule:

a) a distância do ponto P à origem do sistema cartesiano; $\sqrt{265}$ u.c.

b) a medida do raio *r* da circunferência: 11 u.c.

6. (Enem) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Gráficos: © DAE

Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) (290; 20).
b) (410; 0).
c) (410; 20).
d) (440; 0).
e) (440; 20).

7. (Unicamp-SP) No plano cartesiano, a equação $|x - y| = |x + y|$ representa

a) um ponto.
b) uma reta.
c) um par de retas paralelas.
d) um par de retas concorrentes.

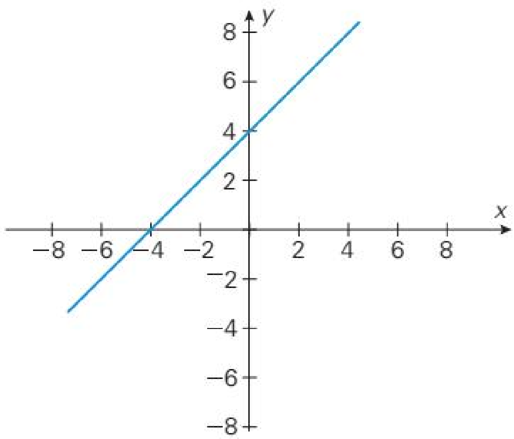
8. (FGV-SP) Observe as coordenadas cartesianas de cinco pontos:

A(0,100), B(0, −100), C(10, 100), D(10, −100), E(100, 0).

Se a reta de equação reduzida $y = mx + n$ é tal que $mn > 0$, então, dos cinco pontos dados anteriormente, o único que certamente não pertence ao gráfico dessa reta é

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

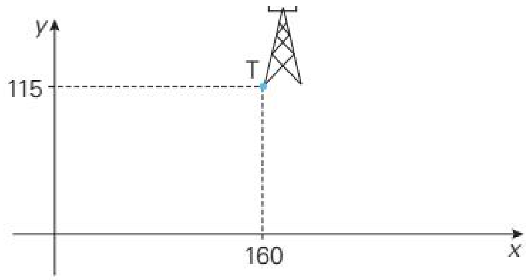
9. (Enem) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$ localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seja automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

a) (−5, 0)
b) (−3, 1)
c) (−2, 1)
d) (0, 4)
e) (2, 6)

10. (UFSM-RS) A figura mostra a localização no plano cartesiano de uma torre T de transmissão de energia.

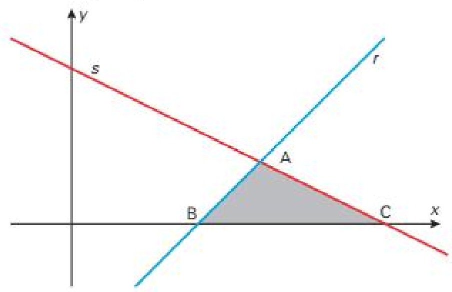


Duas outras torres devem ser instaladas em posições diferentes sobre a reta $y = \frac{3}{4}x - 5$, de modo que a distância entre cada uma dessas torres e a torre T seja igual a 200 metros.

Os pontos de localização dessas torres são iguais a

a) (20, 10) e (160, 135).
b) (0, −5) e (320; 235).
c) (0, −5) e (160, 315).
d) (−40, 115) e (320; 235).
e) (−40; 115) e (160, 315).

11. (PUC-RJ) Sejam *r* e *s* as retas de equações $y = x - 2$ e $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico abaixo. Seja A o ponto de interseção das retas *r* e *s*. Sejam B e C os pontos de interseção de *r* e *s* com o eixo horizontal, respectivamente.



Gráficos: © DAE

A área do triângulo ABC vale:

a) 1,0 c) 3,0 e) 6,0
b) 1,5 d) 4,5

12. (Fuvest) A equação $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, em que m e n são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x + 1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto $(-3, 4)$. Os valores de m e n são, respectivamente,

a) -4 e 3 c) -4 e 2 e) 2 e 3
b) 4 e 5 d) -2 e 4

13. (PUC-SP) Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, as interseções das curvas de equações $y = x^2$ e $x + y - 2 = 0$ são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência cuja equação é:

a) $x^2 + y^2 - 5x + y + 2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 5x + y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 + x + 5y + 2 = 0$
d) $x^2 + y^2 + x + 5y - 2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0$

14. (Uece) Em um sistema de coordenadas cartesiano usual os pontos P = (1, 2) e Q = (4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice M está sobre a reta paralela ao segmento PQ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é

a) 7 u. a. c) 9 u. a.
b) 8 u. a. d) 10 u. a.

15. (Uece) No referencial cartesiano ortogonal usual com origem no ponto O, a reta r, paralela à reta $y = -2x + 1$ intercepta os semieixos positivos OX e OY, respectivamente, nos pontos P e Q formando o triângulo POQ. Se a medida da área deste triângulo é igual a 9 m², então a distância entre os pontos P e Q é igual a

a) $\sqrt{5}$ m. b) $4\sqrt{5}$ m.
b) $3\sqrt{5}$ m. d) $2\sqrt{5}$ m.

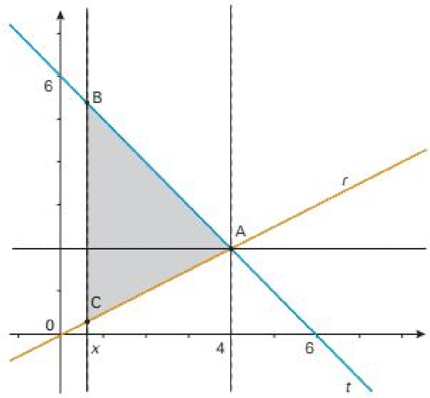
16. (Uece – 2015) No referencial cartesiano ortogonal usual, a medida da área do quadrilátero convexo cujos vértices são as interseções de cada uma das retas $x + y - 1 = 0$ e $x + y + 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, calculada com base na unidade de comprimento (u. c.) adotada no referencial cartesiano considerado, é

a) 16 (u. c.)². c) 18 (u. c.)².
b) 14 (u. c.)². d) 20 (u. c.)².

17. (Insper-SP – 2014) Considere, no plano cartesiano, o triângulo retângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta de equação $12x + 5y = 60$. A medida do raio da circunferência inscrita nesse triângulo é igual a

a) 1. d) 4.
b) 2. e) 5.
c) 3.

18. (Udesc) Seja f a função que representa a área do triângulo ABC, representado na figura.



A expressão da função $f(x)$, para $0 \le x \le 4$, é:

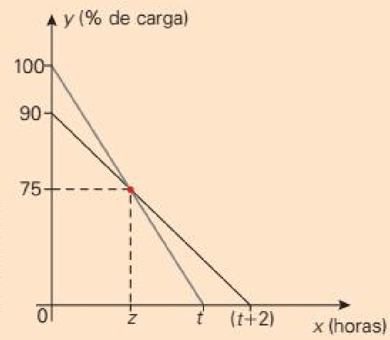
a) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 12$
b) $f(x) = -3x + 12$
c) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 12$
d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$
e) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

DESAFIO

• (Uerj – 2015) As baterias B_1 e B_2 de dois aparelhos celulares apresentam, em determinado instante, respectivamente, 100% e 90% da carga total. Considere as seguintes informações:

- as baterias descarregam linearmente ao longo do tempo;
- para descarregar por completo, B_1 leva t horas e B_2 leva duas horas a mais do que B_1;
- no instante z, as duas baterias possuem o mesmo percentual de carga igual a 75%.

Observe o gráfico:



Gráficos: © DAE

O valor de t, em horas, equivale a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

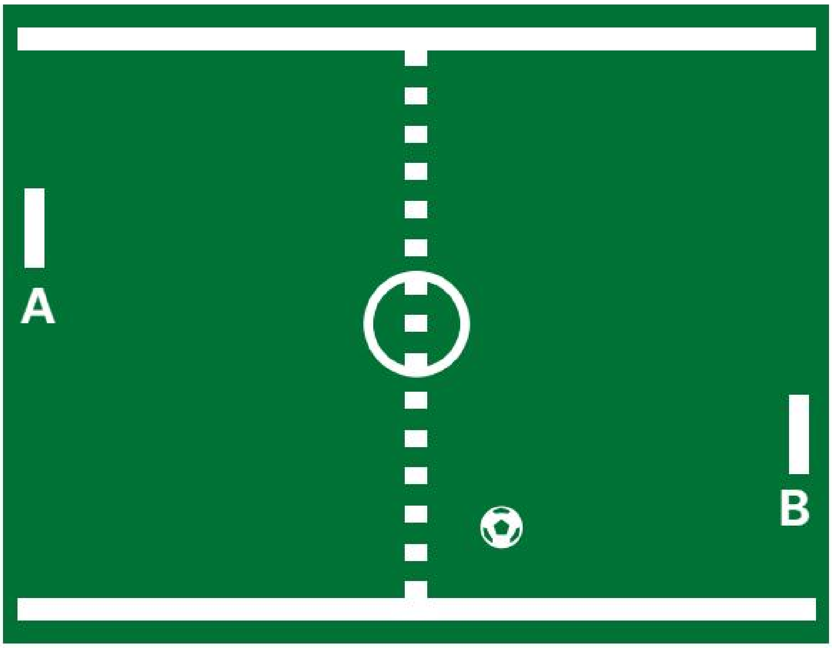
Em computação gráfica, todos os objetos que aparecem na tela são programados com coordenadas e equações de um plano cartesiano. Como exemplo, vamos analisar uma situação simples. Veja a imagem abaixo, em que está representada a cena de um jogo:

Neste jogo, concebido para dois jogadores, o objetivo é defender a bolinha para ela não ultrapassar a barreira.

Na imagem, a bolinha acabou de bater na barra inferior e está indo em direção à área do jogador B.

Esse jogo foi desenvolvido considerando o centro do campo como a origem do plano cartesiano. O círculo central tem raio 2, a bolinha é um círculo com raio 1 e cada barreira é um retângulo com largura 1 e comprimento 3 (todas as medidas na mesma unidade). Na cena do jogo representada, o centro da bolinha está no ponto (4, −10) e o vértice inferior esquerdo (assinalado na imagem) dos retângulos A e B estão, respectivamente, nas posições (15, − 9) e (−15, 3). Com base nisso, responda às questões abaixo.

Adilson Secco



Questões e investigações

Resolva os exercícios no caderno.

1. Qual a equação das duas circunferências que limitam os círculos da imagem?
2. Qual a distância entre os pontos A e B?
3. Qual a posição relativa entre a circunferência central e a reta AB?
4. Se está se movendo sobre a reta $y = x - 14$ e o jogador adversário não mover sua barreira, a bolinha será rebatida ou ultrapassará a área?
5. Suponha que a bolinha tenha sido rebatida pelo adversário. Nesse caso, ela passará a mover-se perpendicularmente. Qual a equação da nova trajetória da bolinha? (Atenção: encontre primeiro onde estará o centro da bolinha quando ocorrer a colisão.)

UNIDADE 3

GEOMETRIA ESPACIAL

Grandes silos são empregados para o armazenamento de grãos. Neles, as formas geométricas servem de modelos.

Ampliamos, nesta Unidade, o estudo de geometria dos sólidos abordando o cilindro, ocone e a esfera.

Sergei Butorin/Shutterstock.com

Vista aérea de uma fazenda com silos de armazenamento de milho em Novikova, Rússia. Foto de 2015.

CAPÍTULO

8 CILINDROS


Renata Mello/Pulsar Imagens

Tanques em refinaria de petróleo.
Duque de Caxias, Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2014.

As formas geométricas estão presentes não apenas em construções arquitetônicas, como também em embalagens. Um exemplo é a forma geométrica conhecida como **cilindro**, utilizada para embalar alguns produtos, por exemplo, sucos, óleo de cozinha, achocolatados e ceras.

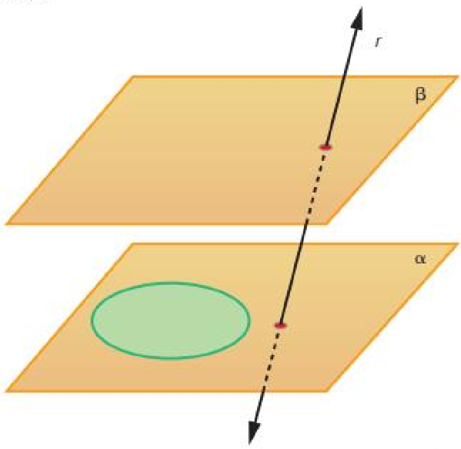
Na embalagem desses produtos é possível obter informações diversas, dentre elas a capacidade do recipiente (normalmente indicada em mililitros). Uma informação a que, em geral, o consumidor não dá importância e é fundamental ao fabricante, pois relaciona-se com o material gasto. Um problema esboça-se aqui: quanto de determinado material é gasto para confeccionar tal recipiente?

Outro exemplo são os reservatórios de combustível em refinarias de petróleo, como representado na imagem acima. Imagine que você queira saber, agora, qual a capacidade de um tanque desses. Se você soubesse a altura desse tanque cilíndrico e o diâmetro do círculo correspondente à sua base, seria possível determinar sua capacidade.

O primeiro exemplo relaciona-se ao cálculo da área total de um cilindro e o segundo, ao cálculo do volume de um cilindro. Neste capítulo estes serão os assuntos abordados.

Cilindro e seus elementos

Nas duas figuras geométricas abaixo, os planos paralelos α e β são interceptados por uma reta r. No plano α está representado um círculo.



Figuras: © DAE

Figura **1**

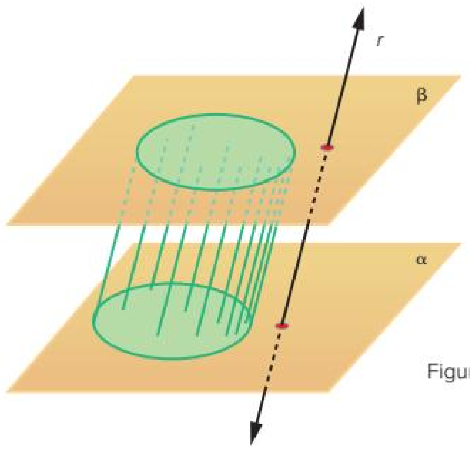
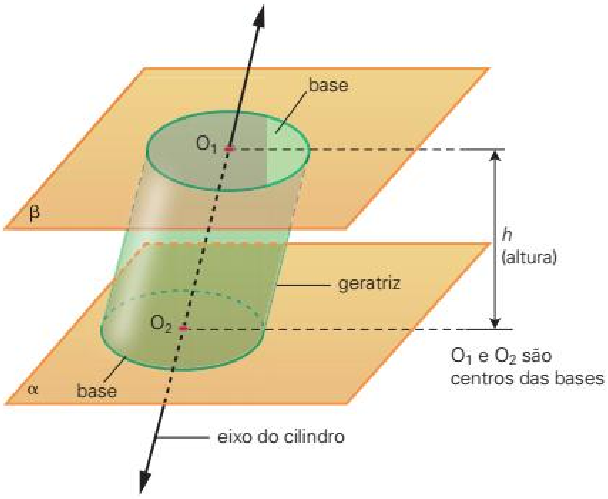


Figura **2**

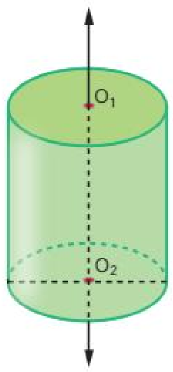
A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta dada r, com uma extremidade num ponto pertencente ao círculo do plano α e a outra no plano β, denomina-se **cilindro circular** ou **cilindro**.

Retornando ao cilindro obtido anteriormente, observam-se os seguintes elementos:

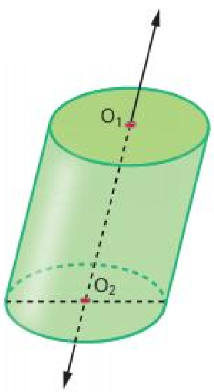


- **Bases**: são os círculos situados nos planos paralelos;
- **Altura**: é a distância entre os dois planos paralelos (distância entre as bases do cilindro);
- **Eixo**: é a reta que contém os centros dos círculos (das bases);
- **Geratrizes**: são os segmentos paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases.

Um cilindro pode ser classificado conforme a inclinação de suas geratrizes em relação aos planos das bases.



Cilindro circular reto

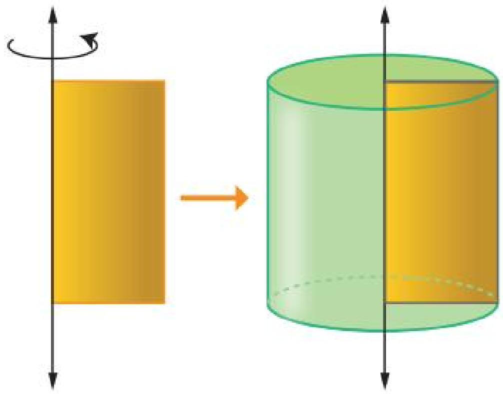


Cilindro circular oblíquo

Cilindro circular reto: todo cilindro circular com as geratrizes perpendiculares às bases.

Cilindro circular oblíquo: todo cilindro circular com as geratrizes oblíquas às bases.

O cilindro circular reto também é chamado **cilindro de revolução**, pois pode ser gerado pela rotação de uma superfície retangular em torno de um de seus lados, conforme sugerem as ilustrações a seguir.


cilindro de revolução

Figuras: © DAE

OBSERVAÇÕES:

1. A intersecção de um cilindro com um plano que contém o seu eixo é chamada **seção meridiana**.
2. Quando a seção meridiana é um quadrado, o cilindro reto também é chamado **cilindro equilátero**. Nesse caso, a medida da geratriz (***g***) é igual ao diâmetro da base (**2*r***), que também é igual à altura (***h***) do cilindro.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

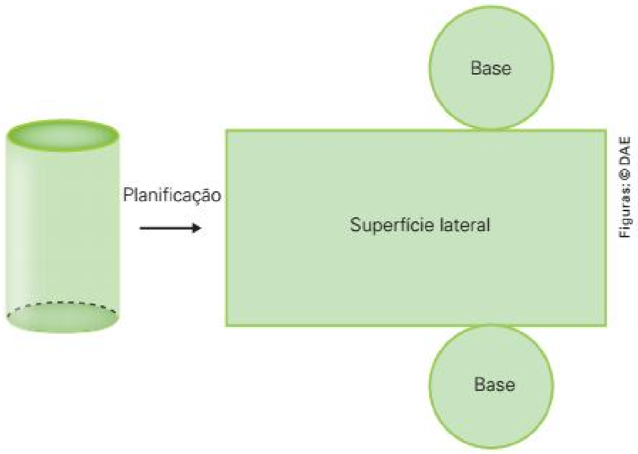
Respostas no Manual do Professor.

1. Se a seção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado, qual a forma geométrica da seção meridiana de um cilindro circular reto?

2. E a de um cilindro oblíquo?

Superfície de um cilindro circular reto

Como já são conhecidos seus elementos e suas denominações, pode-se investigar como é determinada a área da superfície total de um cilindro. Deve-se compreender que essa superfície é formada por duas partes planas (suas bases) e uma parte não plana (a superfície lateral):



Nesse cilindro, como em qualquer outro, quando se pensa no cálculo da área, também se deve pensar nos círculos das bases, na superfície lateral (reunião das geratrizes) e na superfície total (reunião entre as bases e a superfície lateral). Como aqui o interesse está no cilindro circular reto, chega-se a:

- Área de cada base (**A_b**): área de um dos círculos das bases.

  $A_b = \pi r^2$

- Área lateral (**A_L**): área do retângulo com dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e ***h*** (altura do cilindro).
- $A_L = 2\pi rh$
- Área total (**A_t**): soma da área lateral e das áreas das bases.

  $A_t = A_L + 2 \cdot A_b$

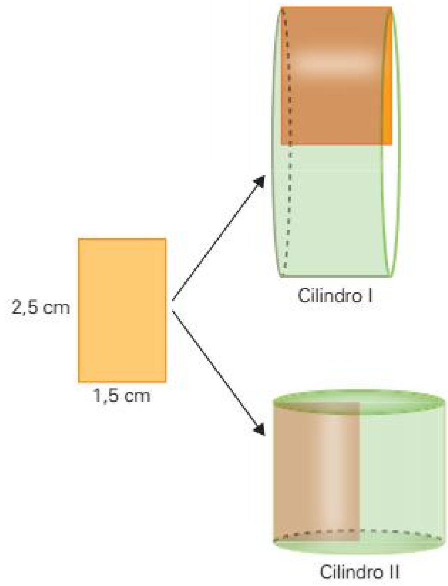
A área total A_t de um cilindro circular reto com raio da base *r* e com altura *h* pode ser calculada por:

$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$ ou $A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$

OBSERVAÇÃO:
No Volume 2 da Coleção a expressão $A_t = A_L + 2 \cdot A_b$ representava a área total de um prisma.

Exemplos:

1. Vamos considerar dois cilindros de revolução a partir de um retângulo com medidas 1,5 cm por 2,5 cm. O cilindro I, é obtido pela rotação desse retângulo em torno do menor dos lados, e o cilindro II, é obtido pela rotação em torno do maior desses lados, conforme sugerem as figuras a seguir. Vamos calcular a área total de cada um desses cilindros.



- Área total do cilindro I:

  $A_t = 2\pi r \cdot (n + r)$
  $A_t = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot (1{,}5 + 2{,}5)$
  $A_t = 20\pi \text{ cm}$

- Área total do cilindro II:

  $A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$
  $A_t = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot (2{,}5 + 1{,}5)$
  $A_t = 12\pi \text{ cm}$

2. Considere que precisamos pintar o tanque cilíndrico representado na figura a seguir. Sabemos que suas dimensões são 8 metros de altura e 5 metros de diâmetro. Além disso, gasta-se aproximadamente 0,25 de um galão de tinta por metro quadrado. Precisamos saber quantos galões de tinta serão necessários para pintar apenas a superfície lateral.

Figuras: © DAE

- Cálculo da área lateral (considerando $\pi \cong 3{,}14$):

$A_L = 2\pi rh$

$A_L \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 8 \Rightarrow A_L \cong 125{,}6\ \text{m}^2$

Como precisamos de 0,25 galão por metro quadrado, então o número (n) de galões necessários é

$n \cong 125{,}6 \cdot 0{,}25$

$n \cong 31{,}4$

Portanto, serão necessários aproximadamente 32 galões de tinta, considerando um pouco a mais por uma questão de garantia para que não falte tinta.

Exercícios resolvidos

1. Obtenha a área lateral de um cilindro reto cujos raios de cada base medem 4 cm e cuja altura mede 10 cm.

$S_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 = 80\,\pi\ \text{cm}^2$

2. Em um cilindro equilátero, a altura mede 20 cm. Quais são a área lateral e a área total desse cilindro?

Sendo R a medida dos raios das bases, temos que

$2R = 20 \therefore R = 10\ \text{cm}$

$S_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 20 \therefore 400\pi\ \text{cm}^2$

$S_{\text{total}} = 400\pi + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \therefore 600\pi\ \text{cm}^2$

3. Os raios de cada base e a altura de um cilindro reto medem, em cm, R e H. Sabe-se que, se aumentarmos a medida do raio 20 cm e mantivermos a medida da altura inalterada ou se mantivermos a medida do raio inalterada e triplicarmos a medida da altura, os acréscimos na área lateral serão iguais. Qual o valor de R?

$2 \cdot \pi \cdot (R + 20) \cdot H = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot 3H$

$R + 20 = 3R$

$2R = 20$

$R = 10\ \text{cm}$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Se num cilindro reto a área lateral é numericamente igual à área de cada uma das bases e cada raio das bases desse cilindro mede 50 cm, qual a área total? $7\,500\pi\ \text{cm}^2$

2. Um professor de Matemática propôs aos seus alunos a seguinte atividade: construir um cilindro com cartolina. Para isso, um dos alunos recortou um retângulo com dimensões 40 cm e 20 cm, como mostra a figura.

Se a altura do cilindro deve necessariamente medir 20 cm, por orientação do professor, qual deverá ser a medida dos raios dos círculos que servirão como bases do cilindro? Indique o resultado indicado em função de π. $\dfrac{20\ \text{cm}}{\pi}$

3. Calcule a medida de cada raio das bases e da altura de um cilindro reto, sabendo que a área da seção meridiana é 80 dm² e a área total é 130 dm².
Raio: 5 dm e altura: 8 dm

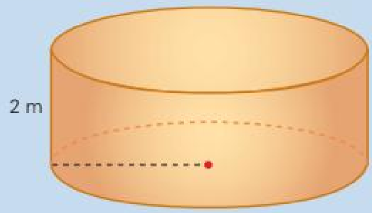
4. Um cilindro C_1 tem o raio das bases medindo R e altura medindo H. Um cilindro C_2 tem o raio das bases medindo 2R e altura medindo $\dfrac{H}{2}$. Calcule a razão, nessa ordem, entre a área total dos cilindros C_1 e C_2, sabendo, ainda, que H = 2R.

	Cilindro 1	Cilindro 2
Raio	R	2R
Altura	H	$\dfrac{H}{2}$

$\dfrac{1}{2}$

5. Calcule a medida do raio das bases de um cilindro reto cuja altura mede 50 cm, sabendo que, aumentando a medida dos raios 8 cm, a área lateral do novo cilindro será igual à área total do cilindro original. 20 cm

6. Em um cilindro reto, a área total é $30\pi\ m^2$. Se a altura desse cilindro é 2 metros, qual a medida do raio de cada base do cilindro? 3 m.

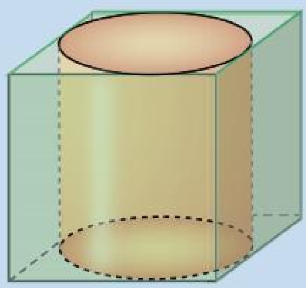


7. Uma peça industrial tem o formato de um cilindro reto com um furo cilíndrico, conforme mostra a figura. A altura da peça mede 15 cm e a medida do raio das bases é 4 cm. O furo tem raio com 1 cm.

Se a peça foi pintada com tinta verde, interna e externamente, qual área total foi colorida? $180\pi\ cm^2$

8. Num cilindro reto, sabe-se que a área de uma das bases, a área lateral e a área total formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Qual a razão, nessa ordem, entre as medidas da altura e do raio das bases desse cilindro? $\frac{3}{2}$

9. Um cilindro reto é inscrito em um cubo, como mostra a figura a seguir.

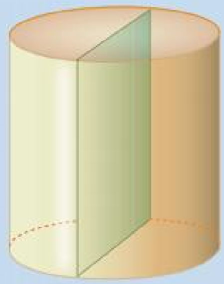


Figuras: © DAE

Se a área total do cubo é $384\ cm^2$, qual a área total do cilindro? $96\pi\ cm^2$

10. Um cilindro pode ser gerado pela rotação completa de um retângulo em torno de um dos seus lados. Sendo assim, calcule a razão entre a área total dos dois cilindros obtidos pelas rotações do retângulo ABCD em torno dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. $\frac{1}{2}$

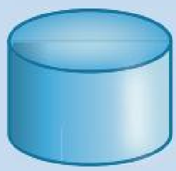
11. Um cilindro equilátero é intersectado por um plano que passa pelos centros das bases, como mostra a figura a seguir.



Se o raio das bases do cilindro medem 10 cm, qual a área total de cada um dos semicilindros obtidos?
$(300\pi + 400)\ cm^2$

12. Considere os dados a respeito de dois cilindros:

- Cilindro I: raio da base medindo 4 cm e altura medindo 5 cm;
- Cilindro II: raio da base medindo 2 cm e altura medindo 10 cm.



Cilindro I

Cilindro II

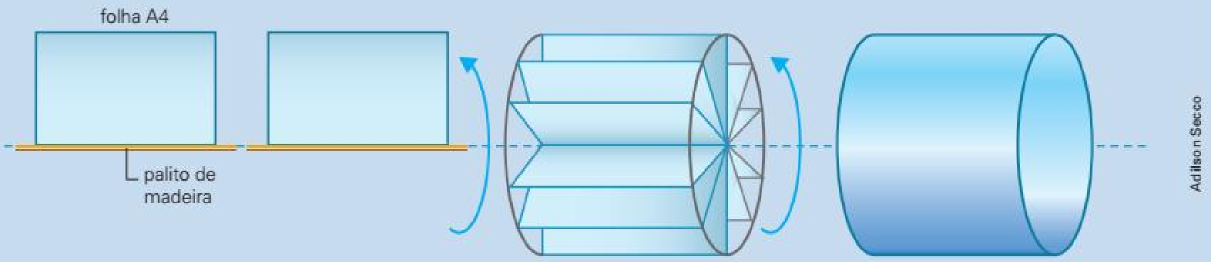
a) Qual dos cilindros tem maior área lateral?

b) Qual dos cilindros tem maior área total?

a) As áreas laterais dos cilindros I e II são iguais.
b) O cilindro I tem maior área total.

EXPLORANDO Orientações e respostas no Manual do Professor. Resolva os exercícios no caderno.

Uma folha de papel com formato A4 foi colada numa folha de cartolina. Em seguida, a borda maior do papel foi colocada num palito de madeira, conforme representado nas figuras:

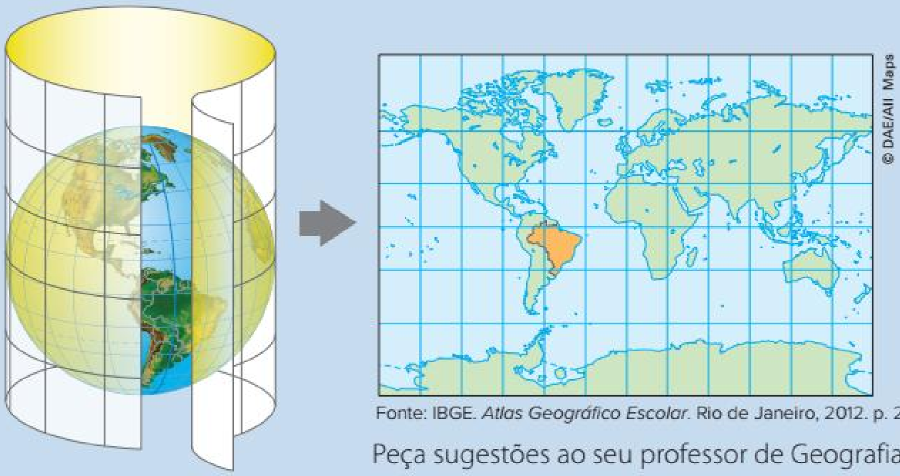


1. Explique o experimento realizado conforme indicações da figura.

2. Quais as medidas de uma folha com formato A4?

3. Utilizando uma calculadora, obtenha a área total do cilindro de revolução obtido.

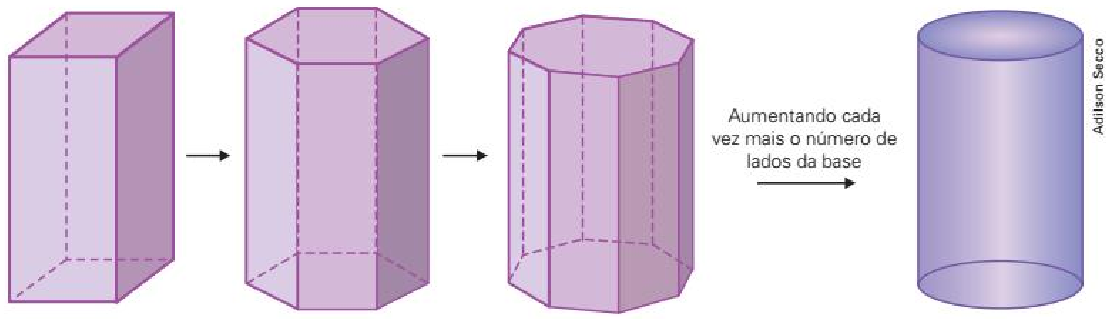
4. Elabore um texto explicativo sobre as projeções cilíndricas observando a ilustração e o mapa a seguir:



Fonte: IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. Rio de Janeiro, 2012. p. 21.

Peça sugestões ao seu professor de Geografia.

Volume do cilindro

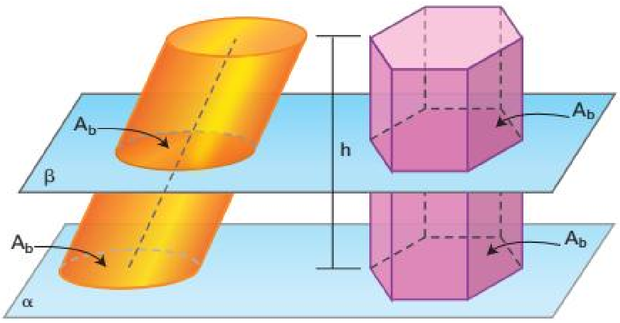


Num prisma regular, as bases são polígonos regulares. Cada vez que o número de lados desses polígonos aumenta, vão sendo obtidos polígonos mais próximos da circunferência. Dessa maneira, intuitivamente, pode-se dizer que o prisma tende a ficar com a forma cada vez mais próxima da forma de um cilindro. A área da base tende a ser a área do círculo, e o volume pode ser assim obtido:

$$V_{cilindro} = A_b \cdot h$$

$$V_{cilindro} = (\pi \cdot r)^2 \cdot h \Rightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Como feito no cálculo do volume para o prisma, também pode ser feito para o cilindro. Considerem-se um cilindro com altura h e área da base A_b e também um prisma com a mesma altura e a mesma área da base:



Ilustrações: Adilson Secco

Qualquer plano β, paralelo ao plano α, seciona o cilindro e o prisma de tal forma que as seções têm área igual. Por esse motivo pode-se dizer, conforme o princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

Como a área da base de um cilindro corresponde à área de um círculo ($A_b = \pi \cdot r^2$), pode-se escrever:

O volume **V** de um cilindro circular com raio da base r e altura h é dado por $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

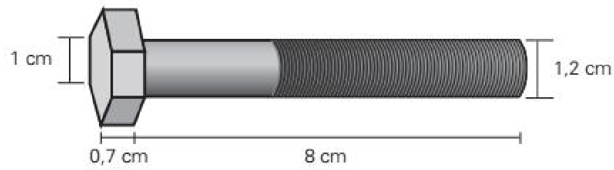
1. O volume V de um cilindro circular reto é diretamente proporcional à altura?

2. Mantendo a altura de um cilindro e duplicando a medida do raio da base, o que ocorre com o volume?

Exemplos:

1. Sabemos que a densidade do ferro utilizado por uma indústria na fabricação de determinado tipo de parafuso é 7,86 g/cm³.

A cabeça do parafuso é um prisma hexagonal com altura de 0,7 cm e aresta da base de 1 cm; já o corpo do parafuso é um cilindro circular reto com altura de 8 cm e diâmetro da base com 1,2 cm, como pode ser observado na figura a seguir. Com essas informações, vamos calcular quantos quilogramas de ferro serão utilizados na confecção de 100 000 parafusos.



- Cálculo do volume da cabeça do parafuso (volume de um prisma hexagonal), considerando $\sqrt{3} \cong 3{,}14$.

$$V = A_b \cdot h$$

$$\downarrow A_b = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = 6 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}7$$

$$V = 6 \cdot \frac{1{,}73}{4} \cdot 0{,}7 \Rightarrow V \cong 1{,}8165 \text{ cm}^3$$

- Cálculo do volume do corpo do parafuso (cilindro), considerando $\pi \cong 3{,}14$.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V \cong 3{,}14 \cdot 0{,}6^2 \cdot 8 \Rightarrow V \cong 9{,}0432 \text{ cm}^2$$

- Cálculo da massa de um parafuso (da Física, temos que a densidade d é o quociente da massa m pelo volume V). Assim:

$$d = \frac{m}{V}$$

$$7{,}86 \cong \frac{m}{1{,}8165 + 9{,}0432} \Rightarrow m \cong 85{,}357242 \text{ g}$$

- Massa necessária para 100 000 parafusos:

$$100\,000 \cdot 85{,}357242 \text{ g} = 8\,535\,724{,}2 \text{ g} =$$
$$= 8\,535{,}7242 \text{ kg}$$

Serão necessárias, portanto, aproximadamente 8,5 toneladas de ferro para fabricar 100 000 parafusos.

2. Considere que a parte interna de um grande tanque cilíndrico para armazenamento de combustível, como na figura a seguir, meça 20 metros de diâmetro e 10 metros de altura. Vamos determinar a capacidade, em litros, desse tanque.

Jorg Hackemann/Shutterstock.com

- Cálculo do volume do tanque:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\downarrow \pi \cong 3,14$

$V \cong 3,14 \cdot 10^2 \cdot 10 \Rightarrow V \cong 3\,140\ m^3$

- Como o volume 1 m^3 corresponde à capacidade de 1 000 litros, temos que a capacidade C do tanque é:

$C = 2\,140 \cdot 1\,000\ L$

$C = 3\,140\,000\ L$

Exercícios resolvidos

1. Calcule o volume de um cilindro cujos raios da base medem 10 dm e cuja altura mede 5 dm.

$V_{cilindro} = \pi \cdot 10^2 \cdot 5$

$V_{cilindro} = 500\,\pi\ dm^3$

2. Em um cilindro, completamente cheio de água, a medida da altura é 60 cm e a medida do raio das bases é 10 cm. Um outro cilindro tem 50 cm de altura e raio das bases medindo 20 cm. Se a água do primeiro cilindro for despejada no segundo, que percentual da altura total a água atingirá?

Como $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 60}{\pi \cdot 20^2 \cdot 60} = \frac{6\,000}{20\,000} = 0{,}30$,

o percentual da altura total atingida pela água é 30%.

3. Sabendo que a área lateral de um cilindro reto é 100 m^2 e seu volume é $250\pi\ m^3$, calcule a área de cada uma de suas bases.

Sendo R a medida do raio das bases e H a medida da altura do cilindro, temos:

$2 \cdot \pi \cdot R \cdot H = 100\pi \rightarrow R \cdot H = 50$

$\pi \cdot R^2 \cdot H = 250\pi \rightarrow R^2 \cdot H = 250 \rightarrow R \cdot 50 = 250 \therefore$

$\therefore R = 5m$

$R \cdot H$

$S_{base} = \pi \cdot 5^2$

$S_{base} = 25\pi\ m^2$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em um cilindro reto, a altura mede **H** e os raios das bases medem **R**.

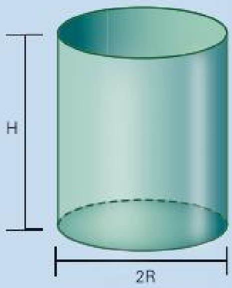


Figura: © DAE

a) Se a medida do raio das bases for multiplicada por 2, o volume será multiplicado por quanto?

b) Se a medida da altura for multiplicada por 2, o volume será multiplicado por quanto?

c) Se tanto a medida do raio das bases quanto a altura forem multiplicados por 2, o volume será multiplicado por quanto? Respostas no Manual do Professor.

2. Os rolos de papel higiênico são vendidos em formato cilíndrico com um furo também cilíndrico em seu centro. Considere que um rolo, ainda sem uso, tem diâmetro total de 10 cm e diâmetro do furo de 4,5 cm. Considere ainda que a medida da altura do rolo é 10 cm. Calcule o volume aproximado de papel contido em dois rolos novos. Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$. Aproximadamente 1 252,08 cm^3.

3. Sobre um cilindro reto, sabe-se que, se a medida do raio das bases for aumentada 50 cm e se a medida da altura for mantida, ou se a medida do raio das bases for mantida e se a medida da altura for multiplicada por quatro, os aumentos no volume serão iguais. Calcule, então, a área de cada uma das bases do cilindro inicial. $2\,500\pi\ cm^2$

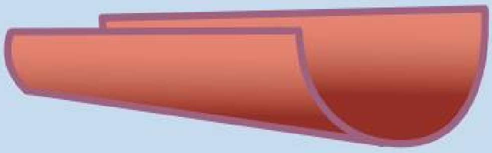
4. Um cilindro equilátero e um cubo, cujas arestas medem $2\sqrt{\pi}$ m, têm a mesma área total. Obtenha o volume do cilindro. 16π m^3

5. Em um supermercado, um consumidor ficou em dúvida sobre qual tamanho de lata cilíndrica seria mais vantajoso do ponto de vista econômico. Na primeira embalagem, o raio das bases e a altura medem, respectivamente, 5 cm e 10 cm; na segunda, essas medidas são, respectivamente, 4 cm e 15 cm. Além disso, as duas embalagens são vendidas pelo mesmo preço. Agora responda: qual das duas embalagens é economicamente mais vantajosa?
A primeira é mais vantajosa do ponto de vista econômico.

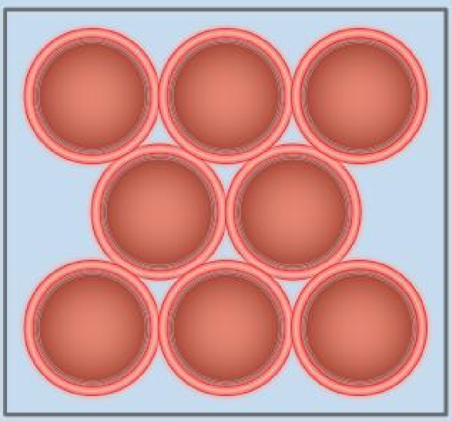
6. Considere que a carroceria de um caminhão tem a forma de um cilindro. As dimensões aproximadas desse cilindro são 8 metros de comprimento e 1,50 metro de diâmetro interno. Quantos caminhões, no mínimo, serão necessários para transportar 700 000 litros de combustível? Utilize a aproximação $\pi \cong 3,14$. 50

7. Um recipiente cilíndrico, cujos raios de cada base medem 20 cm e cuja altura mede 50 cm, contém água até a metade da altura. Colocando pedras no interior desse recipiente, o nível da água sobe 2 cm. Qual o volume das pedras colocadas no recipiente? 800π cm^3

8. As calhas têm várias utilidades, como coletar a água da chuva e evitar umidade nas paredes. Considere uma calha com formato de um semicilindro cujos raios de cada base medem 10 cm e cujo comprimento é 2 m. Em litros, qual volume de água essa calha comporta? Utilize a aproximação $\pi \cong 3,14$. Aproximadamente 31,4 litros.



9. Observe a pilha de manilhas de concreto representada na ilustração a seguir.



Ilustrações: Adilson Secco

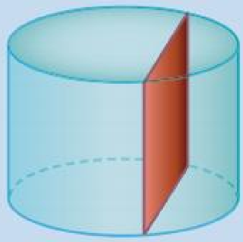
As manilhas são ocas, de modo que a medida do raio interno é 45 cm e a do raio externo é 50 cm. Sabendo que o comprimento de cada manilha é 1 metro, calcule:

a) o volume de concreto, em dm^3, das 8 manilhas da pilha. Utilize a aproximação $\pi \cong 3,14$;

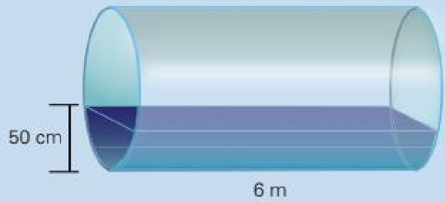
b) a medida da altura da pilha formada pelas 8 manilhas. Utilize a aproximação $\cong 1,73$.

Respostas no Manual do Professor.

10. Um cilindro reto é seccionado por um plano perpendicular às bases e distante 5 cm do centro destas, como mostra a figura. Se os raios das bases do cilindro medem 13 cm, qual a área da seção obtida pela intersecção entre o plano e o cilindro, cujo volume é $3\,380\pi$ cm^3? 480 cm^2



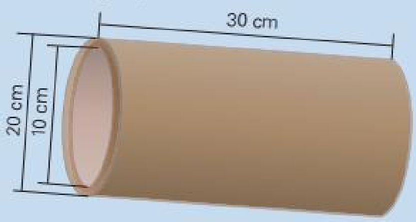
11. Um tanque de combustível tem formato cilíndrico e é utilizado na posição mostrada na figura a seguir:



A medida do raio das bases do cilindro é 1 m e o comprimento do tanque é 6 m. Calcule o volume de combustível, em litros, contido no tanque, sabendo que a altura atingida é 50 cm. Utilize as aproximações $\pi \cong 3,14$ e $\sqrt{3} \cong 1,73$.

Aproximadamente 3 685 L.

12. Elabore um problema considerando uma manilha de cimento, conforme medidas indicadas abaixo. Em seguida, peça a um colega que o resolva.



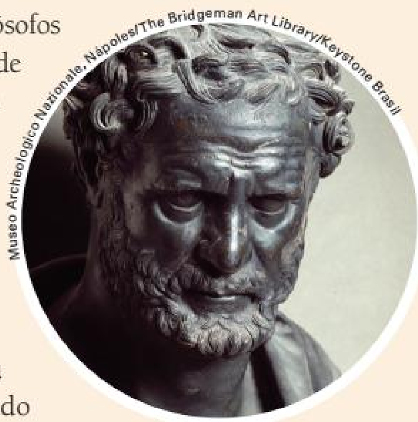
Resposta pessoal.

13. Elabore um problema relacionando os volumes de um paralelepípedo e um cilindro, considerando que esses sólidos são equivalentes. Em seguida, resolva-o e apresente-o à turma.

Resposta pessoal.

TEXTOS NA MATEMÁTICA

Após a crise dos incomensuráveis, que pode ser situada no seio da nascente escola pitagórica, surgiu outra grande polêmica muito fértil entre os filósofos pré-socráticos. Ao que tudo indica o problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas acerca da natureza do mundo físico, como a doutrina atomística, defendida por Demócrito de Abdera (aproximadamente, 460 a.C.-370 a.C.), que propunha a existência do infinitamente pequeno compondo o ser das coisas.



Demócrito (460 a.C.– 370 a.C.).

Demócrito é célebre hoje como proponente de uma doutrina materialista atômica, mas em seu tempo adquiriu também reputação como geômetra. Diz-se que viajou mais que qualquer outro em seu tempo – para Atenas, Egito, Mesopotâmia, e talvez Índia – adquirindo tanto conhecimento quanto possível; mas seus próprios sucessos em matemática foram tais que ele se gabava de que, nem os "estiradores de corda" do Egito o superavam. Escreveu muitas obras de matemática, das quais nenhuma se preservou, mas temos os títulos de algumas: Sobre os Números; Sobre a Geometria; Sobre tangencias; Sobre Representações; e Sobre Irracionais.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 3ºed., 2010. P.54

"Demócrito, no século V a.C., foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone. Apesar de os egípcios já saberem encontrar o volume da pirâmide de base quadrada, o mérito de Demócrito está em ter generalizado, bem ao estilo grego, a maneira de determinar o volume para pirâmides de base poligonal qualquer. Para obter o volume do cone, bastava uma inferência natural obtida pelo aumento, repetido indefinidamente, do número de lados do polígono regular formando a base da pirâmide. Foi, assim, o primeiro a falar de infinitesimais, pensando em utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim ao teorema de Cavalieri, nesses casos."

Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/cesima/schenberg/alunos/emersonjesus/07>.html. Acesso em: 29 abr. 2016

"No século I d.C., Plutarco, um escritor grego e autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres". No capítulo referente à vida de Marcelo, o general romano que comandou o saque de Siracusa, ele dedica boa parte de sua narrativa ao grande geômetra grego Arquimedes. Em particular, conta Plutarco que, de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio R, inscrita num cilindro circular reto, de altura 2R e cuja base tem raio R, como na figura a seguir."

"... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo."

Plutarco

Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

"Então o ***volume do cilindro*** é 3/2 do ***volume da esfera***, e a área total do cilindro também é 3/2 da ***área da esfera***. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção referida na página anterior. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves, há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido..."

"A relação de áreas e de volumes do cilindro e da esfera nele contida como descrevemos acima, figura como um corolário das Proposições 33 e 34 de um dos livros de Arquimedes, intitulado "Sobre a Esfera e o Cilindro, parte I". Esse livro está vazado em estilo rigoroso, num encadeamento preciso de postulados, definições e teoremas. Aliás, esse é o estilo das demais obras de Arquimedes que chegaram até nós e que são conhecidas desde a Idade Média. Tão grande é a preocupação com o rigor e com a estruturação lógica das demonstrações, que o leitor sequer percebe como o autor teria chegado a suas descobertas. Aliás, isto é freqüente em Matemática, pois os caminhos da descoberta quase sempre são diferentes dos processos da demonstração. Em conseqüência disso, os estudiosos das obras de Arquimedes muitas vezes manifestaram surpresa diante de seus escritos, sentindo-se frustrados por não conseguirem entender como ele fez muitas de suas descobertas. Houve até quem suspeitasse que ele usasse algum processo de descoberta que propositadamente escondera da posteridade."

Disponível em: <www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf>. Acesso em 29 abr. 2016.


Bibliotheque Nationale, Paris/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Arquimedes
(287 a.C. – 212 a.C.)

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

1. Apesar das muitas obras sobre matemática escritas por Demócrito, infelizmente não foram preservadas. Cite o título de algumas.

2. No século V a.C., o que Demócrito determinou?

3. O que Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos para quando viesse a morrer?

CAPÍTULO

9

CONES

Conforme visto no capítulo 8, existem grandes reservatórios com a forma de cilindro. Na agricultura, é comum a construção de silos para armazenar grãos e folhagens, por exemplo, na ocasião de colheitas. Essas construções podem apresentar uma parte com a forma de cilindro e outra com a forma de cone.

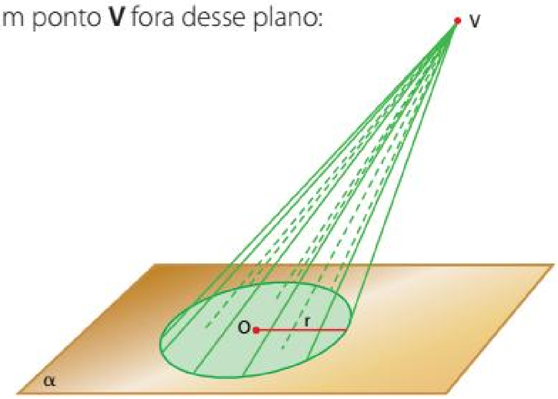
Mauricio Simonetti/Pulsar Imagens

Silos de armazenamento de grãos na rodovia PR-471, Verê, PR. Foto de 2014.

Assim como foi feito na abordagem sobre cilindros, será necessário obter relações que permitam calcular área e volume de um cone, como se verá a seguir.

Cone e seus elementos

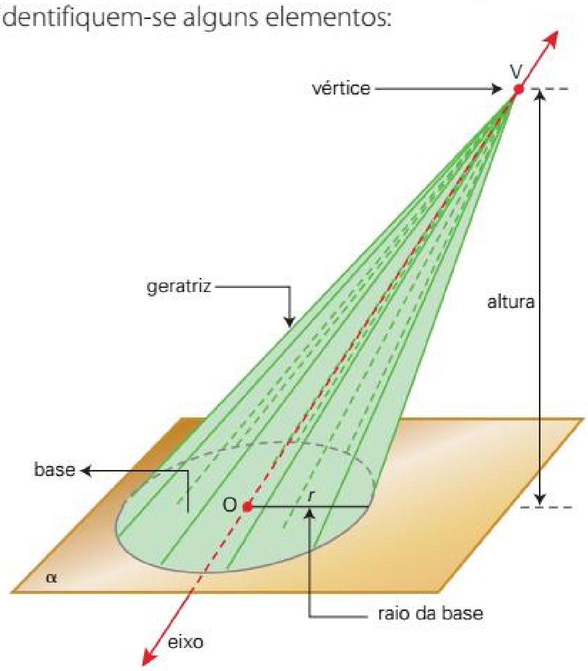
Na figura abaixo observa-se um círculo com centro no ponto **O** e raio *r* situado num plano α, e um ponto **V** fora desse plano:



Figuras: © DAE

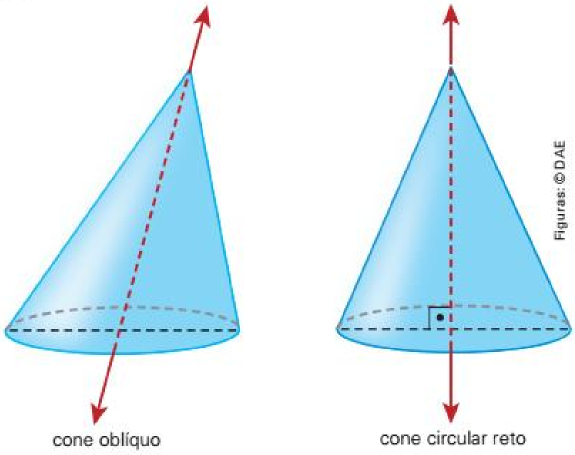
Para obter um cone, precisa-se tomar segmentos de reta, todos com uma extremidade no ponto **V** e a outra nos pontos do círculo. A reunião de todos os possíveis segmentos assim construídos é um sólido geométrico denominado **cone circular** ou **cone**.

Considere-se um cone circular e a partir dele identifiquem-se alguns elementos:



- **base**: é o círculo situado no plano α;
- **vértice**: é o ponto **V** não pertencente ao plano α;
- **raio da base**: é o raio ***r*** do círculo;
- **altura**: é a distância do vértice **V** ao plano da base;
- **eixo**: é a reta que contém o vértice **V** e o centro **O** do círculo da base;
- **geratriz**: é qualquer segmento com uma extremidade no vértice **V** e outra extremidade na circunferência da base.

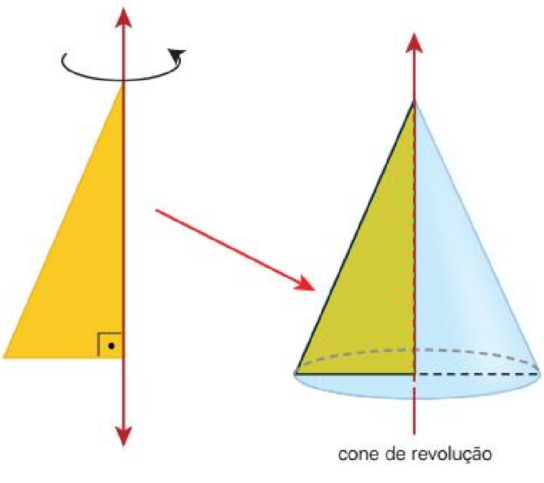
Um cone pode ser classificado, por exemplo, conforme a inclinação de seu eixo em relação ao plano da base:



Cone circular oblíquo: é todo cone circular em que o eixo é oblíquo ao plano da base.

Cone circular reto: é todo cone circular em que o eixo é perpendicular ao plano da base.

O cone circular reto também é chamado cone de revolução, pois pode ser gerado pela rotação de uma superfície com a forma de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, conforme sugere a ilustração a seguir:

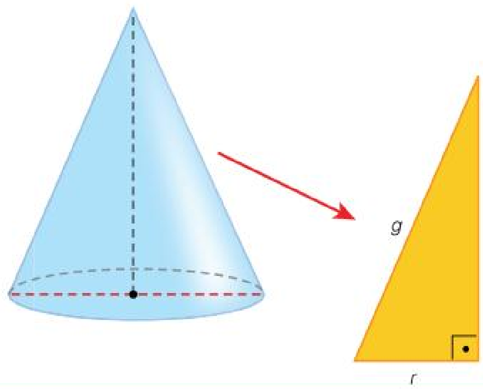


OBSERVAÇÕES:

1. A intersecção de um cone com um plano que contém o seu eixo é chamada **secção meridiana**. No cone circular reto, a secção meridiana é um triângulo isósceles.
2. Quando a secção meridiana é um **triângulo equilátero**, o cone circular reto é também chamado **cone equilátero**. Nesse caso, a medida da geratriz é o diâmetro da base do cone, isto é, $g = 2r$.

Relações métricas no cone

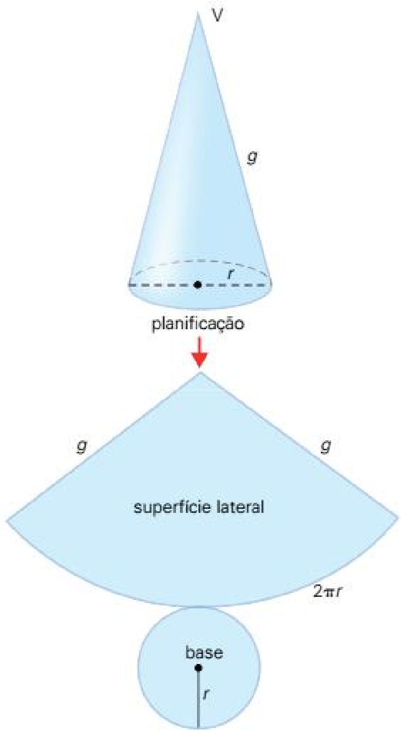
No cone circular reto, como está representado a seguir, há uma relação métrica que pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras. Essa relação considera a geratriz, a altura e o raio da base.



Considerando o cone circular reto, chega-se a:
$g^2 = r^2 + h^2$

Superfície do cone

Considere que um modelo de cone circular foi planificado, como sugere a figura a seguir. Para avaliar a superfície do cone, deve-se, inicialmente, considerar que ela está dividida em duas partes: a superfície lateral e a base.



No cone circular, quando se pensa no cálculo da área, deve-se considerar a área do círculo da base e a área da superfície lateral (reunião das geratrizes) para, assim, ser obtida a área da superfície total (reunião da base com a superfície lateral):

Área de base (**A_b**) — área do círculo da base:

$A_b = \pi r^2$

Área lateral (**A_L**) — área do setor circular cujo raio é a geratriz do cone e o comprimento do arco é o comprimento da circunferência da base do cone:

$A_L = \pi r g$. A seguir será mostrado como obter essa relação.

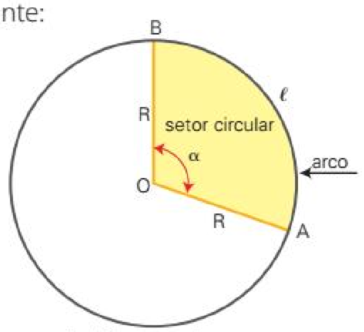
Área total (**A_t**) — soma da área lateral e da área da base:

$A_t = A_L + A_b$

A área total A_t de um cone circular reto com raio da base ***r***, geratriz ***g*** e altura ***h*** pode ser calculada por $A_t = \pi r g + \pi r^2$ **ou** $A_t = \pi r \cdot (g + r)$

Observe, a seguir, como obter a relação que expressa a área lateral do cone (**A_L**).

Inicialmente se estabelece uma relação entre a área do setor circular e o comprimento do arco correspondente:



Da Geometria Plana sabe-se que o comprimento do arco é proporcional ao comprimento da circunferência correspondente que o contém. Assim, considerando o ângulo central α em graus, chega-se a:

$$\frac{\ell}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \ell = \frac{2\pi R\alpha}{360°}$$

Também se sabe que a área do setor circular é proporcional à área do correspondente círculo que o contém, ou seja:

$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360°}$$

Portanto, conforme as duas relações, pode-se acrescentar que:

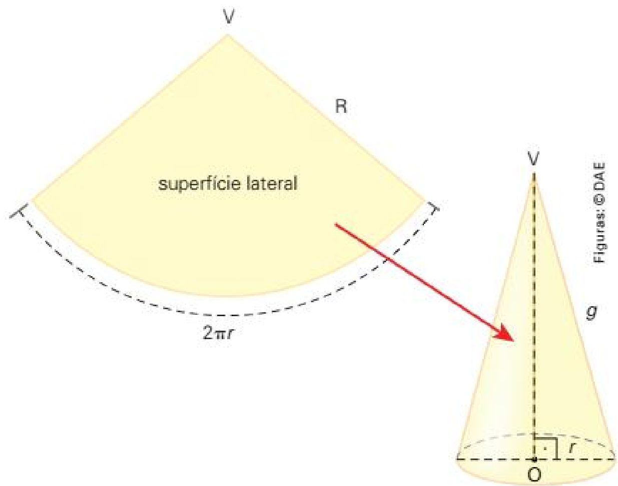
$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360°} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

Observando a primeira razão e a terceira desta igualdade, chega-se ao resultado:

$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

$$A_{setor} = \pi R^2 \cdot \frac{\ell}{2\pi R} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\ell \cdot R}{2} \text{ (I)}$$

Pode-se, a partir dessa relação, considerar a planificação de um cone para obter a área lateral:



O comprimento do arco agora é o comprimento da circunferência correspondente à base do cone (circunferência com raio ***r***) e o raio do setor circular é igual à geratriz do cone, isto é:

$$\ell = 2\pi r \quad \text{e} \quad g = R$$

Substituindo esses resultados na expressão (I) obtida anteriormente, obtém-se a área lateral (área do setor destacado):

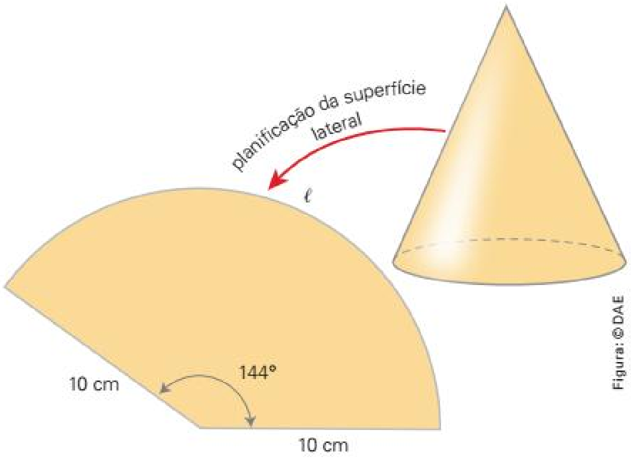
$$A_{setor} = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

$$A_{lateral} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} \qquad A_{lateral} = \pi r g$$

Portanto a área lateral do cone é $A_{lateral} = \pi r g$, sendo ***r*** a medida do raio da base do cone e ***g*** a medida da geratriz do cone.

Exemplo:

Planificando um cone circular reto, obtêm-se um setor circular com raio de 10 cm e um ângulo central de 144°. Calculam-se, então, a área lateral e a área total do cone.



Conforme visto anteriormente, é possível calcular o comprimento do arco ℓ indicado na figura anterior:

$$\frac{\ell}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$\frac{\ell}{2\pi \cdot 10} = \frac{144°}{360°} \Rightarrow \ell = 8\pi \text{ cm}$$

O comprimento do arco obtido corresponde ao comprimento da circunferência da base do cone. Assim, chega-se a :

$$8\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

Cálculo da área lateral do cone:

$$A_L = \pi r g$$

$$A_L = \pi \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow A_L = 40\pi \text{ cm}^2$$

Área total do cone:

$$A_t = \pi r \cdot (g + r)$$

$$A_t = \pi \cdot 4 \cdot (10 + 4) \Rightarrow A_t = 56\pi \text{ cm}^2$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule a área total de um cone reto cujo raio da base mede 5 cm e a altura mede 12 cm.

Seja g a medida da geratriz do cone, temos:

$g^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow g = 13$ cm

Logo:

$S_{total} = S_{lateral} + S_{base} \rightarrow S_{total} = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2$

$S_{total} = 90\pi \text{ cm}^2$

2. A área lateral de um cone reto é $15\pi \text{ cm}^2$. Sabendo que a geratriz é duas unidades maior que o raio da base, calcule a altura desse cone.

Sejam r e g, respectivamente, o raio da base e a geratriz, temos:

$S_{lateral} = \pi \cdot g \cdot r$

$g = r + 2$

$15 \cdot \pi = \pi \cdot r \cdot (r + 2) \rightarrow r^2 + 2r - 15 = 0 \therefore$

$\therefore r = -5$ (não convém) ou $r = 3$

Seja h a altura do cone, temos

$(3 + 2)^2 = 3^2 + h^2 \therefore h = 4$ cm

3. A superfície lateral de um cone reto foi planificada e está representada na figura a seguir.

O raio do setor circular da figura mede 10 cm e o ângulo central mede 216°. Calcule:

a) a medida do raio da base do cone cuja superfície lateral está representada na figura;

b) a área lateral do cone.

a) Seja R a medida do raio da base do cone, r o raio do setor circular e ℓ o comprimento do arco (que será o comprimento da circunferência correspondente ao cone), temos:

$$\frac{\ell}{2\pi \cdot r} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$\frac{2\pi \cdot R}{2\pi \cdot 10} = \frac{216°}{360°} \Rightarrow R = 6 \text{cm}$$

b) Observando que a geratriz do cone corresponde ao raio do setor circular, temos:

$S_{lateral} = \pi \cdot g \cdot r$

$S_{lateral} = \pi \cdot 6 \cdot 10$

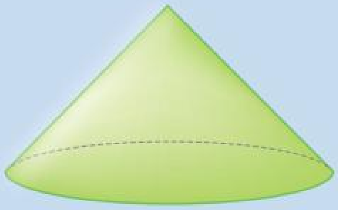
$S_{lateral} = 60\pi$ cm

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em um cone reto (representado a seguir), as medidas do raio da base e da altura são, respectivamente, 15 cm e 20 cm. Determine a medida da geratriz desse cone.

25 cm



Figuras: © DAE

2. Qual é a área lateral de um cone reto em que o raio da base mede 4 m e a altura mede 3 m?

20π m²

3. A área total de um cone reto é 70π cm². Se a geratriz desse cone mede 9 cm, qual é a medida do diâmetro da base?

10 cm

4. Qual é a área lateral de um cone equilátero cuja altura mede $4\sqrt{3}$ m?

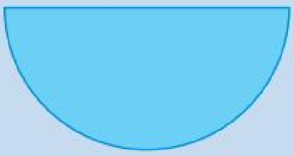
32π m²

5. Em um cone reto, a área lateral é 65πdm² e a soma das medidas da geratriz e do raio da base é 18 dm. Calcule a medida da altura desse cone.

12 dm

6. Um cone equilátero e um cilindro reto têm a mesma área total. Se o volume do cilindro é 432πcm³ e a medida dos raios das bases é a metade da medida da altura, qual é a altura do cone? $6\sqrt{6}$ cm

7. Um professor pediu aos alunos que construíssem um cone reto utilizando cartolina e fita para unir a base e a superfície lateral. Um dos alunos, para facilitar seu trabalho, recortou um semicírculo para ser a superfície lateral, como mostra a figura.



O raio do semicírculo media 20 cm. Em seguida, o aluno recortou, de um outro pedaço de cartolina, um círculo cujo raio media 10 cm, para ser a base do cone, pois pensou "se o ângulo do setor circular é igual a 180° (semicírculo), o raio da base do cone também mede a metade do raio do setor circular". Responda:

a) O raciocínio do aluno foi correto? Sim.

b) Se o ângulo do setor circular recortado fosse 1448, qual seria a medida do raio do círculo da base? 8 cm

8. As medidas do raio da base, da altura e da geratriz de um cone reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com razão **R**.

a) Mostre que as medidas do raio da base e da geratriz são, respectivamente, 3R e 5R.

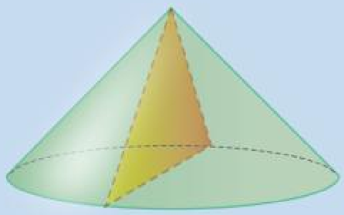
b) Calcule a área total do cone, sabendo que a área da base é 36π m². Respostas no Manual do Professor.

9. A medida da altura de um cone circular reto é 20 cm. A razão entre as medidas do raio da base e da geratriz é $\frac{3}{5}$. Calcule:

a) a área da base desse cone; 225π cm²

b) a área lateral desse cone. 375π cm²

10. Um cone reto foi seccionado por um plano de modo a determinar dois semicones, como mostra a figura.



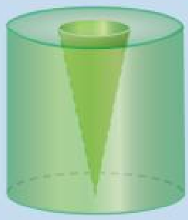
O raio da base do cone mede 5 cm e a altura, 12 cm. Calcule a área total de cada semicone.

$(45\pi + 60)$ cm²

11. Em uma prova de Matemática, os alunos deveriam calcular a área total de um cone reto cujo raio da base mede 6 cm e cuja altura mede 8 cm. Um aluno, distraído, inverteu essas medidas, ou seja, considerou o raio da base com medida 8 cm e a altura com medida 6 cm. Assim, sua resposta foi *x*% superior à resposta que o professor imaginava receber. Calcule o valor de *x*.

50

12. Em um cilindro reto, foi feito um furo cônico, como mostra a figura a seguir.



Considerando que a altura comum mede 21 cm, os raios das bases do cilindro medem 8 cm e o raio da base do cone reto mede 3 cm, calcule a área total aproximada desse sólido. Utilize a aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}41$.

Aproximadamente $518{,}45\pi$ cm².

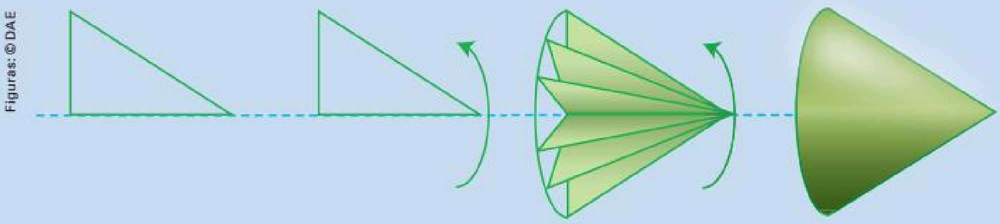
EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

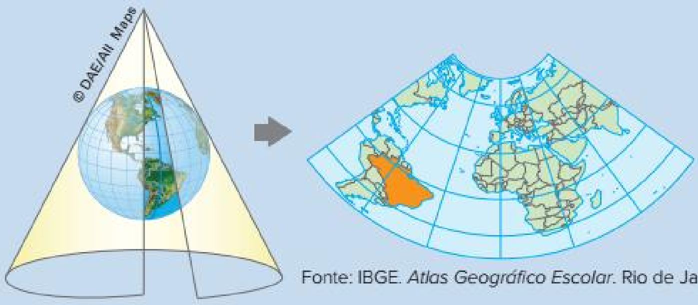
Resolva os exercícios no caderno.

1. Vamos explorar a ideia de cone de revolução. Desenhe um triângulo retângulo e, como sugere a figura a seguir, imagine um cone de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno de um dos seus catetos.

Observando as medidas do triângulo que você desenhou, calcule a área total do cone correspondente.



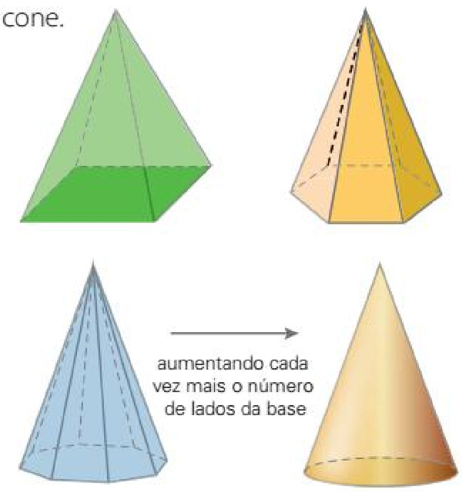
2. Elabore um texto explicativo sobre as projeções cônicas, comparando-as com as projeções cilíndricas. Peça sugestões ao seu professor de Geografia.



Fonte: IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. Rio de Janeiro, 2012. p. 21.

Volume do cone

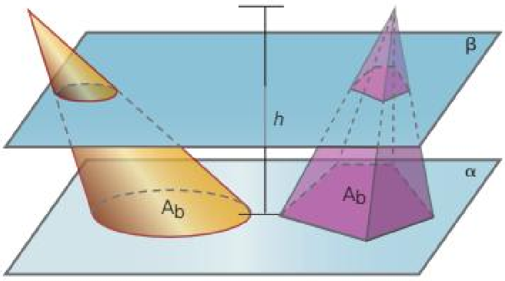
Numa pirâmide regular, a base é um polígono regular. Cada vez que o número de lados desse polígono aumenta, vão sendo obtidos polígonos mais próximos de uma circunferência. Dessa maneira, intuitivamente, pode-se dizer que a pirâmide tende a ficar com a forma cada vez mais próxima da forma de um cone.



No volume 2 desta Coleção foi visto como calcular o volume de uma pirâmide; o mesmo raciocínio pode ser utilizado para o cálculo do volume de um cone. Assim como foi feito anteriormente para o cálculo do Volume de um cilindro a partir do volume de um prisma, agora será demonstrado como calcular o volume do cone a partir do volume de uma pirâmide:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Considere um cone com altura ***h*** e área da base A_b e uma pirâmide com a mesma altura ***h*** e a mesma área da base A_b. O plano β, paralelo ao plano α que contém as bases, secciona o cone e a pirâmide, determinando secções com a mesma área. Assim, pelo princípio de Cavalieri, constata-se que o volume desses dois sólidos geométricos é igual.



Ilustrações: Adilson Secco

$$V_{cone} = V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Como a área da base de um cone circular corresponde à área de um círculo (πr^2), pode-se escrever:

> O volume **V** de um cone circular com base ***r*** e altura ***h*** é: $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

Questões e reflexões

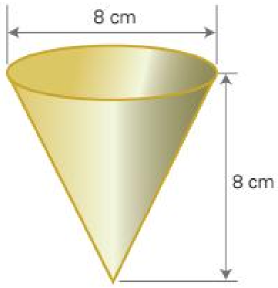
Resolva os exercícios no caderno.

Resposta no Manual do Professor.

Em um cone equilátero, a seção meridiana é um triângulo equilátero. Expresse o volume desse cone em função apenas do raio da base.

Exemplos:

1. Um fabricante lança um modelo de filtro de café com forma de cone com 8 cm de profundidade (altura do cone) e 8 cm de diâmetro da base. Vamos determinar a capacidade desse filtro em mililitros.



Cálculo do volume do cone considerando $\pi \cong 3{,}14$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V \cong \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 8}{3} \Rightarrow V \cong 133{,}97\ cm^3$$

Como o volume de 1 cm^3 corresponde à capacidade de 1 mL (mililitro), podemos dizer que a capacidade do novo filtro é de aproximadamente, 134 mililitros.

2. Considere que o silo representado na imagem a seguir tem as formas cilíndrica e cônica. Sendo 9 m o diâmetro das bases do cilindro e do cone, 10 m a altura do cilindro e 3 m a altura do cone, vamos determinar, em litros, a capacidade desse silo, desprezando a espessura de suas paredes.

Alf Ribeiro/Pulsar Imagens

Silos para armazenagem de grãos em Cascavel - PR. Foto de 2015.

Calculamos o volume do silo com a adição dos volumes do cilindro e do cone:

$$V_{silo} = V_{cilindro} + V_{cone}$$

$$V_{silo} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{ci} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_{co}}{3}$$

$$\downarrow \pi \cong 3{,}14$$

$$V_{silo} \cong 3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 10 + \frac{3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 3}{3}$$

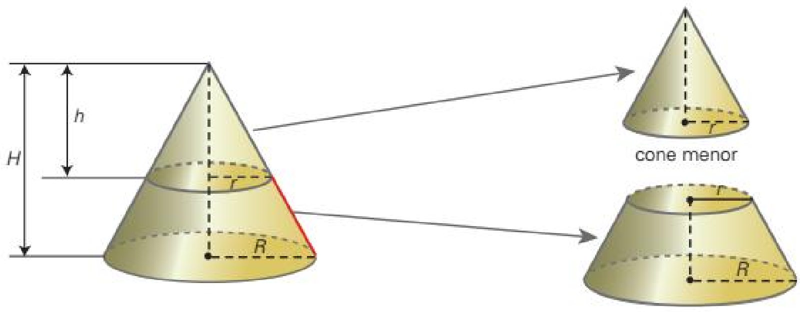
$$V_{silo} \cong 635{,}85 + 63{,}585 \Rightarrow V_{silo} \cong 699{,}435\ m^3$$

Como 1 m^3 corresponde à capacidade de 1 000 litros, temos:

$$C_{silo} \cong 699{,}435 \cdot 1\,000$$

$$C_{silo} \cong 699\,435 \text{ litros}$$

OBSERVAÇÃO:
Um cone, quando é seccionado por um plano paralelo à sua base e no qual não está seu vértice, fica dividido em dois sólidos: um **cone menor** e outro sólido denominado **tronco de cone**.



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

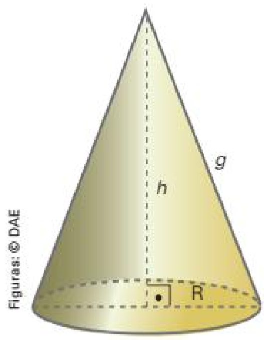
Respostas no Manual do Professor.

Considerando a figura acima, a base de dois cones paralelos e $\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = k$ (constante de proporcionalidade), faça o que se pede.

1. Em função de k, qual é a razão entre a área da base de cada um dos cones, isto é, $\frac{A_{\text{cone maior}}}{A_{\text{cone menor}}}$?
2. E a razão entre o volume desses cones, isto é, $\frac{V_{\text{cone maior}}}{V_{\text{cone menor}}}$?
3. Explique como pode ser calculado o volume do tronco de cone se o volume dos dois cones for conhecido.

Exercícios resolvidos

1. A geratriz de um cone reto mede, em decímetros, duas unidades a mais que o raio da base e uma unidade a mais que a altura. Qual é o volume desse cone?



$g = R + 2 \rightarrow R = g - 2$

$g = h + 1 \rightarrow h = g - 1$

$g^2 = h^2 + R^2$

$g^2 = (g-1)^2 + (g-2)^2$

$g^2 = g^2 - 2g + 1 + g^2 - 4g + 4$

$g^2 - 6g + 5 = 0 \therefore g = 1$ (não convém) ou $g = 5$

$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi 3^2 \cdot 4 \therefore 12\pi \text{ dm}^3$

2. A superfície lateral de um cone reto é um setor circular cujo raio mede 20 m e cujo ângulo central mede 216°. Obtenha a área lateral e o volume desse cone.

Sejam R e h, respectivamente, a medida do raio da base e da altura do cone, temos:

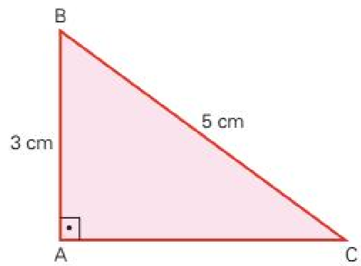
$\frac{360°}{216°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{2 \cdot \pi \cdot R} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{20}{R} \therefore R = 12 \text{ m}$

$20^2 = h^2 + 12^2 \therefore h = 16 \text{ m}$

$S_{\text{lateral}} = \pi \cdot 12 \cdot 20 \therefore 240\pi \text{ m}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 16 \therefore 768\pi \text{ m}^3$

3. Um cone pode ser gerado a partir da rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos.



Determine a razão entre o volume dos cones gerados pelas rotações do triângulo retângulo da figura anterior em torno dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Seja x a medida do cateto $\overline{AC}$, temos:

$5^2 = 3^2 + x^2 \therefore x = 4 \text{ cm}$

A razão entre o volume dos cones gerados pelas rotações do triângulo retângulo em torno dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a:

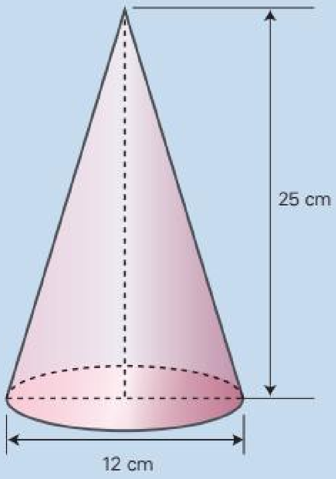
$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4} = \frac{4}{3}.$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o volume de um cone reto cujo raio da base mede 6 cm e cuja altura mede 25 cm.

300π cm³



2. Em um cone equilátero, o perímetro da seção meridiana é 30 cm. Calcule:

a) a medida da sua altura;

b) seu volume.

Respostas no Manual do Professor.

3. Um dos tipos de casquinha de sorvete tem formato de cone reto, como se vê na imagem a seguir.

Calcule o volume interno de uma casquinha cujo raio da base mede 3 cm e cuja altura mede 15 cm.

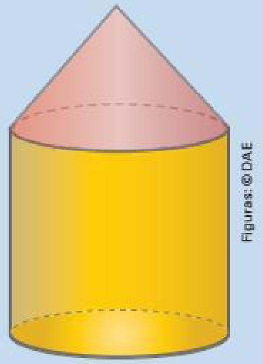
Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.

Aproximadamente 141,3 cm³.

4. Um cone equilátero é equivalente a um cilindro reto. Obtenha a área lateral do cone sabendo que o raio das bases do cilindro mede 6 cm e sua altura mede $16\sqrt{3}$ cm.

288π cm²

5. Para armazenar cereais, o proprietário de uma fazenda adquiriu um silo formado por um cilindro reto e por um cone reto, conforme a figura a seguir.



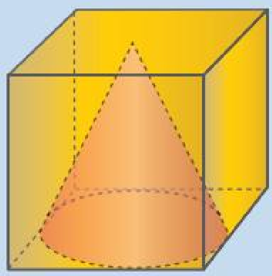
A altura da parte cilíndrica mede 16 m e a altura total mede 20 m. Além disso, o raio das bases das partes cilíndrica e cônica mede 6 m. Qual é o volume interno desse silo?

624π m³

6. Em um cone reto, a área da base é numericamente igual à terça parte da área lateral. Se a altura desse cone é $10\sqrt{2}$ cm, qual é a medida de sua geratriz?

15 cm

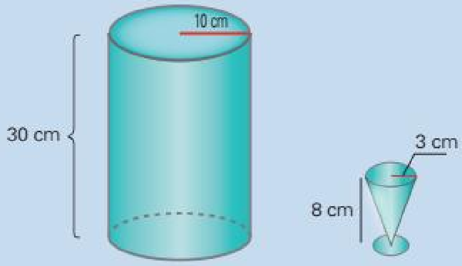
7. Um cone é inscrito em um cubo, como mostra a figura a seguir.



Se o volume do cubo é 729 cm³, qual é o volume do cone?

$\frac{243\pi}{4}$ cm³

8. Um recipiente com a forma de cilindro reto está cheio de suco, que será servido às crianças de uma escola. Cada criança receberá um copo de plástico com formato de um cone reto. Veja as ilustrações a seguir. (As ilustrações estão fora de proporção.)

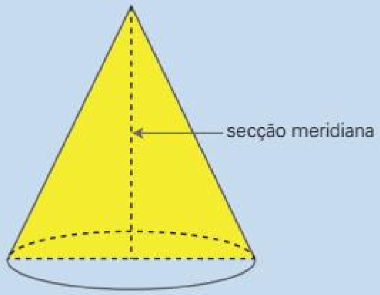


Qual é o número máximo de crianças que poderá receber um copo completamente cheio de suco? 125

9. A base de um cone reto é equivalente à sua seção meridiana e o raio da sua base mede 8 cm. Calcule:

a) a medida de sua altura; 8π cm

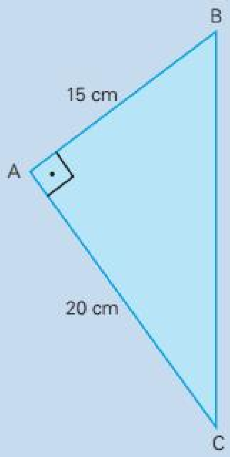
b) o seu volume. $\frac{512\pi}{3}$ cm³



10. Um cone e um cilindro retos são tais que a medida do raio da base do cone é o dobro da medida de cada raio das bases do cilindro. Qual a razão, nesta ordem, entre a altura do cone e a do cilindro para que o volume deles seja igual? $\frac{3}{4}$

11. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo ABC em torno da hipotenusa.

$1\,200\pi$ cm³



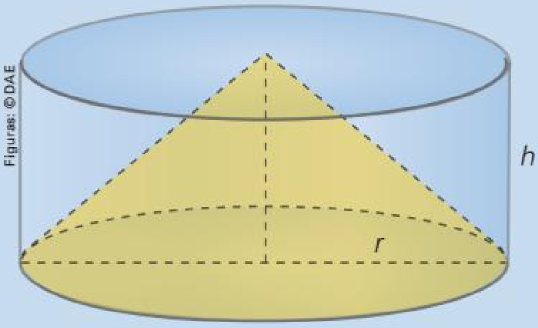
12. Se dois cones retos têm a mesma altura, qual deverá ser a relação entre o raio da base de cada um deles para que um tenha 500% do volume do outro?

O raio da base do cone maior deve medir $\sqrt{5}$ vezes o raio da base do cone menor.

13. Considere os dois cones da atividade anterior. Se o menor tem área da base 100π cm² e sua geratriz mede 15 cm, qual é o volume do maior?

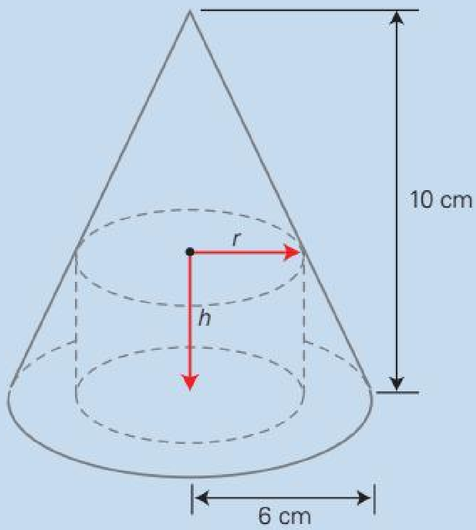
$\frac{2\,500\pi\sqrt{5}}{3}$ cm³

14. Elabore um problema relacionando o volume de um cilindro circular reto e um cone, conforme a figura a seguir. Depois, resolva-o e apresente-o com a solução aos colegas. Resposta pessoal.



Figuras: © DAE

15. Observe um cilindro inscrito em um cone e as medidas deste último.



Elabore um problema relacionando as medidas do cilindro (raio da base e altura) com as medidas do cone. Peça a um colega que resolva o seu problema, e você vai resolver o dele. Resposta pessoal.

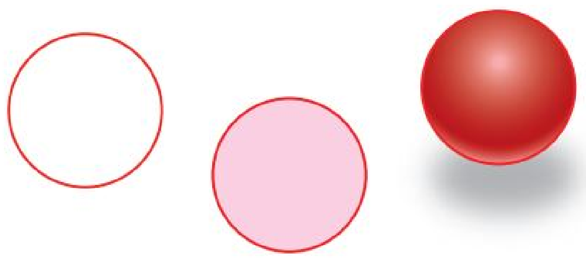
CAPÍTULO

ESFERAS 10

O planeta Terra tem a forma similar à de uma esfera, pois, rigorosamente, os polos são achatados.

Com base nessa comparação, pode-se considerar que o planeta é uma esfera com raio de aproximadamente 6 370 km. Para determinar a área da superfície da Terra, é preciso saber como calcular a área de uma esfera. Também interessa obter seu volume. Isso será visto neste capítulo.

Como pode ser observado na figura a seguir, uma circunferência é uma linha, um círculo é uma superfície e uma esfera é um sólido.

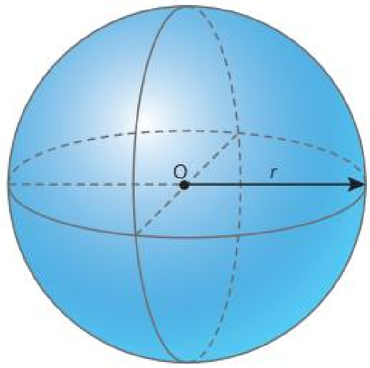


Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. O que ocorre com a medida do comprimento da circunferência se a medida de seu raio for duplicada?
2. E com o círculo, o que ocorre com a medida de sua área se a medida do raio for duplicada?
Respostas no Manual do professor.

Esfera e seus elementos

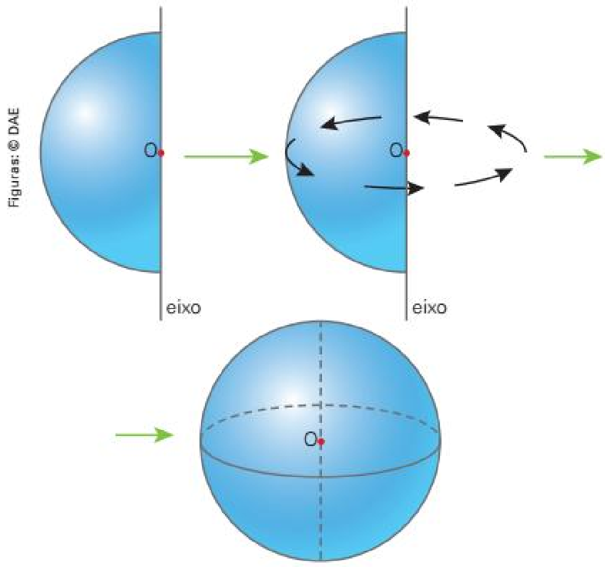


Considere um ponto **O** e uma medida ***r***.

O conjunto de todos os pontos do espaço, cuja distância ao ponto **O** é menor ou igual a *r*, é denominado esfera com centro **O** e raio *r*.

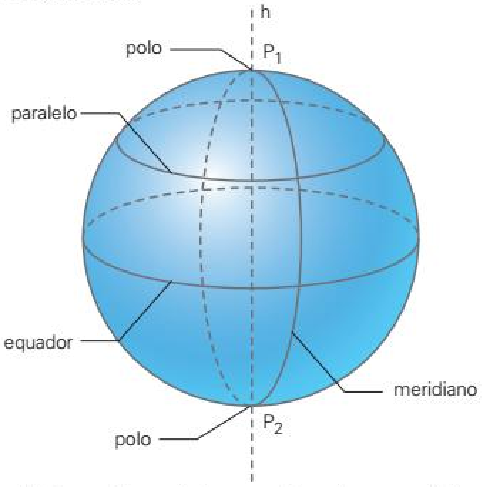
O conjunto de todos os pontos da esfera, cuja distância ao ponto **O** é *r*, é denominado **superfície esférica** com centro **O** e raio *r*.

Uma maneira de obter uma esfera é pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro, como sugerido na representação abaixo.



Além do centro e do raio, existem outros elementos da esfera que serão mencionados a seguir.

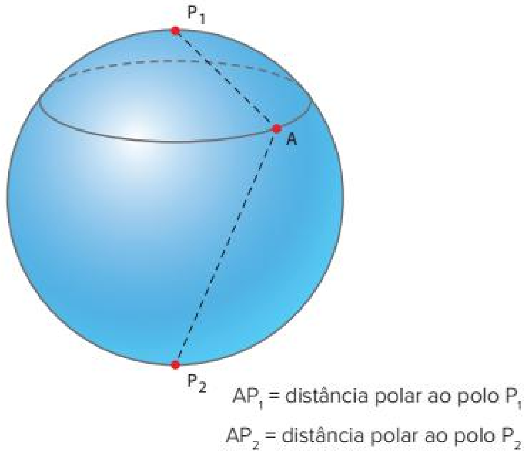
Entre esses elementos, constam: polos, equador, paralelo e meridiano.



- **Polos**: são as intersecções da superfície esférica com o eixo;
- **Equador**: é uma circunferência contida numa secção perpendicular ao eixo que passa pelo centro da esfera;
- **Paralelo**: é uma circunferência qualquer perpendicular ao eixo;
- **Meridiano**: é uma circunferência cujo plano contém o eixo.

Observações:

1. Quando um plano secante passa pelo centro da esfera, determina uma circunferência com raio igual ao raio da esfera. Assim ela é chamada **circunferência máxima**. O círculo correspondente é chamado círculo máximo.
2. **Distância polar** é a distância de um ponto qualquer de um paralelo a um dos polos. Cada ponto da superfície da esfera tem duas distâncias polares.



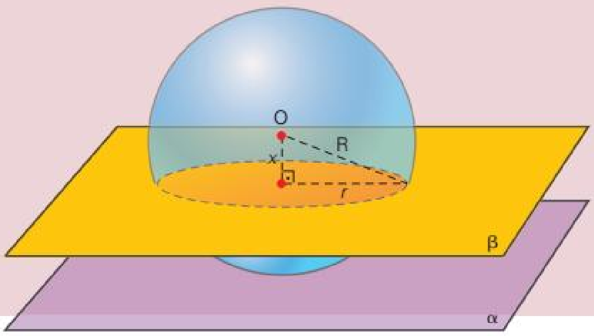
Volume de uma esfera

Tanto no cilindro quanto no cone, primeiro obteve-se a área da superfície para então se obter o volume do sólido correspondente. Na esfera ocorrerá o inverso: com base em seu volume será obtida sua área.

O volume da esfera pode ser obtido aplicando o princípio de Cavalieri. Quando se aplica esse princípio para estabelecer relações matemáticas para o cálculo do volume de um prisma, constrói-se um paralelepípedo com mesma área da base e mesma altura. Para o cálculo do volume de um cilindro, constrói-se um prisma com mesma base e mesma altura. Do mesmo modo, o cálculo do volume de um cone foi conduzido por meio da construção de uma pirâmide com mesma base e mesma altura.

Leia o texto abaixo.

Quando se pensa no cálculo do volume de uma esfera, deve-se encontrar um sólido geométrico que permita utilizar o princípio de Cavalieri.



Na ilustração, está representada uma esfera com raio **R** e centro no ponto **O** apoiada num plano α. Também foi ilustrado um plano β, paralelo ao plano α, seccionando a esfera e determinando um círculo com raio *r* situado a uma distância *x* do centro dessa esfera. Deve-se considerar agora que o plano β muda de posição. Conforme varia sua posição (sempre paralelamente ao plano α), a medida do raio *r* também varia de acordo com a relação (estabelecida com base no teorema de Pitágoras):

$$R^2 = x^2 + r^2 \text{ ou } r^2 = R^2 - x^2$$

A área do círculo determinado pelo plano β na esfera pode ser calculada em função de $\boldsymbol{x}$, ou seja:

$$A_{seção} = \pi \cdot r^2$$

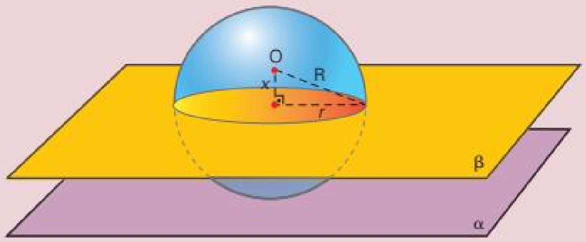
$$A_{seção} = \pi \cdot (R^2 - x^2)$$

Assim, quando o plano β passa pelo centro da esfera, obtém-se $\boldsymbol{x} = 0$; portanto, a área do círculo máximo:

$$A_{seção} = \pi \cdot r^2$$

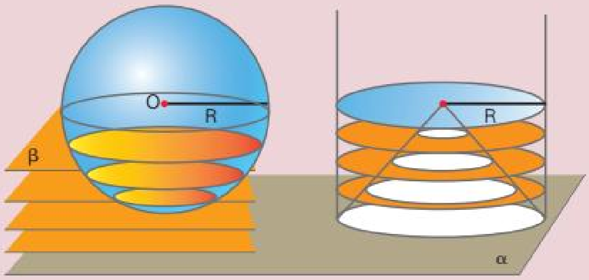
$$A_{seção} = \pi \cdot (R^2 - 0^2) = \pi \cdot R^2$$

Para utilizar o princípio de Cavalieri, é preciso encontrar um sólido geométrico que possa ser apoiado no plano α, de modo que qualquer plano β paralelo ao plano α seccione os dois sólidos determinando secções com áreas iguais. Por isso, inicialmente, deve-se encontrar uma figura plana que tenha a área igual à área da secção evidenciada antes. Essa figura plana é uma coroa circular, evidenciada no plano β ao lado da esfera, conforme representado na ilustração a seguir.

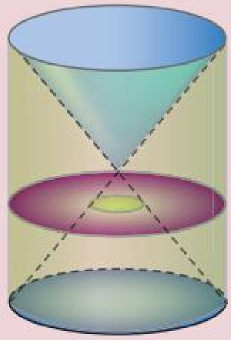


Figuras: © DAE

Para encontrar o sólido, imagina-se o plano β assumindo outras posições, mas sempre paralelo ao plano α. Observe a representação a seguir, em que o plano β (estão indicadas apenas algumas posições dele) varia de uma posição bem próxima da do plano α (no plano α o valor de x é o raio **R** da esfera) até a posição que passa pelo centro da esfera. (O valor de x será zero.)



Qual sólido geométrico pode ser utilizado para, com base no princípio de Cavalieri, determinar o volume da esfera? O sólido procurado, de fato, não é o formado pelos dois cones com raio e altura **R** (mesma medida do raio da esfera). O procurado é o cilindro equilátero; dele são retirados esses dois cones. O nome desse sólido geométrico é **anticlepsidra**.



Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume da esfera será igual ao volume da anticlepsidra. Portanto, chega-se a:

$$V_{esfera} = V_{anticlepsidra}$$

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - V_{cones}$$

$$V_{esfera} = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3}$$

$$V_{esfera} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do professor.

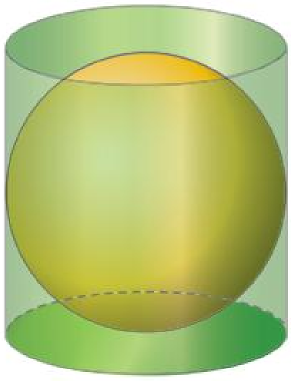
1. Você teve dificuldade para compreender algum trecho do texto? Qual? O que você não compreendeu?
2. Conforme o texto, qual é a área da secção determinada pelo plano β na esfera quando x mede a metade do raio da esfera?

O volume **V** de uma esfera com raio **R** é dado por

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Exemplos:

1. Considerando uma esfera inscrita num cilindro equilátero, vamos determinar a razão entre os volumes da esfera e do cilindro, nesta ordem.



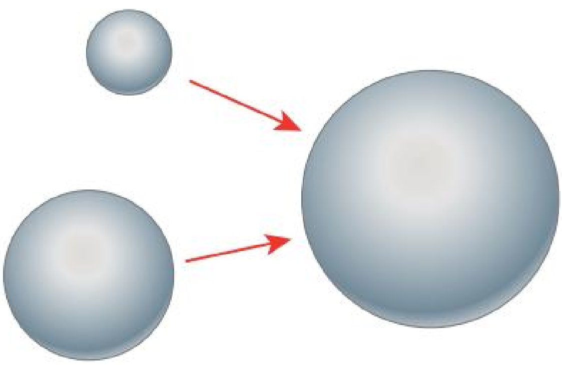
A altura do cilindro equilátero é igual ao diâmetro da esfera. Além disso, a altura do cilindro equilátero é igual ao diâmetro de sua base. Dessa forma, temos:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi R^3}{\pi R^2 \cdot h}$$

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} \Rightarrow \frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{2}{3}$$

2. Duas esferas de metal, com raio *r* e 2r, são fundidas para formar uma nova esfera. Como todo o metal das duas esferas foi utilizado (considere, portanto, que não há desperdício nessa fundição), qual será o raio da nova esfera?

Vamos calcular:



O volume da nova esfera, já que não houve desperdício de metal, será igual à soma dos volumes das duas esferas dadas. Assim, sendo **V** o volume da nova esfera com raio **R** e ainda V_r e V_{2r} o volume das esferas dadas, temos:

$$V = V_r + V_{2r}$$

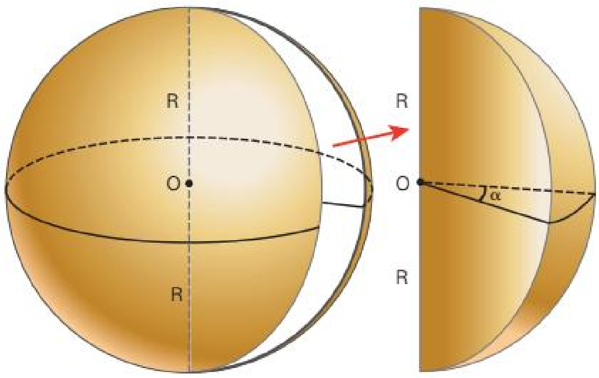
$$\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot (2r)^3$$

$$R^3 = r^3 + 8r^3$$

$$R^3 = 9r^3 \Rightarrow R = r\sqrt[3]{9}$$

Observações:

1. Na figura a seguir, a parte retirada da esfera (que lembra um gomo de laranja) é denominada **cunha esférica**.



Rotacionando um semicírculo com raio R de um ângulo α (em graus ou em radianos), obtemos uma cunha esférica.

2. O volume da cunha esférica é proporcional à medida do ângulo α indicado na figura acima. Assim, se esse ângulo medir 360º (ou 2π rad), temos o volume da esfera. Portanto, o volume V_{cunha} é tal que:

$$\frac{V_{cunha}}{V_{esfera}} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow \begin{cases} V_{cunha} = \dfrac{\alpha\pi R^3}{270^\circ} (\alpha \text{ em graus}) \\ V_{cunha} = \dfrac{2\alpha R^3}{3} (\alpha \text{ em radianos}) \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1. Qual o volume de uma esfera com 5 cm de raio?

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3$$

$$V_{esfera} = \frac{500\,\pi}{3}\,\text{cm}^3$$

2. Um recipiente em forma de um cubo, com 10 dm de aresta, está cheio de água até a metade de sua capacidade. Se forem acrescentadas três esferas maciças com raio de 1 dm cada nesse recipiente, quantos decímetros a água irá subir? (Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.)

$$V_{água\ inicial} = 10 \cdot 10 \cdot 5$$

$$V_{água\ inicial} = 500\ \text{dm}^3 \text{ ou } 500 \text{ litros}$$

$$V_{água\ final} = V_{água\ inicial} + 3 \cdot V_{esfera}$$

$$V_{água\ final} = 500 + 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \cong 500 + 4 \cdot 3{,}14$$

$$V_{água\ final} \cong 512{,}56\ \text{dm}^3 \text{ ou } 512{,}56 \text{ litros}$$

Seja h a medida que a água subiu, temos:

$10 \cdot 10 \cdot h = 512{,}56 - 500 \rightarrow 100h = 12{,}56 \rightarrow$
$\rightarrow h = 0{,}1256$ dm

3. Uma esfera cujo volume é 288π cm³ está inscrita em um cilindro. Qual o volume desse cilindro?

Como a esfera está inscrita no cilindro, o raio de cada base do cilindro é igual ao raio da esfera, e a altura do cilindro é igual ao dobro do raio da esfera. Seja R o raio da esfera, temos:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 288 \cdot \pi \rightarrow R = 6\ \text{cm}$$

Logo:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot 6^2 \cdot 12$$

$$V_{cilindro} = 432\,\pi\,\text{cm}^3$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. A mexerica, também conhecida como tangerina ou bergamota em determinadas regiões do Brasil, em geral tem formato aproximadamente esférico, conforme pode ser observado na imagem a seguir:

Supondo que a fruta da fotografia tem a forma de uma esfera, cujo raio mede 3 cm, e é composta por 12 gomos idênticos, calcule o volume aproximado de cada gomo. (Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.) Aproximadamente 9,42 cm³.

2. Uma panela cilíndrica, cuja altura mede 18 cm e cujos raios de cada base medem 10 cm, está completamente cheia com doce de leite. Deseja-se fazer docinhos com formato esférico e com diâmetro de 3 cm. Qual a quantidade máxima de docinhos que poderão ser feitos? 400

3. Um cone reto e um cilindro serão fundidos para confeccionar uma esfera. Se a altura do cone e a do cilindro medem 24 cm, o raio da base do cone mede 12 cm e o volume do cone e o do cilindro são iguais, qual a medida do raio da esfera? 12 cm

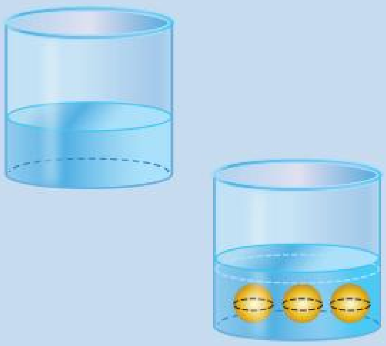
4. Em um laboratório é utilizado um recipiente de vidro conhecido como balão.

Um balão é formado por uma parte aproximadamente esférica e uma parte cilíndrica. Calcule sua capacidade sabendo que o raio da parte esférica mede 6 cm, o raio de cada base da parte cilíndrica mede 1,5 cm e a altura da parte cilíndrica mede 10 cm. (Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.)
Aproximadamente 975 mL.

5. Uma esfera de metal, maciça, foi fundida e o material foi usado para fazer dois cubos, um com aresta de 8 cm e outro com aresta de 16 cm. Não houve sobra de material. Qual era o raio da esfera? $12 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ cm

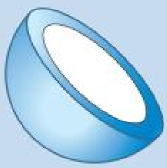
6. Um cilindro equilátero encontra-se cheio de água quando uma esfera é completamente mergulhada nele e faz transbordar certa quantidade de água. Sabendo que o círculo máximo da esfera cabe de maneira justa no cilindro, calcule o volume de água restante no recipiente em função do volume V do cilindro. $\frac{1}{3} \cdot V$

7. Um cilindro, cuja altura mede 20 cm e cujo raio de cada base mede 10 cm, está parcialmente cheio de água. Após serem colocadas em seu interior três esferas idênticas, o nível da água subiu $\frac{5}{8}$ cm, como mostram as figuras.



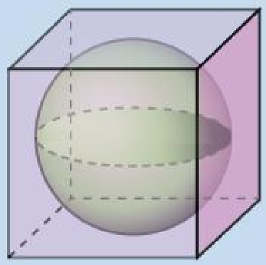
Determine a medida do raio das três esferas. 2,5 cm

8. Uma semiesfera oca, feita com gesso, cuja densidade é 2,32 g/cm^3, está representada na figura a seguir.



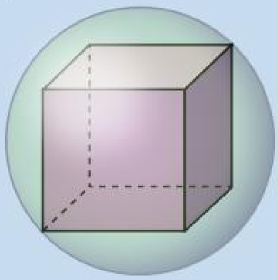
Se o raio externo mede 8 cm e o interno mede 5 cm, qual a massa aproximada, em quilogramas, dessa semiesfera? (Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.)
Aproximadamente 1,88 kg.

9. Uma esfera está inscrita em um cubo, como mostra a figura a seguir.



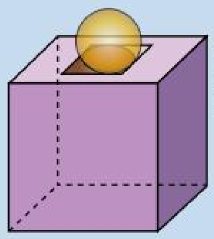
A área total do cubo é 600 cm^2, calcule, então, o volume aproximado do interior do cubo não ocupado pela esfera. (Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.)
Aproximadamente 477 cm^3.

10. Um cubo está inscrito em uma esfera, como mostra a figura a seguir.



Qual o volume da esfera, sabendo que as arestas do cubo medem $8\sqrt{3}$ dm? $2\,304\pi$ dm^3

11. Em uma caixa de madeira, cuja base tem a forma de um quadrado com lados medindo 1 m e cuja altura mede 50 cm, foi deixada uma abertura quadrada na tampa para poderem ser colocados pequenos brinquedos. Os lados da abertura medem 30 cm. Uma criança tentou colocar, pela abertura, uma bola, cujo raio mede 20 cm. Isso não foi possível, pois o diâmetro da bola era superior à medida dos lados da abertura.

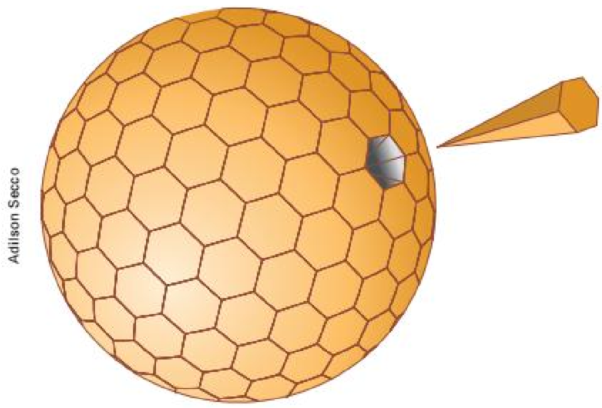


Ilustrações: Adilson Secco

No entanto, parte da bola passou pela abertura e ficou no interior da caixa. Calcule a distância entre o centro da bola e o centro da abertura no momento em que a bola ficou com o máximo de sua superfície no interior da caixa. $5\sqrt{7}$ cm

Área da superfície esférica

Para uma esfera, ainda é preciso determinar uma relação matemática que forneça a área de sua superfície. Aqui será empregado um procedimento intuitivo. Imagine uma esfera com centro no ponto **O** e raio **R**. Se for considerada essa esfera, de forma aproximada, como estando dividida em um número muito grande de "pirâmides", como mostra a figura a seguir (as bases dessas pirâmides seriam quase planas), haverá uma superfície esférica também dividida em um número muito grande de polígonos (esses polígonos seriam as bases das pirâmides, portanto seriam quase planos).



Note que cada uma dessas pirâmides tem como vértice o centro **O** da esfera. É aqui que deve ser utilizado o procedimento intuitivo: quanto maior o número de pirâmides, mais próximas de polígonos planos serão suas bases.

Além disso, a altura de cada uma dessas pirâmides irá aproximar-se cada vez mais do raio **R** da esfera. De forma intuitiva, pode-se dizer que o volume da esfera é, aproximadamente, igual à soma do volume das pirâmides em que a esfera foi dividida.

Considerando os n polígonos em que a superfície da esfera foi dividida e suas respectivas áreas (A_1, A_2, A_3, ..., A_n), e considerando ainda que o volume de uma pirâmide é um terço da área da base multiplicado pela altura, conclui-se que o volume **V** da esfera é:

$$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot R + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot R + \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot R + ... + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot R$$

$$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot R \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)$$

Como a soma da área das bases das "pirâmides" consideradas tende à área **A** da superfície da esfera e como o volume da esfera é conhecido, então, da igualdade anterior, temos:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{1}{3} \cdot R \cdot A$$

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 = A \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

A área **A** da superfície de uma esfera com raio **R** é dada por:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

Exemplos:

1. Considerando que, na linha do Equador, o comprimento da circunferência da Terra é aproximadamente 40 000 km, vamos determinar a área da superfície da Terra, considerando-a com forma similar à de uma esfera.

Cálculo do raio da esfera correspondente à Terra:

$$C = 2\pi R$$

$$40\,000 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{20\,000}{\pi} \text{ km}$$

Cálculo da área da superfície da esfera correspondente:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{20\,000}{\pi}\right)^2$$

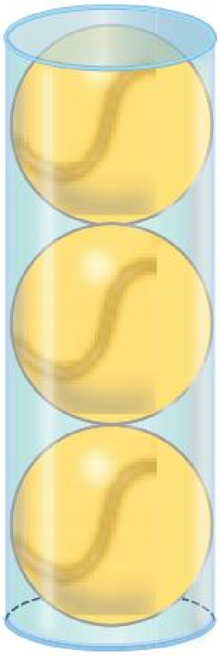
$$A = \frac{1\,600\,000\,000}{\pi}$$

$$A \cong \frac{1\,600\,000\,000}{3{,}14} \qquad A \cong 509\,554\,140 \text{ km}^2$$

2. Uma embalagem cilíndrica contém três bolinhas de tênis com mesmo tamanho que tangenciam internamente a embalagem. Considerando que as bolinhas, duas a duas, também se tangenciam, determine a razão entre a área total do cilindro e das três bolinhas. Desconsidere a espessura da embalagem.

O raio da base do cilindro é igual ao raio de cada bolinha e a altura do cilindro é três vezes o diâmetro de uma bolinha. Assim, temos:

Ilustrações: Adilson Secco



$$\frac{A_{\text{cilindro}}}{A_{\text{bolinhas}}}=\frac{2\pi r\cdot(h+r)}{3\cdot(4\pi r^2)}$$

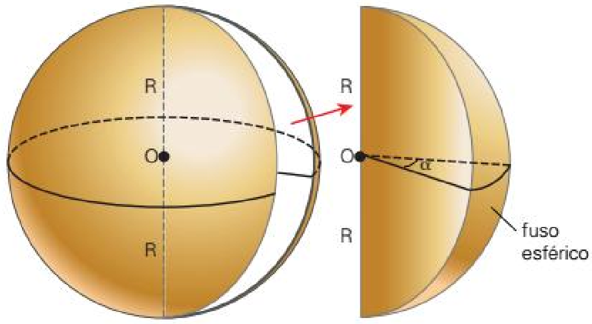
$$\frac{A_{\text{cilindro}}}{A_{\text{bolinhas}}}=\frac{2\pi r\cdot(6r+r)}{3\cdot(4\pi r^2)}$$

$$\frac{A_{\text{cilindro}}}{A_{\text{bolinhas}}}=\frac{14\pi r^2}{12\pi r^2}$$

$$\frac{A_{\text{cilindro}}}{A_{\text{bolinhas}}}=\frac{7}{6}$$

Observações:

1. Se considerarmos apenas a parte da cunha esférica pertencente à superfície esférica, temos um **fuso esférico**.



2. A área do fuso esférico é proporcional à medida do ângulo α indicado na figura acima. Assim, se o ângulo α medir 360° (ou 2π rad), temos a área da esfera. Portanto, a área A_{fuso} é tal que:

$$\frac{A_{\text{fuso}}}{A_{\text{esfera}}}=\frac{\alpha°}{360°}=\frac{\alpha\ \text{rad}}{2\pi\ \text{rad}}$$

$$\frac{A_{\text{fuso}}}{4\pi R^2}=\frac{\alpha°}{360°}=\frac{\alpha\ \text{rad}}{2\pi\ \text{rad}}\Rightarrow\begin{cases}A_{\text{fuso}}=\dfrac{\alpha\pi R^2}{90}\ (\alpha \text{ em graus})\\ A_{\text{fuso}}=2\alpha R^2\ (\alpha \text{ em radianos})\end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule a área da superfície de uma esfera cujo raio mede 4 dm.

$S_{esfera}=4\cdot\pi\cdot 4^2$

$S_{esfera}=64\pi\text{dm}^2$

2. Calcule o volume de uma esfera cuja área de sua superfície é 36π cm².

Seja R o raio da esfera, temos:

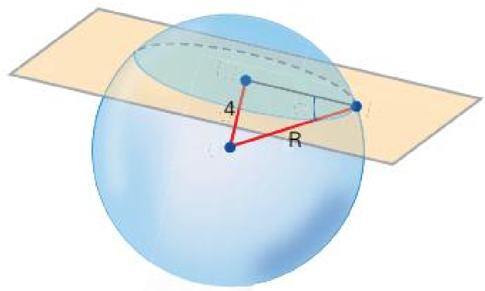
$36\pi=4\pi R^2\rightarrow R=3$ cm

Logo:

$V_{esfera}=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^3$

$V_{esfera}=36\pi\text{cm}^3$

3. Um plano secciona uma esfera com raio R em uma distância de 4 cm do seu centro.



A área do círculo gerado pela intersecção do plano com a esfera é 9π cm². Calcule a área da superfície da esfera.

Seja r o raio do círculo gerado pela intersecção do plano com a esfera, temos:

$9\pi=\pi r^2\rightarrow r=3$ cm

Assim: $R^2=4^2+3^2\rightarrow R=5$ cm

Logo:

$S_{esfera}=4\cdot\pi\cdot 5^2$

$S_{esfera}=100\pi\text{ cm}^2$

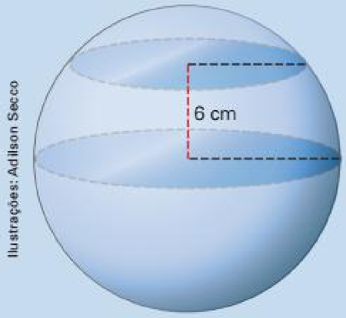
Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule a área da superfície de uma esfera cujo raio mede 10 cm. 400π cm²

2. Calcule o volume de uma esfera cuja superfície tem área de 144π cm². 288π cm³

3. Uma esfera é seccionada por um plano que dista 6 cm do seu centro. Se a área da secção obtida é 64π cm², quais são o volume e a área de superfície dessa esfera? Volume: $\frac{4000\pi}{3}$ cm³ Área: 400π cm²



4. Em uma esfera, a razão entre os números que expressam o volume e a área de sua superfície é 4. Calcule:

a) a medida do raio dessa esfera; 12 cm.

b) a razão entre o volume dessa esfera e o volume de outra esfera cuja superfície tem área de 144π cm². 8

5. De uma esfera, cujo raio mede 3 metros, foi retirada a quarta parte, por meio de cortes perpendiculares. O sólido resultante está representado na figura a seguir.

Respostas no Manual do professor.

a) Calcule o volume do sólido resultante.

b) Calcule a área da superfície do sólido resultante.

c) Compare o resultado obtido no item anterior com a área da superfície da esfera antes do corte. A que conclusão você chegou?

6. Uma esfera está inscrita em um cubo. Qual a razão entre a área da esfera e a área do cubo? $\frac{\pi}{6}$

7. Qual é, aproximadamente, a área da superfície esférica de uma laranja com 7 cm de diâmetro? (Utilize a aproximação $\pi \cong 3,14$.) Aproximadamente 153,86 cm².

8. Para um trabalho, Érica precisa pintar oito esferas de isopor cujo raio é 6 cm. Qual a área total a ser pintada? $1\,152\pi$ cm²

Algumas conclusões

Procure responder ou ao menos pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo o estudo de cilindro, cone e esfera. Caso tenha alguma dificuldade para obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais.

1. Qual sólido de revolução é obtido pela rotação de uma superfície retangular em torno de um de seus lados?

2. Qual a relação matemática que permite obter a área total de um cilindro reto com raio da base *r* e altura *h*?

3. E qual a relação que fornece o volume do cilindro?

4. Explique o que é um cilindro equilátero.

5. Qual expressão fornece a área lateral de um cone circular com raio *r*, altura *h* e geratriz *g*? E qual fornece a área total?

6. Qual expressão fornece o volume do cone circular com raio *r*, altura *h* e geratriz *g*?

7. Explique o que é um cone equilátero.

8. Qual expressão fornece a área total de uma esfera com raio *r*?

9. E o volume da esfera, é fornecido por qual expressão?

10. Qual a diferença entre cunha esférica e fuso esférico?

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas para as questões acima. Depois, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (Enem) Para resolver o problema de abastecimento de água, foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

2. (PUC-RJ) O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado 3 cm em torno de um dos seus lados é, em cm^3:

a) 3π
b) 6π
c) 9π
d) 18π
e) 27π

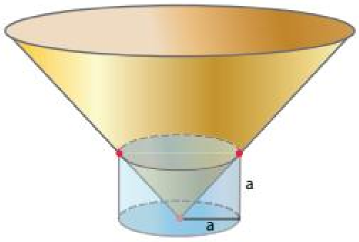
3. (UE-MG) Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de (considere $\pi \cong 3$).

a) 5,76 m
b) 4,43 m
c) 6,38 m
d) 8,74 m

4. (PUC-RS) Uma casquinha de sorvete na forma de cone foi colocada em um suporte com formato de um cilindro, cujo raio da base e a altura medem a cm, conforme a figura.

Ilustrações: Adilson Secco



O volume da parte da casquinha que está no interior do cilindro, em cm^3, é

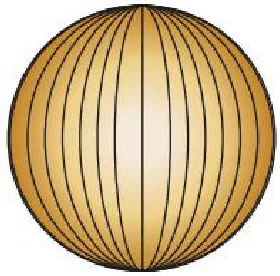
a) $\dfrac{\pi a^2}{2}$
b) $\dfrac{\pi a^2}{3}$
c) $\dfrac{\pi a^3}{2}$
d) $\dfrac{\pi a^3}{3}$
e) $\dfrac{\pi a^3}{6}$

5. (UEG-GO) Suponha que haja laranjas no formato de uma esfera com 6 cm de diâmetro e que a quantidade de suco que se obtém ao espremer cada laranja é 2/3 de seu volume, sendo o volume dado em litros. Nessas condições, se quiser obter 1 litro de suco de laranja, deve-se espremer no mínimo

Use $\pi \cong 3,14$.

a) 13 laranjas
b) 14 laranjas
c) 15 laranjas
d) 16 laranjas

6. (Udesc) Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



Sabendo-se que o volume da bola é 2304π cm^3, então a área da superfície de cada faixa é de:

a) 20π cm^2
b) 24π cm^2
c) 28π cm^2
d) 27π cm^2
e) 25π cm^2

7. (UEG-GO) Uma laranja com formato esférico e com 6 cm de diâmetro foi descascada até a sua metade. Considerando-se esses dados, verifica-se que a área total da casca retirada da laranja é de aproximadamente (use $\pi \cong 3,14$)

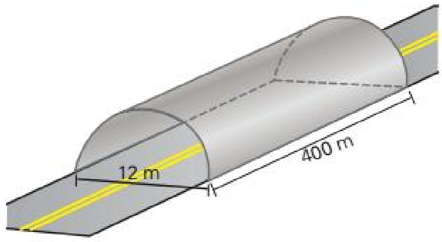
a) 48 cm^2
b) 57 cm^2
c) 74 cm^2
d) 95 cm^2

8. (Unicamp-SP) Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a R, tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio

a) 2R
b) $\sqrt{3}R$
c) $\sqrt{2}R$
d) R

9. (UFSM-RS) Uma alternativa encontrada para a melhoria da circulação em grandes cidades e em rodovias é a construção de túneis. A realização dessas obras envolve muita ciência e tecnologia.

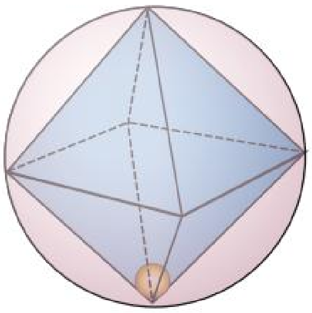
Um túnel em formato semicircular, destinado ao transporte rodoviário, tem as dimensões conforme a figura a seguir.



Qual é o volume, em m³, no interior desse túnel?

a) $4\,800\pi$
b) $7\,200\pi$
c) $14\,400\pi$
d) $28\,800\pi$
e) $57\,600\pi$

10. (UPF-RS) É possível construir um dado redondo e honesto, isto é, com probabilidade $\frac{1}{6}$ para cada um dos seis valores que ele pode sortear. As marcações do dado redondo são pintadas sobre a superfície de uma esfera, usando-se uma disposição análoga à do cubo convencional. Dentro da esfera, encontra-se uma cavidade na forma de um octaedro. Dentro da cavidade, coloca-se uma pequena esfera metálica pesada, que fica solta. Quando o dado redondo é lançado, toda a estrutura tende a se equilibrar com a pequena esfera, ocupando a posição de um dos seis vértices do octaedro e fazendo com que o topo da superfície esférica apresente uma das seis marcações.



Estrutura interna de um dado redondo.

(Disponível em: <www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>. Acesso em: 10 abr. 2015).

Se a esfera metálica que está dentro da cavidade em forma de octaedro do dado redondo tiver 6 mm de diâmetro e for feita de chumbo, que tem massa específica de 11,3 g/cm³, qual é a massa dessa esfera?

a) $0,4068\pi$ g
b) $4,068\pi$ g
c) 12,204 g
d) $0,8136\pi$ g
e) 8,136 g

11. (UPE) Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 01 a seguir:

Considere $0,4068\,\pi \cong 3$

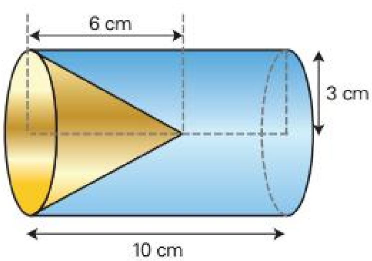
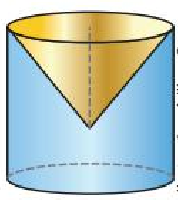


figura 01



Peça

Ilustrações: Adilson Secco

Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos?

a) $2,16 \times 10^5$
b) $7,2 \times 10^4$
c) $2,8 \times 10^5$
d) $8,32 \times 10^4$
e) $3,14 \times 10^5$

12. (Fuvest-SP) A grafite de um lápis tem quinze centímetros de comprimento e dois milímetros de espessura. Dentre os valores abaixo, o que mais se aproxima do número de átomos presentes nessa grafite é:

Nota:

1) Assuma que a grafite é um cilindro circular reto, feito de grafita pura. A espessura da grafite é o diâmetro da base do cilindro.

2) Adote os valores aproximados de:
- 2,2 g/cm³ para a densidade da grafita;
- 12 g/mol para a massa molar do carbono;
- $6,0 \times 10^{23}$ mol^{-1} para a constante de Avogadro

a) 5×10^{23}
b) 1×10^{23}
c) 5×10^{22}
d) 1×10^{22}
e) 5×10^{21}

13. (Enem) Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.

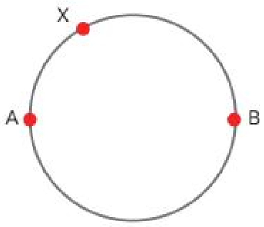
Mega Pixel/Shutterstock.com

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

a) πd
b) $2\,\pi$d
c) $4\,\pi$d
d) $5\,\pi$d
e) $10\,\pi$d

14. (UPE) A figura a seguir representa a vista de cima de uma cisterna cilíndrica. Os pontos A e B indicam os locais de abastecimento, diametralmente opostos, e o ponto X mostra a posição de uma pessoa que se encontra a 6 m de A e a 8 m de B.

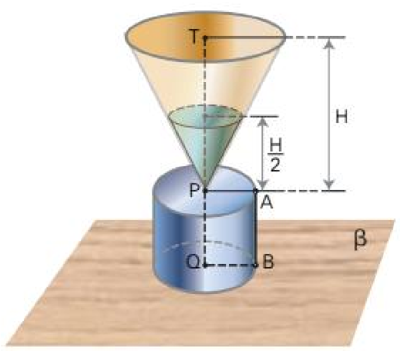


Sabendo-se que a profundidade da cisterna é de 2 m, qual a sua capacidade máxima?

(Considere $\pi \cong 3$)

a) 14 000 litros.
b) 48 000 litros.
c) 100 000 litros.
d) 150 000 litros.
e) 300 000 litros.

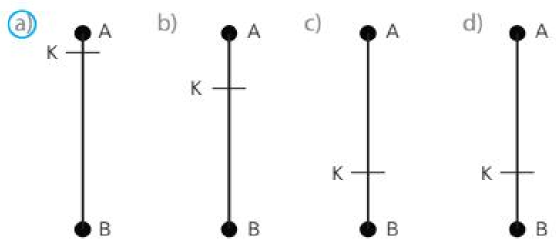
15. (Uerj) Um funil, com a forma de cone circular reto, é utilizado na passagem de óleo para um recipiente com a forma de cilindro circular reto. O funil e o recipiente possuem a mesma capacidade. De acordo com o esquema, os eixos dos recipientes estão contidos no segmento TQ, perpendicular ao plano horizontal β.



Ilustrações: Adilson Secco

Admita que o funil esteja completamente cheio do óleo a ser escoado para o recipiente cilíndrico vazio. Durante o escoamento, quando o nível do óleo estiver exatamente na metade da altura do funil, $\frac{H}{2}$, o nível do óleo no recipiente cilíndrico corresponderá ao ponto K na geratriz AB.

A posição de K, nessa geratriz, é melhor representada por:



16. (UE-MG) Uma empresa de produtos de limpeza deseja fabricar uma embalagem com tampa para seu produto. Foram apresentados dois tipos de embalagens com volumes iguais. A primeira é um cilindro de raio da base igual a 2 cm e altura igual a 10 cm; e a segunda, um paralelepípedo de dimensões iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O metro quadrado do material utilizado na fabricação das embalagens custa R$ 25,00.

Considerando-se $\pi = 3$, o valor da embalagem que terá o menor custo será

a) R$ 0,36
b) R$ 0,27
c) R$ 0,54
d) R$ 0,41

17. (Unifor-CE) Parte do líquido de um cilindro circular reto que está cheio é transferido para dois cones circulares retos idênticos de mesmo raio e mesma altura do cilindro. Sabendo-se que os cones ficaram totalmente cheios e que o nível da água que ficou no cilindro é de 3 m, a altura do cilindro é de:

a) 5 m
b) 6 m
c) 8 m
d) 9 m
e) 12 m

18. (Enem) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

a) 168
b) 304
c) 306
d) 378
e) 514

DESAFIO

(ITA-SP) Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$
b) $\sqrt[3]{2} - 1$
c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$
d) h.
e) $\frac{h}{2}$

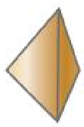
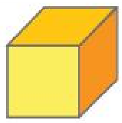
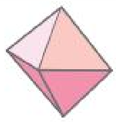
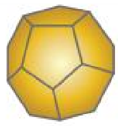
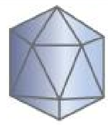
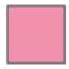
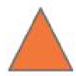
EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

O uso da geometria na probabilidade

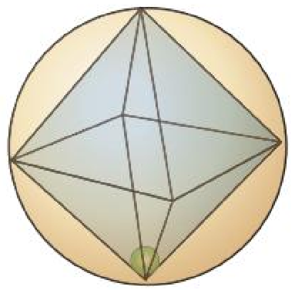
Vimos no volume 2 desta Coleção que os poliedros regulares existem apenas em cinco classes: tetraedros, hexaedros (cubos), octaedros, dodecaedros e icosaedros. A regularidade desses sólidos permite que a forma de cada um deles seja usada em dados para jogos, uma vez que tal regularidade garante a "honestidade" do dado, ou seja, garante que todas as suas faces tenham igual probabilidade de aparecer.

A forma do dado indica a quantidade de números que aparecerá:

Ilustrações: Adilson Secco

Nome	Tetraedro	Hexaedro ou cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Poliedro					
Forma das faces	Triângulo	Quadrado	Triângulo	Pentágono	Triângulo
Face					
Nº de faces	4	6	8	12	20

(Disponível em: <http://sosmatematica.com.sapo.pt/images/tabpoliedros.gif>. Acesso em: 26 maio 2016).



Estrutura de um dado redondo.

Surge disso a questão: se uma figura regular pode ser usada para a fabricação de um dado, será possível obter um dado honesto esférico?

A resposta é sim. Para fazer um dado esférico com os números de 1 a 6, basta que dentro da esfera maciça exista uma cavidade com a forma de um octaedro e, dentro dela, deve haver um peso que será responsável por fixar um dos vértices do octaedro na superfície onde for lançado após o rolamento do dado. Veja um exemplo na figura abaixo.

Questões e investigações

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Por que o dado esférico com seis faces é construído ao redor de um octaedro?
2. O que aconteceria se, dentro da esfera, fosse colocado um cubo? E um tetraedro?
3. Considere que os dados da figura possuem área superficial de aproximadamente 49,6 cm². Tome $\pi = 3{,}1$ e calcule:
   a) o raio da esfera;
   b) a medida das arestas do octaedro dentro dela;
   c) o volume do sólido entre a superfície esférica e a cavidade octaédrica.
4. Considere um cubo com 3 cm de lado sobre o qual será construído um dado esférico. Qual será o volume do sólido entre a superfície esférica e a cavidade cúbica?
5. É possível construir um dado esférico com os números de 1 a 12? E de 1 a 20?
6. Pretende-se construir um cilindro fechado para comportar três dados esféricos que serão colocados um sobre o outro, sendo o primeiro com os números de 1 a 4, o segundo com os números de 1 a 6 e o terceiro com os números de 1 a 8. Se os três dados forem construídos sobre poliedros regulares com arestas de x cm, qual será a área superficial do cilindro em função de x?

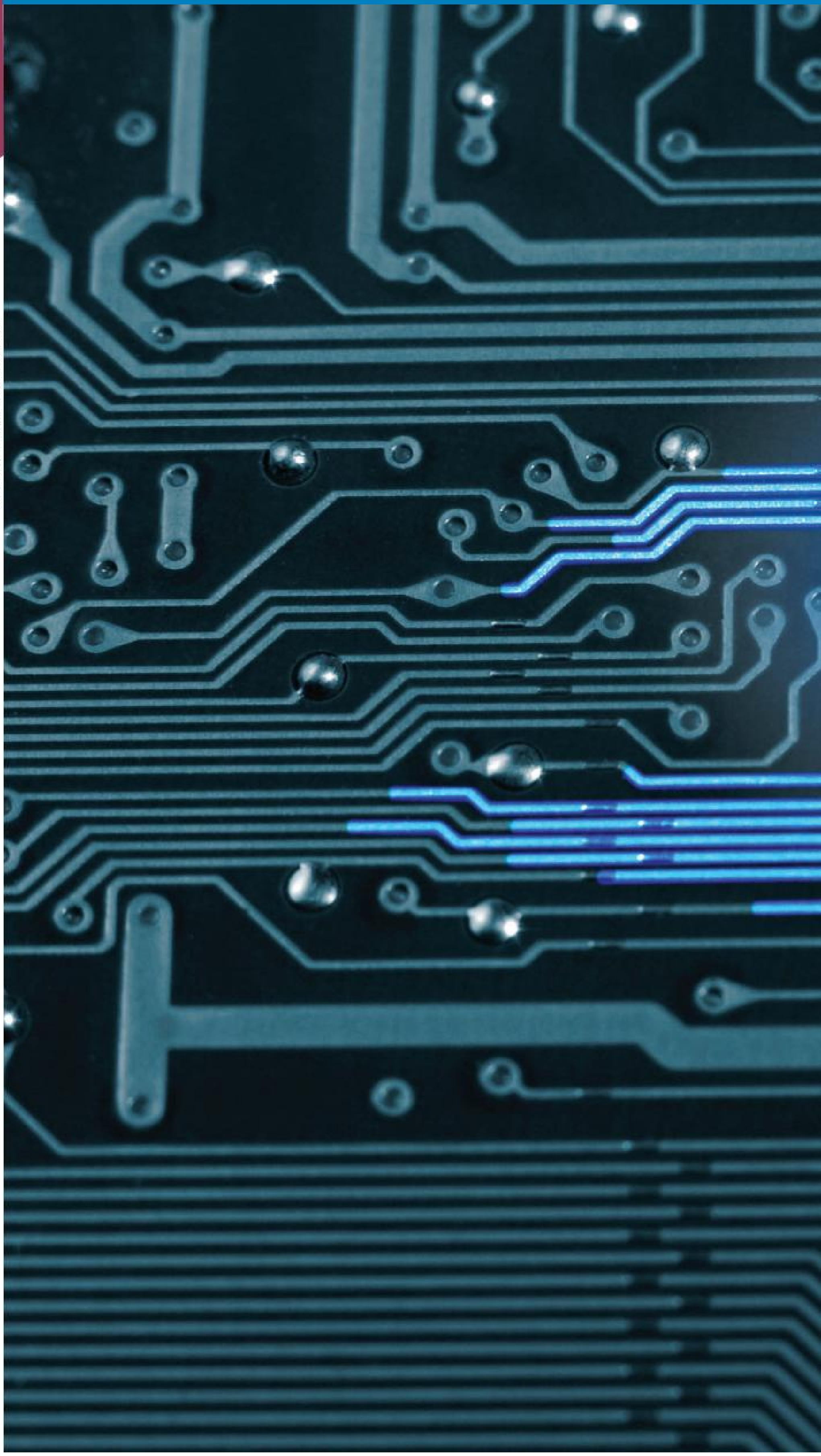
UNIDADE

4

NÚMEROS COMPLEXOS

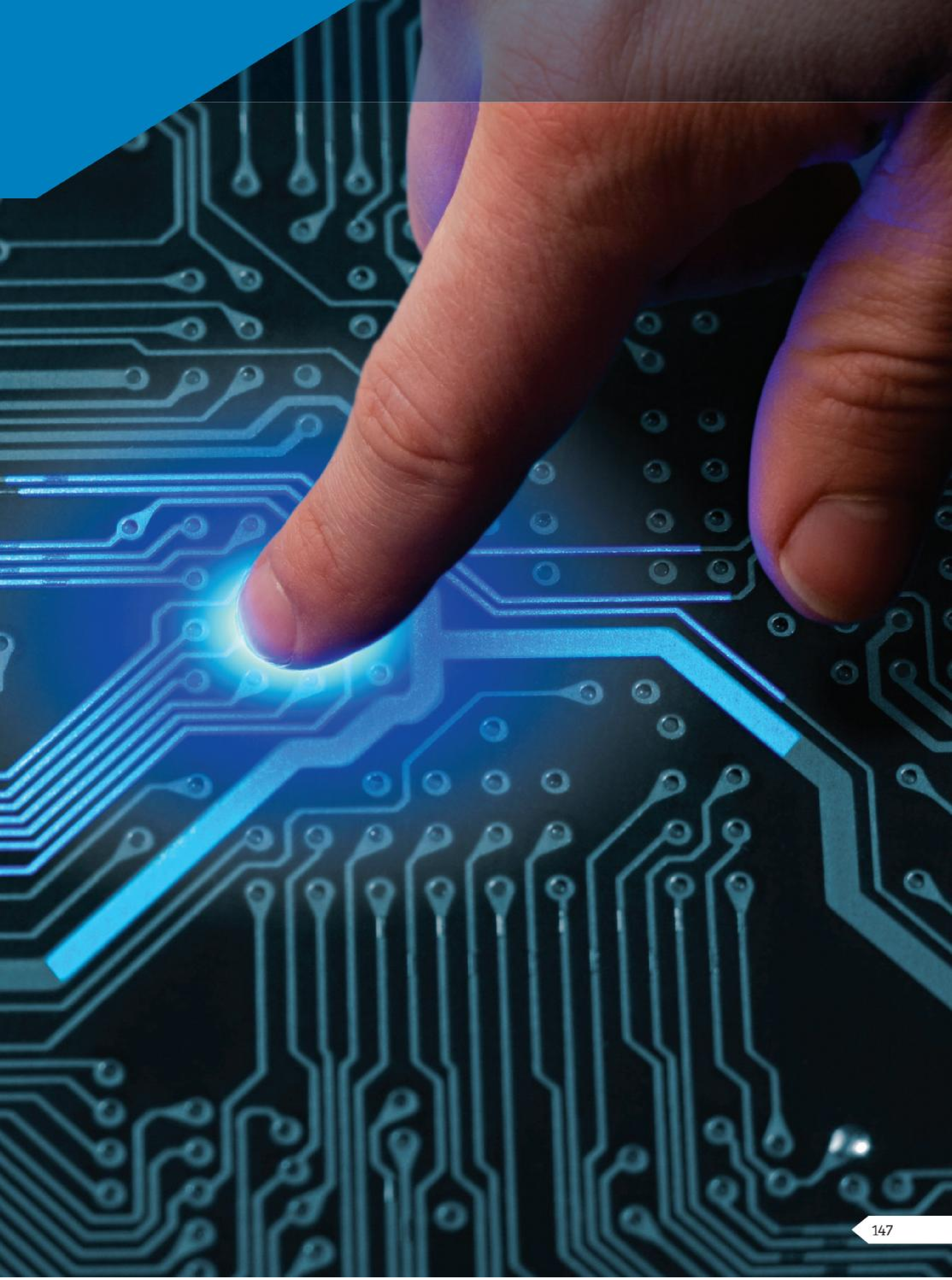
O caminho da descoberta normalmente é do prático para o teórico. Empregados em várias áreas da Engenharia, os números complexos representam uma criação que tem seu berço no teórico, seguindo o caminho inverso.

Nesta Unidade, ampliamos o campo numérico com o estudo dos números complexos.



Your lucky photo/Shutterstock.com

Os números complexos são muito utilizados, por exemplo, na Engenharia Elétrica, onde é aplicado na análise de circuitos elétricos de corrente alternada.



CAPÍTULO
11 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao longo do Ensino Fundamental, e também do Ensino Médio, são feitas ampliações do campo numérico. Essas ampliações são realizadas pela insuficiência dos conjuntos numéricos em relação a determinadas operações aritméticas. Assim, por exemplo, sabemos que o resultado da adição de dois números naturais é sempre um número natural. Isso não ocorre quando efetuamos uma subtração. Como exemplo, 25 – 45 não tem como resultado um número natural. Em outras palavras, o conjunto dos números naturais se mostra insuficiente, sendo necessário fazer uma ampliação numérica. Um novo conjunto numérico é criado: o **conjunto dos números inteiros**. Como sugere o diagrama a seguir, o conjunto dos naturais é um subconjunto do conjunto dos inteiros. Escrevemos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

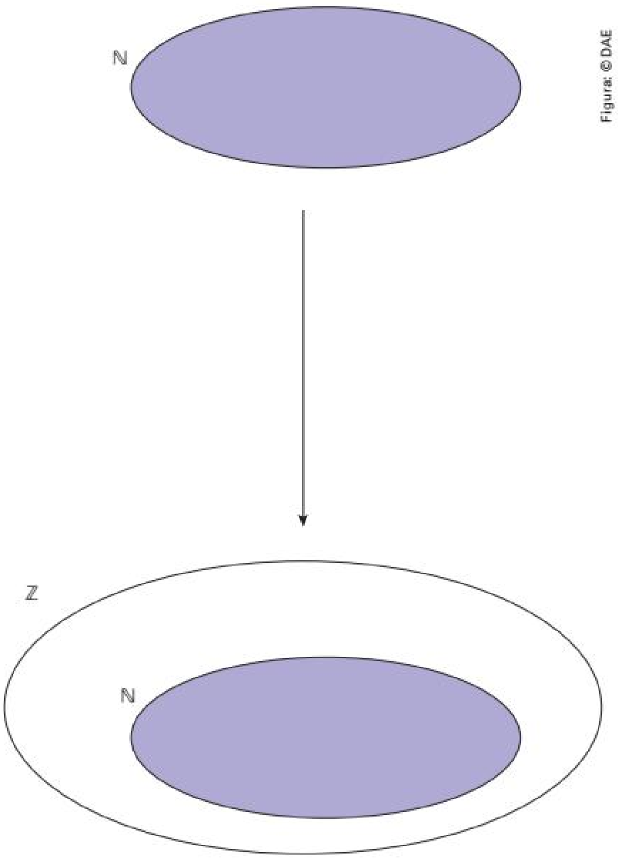


Figura: © DAE

É por meio dessa ampliação que interpretamos os resultados de certos problemas, como os apresentados anteriormente. Até aqui foram estudados esses dois conjuntos numéricos, bem como o conjunto dos racionais, o conjunto dos irracionais e o conjunto dos reais.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

Considerando o que você conhece sobre os conjuntos numéricos, responda:

1. Existe algum número que, ao ser elevado ao quadrado, resulta no próprio número? Exemplifique.
2. Quando o quadrado de um número real é igual a zero?
3. Qual a condição para que o quadrado de um número seja maior que zero?
4. Você conhece algum número que, quando elevado ao quadrado, resulte em um número negativo?

Normalmente, no final do Ensino Médio, estudamos um novo conjunto que representa uma ampliação do campo numérico: são os **números complexos**. O contexto histórico da criação desse novo conjunto é apontado como sendo o da resolução de equações algébricas. Esse assunto ainda será estudado neste livro.

Os números complexos

Antes da criação do conjunto dos números complexos, no início do século XVI, era amplamente difundida a ideia de que não existia a raiz quadrada de nenhum número negativo. Na busca de soluções de equações, frequentemente chegava-se a situações que envolviam raízes quadradas de números negativos. Era mencionada como exemplo, em livros de história da Matemática, a resolução da equação $x^3 = 15x - 4$.

A partir dos métodos conhecidos na época para resolver tal equação, chegava-se à seguinte igualdade:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

O que seria essa raiz quadrada do número -121?

No próximo capítulo, voltaremos a essa situação, mostrando por meio de um texto o que os matemáticos da época fizeram. Para que você possa compreender uma nova ampliação no campo numérico, vamos utilizar, neste momento, um contexto que conhecemos: a resolução de uma equação do 2º grau.

A situação a seguir foi extraída do livro *O romance das equações algébricas*, o qual menciona um trabalho pioneiro no manuseio da raiz quadrada de números negativos.

Coleção Particular/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Girolamo Cardano (1501 - 1576).

No livro *Ars Magna*, Girolamo Cardano (1501-1576 – o nome do autor pode aparecer também como Hieronymus Cardanus, Geronimo Cardano e Jerome Cardan) menciona que, se alguém tentar dividir 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40, verificará que é impossível. Entretanto, Cardano resolve tal problema recorrendo a um sistema formado por duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$

$\downarrow$ Elevando ao quadrado a primeira equação e multiplicando por 4 a segunda, tem-se:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100 \\ 4xy = 160 \end{cases}$$

$\downarrow$ Fazendo a primeira equação menos a segunda equação, membro a membro, tem-se:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60$$

$$(x - y)^2 = -60$$

$$x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15} \text{ (I)}$$

$\downarrow$ Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases}$$

$\downarrow$ Fazendo a primeira equação mais a segunda equação, membro a membro, tem-se:

$$2x = 10 \pm 2$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15} \text{ e } y = 5 \mp \sqrt{-15}$$

Ao chegar a esses "valores", conforme mencionado em seu livro, Cardano teria dito tratar-se de um resultado útil, porém inútil. O fato é que esse matemático trabalhou com a raiz quadrada de números negativos como se estivesse lidando com outro número qualquer.

Talvez ele tenha sido o pioneiro na manipulação daquilo que, hoje, chamamos de **números complexos**.

Ao resolvermos a equação do 2º grau em x, dada por $x^2 + 1 = 0$, sendo essa equação incompleta (falta o termo em x), somos levados a isolar a incógnita no primeiro membro da igualdade, isto é:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1} = ?????$$

Antes do aparecimento de fórmulas resolutivas para equações do 3º grau, os matemáticos, diante de um resultado como o anterior, simplesmente diziam que a equação não podia ser resolvida. Com isso, evitavam a raiz quadrada de um número negativo.

Com o surgimento da fórmula resolutiva os números complexos foram admitidos. Com o objetivo de simplificar a notação, $\sqrt{-1}$ passou a ser representada pela letra $\boldsymbol{i}$:

$$i = \sqrt{-1}$$

Se considerarmos apenas o conjunto dos números reais, a equação anterior não apresenta solução. Conforme vimos anteriormente, podemos afirmar que o conjunto dos números reais se mostra insuficiente para tal. Ampliando nosso conhecimento de conjuntos numéricos, criamos o conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$.

Mas o que é, afinal de contas, um número complexo? Como podemos defini-lo?

É importante, antes, passar à definição de número complexo, compreender que, ao ampliarmos o campo numérico com a criação do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, os números reais serão elementos de $\mathbb{C}$, isto é, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, conforme sugere o diagrama:

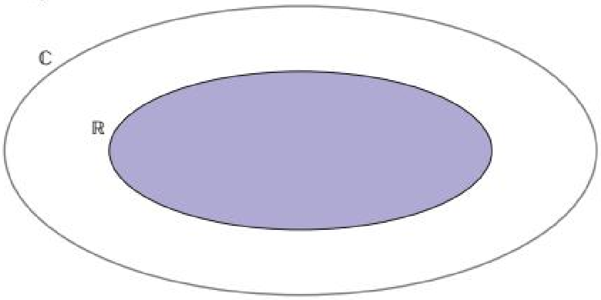


Figura: © DAE

Podemos definir os números complexos por meio de pares ordenados de números reais, conforme o quadro a seguir:

> O conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que são definidas:
>
> Igualdade: $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
>
> Adição: $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$
>
> Multiplicação: $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

Assim, chamamos de conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ o conjunto formado por todos os pares ordenados de números reais para os quais as definições presentes no quadro acima são válidas.

Considerando a maneira como foi definido o conjunto dos números complexos, faremos algumas considerações, por meio de exemplos, para compreendermos melhor tudo isso.

Exemplos:

1. Números reais – Como todo número real é complexo, cada número real poderá ser representado por um par ordenado em que o segundo elemento é zero. Assim, temos:

$$9 = (9; 0)$$
$$\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}; 0\right)$$

2. Números complexos não reais – Os números complexos não reais serão representados por pares ordenados em que o segundo elemento é diferente de zero. Como exemplo:

$$(-4; 9)$$
$$(0; 10)$$

3. Vamos determinar os valores reais de m e n para que os números complexos $(m - 3; 10)$ e $(15; n + 4)$ sejam iguais.

Pela igualdade de números complexos, teremos:

$$(m - 3; 10) = (5; n + 4)$$

$$\begin{cases} m - 3 = 15 \Rightarrow m = 18 \\ 10 = n + 4 \Rightarrow n = 6 \end{cases}$$

Portanto, $m = 18$ e $n = 6$.

4. Vamos determinar os valores de x e y para que a igualdade a seguir seja verdadeira:

$$(x; y) = (9; 2) + (2; 3)$$

- Adicionamos os complexos que estão no segundo membro da igualdade e depois comparamos os resultados com o complexo escrito no primeiro membro:

$$(x; y) = (9; 2) + (2; 3)$$
$$(x; y) = (9 + 2; 2 + 3)$$
$$(x; y) = (11; 5) \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases}$$

Logo, $x = 11$ e $y = 5$.

5. Vamos obter o número complexo resultante de $(2; 10) \cdot (5; 1) + (4; 4)$.

Multiplicamos e, depois, efetuamos a adição indicada:

$$(2; 10) \cdot (5; 1) + (4; 4) = (2 \cdot 5 - 10 \cdot 1; 2 \cdot 1 + 10 \cdot 5) + (4; 4)$$
$$(2; 10) \cdot (5; 1) + (4; 4) = (0; 52) + (4; 4)$$
$$(2; 10) \cdot (5; 1) + (4; 4) = (0 + 4; 52 + 4)$$
$$(2; 10) \cdot (5; 1) + (4; 4) = (4; 56)$$

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é o resultado de $(1; 0) \cdot (1; 0) \cdot (1; 0) \cdot (1; 0)$?

2. E o resultado de $(0; 1) \cdot (0; 1) \cdot (0; 1) \cdot (0; 1)$?

A forma algébrica de um número complexo

Utilizaremos a seguir a definição dada de números complexos para chegarmos à chamada **forma algébrica** de representar um número desse tipo. Você deve ter observado que o trabalho com os pares ordenados não é muito cômodo. Assim, com a forma algébrica, as operações entre números complexos será facilitada.

Na introdução deste capítulo, dissemos que os números complexos surgiram no contexto da resolução de equações algébricas. Mencionamos, também, que $\sqrt{-1}$ é representada pela letra i, isto é, $i = \sqrt{-1}$ Elevando ao quadrado os dois membros dessa igualdade, temos $i^2 = -1$.

i é chamada **unidade imaginária**

Vamos observar agora como, a partir de pares ordenados, obtemos esses números.

Nos números complexos, temos aqueles que são reais (o segundo elemento do par ordenado é igual a zero) e os que não são reais (o segundo elemento do par ordenado é diferente de zero). A unidade imaginária, que representaremos pela letra i, será o número complexo $(0; 1)$.

$(0; 1) = i \rightarrow$ unidade imaginária

Utilizando a multiplicação de números complexos (conforme estabelecido em pares ordenados), podemos obter o quadrado da unidade imaginária:

$$i^2 = i \cdot i$$
$$i^2 = (0; 1) \cdot (0; 1)$$
$$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
$$i^2 = (-1; 0)$$
$$i^2 = -1$$

Assim, o quadrado da unidade imaginária é igual a -1.

Vamos, a partir daqui, representar um número complexo pela letra z. Considerando que a e b são dois números reais, observe as igualdades a seguir:

$$z = (a; b)$$
$$z = (a + 0; b + 0)$$
$$z = (a + 0; 0 + b)$$
$$z = (a; 0) + (0; b) \qquad \text{(I)}$$

Observe o que ocorre quando multiplicamos o complexo $(b; 0)$ pela unidade imaginária $(0; 1) = i$:

$$(b; 0) \cdot (0; 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1; b \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$
$$(b; 0) \cdot (0; 1) = (0; b) \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$z = (a; 0) + (0; b)$$
$$z = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1)$$

$\downarrow$ Temos: $(a; 0) = a$, $(b; 0) = b$ e $(0; 1) = i$.

$z = a + bi$ $\rightarrow$ Forma algébrica de um complexo.

Sendo assim, um número complexo pode ser escrito na forma de binômio, que denominamos **forma algébrica de um complexo**.

> Todo número complexo $z=(a;b)$ com a e b números reais, pode ser escrito na forma algébrica $z=a+bi$ em que $i^2=-1$ ou $i=\sqrt{-1}$.

OBSERVAÇÃO:
No número complexo $z = a + bi$, a é chamado parte real de z, e b é chamado parte imaginária de z.
Representamos por:

$$z=a+bi \rightarrow \begin{cases} a = \text{Re}\,(z) \\ b = \text{Im}\,(z) \end{cases}$$

Exemplos:

1. Vamos observar, a partir da forma algébrica, a parte real e a parte imaginária de complexos.

$$z=9-3i \rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z)=9 \\ \text{Im}(z)=-3 \end{cases}$$

$$z=5+4\sqrt{3}\,i \rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z)=5 \\ \text{Im}(z)=4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$z=-2i \rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z)=0 \\ \text{Im}(z)=-2 \end{cases}$$

$$z=6 \rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z)=6 \\ \text{Im}(z)=0 \end{cases}$$

Representando o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos por meio de diagramas, indicamos abaixo os números dos exemplos anteriores:

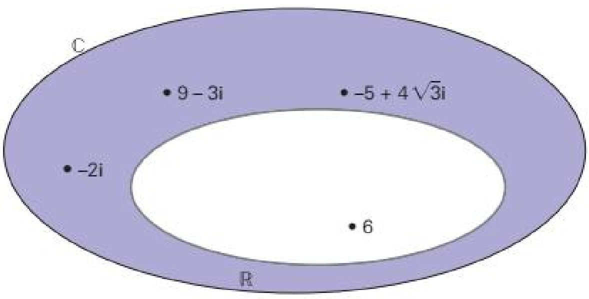
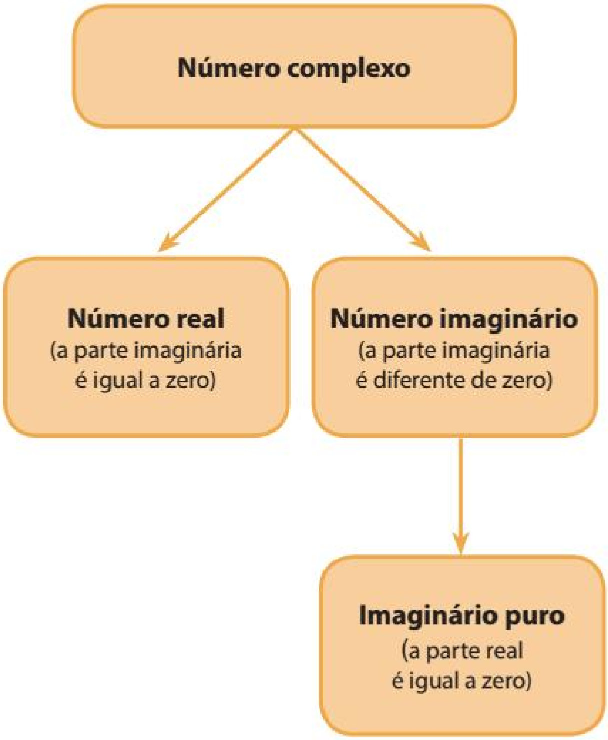


Figura: © DAE

Lembre-se de que todo número real também é um número complexo, mas a recíproca não é verdadeira, pois existem números complexos que não são reais. No diagrama, a parte em roxo representa o conjunto formado pelos números complexos que não são reais, isto é, $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ (diferença). Tal conjunto é chamado de **conjunto dos números imaginários**. Quando a parte real de um número imaginário é nula, tal número será chamado de **imaginário puro**. Observe o esquema a seguir.



2. Considere o número complexo $z = (m - 10) + (n + 6) \cdot i$ em que m e n são números reais. Vamos determinar os valores de m e de n para que esse número complexo possa ser:

a) real;

b) imaginário;

c) imaginário puro.

a) Para ser um número real, a parte imaginária deverá ser igual a zero, isto é:

$$n+6=0$$
$$n=-6$$

Portanto, n deverá ser igual a –6, e m poderá ser qualquer número real.

b) Para ser um número imaginário, a parte imaginária deverá ser diferente de zero, ou seja:

$$n + 6 \neq 0$$
$$n \neq -6$$

Portanto, n deverá ser diferente de -6 e m poderá ser qualquer número real.

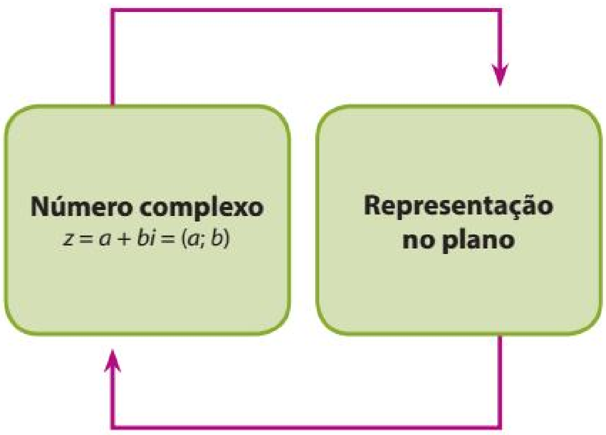
c) Para ser um número imaginário puro, a parte real deverá ser igual a zero e a parte imaginária, diferente de zero, isto é:

$$m - 10 = 0 \text{ e } n + 6 \neq 0$$
$$m = 10 \text{ e } n \neq -6$$

OBSERVAÇÃO:
Quando um número complexo possui a parte real e a parte imaginária iguais a zero, então ele é o número real zero.

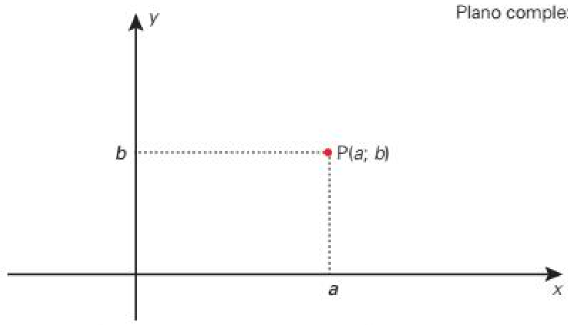
O plano complexo

Como qualquer número complexo pode ser escrito como par ordenado, também podemos associar a cada número complexo um ponto no plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano podemos associar um número complexo:



Já sabemos que a cada par ordenado associamos um ponto no plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto no plano cartesiano existe, em correspondência, um par ordenado. Cada número complexo $z = a + bi = (a; b)$ associa, no plano cartesiano, um ponto cujas coordenadas são a e b, isto é, um ponto $P(a; b)$.

Plano complexo



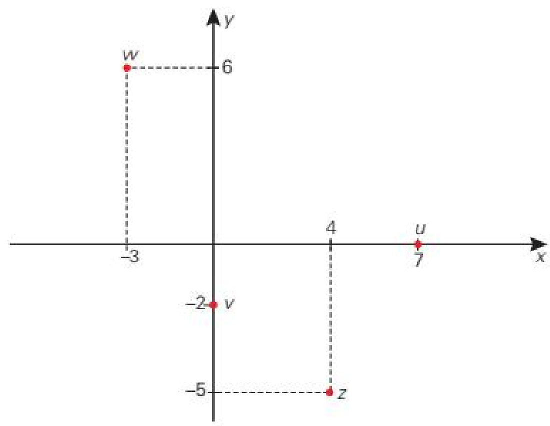
O plano cartesiano que utilizamos para representar os números complexos é denominado **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**.

Exemplo:

No plano complexo abaixo, representamos os números complexos $z = 4 - 5i$, $w = -3 + 6i$, $v = -2i$ e $u = 7$.

A cada número complexo associamos um par ordenado:

$$z = 4 - 5i \Leftrightarrow z = (4; -5)$$
$$w = -3 + 6i \Leftrightarrow w = (-3; 6)$$
$$v = -2i \Leftrightarrow v = (0; -2)$$
$$u = 7 \Leftrightarrow u = (7; 0)$$



Figuras: © DAE

O ponto associado a cada número complexo no plano complexo é denominado **afixo do número complexo**.

OBSERVAÇÕES:

1. Os números complexos que são reais têm seus afixos situados no eixo das abscissas do plano complexo. Esse eixo também é denominado **eixo real**.
2. Os números complexos que são imaginários puros têm seus afixos no eixo das ordenadas do plano complexo. Esse eixo também é denominado **eixo imaginário**.

Exercícios resolvidos

1. Determine o número complexo resultante da expressão $[(3; -2) \cdot (-1; 4)] + [(-1; 0) - (6; -3)]$.

$[(3; -2) \cdot (-1; 4)] + [(-1; 0) - (6; -3)] = [(3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 4; 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1))] + [(-1 - 6; 0 - (-3))] =$
$= [(5; 14)] + [(-7; 3)] = (5 + (-7); 14 + 3) = (-2; 17)$

2. Identifique a parte real e a parte imaginária de cada número complexo a seguir:

a) $z = 2 - 3i$

b) $z = 5i - 4$

c) $z = \sqrt[5]{17}$

d) $z = -14i$

e) $z = 0$

a) $Re(z) = 2$ e $Im(z) = -3$

b) $Re(z) = -4$ e $Im(z) = 5$

c) $Re(z) = \sqrt[5]{17}$ e $Im(z) = 0$

d) $Re(z) = 0$ e $Im(z) = -14$

e) $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 0$

3. Determine os valores reais de x e y, de modo que o número complexo $z = (2x - 4) + (y + 3) \cdot i$ seja:

a) real;

b) imaginário;

c) imaginário puro.

a) $y + 3 = 0 \therefore y = -3$ e $x \in \mathbb{R}$

b) $y + 3 \neq 0 \therefore y \neq -3$ e $x \in \mathbb{R}$

c) $2x - 4 = 0 \therefore x = 2$ e $y \neq -3$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Resolva as equações a seguir e diga se as soluções são dadas por números reais ou por números complexos não reais.

Respostas no Manual do Professor.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

e) $-x^2 + 4 = 0$

2. Indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. O número complexo (3; 0) é real. V

II. O número complexo (0; –2) é real. F

III. Os números complexos (2; –1) e (0; 5) são imaginários. V

IV. A soma dos números complexos (2; –3) e (1; 3) é um número real. V

V. O produto dos números complexos (–1; 2) e (5; –2) é um número imaginário. V

3. Determine o número complexo resultante das seguintes operações:

a) $(2; 4) + (3; 1)$

b) $(-1; 0) + (4; 2) + (0; 3)$

c) $(-1; 1) \cdot (3; -2)$

d) $(2; 1) \cdot (1; 2) + (3; -5)$

e) $[(7; -1) + (-5; 4)] \cdot (2; -3)$

a) (5; 5)
b) (3; 5)
c) (–1; 5)
d) (3; 0)
e) (13; 0)

4. Obtenha os valores de a e b de modo que os números complexos $(a + b; 3)$ e $(5; a - b)$ sejam iguais. $a = 4$ e $b = 1$

5. Obtenha o valor de x em cada uma das equações:

a) $(x - 2; 7) = (8; 7)$

b) $(3; 4) + (-1; 1) = (2; x)$

c) $(x - 1; 2) \cdot (x; 1) = (0; 5)$

a) $x = 10$
b) $x = 5$
c) $x = 2$

6. Considere os números complexos $Z_1 = (a; b)$, $Z_2 = (c; d)$ e $Z_3 = (e; f)$. Em cada item abaixo, obtenha os números complexos correspondentes:

Respostas no Manual do Professor.

a) $Z_2 + Z_3$

b) $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3)$

c) $Z_1 \cdot Z_2$

d) $Z_1 \cdot Z_3$

e) $Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$

7. Comparando os resultados obtidos nos itens *b* e *e* da atividade anterior, qual sua conclusão?
Os resultados são iguais.

8. Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos números complexos a seguir:
Respostas no Manual do Professor.

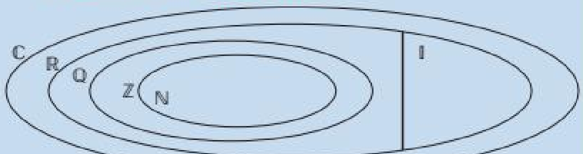
a) $z = -3 + 4 \cdot i$

b) $z = \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot i$

c) $z = 5 \cdot i$

d) $z = -7$

9. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ indicam o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos, respectivamente. Reproduza o diagrama abaixo e, após, localize nele os números a seguir, conforme a classificação indicada acima.
Respostas no Manual do Professor.



$2 \quad -5 \quad \sqrt{2} \quad 2{,}15 \quad -\frac{3}{4} \quad 2 + 3i \quad 0 \quad i$

$\sqrt[3]{7} \quad 0{,}333... \quad 22 \quad -1 \quad \pi \quad e \quad 1{,}010010001...$

$1 - 2i \quad 1 \quad \sqrt{5} \quad \frac{3}{2} \quad 1{,}8 \quad -3$

10. Indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. V
II. V
III. V
IV. V
V. V
VI. V
VII. F
VIII. V

I. Todo número natural é complexo.

II. Todo número inteiro é complexo.

III. Todo número racional é complexo.

IV. Todo número irracional é complexo.

V. Todo número imaginário é complexo.

VI. Todo número real é complexo.

VII. Todo número complexo é real.

VIII. Todo número complexo ou é real ou é imaginário.

11. Com relação ao número complexo $w = (x^2 - 4) + (x + 2) \cdot i$, indique em seu caderno V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. Existem dois valores de x para os quais w é um número imaginário puro.

II. Se $x = -2$, w é um número real.

III. Se $x = 2$, w é um número imaginário puro.

I. F
II. V
III. V

Dicas:

Todo número real é complexo.

Todo número imaginário é complexo.

Todo número imaginário puro é um número imaginário com a parte real igual a zero.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O texto a seguir foi extraído do livro *A magia dos números no Universo*, de Robert Osserman (tradução de Júlia Bárány, São Paulo: Mercuryo, 1997, p. 73-74). Nele, o autor aborda a dificuldade em relação à aceitação dos números imaginários. A aprovação dos números negativos, por exemplo, também não foi imediata.

Um dos temas recorrentes na história da Matemática é a evolução gradativa de um conceito novo – desde sua rejeição inicial por ser abstrato demais, passando por uma aceitação reservada de sua utilidade, apesar de parecer "não natural" e contrário à intuição, até ser elevado finalmente à condição de um instrumento básico e indispensável nas aplicações. Um exemplo é o conceito de "números negativos". Durante séculos, essa expressão foi vista como um oximoro, uma frase contraditória, um absurdo numérico; os números contam ou medem coisas – não existe uma forma que tenha uma área negativa, uma circunferência com comprimento negativo, um livro com um número negativo de páginas. Literalmente, durante centenas de anos, muitos esforços foram empregados para solucionar problemas por métodos que evitavam o uso de números negativos. Apenas muito gradativamente ficou claro que evitar seu uso era esforço desperdiçado, pois os números negativos, embora não sejam interpretáveis da mesma maneira que os números positivos, eram tão aceitáveis quanto os outros e não eram nada contraditórios.

O conceito de número imaginário – cujo quadrado é um número negativo – seguiu um padrão semelhante de rejeição inicial e aceitação gradativa. O problema era que as regras comuns da Aritmética nos dizem que o produto de dois números positivos é positivo e o produto de dois números negativos é positivo também. Como resultado, qualquer número multiplicado por ele mesmo produz um número positivo (ou zero, se o número original for zero), nunca um número negativo como –1. Acabou sendo, porém, muito conveniente agir como se existisse um número cujo quadrado era –1. A letra "i" foi usada para indicar essa nova entidade, e foi chamada de "número imaginário". Ele tinha a propriedade peculiar de que seu quadrado era –1, mas estava sujeito a todas as regras comuns da Aritmética. A introdução dessa nova espécie de "número" foi um ato imaginativo e arriscado, já que havia a possibilidade de que o uso de números imaginários se tornasse cada vez mais corriqueiro e só muito mais tarde levasse a uma grave contradição, e nesse caso todo o trabalho anterior teria de ser descartado. Por volta do século XIX, porém, quando os sistemas numéricos foram examinados mais de perto, tornou-se claro que "números imaginários" não eram nem mais nem menos "reais" do que os "números reais" normais. Ambos são abstrações matemáticas, e os "números reais" incluem não só números negativos, que tinham sido olhados com muita reserva durante tanto tempo, mas também esquisitices tais como decimais infinitos que nunca se repetem e que não satisfazem nenhuma equação algébrica. E assim, os números imaginários acabariam sendo plenamente aceitos como parte do instrumental matemático, disponíveis sempre que necessários para resolver problemas.

Hoje em dia, os números imaginários são usados rotineiramente por engenheiros e físicos, e muitas aplicações da Matemática seriam impensáveis sem eles.

Já vimos que a origem dos números complexos está relacionada à busca pelas soluções de equações algébricas. Vimos também que a letra *i* foi escolhida para representar a unidade imaginária. Observamos que os números complexos podem ser definidos por pares ordenados e, além disso, que os números complexos podem ser representados pela forma algébrica. Mas como foi toda essa transição? Quem surgiu primeiro, o par ordenado ou a forma algébrica?

A seguir pontuamos alguns fatos datados para que você possa observar a evolução da teoria dos números complexos.

Data	Personagem	Fato
1629	Albert Girard	Utiliza a representação $a + b\sqrt{-1}$
1637	René Descartes	Emprega as denominações "parte real" para a e "parte imaginária" para b na representação $a + b\sqrt{-1}$
1748	Leonhard Euler	Utiliza a letra i para representar $\sqrt{-1}$
1831 (*)	Carl Friedrich Gauss	Emprega a denominação "números complexos" para os números na forma $a + bi$
1837	Willian Rowan Hamilton	Dá aos números complexos o tratamento de pares ordenados de números reais

* Data aproximada.

Orientações e respostas no Manual do Professor.

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

1. Como era visto o conceito de "números negativos"? Foi de fácil aceitação?

2. Como se deu a introdução dos números imaginários, para que se tornassem cada vez mais corriqueiros e só muito mais tarde levassem a uma grave contradição?

CAPÍTULO

12

OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA

A escolha da forma algébrica para representar um número complexo tem uma vantagem sobre a forma de par ordenado: facilita o trabalho com as operações. Assim, efetuar uma adição ou subtração é análogo a executar uma adição ou uma subtração de binômios. A multiplicação, por sua vez, é realizada pela propriedade distributiva, também empregada na multiplicação de binômios.

Apenas para podermos fazer essa analogia com os números complexos escritos na forma algébrica, observe como procedemos para adicionar, subtrair e multiplicar binômios. Considerando os binômios A(x) e B(x), definidos por $A(x) = 4 + 7x$ e $B(x) = -10 + 8x$, temos:

Adição:

$$A(x)+B(x)=(4+7x)+(-10+8x)$$
$$A(x)+B(x)=(4-10)+(7x+8x)$$
$$A(x)+B(x)=-6+15x$$

Subtração:

$$A(x)-B(x)=(4+7x)-(-10+8x)$$
$$A(x)-B(x)=(4+10)+(7x-8x)$$
$$A(x)-B(x)=14-x$$

Multiplicação:

$$A(x)\cdot B(x)=(4+7x)\cdot(-10+8x)$$
$$A(x)\cdot B(x)=4\cdot(-10+8x)+7x\cdot(-10+8x)$$
$$A(x)\cdot B(x)=-40+32x-70x+56x^2$$
$$A(x)\cdot B(x)=-40-38x+56x^2$$

Adição, subtração e multiplicação de números complexos

Analogamente, vamos efetuar a adição, subtração e multiplicação dos números complexos $z_1=5-7i$ e $z_2=-4+9i$:

Adição:

$$z_1+z_2=(5-7i)+(-4+9i)$$
$$z_1+z_2=(5-4)+(-7i+9i)$$
$$z_1+z_2=1+2i$$

Adicionamos parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.

Subtração:

$$z_1-z_2=(5-7i)-(-4+9i)$$
$$z_1-z_2=(5+4)+(-7i-9i)$$
$$z_1-z_2=9-16i$$

Subtraímos parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.

Multiplicação:

$$z_1\cdot z_2=(5-7i)\cdot(-4+9i)$$
$$z_1\cdot z_2=5\cdot(-4+9i)-7i\cdot(-4+9i)$$
$$z_1\cdot z_2=-20+45i+28i-63i^2$$
$$\downarrow\ i^2=-1$$
$$z_1\cdot z_2=-20+45i+28i+63$$
$$z_1\cdot z_2=43+73i$$

Utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Apenas para que você compare, observe como seria feita a multiplicação dos dois números complexos acima utilizando o que vimos para pares ordenados:

$$z_1\cdot z_2=(5;\ -7)\cdot(-4;9)$$
$$\downarrow\ (a;b)\cdot(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$$
$$z_1\cdot z_2=[5\cdot(-4)-(-7)\cdot 9;5\cdot 9+(-7)\cdot(-4)]$$
$$z_1\cdot z_2=(-20+63;\ 45+28)$$
$$z_1\cdot z_2=(43;\ 73)\Rightarrow z_1\cdot z_2=43+73i$$

OBSERVAÇÕES:

1. Um pouco mais à frente, ainda neste capítulo, veremos como efetuar a divisão de dois números complexos escritos na forma algébrica.
2. Já vimos a **igualdade de dois números complexos** representados por pares ordenados. Na forma algébrica, dizemos que dois números complexos são iguais quando possuem a mesma parte real e a mesma parte imaginária. Em símbolos, dados os números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, sendo a_1, b_1, a_2, b_2 números reais, temos:
$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \quad \text{e} \quad b_1=b_2$$
3. A subtração entre dois números complexos pode ser feita considerando a adição do primeiro número complexo com o oposto do segundo número complexo; isto é, sendo z_1 e z_2 dois números complexos, temos:
$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$$

Exemplo:

Vamos obter os valores dos números reais p e q, de tal forma que seja verdadeira a igualdade:

$$(14 - 2i) - (10 + 7i) = p + qi$$

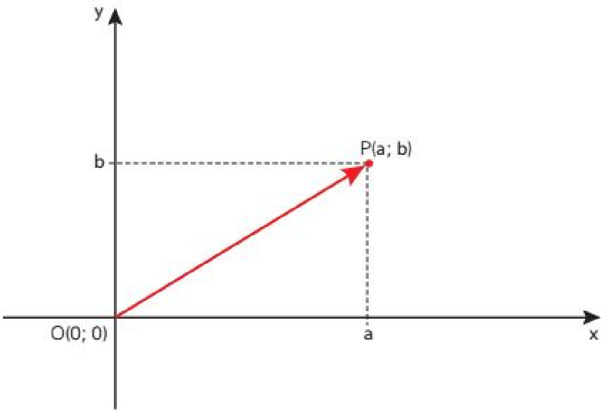
- No primeiro membro dessa igualdade, temos dois números complexos que estão sendo subtraídos. Assim, efetuamos essa subtração e depois comparamos o resultado obtido com o número complexo escrito no segundo membro:

$$(14 - 10) + (-2i - 7i) = p + qi$$

$$4 - 9i = p + qi \Rightarrow \begin{cases} 4 = p \text{ (parte real)} \\ -9 = q \text{ (parte imaginária)} \end{cases}$$

Números complexos e vetores

Vimos que a cada número complexo $z = a + bi$, sendo a e b números reais, podemos associar um ponto no plano complexo denominado **afixo** do complexo. Também podemos associar a cada número complexo um único vetor com extremidades na origem do sistema de coordenadas cartesianas (ponto O) e no ponto P(a; b).



Essa associação dos números complexos aos vetores possibilita o emprego dos números complexos no estudo de grandezas vetoriais. Assim, apenas como exemplo, o estudo de corrente elétrica e voltagem passa pela utilização de conhecimento de números complexos. Essas aplicações são normalmente desenvolvidas em nível superior. Aqui, podemos, por exemplo, utilizar vetores para representar a adição de números complexos.

Exemplo:

Vamos representar, no plano complexo, os vetores correspondentes aos números complexos $u = 8 + 2i$, $v = 5 + 9i$ e $u + v$ (a adição dos complexos u e v).

- Vamos obter inicialmente o número complexo $u + v$:

$$u + v = 8 + 2i + 5 + 9i$$

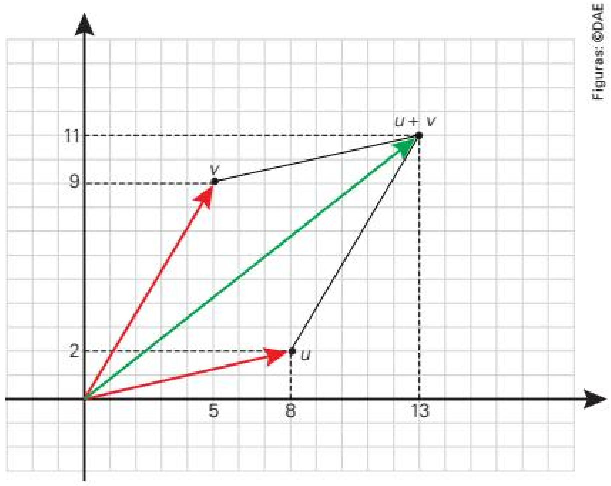
$$u + v = 13 + 11i$$

- Localizando, no plano complexo, os afixos dos complexos e os vetores correspondentes:

$$u = 8 + 2i \Rightarrow u = (8; 2)$$

$$v = 5 + 9i \Rightarrow v = (5; 9)$$

$$u + v = 13 + 11i \Rightarrow u + v = (13; 11)$$



Figuras: ©DAE

O vetor correspondente à soma dos dois números complexos u e v, conforme o exemplo, tem sua posição no plano representada pela diagonal do paralelogramo em que dois lados consecutivos estão retratados pelos vetores correspondentes aos números complexos u e v.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Se ao número complexo $z = a + bi$ é associado um vetor no plano complexo, qual é a posição desse vetor com o vetor que representa o número complexo oposto de z?
2. Observando o paralelogramo representado anteriormente e considerando que a posição do vetor correspondente à soma dos complexos u e v coincide com a diagonal do paralelogramo, qual é a posição do vetor correspondente à diferença dos complexos u e v, isto é, $u - v$?

Exercícios resolvidos

1. Sejam $z = 1 + 2i$ e $w = -2 + i$. Escreva o número complexo k na forma algébrica, tal que $k = 2 \cdot z - w^2 + z \cdot w$.

$k = 2 \cdot z - w^2 + z \cdot w$

$k = 2 \cdot (1 + 2i) - (-2 + i)^2 + (1 + 2i) \cdot (-2 + i)$

$k = 2 + 4i - (4 - 4i + i^2) + (-2 + i - 4i + 2i^2)$

$k = 2 + 4i - (3 - 4i) + (-4 - 3i)$

$k = 2 + 4i - 3 + 4i - 4 - 3i$

$k = -5 + 5i$

2. Determine o valor de m de modo que o número complexo $z = (2 - 4i) \cdot (m + 5i)$ seja imaginário puro.

$z = (2 - 4i) \cdot (m + 5i)$

$z = 2m + 10i - 4mi - 20i^2$

$z = 2m + 20 + (10 - 4m) \cdot i$

Para z ser imaginário puro, temos:

$\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0 \rightarrow 2m + 20 = 0 \therefore m = -10$

3. Determine o número complexo z, tal que $2 \cdot z + 5 \cdot z = = 14 - 7i$.

Seja $z = a + bi$, temos:

$2 \cdot z + 5 \cdot z = 14 - 7i$

$2 \cdot (a + bi) + 5 \cdot (a + bi) = 14 - 7i$

$2a + 2bi + 5a + 5bi = 14 - 7i$

$7a + 7bi = 14 - 7i$

$\begin{cases} 7a = 14 \\ 7b = -7 \end{cases} \therefore a = 2 \text{ e } b = -1$

Logo, $z = 2 - i$.

4. Agora, vamos considerar a mesma situação anterior, observando que z representa uma incógnita a ser determinada.

$2 \cdot z + 5 \cdot z = 14 - 7i$

$z \cdot (2 + 5) = 14 - 7i$

$7 \cdot z = 14 - 7i$

$\downarrow : 7$

$z = 2 - i$

5. Utilizando propriedades de potenciação e produtos notáveis, vamos determinar o número complexo $z = (1 - i)^8$.

• Considerando potência de potência, podemos obter o número complexo z da seguinte maneira:

$z = (1 - i)^8$

$z = [(1 - i)^2]^4$

$z = (1 - 2i + i^2)^4$

$z = (1 - 2i - 1)^4$

$z = (-2i)^4$

$z = 16 \cdot i^4$

$z = 16 \cdot i^2 \cdot i^2$

$z = 16 \cdot (-1) \cdot (-1) \Rightarrow z = 16$

6. Vamos determinar o valor real de k para que o número complexo $z = (2x + i) \cdot (1 - ki)$ seja um número real.

• Inicialmente multiplicamos o segundo membro da igualdade escrevendo-o na forma algébrica:

$z = (2k + i) \cdot (1 - ki)$

$z = 2k - 2k^2 i + i - ki^2$

$z = 2k - 2k^2 i + i - k(-1)$

$z = 3k + (-2k^2 + 1) \cdot i$

• Como esse número deverá ser real, sua parte imaginária é nula, isto é:

$-2k^2 + 1 = 0$

$2k^2 = 1$

$k^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Sendo $z = 3 - 2i$ e $w = 1 + 3i$, obtenha os números complexos resultantes de:

a) $z + w$ $z + w = 4 + i$

b) $z - w$ $z - w = 2 - 5i$

c) $z \cdot w$ $zw = 9 + 7i$

d) z^2 $z^2 = 5 - 12i$

e) $2z + 3w$ $2z + 3w = 9 + 5i$

2. Indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. A soma de dois números complexos imaginários pode ser um número complexo real.

II. A soma de dois números complexos reais é um número complexo real.

III. O produto de dois números complexos imaginários é um número complexo imaginário.

IV. O produto de dois números complexos imaginários puros é um número complexo real.

V. O produto de um número complexo real por um número complexo imaginário pode ser um número complexo real. I. V II. V III. F IV. V V. V

3. Uma matriz $A = (a_{mn})_{2\times2}$ é definida por:

$$a_{mn} = \begin{cases} n + i, \text{ se } m = n \\ m - i, \text{ se } m \neq n \end{cases}, \text{ onde } i = \sqrt{-1}$$

a) Escreva a matriz A.

b) Calcule o determinante da matriz A.

Respostas no Manual do Professor.

4. Obtenha o valor de m de modo que o número complexo $z = (m + 2i) \cdot (2 - 4i)$:

a) seja real; $m = 1$

b) seja imaginário puro. $m = -4$

5. Calcule os valores de x e y para que os números complexos $z = (x + 2y) + (3x + y) \cdot i$ e $w = (2 + 3y) + (x - y + 8) \cdot i$ sejam iguais: $x = 3$ e $y = 1$

6. Uma sequência de números complexos é definida por: Respostas no Manual do Professor.

$$\begin{cases} z_1 = 1+i \\ z_{k+1} = (1-i) \cdot z_k \end{cases}, k = 1, 2, 3...$$

a) Escreva os seis primeiros termos dessa sequência.

b) Quantos desses seis números são reais? Existe algum número imaginário puro?

7. Sendo $z = 1 + i$, calcule:

a) z^2. $2i$

b) o valor da expressão $\dfrac{(1+i)^8-(1i+i)^{12}}{(1+i)^8}$, considerando a propriedade de potenciação $a^{2n} = \left(a^2\right)^n$ -20

8. Sabe-se que um número complexo z é tal que $z \cdot (1 + i) = -7 + i$:

a) Escreva o número complexo z na forma algébrica. $z = -3 + 4i$

b) Obtenha o número complexo correspondente a $z^2 + 2z + 1$. $-12 - 16i$

9. Um número complexo satisfaz a igualdade $i \cdot z + 2 \cdot z = 1 + 13i$:

a) Escreva o número complexo z na forma algébrica. $z = 3 + 5i$

b) Determine o número complexo $w = z^2$: $-16 + 30i$

10. Lembrando que $(1 - i)^2 = -2i$, calcule:

a) $(1 - i)^4$ -4 b) $(1 - i)^{10}$ $-32i$

11. Responda em seu caderno: Respostas no Manual do Professor.

a) O quadrado de um número real pode resultar em um número imaginário?

b) O quadrado de um número imaginário pode resultar em um número real? Resposta pessoal.

c) Qual é o resultado da multiplicação de um número real por 1?

d) Qual é o resultado da multiplicação de um número imaginário por 1?

12. Elabore uma sequência formada por números complexos não reais $(z_1; z_2; z_3; z_4; z_5; z_6)$ tal que cada termo, a partir do segundo, seja o dobro do termo anterior: Resposta pessoal.

13. Elabore uma sequência formada por números complexos não reais $(z_1; z_2; z_3; z_4; z_5; z_6)$ tal que cada termo, a partir do segundo, seja o termo anterior aumentado em $4 - i$. Resposta pessoal.

O conjugado de um complexo

Ainda precisamos saber como fazer com a divisão de dois números complexos. Para tanto, é necessário definirmos o que vem a ser conjugado de um número complexo.

Sendo $z = (a, b) = a + bi$ um número complexo com a e b reais, denomina-se **conjugado de z** o número complexo representado por $\bar{z}$ tal que:

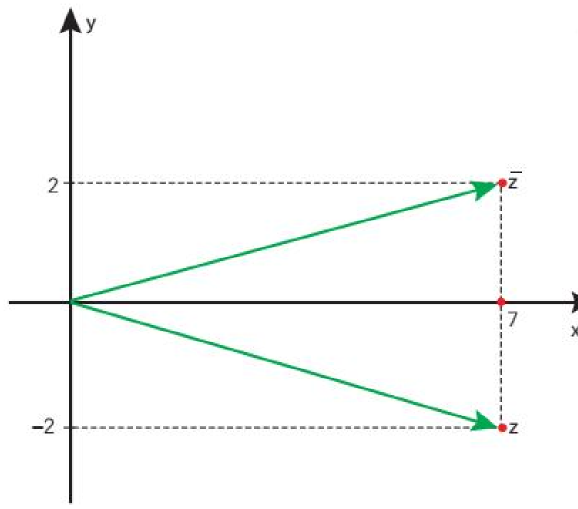
$$\bar{z} = (a, -b) = a - bi$$

Note que, em um número complexo e no seu conjugado, os números que representam as partes reais são iguais, ao passo que os números que representam as partes imaginárias são opostos.

Exemplo:

Dado o número complexo $z = 7 - 2i$, vamos obter o seu conjugado $\bar{z}$ e representar, num mesmo plano complexo, z e $\bar{z}$

- Como $z = 7 - 2i$, então $\bar{z} = 7 + 2i$. Assim, representando os afixos desses dois números complexos no plano complexo, temos.



Figuras: ©DAE

Note que os afixos (e também os vetores que representam esses complexos) são simétricos em relação ao eixo real.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. É possível que o conjugado de um número complexo seja o próprio número complexo? Exemplifique.
2. Quando o conjugado de um número complexo é igual ao oposto do número complexo? Exemplifique!

Exemplo:

Vamos obter o número complexo z que representa a solução da equação $2+5i+z=2\cdot\overline{z}$.

Como não sabemos qual é o número complexo z, vamos representá-lo por $z=a+bi$ e o conjugado de z por $a-bi$. Utilizando a igualdade de complexos, podemos determinar a parte real e a parte imaginária de z:

$$2+5i+z=2\cdot\overline{z}$$
$$2+5i+a+bi=2\cdot(a-bi)$$
$$2+5i+a+bi=2a-2bi$$
$$(2+a)+(5+b)i=2a-2bi$$

$\downarrow$ igualdade de complexos

$$\begin{cases}2+a=2a\\5+b=-2b\end{cases}\Rightarrow a=2 \text{ e } b=-\frac{5}{3}$$

Portanto, $z=2-\frac{5}{3}i$.

Propriedades do conjugado de um complexo

Observe a seguir algumas propriedades relacionadas ao conjugado de um número complexo. Apresentamos, após cada uma, as demonstrações correspondentes.

Propriedade 1:

O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses complexos.

Demonstração:

Sejam dois números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, para a, b, c e d números reais. Queremos provar que $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$$
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+c)+(b+d)i}$$
$$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$$
$$\overline{z_1+z_2}=a-bi+c-di$$
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)}+\overline{(c+di)}$$
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

O conjugado da soma de dois complexos é a soma dos conjugados desses complexos.

Propriedade 2:

O conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados desses complexos.

Demonstração:

Sejam dois números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, para a, b, c e d números reais. Queremos provar que $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. Determinamos inicialmente $\overline{z_1\cdot z_2}$:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a+bi)\cdot(c+di)}$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{ac+adi+bci+bdi^2}$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=ac-bd-adi-bci$$
$$\overline{z_1\ z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i \quad \text{(I)}$$

Vamos calcular agora $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$:

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{(a+bi)}\cdot\overline{(c+di)}$$
$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)\cdot(c-di)$$
$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=ac-adi-bci+bdi^2$$
$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

O conjugado do produto de dois complexos é o produto dos conjugados desses complexos.

Propriedade 3:

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é um número real não negativo.

Demonstração:

Seja o número complexo $z=a+bi$ para a e b números reais. Queremos provar que $z\cdot\overline{z}$ é um número real e não negativo.

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)$$
$$z\cdot\overline{z}=a^2-abi+abi-b^2i^2$$
$$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2 \qquad a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Sendo a e b números reais, justifique, por meio de exemplos, que $a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$.
2. Existem outras propriedades relacionadas ao conjugado de um complexo. Por meio de exemplos, justifique as seguintes:
   I. Se um complexo é igual ao seu conjugado, então o complexo é real.
   II. Se um complexo é real, então é igual ao seu conjugado.
   III. O resultado da adição de um complexo com o seu conjugado sempre é um número real.

A divisão de dois complexos

Utilizaremos a propriedade 3 do conjugado de um número complexo para efetuar a divisão entre dois números complexos dados. Antes, por meio de um exemplo, vamos considerar um procedimento de como podemos efetuar essa operação.

Exemplo:

Dados os números complexos $z = 3 + 4i$ e $w = 5 + i$, vamos determinar o número complexo $v = x + yi$ tal que $\frac{z}{w}=v$, isto é, queremos obter o resultado da divisão do complexo z pelo complexo w.

Isolando na igualdade o complexo z no primeiro membro e utilizando o conceito de igualdade de dois complexos, temos:

$$z=v\cdot w$$
$$3+4i=(x+yi)\cdot(5+i)$$
$$3+4i=5x+xi+5yi+yi^2$$
$$3+4i=(5x-y)+(x+5y)i$$

Pela igualdade de complexos

$$\begin{cases}3=5x-y\\4=x+5y\end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos $x=\frac{19}{26}$ e $y=\frac{17}{26}$. Assim, concluímos que o número complexo v é tal que $v=\frac{19}{26}+\frac{17}{26}i$. Dessa forma, temos:

$$\frac{z}{w}=\frac{3+4i}{5+i}=\frac{19}{26}+\frac{17}{26}i$$

O procedimento apresentado tem o inconveniente de recair em um sistema formado por duas equações e com duas incógnitas. Outra maneira de efetuar essa divisão é:

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2\neq 0$, é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}$$

Assim, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador. Note, retornando ao exemplo anterior, que esse procedimento é mais simples:

$$\frac{z}{w}=\frac{3+4i}{5+i}$$
$$\frac{z}{w}=\frac{(3+4i)\cdot(5-i)}{(5+i)\cdot(5-i)}$$
$$\frac{z}{w}=\frac{15-3i+20i-4i^2}{25-i^2}$$
$$\frac{z}{w}=\frac{19+17i}{26}$$
$$\frac{z}{w}=\frac{19}{26}+\frac{17}{26}i$$

OBSERVAÇÃO:
Assim como ocorre com cada número real diferente de zero, do produto de um número complexo não nulo pelo seu inverso também resulta a unidade.

Exercícios resolvidos

1. Determine o número complexo z tal que
$4 \cdot z - 3i \cdot \bar{z} = -5 + 9i$.

Sendo $z = a + bi$ e seu conjugado $\bar{z} = a + bi$, temos:

$4 \cdot z - 3i \cdot \bar{z} = -5 - 9i$

$4 \cdot (a + bi) - 3i \cdot (a - bi) = -5 + 9i$

$4a + 4bi - 3a\,i - 3\,b = -5 + 9i$

$$\begin{cases} 4a - 3b = -5 \\ 4b - 3a = 9 \end{cases} \therefore a = 1 \text{ e } b = 3$$

Logo, $z = 1 + 3i$

2. Dados $z = 2 + 3i$ e $w = 4 - 5i$, escreva na forma algébrica $\dfrac{z}{w}$ e $\dfrac{w}{z}$.

$$\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{4-5i} = \frac{(2+3i)}{(4-5i)} \cdot \frac{(4+5i)}{(4+5i)} =$$

$$= \frac{8 + 10i + 12i + 15i^2}{4^2 - (5i)^2} = \frac{8 - 15 + 10i + 12i}{16 + 25} =$$

$$= -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{4-5i}{2+3i} = \frac{(4-5i)}{(2+3i)} \cdot \frac{(2-3i)}{(2-3i)} =$$

$$= \frac{8 - 12i - 10i + 15i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{8 - 15 - 12i - 10i}{4 + 9} =$$

$$= -\frac{7}{13} - \frac{22}{13}i$$

3. Seja m um número real. Determine o valor de m, de modo que o número complexo $z = \dfrac{2+3i}{m-1}$:

a) seja real.

b) seja imaginário puro.

$$z = \frac{2+3i}{m-i} = \frac{(2+3i)}{(m-i)} \cdot \frac{(m+i)}{(m+i)} =$$

$$= \frac{2m + 2i + 3mi + 3i^2}{m^2 - i^2} = \frac{2m - 3 + (2 + 3m)i}{m^2 + 1}$$

a) Para z ser um número real, temos que $\mathrm{Im}(z) = 0$.
Assim: $2 + 3m = 0 \therefore m = -\dfrac{2}{3}$

b) Para z ser um imaginário puro, temos que $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Assim: $2m - 3 = 0 \therefore m = \dfrac{3}{2}$

Exercícios propostos

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. A soma de um número complexo e o seu conjugado é um número complexo real. V

II. O produto de um número complexo e o seu conjugado é um número complexo real. V

III. O conjugado do número complexo $z = 2 + 3i$ é $\bar{z} = -2 - 3i$. F

IV. O conjugado do número complexo $z = 5i$ é $\bar{z} = 5i$. F

V. Um número complexo e o seu conjugado nunca são iguais. F

2. As partes real e imaginária de um número complexo z são, respectivamente, iguais a -3 e 2. Escreva:

a) o número complexo z na forma algébrica.

b) o conjugado do número complexo z na forma algébrica.

c) o número complexo $\dfrac{1}{z}$ na forma algébrica:

3. Dados os números complexos $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 1 + i$, obtenha:

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $\dfrac{z_2}{z_1}$ c) $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4. Responda, em relação aos números complexos da atividade anterior: Sim.

É correto afirmar que $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$?

5. Considere o número complexo $z = \dfrac{1+i}{m-2i}$, sendo m um número real. Então:

a) para $m = 1$, escreva o número complexo z na forma algébrica;

b) determine o valor de m, de modo que o número complexo z seja real.

c) determine o valor de m, de modo que o número complexo z seja imaginário puro:

6. Um número complexo z é tal que $wz + 2\bar{z} = 12 + 2i$. Escreva, na forma algébrica, o número complexo:

a) z b) $\dfrac{1}{z}$ $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} \cdot i$

$z = 4 - 2i$

7. Um número complexo z é tal que $z + \bar{z} = 10$ e $z \cdot \bar{z} = 169$. Determine os possíveis números complexos que satisfazem as duas equações anteriores:

$z = 5 + 12i$ ou $z = 5 - 12i$

8. Dois números complexos z e w satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{cases} z + i \cdot w = 4 + 6i \\ w + i \cdot z = 4 \end{cases}$$

a) Escreva a forma algébrica dos números complexos z e w.

b) Escreva a forma algébrica do número complexo $\dfrac{z}{w}$.

9. Dois números complexos z e w são tais que $z^2 - w^2 = -10$ e $\bar{z} + \bar{w} = 1 - i$.

a) É correto afirmar que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$? Sim.

b) Qual é o número complexo resultante de $z + w$? $1 + i$

c) E de $z - w$? $-5 + 5i$

d) Determine os números complexos z e w. $z = -2 + 3i$ e $w = 3 - 2i$

e) Qual é o número complexo resultante de $\dfrac{z}{w}$? $-\dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13} \cdot i$

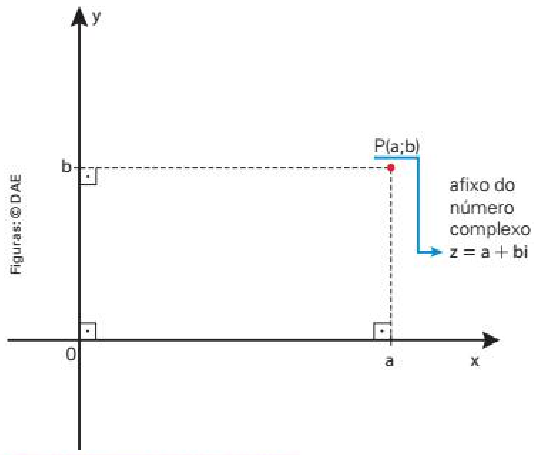
CAPÍTULO

13 FORMA TRIGONOMÉTRICA

Vimos que um número complexo $\boldsymbol{z = a + bi}$ (forma algébrica) foi também definido inicialmente por meio de um par ordenado. Como observado, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são realizadas mais facilmente por essa forma do que somente por meio de pares ordenados.

A partir da representação geométrica no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss), obteremos outra forma de expressar um número complexo: é a chamada **forma polar** ou **forma trigonométrica de um complexo**.

Iniciamos considerando a seguinte representação no plano complexo de $z = a + bi$:



Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

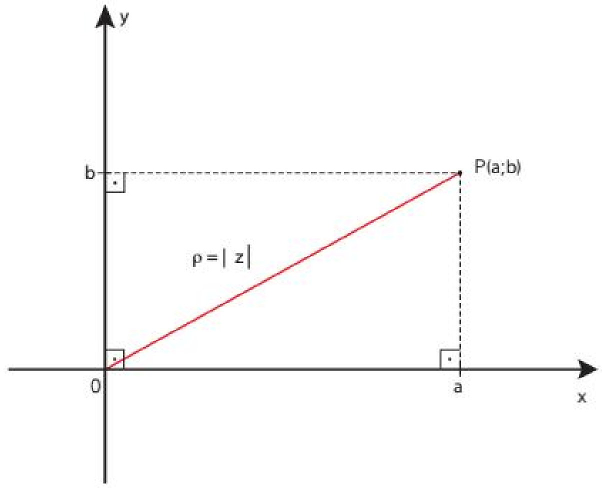
Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é a denominação dos números complexos cujos afixos pertencem ao eixo imaginário?
2. E ao eixo real?

Módulo de um número complexo

Além de associarmos um ponto a cada número complexo no plano complexo, também podemos associar uma distância, denominada **módulo de um número complexo**.

O módulo de um número complexo $z = a + bi$ sendo a e b números reais, é a distância do ponto P(a, b) à origem do plano complexo. Representaremos o módulo de z ou por $|z|$ ou por ρ.



Considerando a distância entre dois pontos (conforme vimos em Geometria Analítica), vamos obter, no plano complexo acima, o módulo do número complexo em função de suas coordenadas (parte real e parte imaginária):

$$\rho = |z| = d_{P,0}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O **módulo** de um número complexo $z = a + bi$, sendo a e b números reais, é dado por:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

OBSERVAÇÃO:
O módulo de qualquer número complexo, definido como uma distância, sempre é positivo ou igual a zero.

Exemplo:

Vamos determinar o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z=3-4i$

b) $z=-7$

c) $z=5i$

Conhecendo a parte real e a parte imaginária de um número complexo, podemos calcular, a partir da relação anterior, o seu módulo:

a) $|z|=|3-4i|$

$|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}$

$|z|=\sqrt{25} \Rightarrow |z|=5$

b) $|z|=|-7|$

$|z|=\sqrt{(-7)^2+0^2}$

$|z|=\sqrt{49} \Rightarrow |z|=7$

c) $|z|=|5i|$

$|z|=\sqrt{0^2+5^2}$

$|z|=\sqrt{25} \Rightarrow |z|=5$

OBSERVAÇÃO:
Para qualquer número real x, temos que $|x|=\sqrt{x^2}$ (essa relação já foi comentada no Volume 1 desta Coleção). Utilizando o conceito de módulo de número complexo, temos:

$$|x|=|x+0\cdot i|=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}$$

Demonstraremos, a seguir, três propriedades importantes de módulo de números complexos.

Propriedade 1:

Se z é um número complexo, então

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

Demonstração:

Considerando $z=a+bi$, sendo a e b números reais quaisquer, temos:

$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)$

$z\cdot\bar{z}=a^2-b^2\cdot i^2$

$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$ (I)

Obtendo o quadrado do módulo do número complexo $z = a + bi$, temos:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$

$|z|^2=a^2+b^2$ (II)

Comparando (I) com (II), concluímos que:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

Propriedade 2:

Se z é um número complexo, então

$$|z|=|\bar{z}|$$

Considerando $z = a + bi$, sendo a e b números reais quaisquer, e $\bar{z}=a-bi$ temos:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ (I)

$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2} \Rightarrow |\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$ (II)

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$|z|=|\bar{z}|$$

Propriedade 3:

Se z_1 e z_2 são números complexos,

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$$

Utilizando a propriedade 1 vista na página anter, temos:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2})$$

↓Propriedade do conjugado

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2})$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2})$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Como o módulo é um número real positivo ou igual a zero, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade anterior, concluímos que:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

Se o módulo de um produto de dois números complexos é o produto de seus módulos (propriedade 3), o que você pode afirmar sobre o módulo do quociente de dois números complexos, isto é,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|, \text{ sendo } z_2 \neq 0?$$

A forma trigonométrica

Vimos que a todo número complexo $z = a + bi$, sendo a e b **números reais**, podemos associar um ponto no plano complexo denominado **afixo do complexo**, que é localizado a partir da parte real e da parte imaginária do complexo. Assim, o afixo tem coordenadas (a b). A distância desse ponto à origem é denominado **módulo do complexo**.

O afixo de um complexo pode também ser localizado por **coordenadas polares**, sendo que o módulo é uma de suas coordenadas. A outra coordenada é chamada de **argumento**:

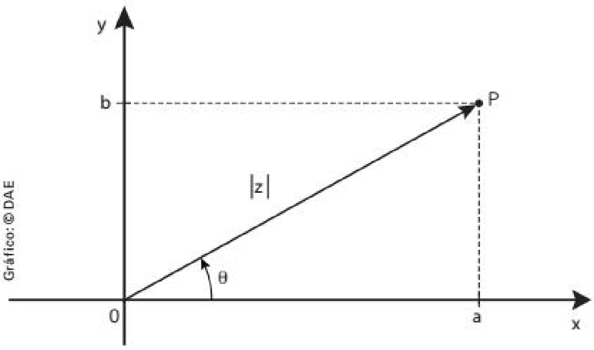


Gráfico: © DAE

O **argumento** de um número complexo **não nulo** $z = a + bi$, sendo a e b reais, é o ângulo θ em que $0 \leqslant \theta < 2\pi$, que se obtém no sentido anti-horário a partir do eixo x.

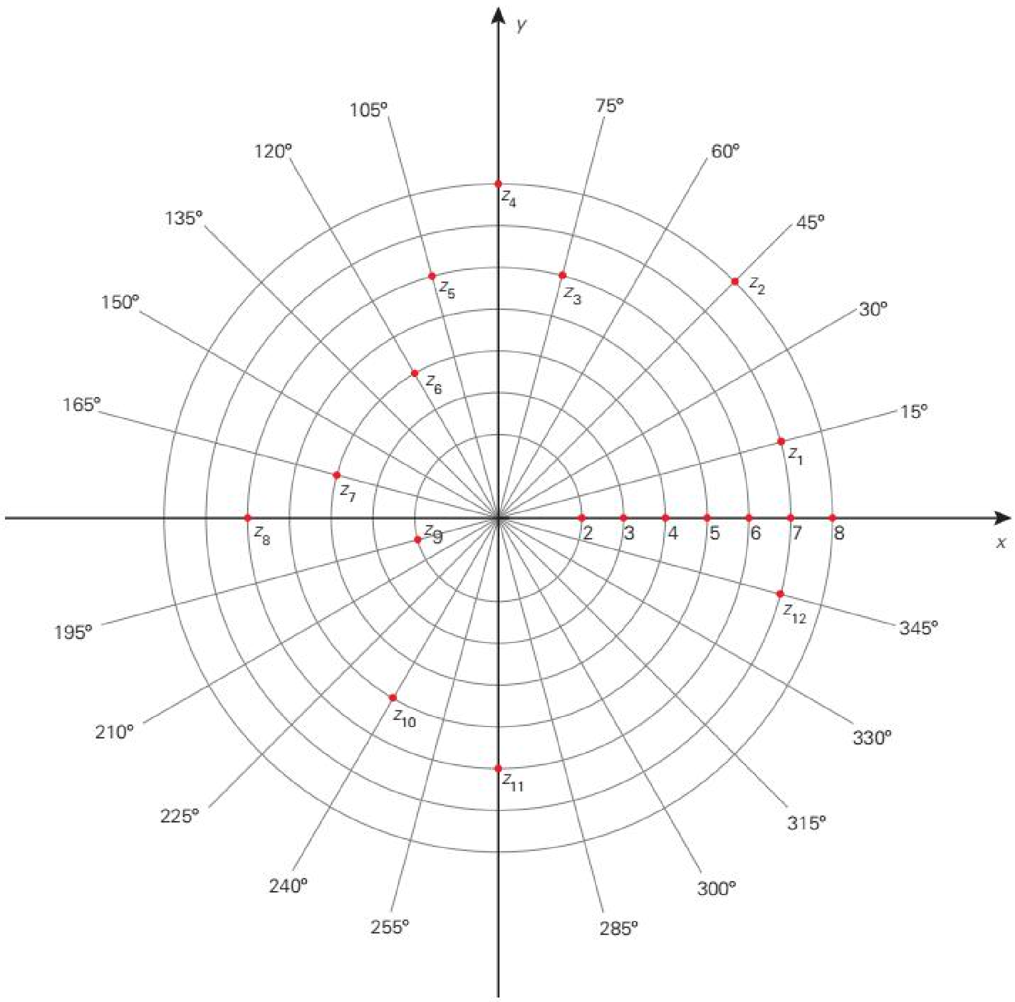
OBSERVAÇÕES:

1. A exclusão do número complexo $z = 0$ na definição de argumento evita o inconveniente de associarmos a esse número mais de um argumento. Assim, poderíamos ter, para $z = 0$, o módulo igual a zero e o argumento igual a $\frac{\pi}{3}$ ou o módulo igual a zero e o argumento igual a qualquer outro ângulo no intervalo $[0; 2\pi[$ em graus, $[0,360°[$
2. O argumento também é chamado de **argumento principal,** pois consideramos apenas a primeira volta na circunferência. O argumento de um número complexo também pode ser representado por arg(z).

Associamos a cada ponto do plano um par ordenado e, reciprocamente, a cada par ordenado associamos um ponto do plano. Queremos fazer o mesmo aqui, mas com o que chamamos de **coordenadas polares de um número complexo**: a cada ponto representado no plano complexo associaremos um par ordenado formado pelas coordenadas polares e, reciprocamente, a cada par ordenado formado por coordenadas polares associaremos um ponto no plano complexo que representa um número complexo.

Exemplo:

No plano complexo a seguir estão representados alguns números complexos. Construímos algumas circunferências concêntricas e indicamos alguns ângulos marcados em graus a partir do eixo x (ângulo de medida zero) no sentido anti-horário. Vamos obter as coordenadas polares dos pontos indicados.



Pela figura, temos:

$z_1 \to (7; 15°)$ $\quad$ $z_7 \to (4; 165°)$

$z_2 \to (8; 45°)$ $\quad$ $z_8 \to (6; 180°)$

$z_3 \to (6; 75°)$ $\quad$ $z_9 \to (2; 195°)$

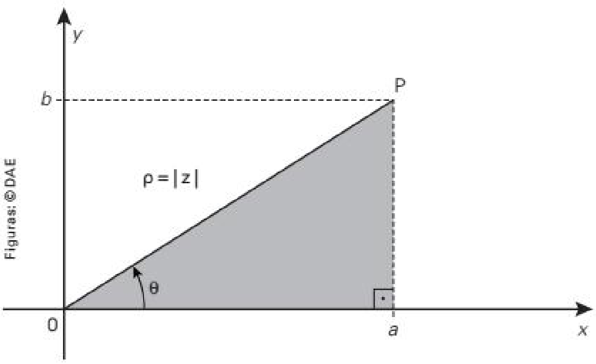
$z_4 \to (8; 90°)$ $\quad$ $z_{10} \to (5; 240°)$

$z_5 \to (6; 105°)$ $\quad$ $z_{11} \to (6; 270°)$

$z_6 \to (4; 120°)$ $\quad$ $z_{12} \to (7; 345°)$

Para localizar um número complexo qualquer, não nulo, no plano complexo, temos até aqui duas opções: **coordenadas retangulares** (parte real e parte imaginária do complexo) ou **coordenadas polares** (módulo e argumento do complexo). Agora, vamos utilizar as coordenadas polares para obter a forma polar (ou trigonométrica) de um número complexo.

Lembrando as definições das razões seno e cosseno em um ângulo agudo de um triângulo retângulo, temos, para o triângulo destacado:



Figuras: © DAE

- Razão cosseno:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta \qquad \text{(I)}$$

- Razão seno:

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen}\theta \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) e (II) na forma algébrica do número complexo z, temos:

$$z = a + bi$$
$$z = \rho \cdot \cos\theta + \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot i$$
$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$

> A relação $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ é a **forma trigonométrica** ou **forma polar** do número complexo não nulo z.

Após os exemplos a seguir, veremos como podemos utilizar a forma trigonométrica para efetuar certas operações entre os números complexos. Antes de exemplificar, é importante observar que, para obter o argumento do número complexo, é necessário determinar o sinal do seno e do cosseno e, então, precisar o quadrante correspondente ao ângulo.

$$\text{Argumento } \theta \rightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} \\ \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{cases}$$

Exemplo:

Vamos escrever o número complexo $z = 2 + 2i$ na forma trigonométrica.

Localizamos inicialmente o afixo de z no plano complexo, conforme sua parte real e sua parte imaginária:

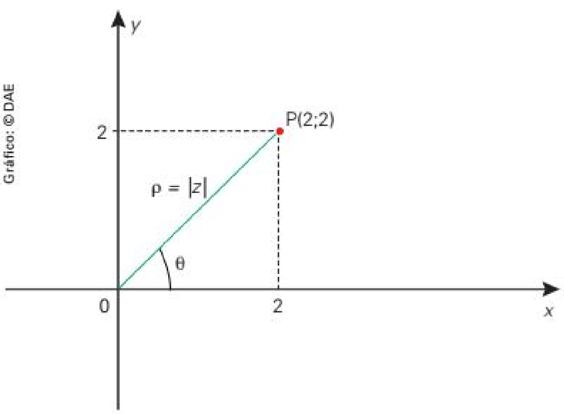


Gráfico: © DAE

A partir da localização de z no plano complexo, obtemos o módulo e o argumento (coordenadas polares). Assim, temos:

$$\text{Módulo: } \begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \rho = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow \rho = |z| = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Argumento: } \begin{cases} \text{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Pelos sinais das razões trigonométricas (ou pela representação no plano complexo), θ é um ângulo do primeiro quadrante. Pelos valores das razões trigonométricas seno e cosseno, temos:

$$\theta = 45° = \frac{\pi}{4} \text{rad}$$

Logo, a forma trigonométrica do número complexo $z = 2 + 2i$ é:

$$z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$
$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Considerando que o argumento de um número complexo pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$, quais são as possibilidades de argumentos dos números complexos que são reais?
2. E dos complexos que são imaginários puros?

Exemplos:

1. Vamos escrever a forma algébrica do número complexo z representado na forma trigonométrica, isto é:

$$z = 3 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Passar da forma trigonométrica para a algébrica exige um pouco mais de Trigonometria, particularmente o conhecimento das razões seno e cosseno de arcos. Nesse caso, teremos de fazer a "redução ao primeiro quadrante" do arco $\dfrac{2\pi}{3}$:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$
$$\text{sen}\frac{2\pi}{3} = \text{sen}120° = +\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tendo os valores de seno e cosseno, podemos escrever a forma algébrica do complexo z:

$$z = 3 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2. Vamos descobrir o lugar geométrico de todos os pontos do plano complexo cujos módulos têm o valor 5.

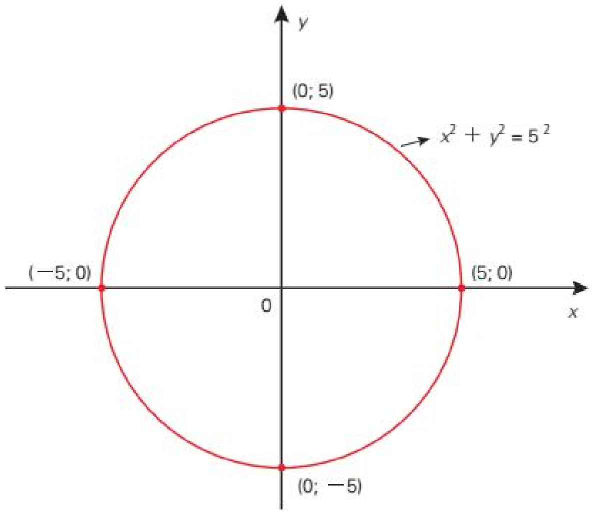
Como não dispomos da parte real nem da parte imaginária do complexo correspondente, vamos representar tal número como $z = x + yi$, sendo x e y números reais desconhecidos. Como conhecemos o módulo de z, teremos:

$$|z| = |x + yi|$$

$$5 = |x + yi|$$

$$5 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$$

Acabamos de obter a equação de uma circunferência de centro na origem do plano complexo e raio igual a 5, conforme representamos a seguir:

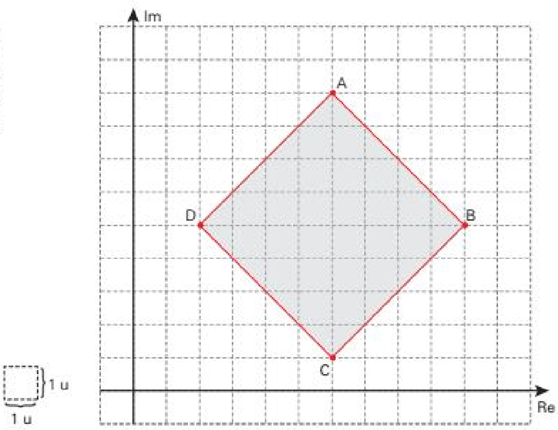


Qualquer ponto pertencente a essa circunferência corresponde a um número complexo cujo módulo é igual a 5.

Exercícios resolvidos

1. No plano de Argand-Gauss da figura, os afixos dos números complexos x, y, z e w são, respectivamente, A, B, C e D. Sabe-se, ainda, que ABCD é um quadrado.

Figuras: © DAE



Qual é a forma algébrica do número complexo $\frac{x - z}{y - w}$?

- Observando os afixos dos complexos no plano complexo, temos que

$x = (6, 9) = 6 + 9i$

$y = (10, 5) = 10 + 5i$

$z = (6, 1) = 6 + i$

$w = (2, 5) = 2 + 5i$

- Substituindo na expressão e fazendo os cálculos, temos:

$$\frac{x - z}{y - w} = \frac{6 + 9i - (6 + i)}{10 + 5i - (2 + 5i)} = \frac{8i}{8w} = i$$

2. Considere que o módulo e o argumento do número complexo z são, respectivamente, iguais a $2\sqrt{2}$ e 120º.

a) Qual é a forma trigonométrica desse número complexo?

b) Qual é a forma algébrica?

a) Como conhecemos o módulo e o argumento, temos:

$z = \rho \cdot (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$z = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 120° + i\operatorname{sen} 120°)$

b) Transformando na forma algébrica:

$z = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 120° + i\operatorname{sen} 120°)$

$\downarrow \cos 120° = -\cos 60°$ e $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60°$

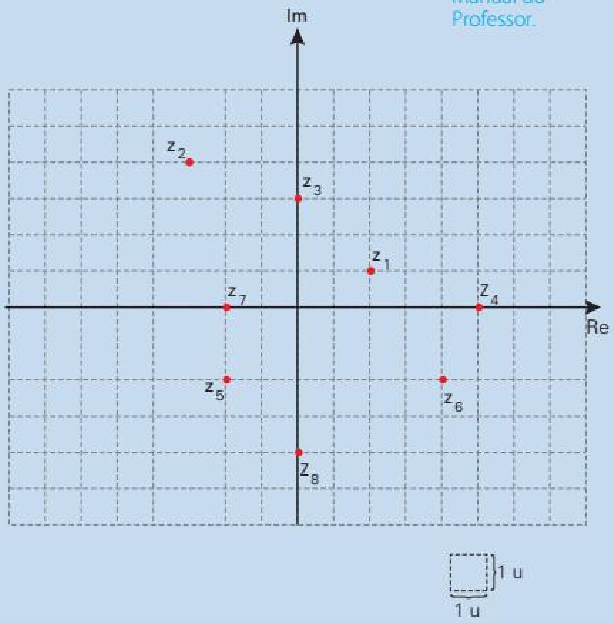
$z = 2\sqrt{2} \cdot (-\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z = -\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{6}$$

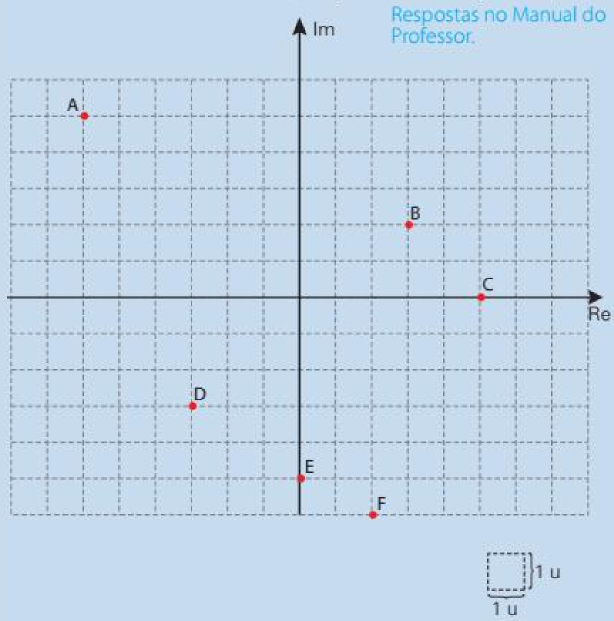
Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em seu caderno, represente no plano complexo os números complexos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 4i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = 5$, $z_5 = -2 - 2i$, $z_6 = 4 - 2i$, $z_7 = -2$ e $z_8 = -4i$. Resposta no Manual do Professor.



2. No plano de Argand-Gauss estão representados alguns números complexos. Escreva-os na forma algébrica e diga se cada um deles é real, imaginário ou imaginário puro. Respostas no Manual do Professor.

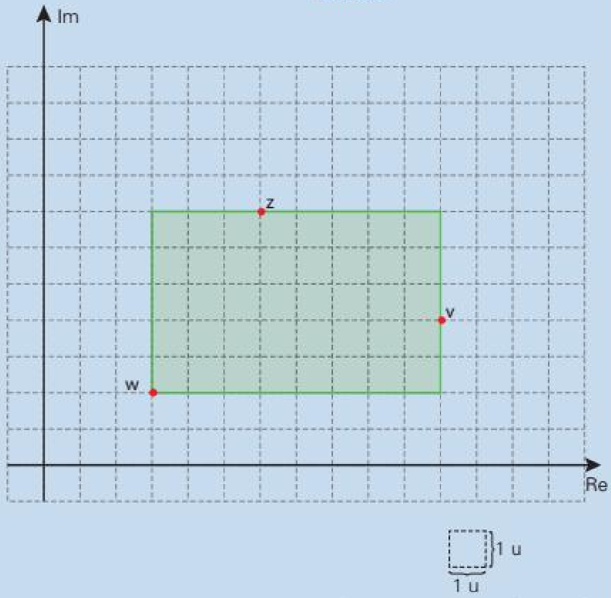


3. Em seu caderno, indique V ou F, conforme seja verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir.

a) Um número real, quando representado no plano complexo, tem seu afixo situado no eixo horizontal. V

b) Um número imaginário puro, quando representado no plano complexo, tem seu afixo situado no eixo vertical. V

4. No plano de Argand-Gauss estão representados os números complexos z, w e v. Respostas no Manual do Professor.

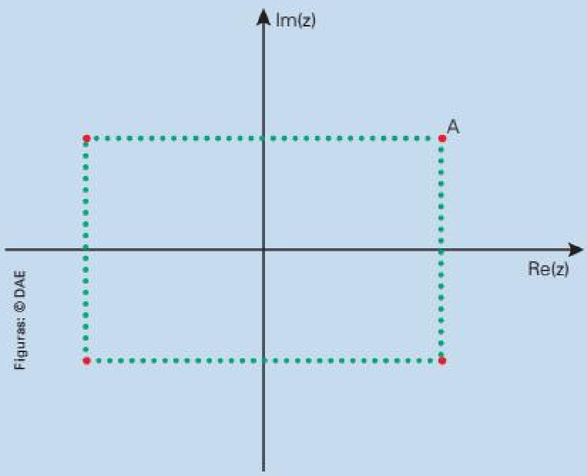


a) Escreva os números complexos z, w e v na forma algébrica.

b) Calcule a área do retângulo verde representado na figura.

c) Calcule a área do triângulo cujos vértices são os afixos dos números complexos z, w e v.

5. No plano de Argand-Gauss estão indicados quatro pontos correspondentes aos vértices de um retângulo de centro na origem. O ponto A está indicando o número complexo $z = 3 + 2i$. Resposta no Manual do Professor.



Figuras: © DAE

Escreva a forma algébrica dos números complexos correspondentes aos outros três vértices do retângulo.

6. Escreva em seu caderno os complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, conforme condições a seguir: Respostas pessoais.

a) z_1 tal que a parte real e a parte imaginária sejam opostas.

b) z_2 tal que a parte real é a metade da parte imaginária;

c) z_3 tal que o ponto correspondente ao número complexo no plano de Argand-Gauss esteja no eixo imaginário;

d) z_4 tal que o ponto correspondente ao número complexo no plano de Argand-Gauss esteja no eixo real.

7. Os afixos dos números complexos $A = 2 + 2i$, $B = 2 - 2i$, $C = -2 + 2i$ e $D = -2 - 2i$ no plano complexo indicarão os vértices de um polígono. Sobre esse polígono, responda:

a) Qual é sua denominação? Quadrado.

b) Qual é a medida de seu perímetro? 16 unidades de comprimento.

c) Qual é a medida de sua área? 16 unidades de área

8. Considere no plano complexo uma circunferência de centro na origem e raio medindo 3 unidades. Elabore dois números complexos, tais que: Respostas pessoais.

a) seus afixos estejam situados na região interna à circunferência.

b) seus afixos estejam situados na própria circunferência.

c) seus afixos estejam situados na região externa à circunferência.

9. Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 3 + 4i$ 5

b) $z = 2 + \sqrt{3} \cdot i$ $\sqrt{7}$

c) $z = 3i$ 3

d) $z = -7$ 7

e) $z = -5 - 12i$ 3

10. Obtenha o argumento correspondente para cada número complexo a seguir:

a) $z = 1 + i$ 45°

b) $z = 1 - \sqrt{3}i$ 300°

c) $z = 5$ 0°

d) $z = -2$ 180°

e) $z = 4i$ 90°

f) $z = -3i$ 270°

g) $z = -2 - 2i$ 225°

h) $z = -3 + \sqrt{3} \cdot i$ 150°

11. Dados os seguintes números complexos na forma algébrica, escreva-os na forma trigonométrica ou polar:

a) $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$ $z = 2 \cdot (\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$

b) $z = i$ $z = 1 \cdot (\cos 90° + i\,\text{sen}\,90°)$

c) $z = -3$ $z = 3 \cdot (\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°)$

12. Utilizando a propriedade $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, com $z_2 \neq 0$, calcule:

a) $\dfrac{3 + \sqrt{3} \cdot i}{\sqrt{2} + i}$; 2

b) os valores de k, para os quais $\left|\dfrac{k + 2i}{3 - i}\right|$ é igual a 2. 6 ou −6

13. Considerando os números complexos $z = 4 + 3i$ e $w = 5 + 12i$:

a) calcule $|z|$ e $|w|$. $|z| = 5$ e $|w| = 13$

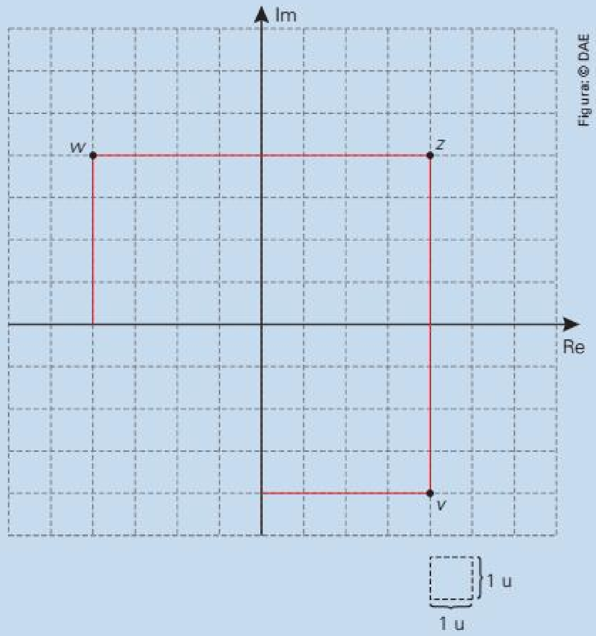
b) calcule $|z| + |w|$. 18

c) calcule $|z + w|$. $9 + 15i$

d) calcule $|z + w|$. $\sqrt{306}$

e) é verdade que $|z + w| = |z| + |w|$, ou seja, o módulo da soma de dois números complexos é igual à soma dos módulos? Não.

14. Na figura a seguir estão representados os números complexos z, w e v. Respostas no Manual do Professor.



a) Calcule a distância do afixo do número complexo z à origem do plano de Argand-Gauss.

b) Escreva o número complexo z na forma trigonométrica.

c) Escreva os números complexos z, w e v na forma algébrica.

d) Se multiplicarmos o número complexo z pela unidade imaginária, obteremos outro número complexo? O número complexo obtido é igual a w, v ou a nenhum deles?

e) Multiplicando o número complexo w pela unidade imaginária, qual número complexo obtemos: z, w, v ou outro?

15. Represente geometricamente, no plano complexo, os pares ordenados que satisfaçam cada uma das condições a seguir: Respostas no Manual do Professor.

a) $x^2 + y^2 = 9$;

b) $x^2 + y^2 \leq 4$;

c) $x^2 + y^2 \geq 1$.

16. Considere os números complexos $z = 6 + 8i$ e $w = 8 + 6i$ e calcule:

a) os módulos dos números complexos z e w; $|z| = 10$ e $|w| = 10$

b) a distância entre os afixos dos números complexos z e w; $2\sqrt{2}$ u.c.

c) o cosseno do ângulo AÔB, em que O é a origem e A e B são os afixos dos números complexos z e w, respectivamente. 0,96

14 OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Você pode estar se perguntando: qual é o motivo de escrever um número complexo na forma trigonométrica, se já conhecemos bem a forma algébrica?

Para responder a essa pergunta vamos observar como podemos, por exemplo, elevar um número complexo a alguma potência, quando ele é apresentado na forma algébrica.

Exemplo:

Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3} \cdot$ vamos calcular z^6.

Embora possamos utilizar a fórmula do desenvolvimento da potência de um binômio, vista no volume anterior desta Coleção, vamos empregar o seguinte resultado:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Para calcular z^6, fazemos:

$$z^6 = \left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)^6$$

$$z^6 = \left[\left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)^3\right]^2$$

$$z^6 = \left[1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot i\right)^2 + \left(\sqrt{3} \cdot i\right)^3\right]^2$$

$$z^6 = \left[1 + 3\sqrt{3} \cdot i + 9 \cdot i^2 + 3\sqrt{3} \cdot i^3\right]^2$$

$$z^6 = \left[1 + 3\sqrt{3} \cdot i - 9 - 3\sqrt{3} \cdot i\right]^2$$

$$z^6 = \left[-8\right]^2 \Rightarrow z^6 = 64$$

Veremos neste capítulo que, na forma trigonométrica, operações como multiplicação, divisão e potenciação podem ser efetuadas de maneira mais simples.

Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

Vamos efetuar a multiplicação de dois números complexos escritos na forma trigonométrica. Observe a seguir o procedimento utilizado.

Exemplo:

Sendo $z_1 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$ e

$z_2 = 4 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}\right)$, vamos determinar o complexo correspondente ao produto desses dois complexos.

Note que os argumentos desses dois complexos não são ângulos notáveis. Desse modo, se quiséssemos transformá-los em forma algébrica, teríamos de utilizar uma calculadora. Vamos multiplicá-los da forma em que eles são dados:

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)\ 4 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right) \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \left[\left(\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{5} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}\right) + i\left(\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$

Da trigonometria, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A\cos B + \operatorname{sen}B\cos A \\ \cos(A+B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B \end{cases}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot (\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$$

Observe:

- O módulo corresponde ao produto dos módulos: **12 = 3 · 4**
- O argumento corresponde à soma dos argumentos: $\pi = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}$

A forma trigonométrica é interessante para efetuar não apenas uma multiplicação entre dois ou mais complexos como também a divisão e a potenciação com expoente inteiro.

A seguir, demonstraremos as relações para a multiplicação e para a divisão de dois números complexos dados na forma trigonométrica.

O produto dos números complexos é obtido pela relação:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

Demonstração:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1) \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \ (\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \Big[\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i \cdot (\underbrace{\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2\cos\theta_1}_{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)})\Big]$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

Pelo que acabamos de obter, podemos dizer que o número complexo resultante da multiplicação de dois complexos, dados na forma trigonométrica, é um complexo de módulo igual ao produto dos módulos dados e de argumento igual à soma dos argumentos dos complexos dados, sendo essa soma reduzida à primeira volta, quando necessário.

O quociente dos números complexos $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$, nessa ordem e sendo $z_2 \neq 0$, é obtido pela relação:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Demonstração:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)}{\rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)}$$

↓ Multiplicamos e dividimos pelo conjugado de $\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i\text{sen}\theta_2)}{\rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2) \cdot (\cos\theta_2 - i\text{sen}\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - i\text{sen}\theta_2\cos\theta_1 - i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2]}{(\cos^2\theta_2 - i^2\text{sen}\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2) + i(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2\cos\theta_1)]}{[\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2]}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left[\frac{\overbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2)}^{\cos(\theta_1-\theta_2)} + i \cdot \overbrace{(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2\cos\theta_1)}^{\text{sen}(\theta_1-\theta_2)}}{\underbrace{[\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2]}_{1}}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}\ (\theta_1 - \theta_2)]$$

→ Subtraímos os argumentos

→ Dividimos os módulos

Assim, o complexo resultante terá módulo igual ao quociente dos módulos dos dois complexos dados e argumento igual à diferença dos argumentos dos complexos dados, sendo essa diferença reduzida à primeira volta, quando necessário.

Exemplo:

Vamos obter o resultado da multiplicação e da divisão dos complexos $z = 6 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ e $w = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. A seguir, vamos representar os resultados num mesmo plano complexo.

Multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z \cdot w = 6 \cdot 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z \cdot w = 12 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

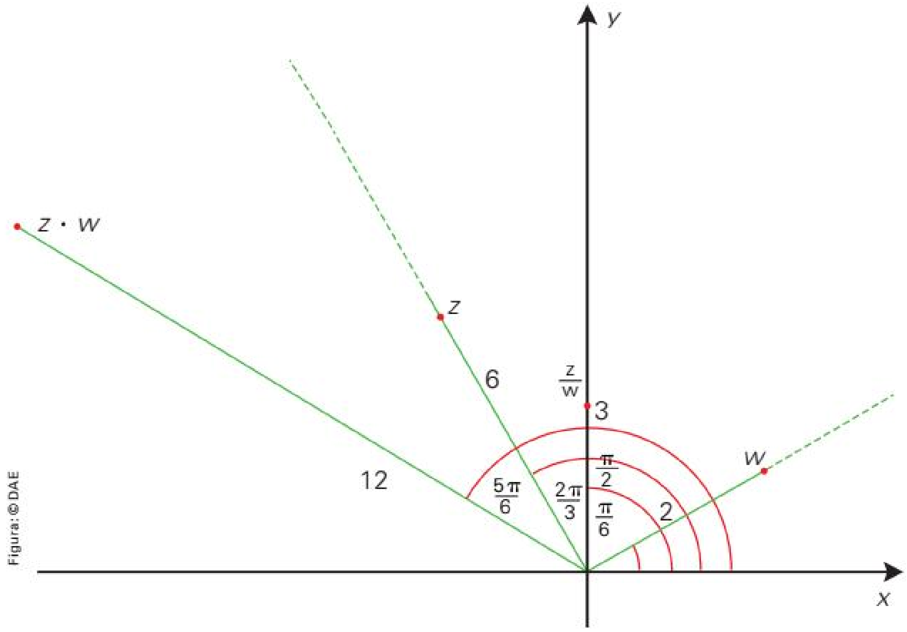
Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{z}{w} = \frac{6}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\frac{z}{w} = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Localizando no plano complexo, a partir do módulo e do argumento, os afixos dos complexos z, w, zw e $\frac{z}{w}$, temos:



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Resposta no Manual do professor.

Multiplicar um número complexo não nulo z pela unidade imaginária i equivale a rotacionar o vetor correspondente a esse número complexo um ângulo θ no sentido anti-horário. Qual é a medida desse ângulo?

Exercícios resolvidos

1. Dados $z = 2(\cos 25° + i \cdot \text{sen } 25°)$ e $w = 4(\cos 50° + i \cdot \text{sen} 50°)$, calcule o valor de $z \cdot w$.

$z \cdot w = [2 \cdot 4] \cdot [(\cos(25° + 50°) + i \cdot \text{sen}(25° + 50°)] =$
$= 8(\cos 75° + i \cdot \text{sen} 75°)$

2. Um complexo z dividido por w é igual a i. Sabendo que o módulo de w é 3 e que seu argumento é 70°, determine z na forma trigonométrica.

$\frac{z}{w} = i \rightarrow \frac{z}{3\,(\cos 70° + i \cdot \text{sen } 70°)} =$

$= 1\,(\cos 90° - i \cdot \text{sen } 90°) \rightarrow z = [3 \cdot 1] \cdot [\cos (70° + 90°)] + i \cdot \text{sen } (70° + 90°)] = 3\,(\cos 160° + i \cdot \text{sen } 160°)$

Logo,

$z = 3\,(\cos 160° + i \cdot \text{sen } 160°)$

3. Seja $z = 3(\cos 30° + i \cdot \text{sen} 30°)$. Qual deve ser o número complexo w de modo que o produto $z \cdot w$:

a) tenha o mesmo módulo e argumento de z?

b) tenha o dobro do módulo de z e argumento igual a 130°?

c) tenha módulo igual a 17 e argumento igual a 300°?

Seja θ o argumento de w.

$z \cdot w = [3 \cdot |w|] \cdot [\cos (30° + \theta) + i \cdot \text{sen}(30° + \theta)]$

a) $\begin{cases} 3 \cdot |w| = 3 \\ 30° + \theta = 30° \end{cases} \rightarrow |w| = 1 \text{ e } \theta = 0°$

Logo,

$w = 1(\cos 0° + i \cdot \text{sen} 0°)$

b) $\begin{cases} 3 \cdot |w| = 6 \\ 30° + \theta = 130° \end{cases} \rightarrow |w| = 2 \text{ e } \theta = 100°$

Logo,

$w = 2(\cos 100° + i \cdot \text{sen} 100°)$

c) $\begin{cases} 3 \cdot |w| = 17 \\ 30° + \theta = 300° \end{cases} \rightarrow |w| = \frac{17}{3} \text{ e } \theta = 270°$

Logo,

$w = \frac{17}{2}(\cos 270° + i \cdot \text{sen} 270°)$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Com relação aos números complexos $z_1 = 2 \cdot (\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)$, $z_2 = 3 \cdot (\cos 25° + i \cdot \operatorname{sen} 25°)$ e $z_3 = 5 \cdot (\cos 65° + i \cdot \operatorname{sen} 65°)$, indique, em seu caderno, V ou F, caso as afirmativas sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. O módulo do número complexo $z_1 \cdot z_2$ é 6. V

II. O argumento do número complexo $z_1 \cdot z_2$ é igual ao argumento do número complexo z_3. V

III. $z_1 \cdot z_2 = z_3$ F

IV. O argumento do número complexo $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ é igual a 130°. V

V. $\dfrac{z_3}{w_1} = 2{,}5 \cdot (\cos 25° + i \cdot \operatorname{sen} 25°)$. V

2. Considere os números complexos

$$z = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{e } w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

e obtenha:

a) a forma trigonométrica do número complexo $z \cdot w$.

b) a forma trigonométrica do número complexo $\dfrac{z}{w}$.

c) a forma algébrica do número complexo $z \cdot w$.

d) a forma algébrica do número complexo $\dfrac{z}{w}$.

Respostas no Manual do Professor.

3. A unidade imaginária é um número complexo cujo módulo é igual a 1, e o argumento é igual a 90°.

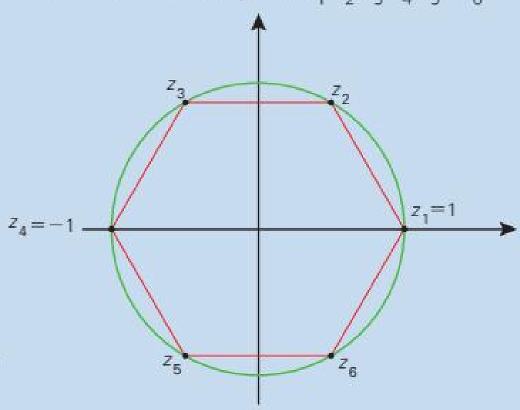
a) Escreva o número complexo $z = i$ na forma trigonométrica.

b) Escreva o número complexo $w = -1$ na forma trigonométrica.

c) Utilizando as formas trigonométricas de z e w, mostre que $i^2 = -1$.

Respostas no Manual do Professor.

4. Na figura a seguir, os vértices do hexágono regular são os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6.

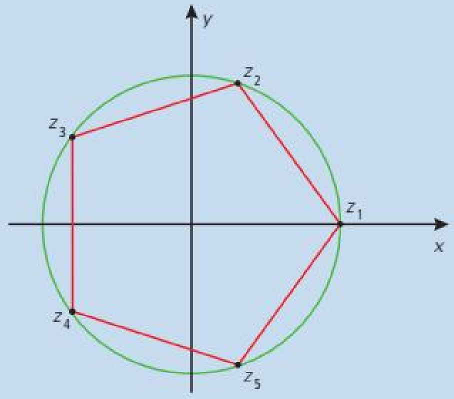


Figuras: © DAE

O produto dos números complexos $z_1 \cdot z_2 \cdot z_5$ é igual a um dos números complexos cujos afixos são os vértices do hexágono? Em caso afirmativo, qual?

Sim. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_5 = z_6$

5. No plano complexo, conforme representado a seguir, estão indicados os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Considere que esses afixos representam vértices de um pentágono regular inscrito na circunferência de raio unitário e centrada na origem.



Elabore um problema relacionando os números complexos presentes na figura. Em seguida, resolva esse problema e apresente-o à turma.

Resposta pessoal.

6. Dado o número complexo $z = 5 \cdot (\cos 100° + i \cdot \operatorname{sen} 100°)$, escreva, na forma trigonométrica, os números complexos $w = \dfrac{1}{z}$ e $v = \dfrac{z}{i}$

$w = 0{,}2\,(\cos 260° + i \cdot \operatorname{sen} 260°)$ e $v = 5\,(\cos 10° + i \cdot \operatorname{sen} 10°)$

7. Dois números complexos z e w têm argumentos, respectivamente, iguais a $\dfrac{13\pi}{36}$ e $\dfrac{11\pi}{36}$. Sabe-se, ainda, que $|z \cdot w| = 2\sqrt{3}$. Escreva, então, o número complexo $z \cdot w$:

a) na forma trigonométrica;

b) na forma algébrica.

Respostas no Manual do Professor.

8. Um número complexo é definido por $z_\theta = \cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

a) Obtenha o módulo de z, qualquer que seja a medida do ângulo θ pertencente ao intervalo $[0;\ 2\pi[$.

b) Calcule o valor de $z_{\theta_1} \cdot z_{\theta_2}$.

c) É verdadeiro afirmar que $z_{\theta_1} \cdot z_{\theta_2} = z_{(\theta_1 + \theta_2)}$?

Respostas no Manual do Professor.

Potenciação na forma trigonométrica

Quando multiplicamos dois números complexos dados na forma trigonométrica, o resultado é um número complexo de módulo igual ao produto dos módulos dos complexos dados e de argumento igual à soma dos argumentos dos complexos dados. E se precisarmos multiplicar mais de dois números complexos, como devemos proceder?

Vamos observar um procedimento, sem demonstrar como podemos multiplicar n números complexos escritos na forma trigonométrica, ou seja:

$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$z_3 = \rho_3 \cdot (\cos\theta_3 + i\,\text{sen}\,\theta_3)$$

$$\vdots$$

$$z_n = \rho_n \cdot (\cos\theta_n + i\,\text{sen}\,\theta_n)$$

O produto será obtido pela relação:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_n \cdot$$

$$\cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n)\right.$$

$$\left. + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n)\right]$$

(Multiplicamos os módulos e adicionamos os argumentos.)

Exemplo:

Vamos multiplicar os números complexos z, w e u, dados na forma trigonométrica a seguir:

$$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$w = 5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$u = 1{,}5 \cdot (\cos\pi + i \cdot \text{sen}\pi)$$

$$\boldsymbol{z \cdot w \cdot u} = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}5 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi\right)\right]$$

$$\boldsymbol{z \cdot w \cdot u} = 15 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

E a potenciação de complexos?

Vamos considerar a potência z^n em que z é um número complexo e n, um número diferente de zero. Assim, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fatores}}$$

Conforme observação anterior sobre a multiplicação de n números complexos, e dado $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ na forma trigonométrica, teremos:

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{n \text{ fatores}} \cdot \left[\cos\left(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ parcelas}}\right) + \right.$$

$$\left. + i\,\text{sen}\left(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ parcelas}}\right) + \right.$$

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]$$

A relação anterior foi obtida pelo francês Abraham de Moivre (1667-1754). Podemos dizer que a potência de ordem n de um número complexo, dado na forma trigonométrica, é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento do número é multiplicado por n (argumento resultante reduzido à primeira volta).

Dado um número complexo $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e n um número natural, temos:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]$$

Observação:

Esta relação matemática é conhecida como fórmula de Moivre.

Exemplos:

1. Vamos utilizar a fórmula de Moivre para calcular z^0, sendo $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ um complexo não nulo.

Substituímos n por zero na fórmula de Moivre:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)]$$

$$z^0 = \rho^0 \cdot [\cos(0 \cdot \theta) + i\,\text{sen}(0 \cdot \theta)]$$

$$z^0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0)$$

$$z^0 = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) \qquad z^0 = 1$$

2. Dado o número complexo

$$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

vamos calcular o valor de $z^2 + z^4 + z^6$.

- Na relação de Moivre, substituímos n por 2, por 4 e por 6, obtendo:

$$z^2 + z^4 + z^6 = 2^2 \cdot \left[\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right] +$$

$$+ 2^4 \cdot \left[\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right] + 2^6 \cdot \left[\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) +\right.$$

$$\left. + i\text{sen}\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z^2 + z^4 + z^6 = 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + 16 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) +\right.$$

$$\left. + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + 64 \cdot \left[\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)\right]$$

$$z^2 + z^4 + z^6 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ 64 \cdot (-1 + i \cdot 0)$$

$$z^2 + z^4 + z^6 = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i - 8 + 8\sqrt{3} \cdot i - 64$$

$$z^2 + z^4 + z^6 = -70 + 10\sqrt{3} \cdot i$$

Portanto:

$$z^2 + z^4 + z^6 = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i - 8 + 8\sqrt{3} \cdot i - 64$$

$$z^2 + z^4 + z^6 = -70 + 10\sqrt{3} \cdot i$$

3. Utilizando a fórmula de Moivre e o quadrado de um binômio, vamos obter as relações trigonométricas para seno e cosseno do dobro de um arco.

Considere o número complexo z de módulo unitário e argumento θ, cuja forma trigonométrica é:

$$z = 1 \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$

Utilizando a fórmula de Moivre, calculamos o quadrado de z, ou seja:

$$z^2 = 1^2 \cdot (\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta)$$

$$z^2 = \cos 2\theta + i\text{sen}2\theta \text{ (I)}$$

Utilizando o quadrado de um binômio, vamos obter o quadrado de z, isto é:

$$z^2 = 1^2 \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$

$$z^2 = \cos^2\theta + 2 \cdot \cdot \text{sen}\theta + i^2\text{sen}^2\theta$$

$$z^2 = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + i\,(2\text{sen}\theta \cdot \cos\theta)$$

Como as expressões (I) e (II) representam o mesmo número complexo, temos:

$$\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + i \cdot (2\text{sen}\theta\cos\theta)$$

↓ Pela igualdade de complexos

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \\ \text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta \end{cases}$$

Essas duas igualdades representam relações trigonométricas para a duplicação de arcos, já estudadas em Trigonometria no volume anterior desta Coleção.

4. Vamos utilizar a fórmula de Moivre para obter as potências naturais e consecutivas da unidade imaginária i. Para tanto, vamos escrever i na forma trigonométrica:

$$i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}$$

Substituindo n na fórmula de Moivre por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., obtemos:

$$i^0 = \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos 0 + i\text{sen}0 = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow i^0 = 1$$

$$i^1 = \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos \cdot \frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 \Rightarrow i^1 = i$$

$$i^2 = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\pi + i\text{sen}\pi = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow i^2 = -1$$

$$i^3 = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\text{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 + i \cdot (-1) \Rightarrow i^3 = -i$$

$$i^4 = \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos 2\pi + i\text{sen}2\pi = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow i^4 = 1$$

$$i^5 = \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{5\pi}{2} + i\text{sen}\frac{5\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 \Rightarrow i^5 = i$$

$$i^6 = \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(6 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos 3\pi + i\text{sen}3\pi = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow i^6 = -1$$

Note que as potências começam a se repetir após i^4, pois na circunferência trigonométrica estamos obtendo arcos côngruos aos quatro primeiros. É claro que você poderia chegar a esses resultados sem utilizar a fórmula de Moivre. Observe:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$
$$i^4 = i \cdot i^3 = i \cdot (-1) = -i^2 = 1$$
$$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$
$$i^6 = i \cdot i^5 = i \cdot i = i^2 = -1$$

De modo geral, para $n \in \mathbb{N}$:

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$
$$\vdots$$
$$i^{4n+k} = i^{4n} \cdot i^k = 1 \cdot i^k = i^k \ (k \in \mathbb{N}/0 \leq k \leq 3)$$

Outra maneira de calcular uma potência natural da unidade imaginária é dividir o expoente por quatro e tomar apenas o resto da divisão, conforme demonstrado a seguir:

Dividindo $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 4)$, obtemos um quociente q e um resto r, isto é:

$$\begin{array}{l|l} m & 4 \\ \hline r & q \end{array} \rightarrow m = 4q + r$$

Para calcular a potência i^m, fazemos:

$$i^m = i^{4q+r}$$
$$i^m = i^{4q} \cdot i^r$$
$$i^m = (i^4)^q \cdot i^r$$
$$i^m = 1 \cdot i^r$$
$$i^m = i^r \ (r \text{ é o resto da divisão de } m \text{ por } 4)$$

Exercícios resolvidos

1. Seja $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$. Calcule z^5 e escreva o resultado na forma trigonométrica.

$z = 1 + \sqrt{3} \cdot i = 2\,(\cos 60° + i \cdot \text{sen}60°)$

$z^5 = 2^5\,[\cos(5 \cdot 60°) + i \cdot \text{sen}(5 \cdot 60°)]$

$z^5 = 32\,(\cos 300° + i \cdot \text{sen}300°)$

2. Seja $z = 2(\cos 25° + i \cdot \text{sen}25°)$. Escreva na forma algébrica o número z^9.

$z^9 = 2^9\,[\cos(9 \cdot 25°) + i \cdot \text{sen}(9 \cdot 25°)]$

$z^9 = 512\,(\cos 225° + i \cdot \text{sen}225°)$

$z^9 = 512\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) = -256\sqrt{2} - 256\sqrt{2} \cdot i$

Portanto:

$z^9 = -256\sqrt{2} - 256\sqrt{2} \cdot i$

3. Determine o menor valor natural de n, diferente de zero, de modo que $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um número real.

$(\sqrt{3} + i)^n = 2^n\,[\cos(n \cdot 30°) + i \cdot \text{sen}(n \cdot 30°)]$

Para que $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um número real, devemos ter $\text{sen}(n \cdot 30°) = 0$.

O menor valor natural, diferente de zero, é 6, pois $\text{sen}(6 \cdot 30°) = \text{sen}180° = 0$.

Portanto, $n = 6$.

4. Em relação ao exercício anterior, determine o menor valor natural de n para que o complexo $(\sqrt{3} + i)^n$ seja imaginário puro.

Do exercício anterior, temos:

$(\sqrt{3} + i)^n = 2^n\,[\cos(n \cdot 30°) + i\text{sen}(n \cdot 30°)]$

Para que seja imaginário puro, a parte real deverá ser nula e a parte imaginária, diferente de zero. Assim, temos:

$\cos(n \cdot 30°) = 0$

$\downarrow$ menor valor de n

$n \cdot 30° = 90°$

$n = 3$

5. Escreva a forma algébrica do número complexo $A = (\cos 48° + i\text{sen}48°)^{10}$.

Utilizando a forma de potenciação, temos

$A = (\cos 48° + i\text{sen}48°)^{10}$

$A = \cos(10 \cdot 48°) + i\text{sen}\,(10 \cdot 48°) = \cos 480° + i\text{sen}480°$

$\downarrow 480° = 360° + 120°$

$A = \cos 120° + i\text{sen}120°$

$A = -\cos 60° + i\text{sen}60° \Rightarrow A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em seu caderno, indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. Se o módulo de um número complexo z é igual a 3, o módulo do número complexo z^4 é igual a 81. V

II. Se o argumento de um número complexo w é igual a 30°, o argumento do número complexo w^6 é igual a 180°. V

III. Se $z = 2i$, então z^3 é um número real. F

IV. Se $z = 2i$, então z^5 é um número imaginário puro. V

V. Se $z = 1 + i$, então $z^2 = 2i$. V

2. Sendo $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$, escreva o número complexo $z^3 + z^6 + z^9$ na forma algébrica.
$-64 - 504i$

3. Se a parte real e a parte imaginária de um número complexo têm o mesmo módulo, não é necessário utilizar a fórmula para calcular suas potências. Observe o exemplo:

$(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = [(1 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2]^4 = (2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16$

Com base no exemplo anterior, calcule as seguintes potências sem utilizar a fórmula.

a) $(1 - i)^6$ $8i$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i)^4$ -16

c) $(1 + i)^9$ $16 + 16i$

d) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot i\right)^{10}$ $\dfrac{1}{32}$

e) $(-1 - i)^3$ $2 - 2i$

4. Escreva os dez primeiros termos da sequência, cujo termo geral é $a_n = i^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $i = \sqrt{-1}$. Em seguida, responda:

a) Qual é o valor da soma $i^{12} + i^{18} + i^{19}$? -1

b) Qual é o valor de $i^{123456789}$? i

c) Qual é o valor da expressão $\dfrac{i^{12} - i^{15}}{i^{20} + i^7}$? i

5. O argumento e o módulo de um número complexo z são, respectivamente, iguais a:

$\left(\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{12}\right)$ rad e $\dfrac{2^4 + 2^3 + 2^2 + 2}{2^4 - 1}$

a) Escreva o número complexo na forma trigonométrica.

b) Escreva o número complexo na forma algébrica.

c) Calcule o valor de z^5 e escreva o resultado na forma algébrica.

d) Calcule o valor de z^4 e escreva o resultado na forma algébrica.

Respostas no Manual do Professor.

6. Na figura a seguir, os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L são vértices de um dodecágono regular inscrito em uma circunferência centrada na origem e de raio unitário.

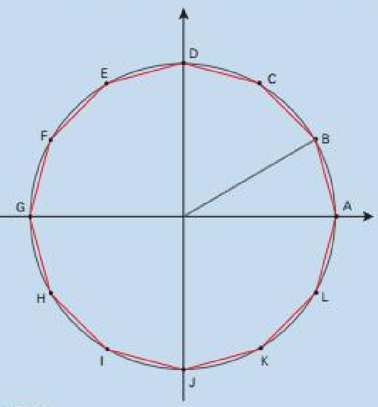


Figura: © DAE

Respostas no Manual do Professor.

Os pontos A, D, G e J estão sobre os eixos. Se B é o afixo de um número complexo z, escreva a forma trigonométrica de z e, em seguida, diga qual vértice do dodecágono está associado aos números complexos z^9, z^{67} e z^{100}.

7. No plano complexo da figura a seguir estão representadas quatro circunferências concêntricas centradas na origem, cujos raios medem 1, 2, 3 e 4.

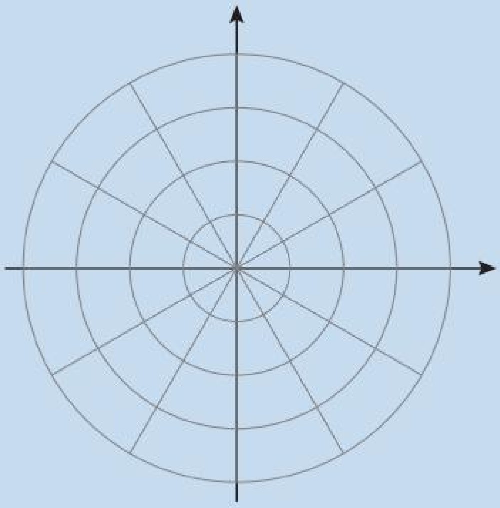


Figura: © DAE

Cada circunferência está dividida em 12 partes congruentes. Reproduza esse desenho em seu caderno.

a) Represente o número complexo $z = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen}30°)$ no plano complexo.

b) Escreva a forma algébrica do número complexo z^2 e represente-o no plano complexo.

c) Escreva a forma algébrica dos números complexos $z \cdot i$ e $\frac{z}{i}$. Em seguida, represente-os no plano complexo. Respostas no Manual do Professor.

8. Ainda em relação ao dodecágono representado na figura do exercício 6, responda:

a) Quais pontos que estão representando os afixos de números complexos são reais?

b) Quais pontos que estão representando os afixos de números complexos são imaginários puros?

c) Qual é o ponto que representa o afixo do complexo conjugado do complexo indicado pela letra C?

d) Qual é o ponto que representa o afixo do complexo conjugado do complexo indicado pela letra I?

Respostas no Manual do Professor.

9. Considere o número complexo $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$.

a) Escreva z na forma trigonométrica.

b) Escreva o número complexo z^n na forma trigonométrica, em que n é um número natural.

c) Determine o menor número natural não nulo n, de modo que o número complexo $1 + (\sqrt{3} \cdot i)^n$ seja um número real. Respostas no Manual do Professor.

10. Lembrando que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ e sendo i a unidade imaginária, calcule o valor de:

a) i^{6n}, onde n é um número natural par; 1

b) i^{6n}, onde n é um número natural ímpar; -1

c) i^{12n+3}, onde n é um número natural. $-i$

11. Considere a soma $S = i + i^2 + i^3 + i^4 = \ldots + i^{2011}$.

a) Lembrando que $i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$ e que as potências de i se repetem, calcule o valor de S.

b) Lembrando que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q é igual a $\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$ calcule o valor de S por meio da fórmula.

Respostas no Manual do Professor.

TEXTOS NA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Nesta unidade você estudou que todo número complexo pode ser escrito por meio de um par ordenado de números reais. Além disso, observou a existência de duas outras formas de representar um número complexo: a forma algébrica e a forma trigonométrica. No texto a seguir você vai conhecer outra maneira de representar números complexos!

Propomos duas questões para começar: Quais são os números que mais chamaram sua atenção ao longo desses anos de estudo, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio? Quais foram os números mais marcantes para o desenvolvimento da história da Matemática?

Saber quais os números que chamam a atenção de uma pessoa é algo tão relativo quanto inútil. Alguém pode dizer que o número 10 representa algo extraordinário: "Você é dez!". Outro pode opinar sobre o número 13, alegando a existência de "mistérios" relacionados a ele. Há quem diga que o número 666 está envolto em muito mais mistérios do que o próprio número 13. Seria o chamado "número da besta".

Bem, essa primeira questão de fato nada acrescenta. Buscar uma resposta para ela certamente também não. Já em relação à segunda questão, seria necessário conhecer com muito mais profundidade a história da Matemática para poder ensaiar uma resposta aceitável. Mesmo que não tenhamos tantos conhecimentos a respeito desse tema, pelo que estudamos até aqui, alguns números certamente representaram muito para o desenvolvimento da Matemática.

O que você diz sobre os números presentes no quadro a seguir?

$0 \longrightarrow$ Zero: "este nada que é tudo".

$1 \longrightarrow$ Um: "a unidade, o primeiro de todos na contagem".

$e \longrightarrow$ Número de Euler: "base de um sistema de logaritmos".

$\pi \longrightarrow$ Pi: "a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência".

$i \longrightarrow$ Unidade imaginária: "a raiz quadrada do oposto da unidade".

Claro que esses números têm sua importância na Matemática. Alguém pode afirmar que o zero não é tão importante, pois representa a ausência de quantidade, mas imagine a escrita dos números no sistema de numeração decimal sem o zero!

Não é o objetivo, aqui, analisar cada um desses números, mas queremos apresentar para você uma igualdade no mínimo curiosa (há quem diga ser a "mais bela igualdade numérica") que envolve esses cinco números:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

São números tão diferentes e estão relacionados por meio de uma simples igualdade. Como isso é possível? Quem foi o autor dessa relação? Ela é de fato verdadeira?

O autor dessa relação foi Leonhard Euler (1707-1783). Apenas para que você tenha uma ideia do trabalho de Euler, no livro *Introdução à história da Matemática*, de Howard Eves (Editora Unicamp, 2004, p. 472), há a seguinte frase: "Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da Matemática; não há ramo da Matemática em que seu nome não figure". Euler produziu Matemática mesmo depois de ter perdido a visão e foi o responsável pela seguinte fórmula:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \text{ (I)}$$

Se substituirmos nessa igualdade θ por π teremos:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi$$

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

Se na igualdade (I) multiplicarmos os dois membros por $|z|$, obtemos:

$$|z| \cdot e^{i\theta} = |z| \cdot (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Note que o segundo membro da igualdade nada mais é do que a forma trigonométrica de um número complexo. Já o primeiro membro é conhecido como a fórmula exponencial do número complexo z. Assim, pelo que vimos até aqui, qualquer número complexo z pode ser escrito por uma das seguintes formas:

$z = (a; b)$ (par ordenado)

$z = a + bi$ (forma algébrica)

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ (forma trigonométrica)

$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ (forma exponencial)

Poderíamos utilizar a fórmula exponencial para provar certos resultados estudados. Por exemplo, quando multiplicamos dois números complexos na forma trigonométrica, multiplicamos os módulos e adicionamos os argumentos, isto é:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Essa mesma relação, utilizando a forma exponencial, seria assim obtida:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot e^{i\theta_1}) \cdot (\rho_2 \cdot e^{i\theta_2})$$
$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot (e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2})$$
$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Note que essa última relação, escrita na forma exponencial, representa um número complexo de módulo igual ao produto dos módulos dos complexos dados e argumento igual à soma dos argumentos dos complexos dados.

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

1. Utilizando a forma exponencial, mostre que na divisão de dois números complexos dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.

2. Utilizando a forma exponencial, mostre que, para elevar um número complexo a um expoente natural *n*, elevamos o módulo a *n* e multiplicamos o argumento por *n*.

Algumas conclusões

Procure resolver algumas questões envolvendo o estudo dos números complexos. Caso sinta dificuldade, sugerimos retomar os conceitos principais:

1. O que é a unidade imaginária?

2. Um número real é um número complexo?

3. O conjunto formado pelos números imaginários é o subconjunto do conjunto formado pelos números complexos?

4. Qual é a forma algébrica de um número complexo?

5. A parte real e a parte imaginária de um número complexo são números reais?

6. Como podemos efetuar a divisão de dois números complexos escritos na forma algébrica?

7. Qual é a forma trigonométrica de um número complexo?

8. O que representa, no plano complexo, o módulo de um número complexo? E o argumento?

9. Como multiplicamos e dividimos dois números complexos apresentados na forma trigonométrica?

10. Elevando um número complexo à 10ª potência, o que ocorre com seu módulo? E o seu argumento?

Troque ideias com seus colegas e o professor. Comente suas respostas e ouça a de seus colegas. Juntos, façam uma lista das dificuldades que tiveram e descubram os assuntos que precisam ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (Uern) Considere a igualdade $2z - i = \bar{z} + 1$. É correto afirmar que o número complexo z, da forma $z = a + bi$, é:

a) $1 + \frac{i}{3}$ b) $2 + \frac{i}{2}$ c) $1 + 3i$ d) $3 + 2i$

2. (Uece) Se os números complexos z e w estão relacionados pela equação e $z + wi = i$ e se $z = 1$, então w é igual a:
O número complexo i é tal que $i^2 = -1$.

a) i b) $1 - i$ c) $-i$ d) $1 + i$

3. (Unicamp-SP) O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) 1

4. (PAS-UEM) Em relação às raízes dos polinômios $p(x) = x^2 + 18$, $r(x) = -x^2 - 9$, assinale o que for **correto**.

01) As raízes de $p(x)$ são números reais.

02) A parte real das raízes de $r(x)$ é o número 3.

04) O produto das raízes de $q(x)$ é um número imaginário puro.

08) O módulo das raízes de $q(x)$ é $\sqrt{5}$.

16) Os argumentos das raízes de $r(x)$ são $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

08 + 16 = 24

5. (Uepa) Um dos resultados importantes da produção de conhecimentos reside na possibilidade que temos de fazer a interação de múltiplos saberes. O conceito de número complexo é um bom exemplo dessa possibilidade exploratória da produção científica, ao permitir relações com álgebra, geometria plana, geometria analítica, trigonometria, séries e aritmética. Neste sentido, considere os números complexos $z_1 = 2 + 2 \cdot i$, $z_3 = 5 - 6 \cdot i$, $z_3 = -4 + 18 \cdot i$ e os números reais k_1 e k_2 tais que a soma dos números complexos $k_1 z_1$ e $k_2 z_2$ resulta no complexo z_3. Nestas condições, o valor de $k_1^{k_2}$ é:

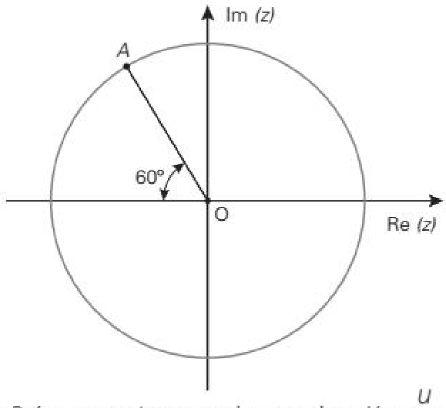
a) 9 b) 8 c) 1 d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{9}$

6. (PUC-RS) A área da figura representada no plano de Argand-Gauss pelo conjunto de pontos $\{z \in C : |z| \leq 1\}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ d) π
b) 1
c) $\frac{\pi}{2}$ e) 2π

7. (FGV-SP) Seja f uma função que, a cada número complexo z associa $f(z) = iz$, i é a unidade imaginária. Determine os complexos z de módulo igual a 4 e tais que $f(z) = \bar{z}$, $\bar{z}$ é o conjugado de z. Respostas no Manual do Professor.

8. (PUC-SP) No plano complexo de origem O, na figura a seguir, o ponto A é a imagem de um número complexo u cujo módulo é igual a 4.



Se B é o ponto imagem do complexo $v = \frac{u}{i}$, então é correto afirmar que:

a) o módulo de $u + v$ é igual a $4\sqrt{2}$.

b) o módulo de $u - v$ é igual a $2\sqrt{2}$.

c) B pertence ao terceiro quadrante.

d) B pertence ao quarto quadrante.

e) o triângulo AOB é equilátero.

9. (Unicamp-SP) Sejam x e y números reais tais que $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$, onde i é a unidade imaginária. O valor de xy é igual a:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

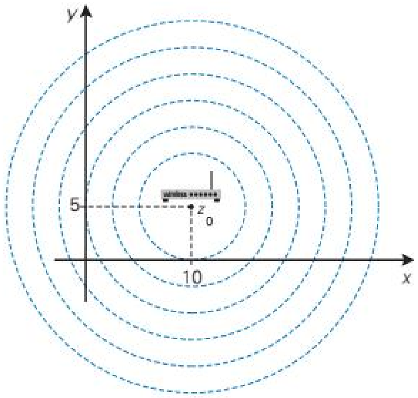
10. (UEL-PR) Leia o texto a seguir.

> Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.
>
> Adaptado de: CARNEIRO, J. P. "A Geometria e o Ensino dos Números Complexos". *Revista do Professor de Matemática*. 2004. v.55. p.18.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos $P(-3, 4)$ e $Q(2, -3)$ representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

a) $-18 + 17i$ d) $5 + 7i$
b) $-6 + 12i$ e) $6 + 17i$
c) $-6 + i$

11. (UFSM-RS) No plano complexo, o ponto z_0 representa o local de instalação de uma antena *wireless* na praça de alimentação de um *shopping*.



Os pontos $z = x + yi$ que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação $|z - z_0| = 30$.

De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por:

a) $x^2 + y^2 - 20 - 10y - 775 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 900 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 775 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 900 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 900 = 0$

12. (Uece) Se x e y são números reais não nulos, pode-se afirmar corretamente que o módulo do número complexo $z = \frac{x - iy}{x + iy}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) $x^2 + y^2$ d) $|xy|$

13. (UEPB) O produto dos números complexos $(3 - i)(x + 2yi)$ é um número real quando o ponto $P(x,y)$ está sobre a reta de equação:

a) $6x + y = 0$ d) $6y - x = 0$

b) $6x - y = 0$ e) $3y + x = 0$

c) $x + 6y = 0$

14. (UEM-PR) Considere $z = a + ib$ um número complexo, com a e b reais e não nulos, e $\overline{z} = a - ib$ seu conjugado. Sobre esses números complexos e a sua representação no plano complexo, assinale o que for correto.

01) O produto $z \cdot \overline{z}$ um número real positivo cuja raiz quadrada fornece a distância de z e de $\overline{z}$ até a origem.

02) O ponto do plano complexo que representa $\overline{z}$ obtido do ponto que representa z fazendo uma rotação de 180° em torno da origem.

04) Se $z^2 = i$ então $(\overline{z})^2 = i$

08) Se w é um número complexo que está à mesma distância de z e de $\overline{z}$ então w é um número real.

16) O quociente $\frac{z}{z}$ é um número real.

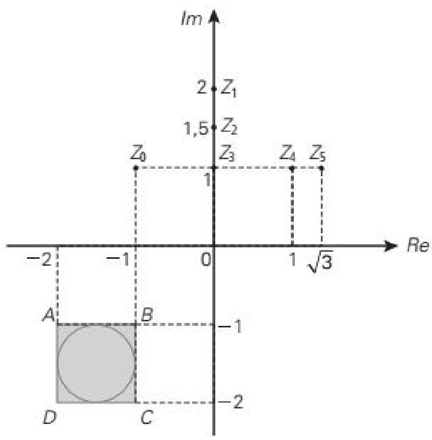
01 + 08 = 09

15. (UFSM-RS) Os edifícios "verdes" têm sido uma nova tendência na construção civil. Na execução da obra desses prédios, há uma preocupação toda especial com o meio ambiente em que estão inseridos e com a correta utilização dos recursos naturais necessários ao seu funcionamento, além da correta destinação dos resíduos gerados por essa utilização.

A demarcação do terreno onde será construído um edifício "verde" foi feita através dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, sendo o terreno delimitado pelas poligonais $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_1}$, medidas em metros. Sabendo que P_1, P_2, P_3 e P_4 representam, respectivamente, a imagem dos complexos $z4 = 20 + 40i$, $z_2 = -15 + 50i$, $z_3 = -15 - 10i$ e $z_4 = \frac{1}{16}z_1 - \frac{5}{4}\overline{z}_3$, qual é a área, em m^2, desse terreno?

a) 1 595 b) 1 750 c) 1 795 d) 1 925 e) 2 100

16. (FGV-SP) No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, e Z_5.



Se o afixo do produto de Z_0 por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é:

a) Z_1 b) Z_2 c) Z_3 d) Z_4 e) Z_5

DESAFIO

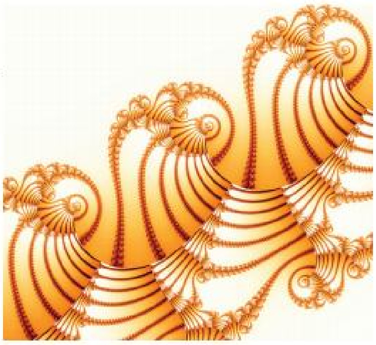
(ITA-SP) Considere a equação em, C, $(Z - 5 + 3i)^4 = 1$ é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor $|z_0|$:

a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{41}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$

EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

Respostas no Manual do Professor.

poweroffforever/iStockphoto.com



Nicola Stratford/iStockphoto.com

Mike_Kiev/iStockphoto.com

Exemplos de imagens fractais.

É uma tarefa bastante árdua investigar e tentar determinar exatamente qual foi e como se deu a origem de um novo conhecimento. A humanidade se desenvolve e acumula conhecimento há séculos, movida evolutivamente por sua infinita curiosidade acerca do mundo em que está inserida. Desse modo torna-se muito difícil mapear quando foi que determinada ideia passou a fazer parte das questões humanas e quem foi o primeiro a dar respostas plausíveis para tal questão.

A história está cheia de discussões acerca de quem foi o inventor deste ou daquele aparelho e, mais ainda, está repleta de relatos nos quais uma mesma ideia surge no mesmo período em pontos totalmente distintos do globo.

Com a Matemática não haveria de ser diferente. E, dentre tantos outros exemplos no contexto da Matemática, podemos citar justamente o número imaginário. Esse número foi aparecendo aos poucos em diversos trabalhos no final do século XVIII, como uma forma de driblar obstáculos que insistiam em frear a constante busca dos pensadores por mais conhecimento. Um desses obstáculos era a resolução de equações do terceiro grau para as quais a solução era clara, mas que, pela fórmula, não poderia ser encontrada devido às raízes quadradas dos números negativos.

Entretanto, como visto na abertura da unidade, problemas de ordem geométrica também careciam de um número como o imaginário para serem resolvidos. As questões a seguir mostram como a mesma ideia pode surgir de campos diferentes, solucionando problemas diferentes, e ser identificada por fim com o mesmo símbolo e a mesma definição. São conceitos que se tornam parte do acervo de ideias aceitas pela comunidade científica e que servem de base para uma série de novas empreitadas na evolução do conhecimento.

I. Números complexos na Álgebra

Em 1752, Bombelli utilizou o conceito da raiz de números negativos para poder fazer uso da seguinte fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Era a conhecida fórmula de Cardano-Tartaglia, que permitia a resolução prática de equações de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$. Os estudos de Bombelli baseavam-se na tentativa de resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, para a qual ao menos uma solução era conhecida.

a) Utilize a fórmula de Cardano e o seu conhecimento sobre números complexos para concluir que as raízes de $x^3 - 15x - 4 = 0$ são da forma $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.

b) Calcule $(2 + i)^3$ e $(2 - i)^3$ e utilize esses resultados para encontrar um possível valor de x.

c) Aplique a distributiva na operação $(x - 4)\cdot(x^2 + 4x + 1)$ e conclua que resolver $x^3 - 15x - 4 = 0$ é o mesmo que resolver $(x - 4)\cdot(x^2 + 4x + 1) = 0$. A partir daí, resolva a equação $x^2 + 4x + 1 = 0$ para encontrar outros possíveis valores de x.

d) Substitua os valores de x encontrados no item anterior para verificar $x^3 - 15x - 4 = 0$ e escreva o conjunto solução dessa equação.

II. Números complexos na Geometria

Sabemos que, ao multiplicar um ponto A (2,2) do plano por (−1), o que estamos fazendo é girar esse ponto 180° em relação à origem, gerando o ponto A'(−2, −2) tal que $A' = (-1) \cdot A$. Entretanto, se quisermos fazer esse ponto girar 90° até um ponto B e depois mais 90° até A', precisamos multiplicá-lo duas vezes pelo mesmo número x. Temos, então, $B = x \cdot A$ e $A' = x \cdot B = x^2 \cdot A$. Mas, como sabemos que $A' = (-1) \cdot A$, concluímos que $x^2 = -1$.

Desse modo, concluímos que $x = i$. Foi assim que as transformações no plano, que antes eram feitas exclusivamente por operações de matrizes com números reais, passaram a ser realizadas por operações entre números complexos.

a) Com base nessa explicação, escreva os números complexos abaixo na forma polar: Em seguida, represente graficamente os pontos z_1, z, $\frac{z_2}{z}$ e z_2.

$$z = (0,1),\ z_1 = (2, 2) \text{ e } z_2 = (-2, -2)$$

b) Observe os resultados de z, z_1 e $\frac{z_2}{z}$ e dê uma interpretação algébrica e uma geométrica para esses resultados.

c) Sem fazer nenhuma operação algébrica, represente, no mesmo plano que você desenhou no item *a*, o número $z_4 = z_2 \cdot z$.

d) Chamando de z_3 o número $z_1\, z$, calcule $(z_1)^4$; $(z_2)^4$; $(z_3)^4$; $(z_4)^4$. O que você observa dos resultados? Por que você acha que isso ocorre?

UNIDADE 5

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A partir da observação de um fenômeno, buscamos relacionar as variáveis presentes nele. Quando estabelecemos uma relação entre elas, modelamos esse fenômeno.

Nesta unidade, ampliamos o conhecimento sobre equações abordando polinômios e equações algébricas.

blickwinkel/Alamy/Fotoarena

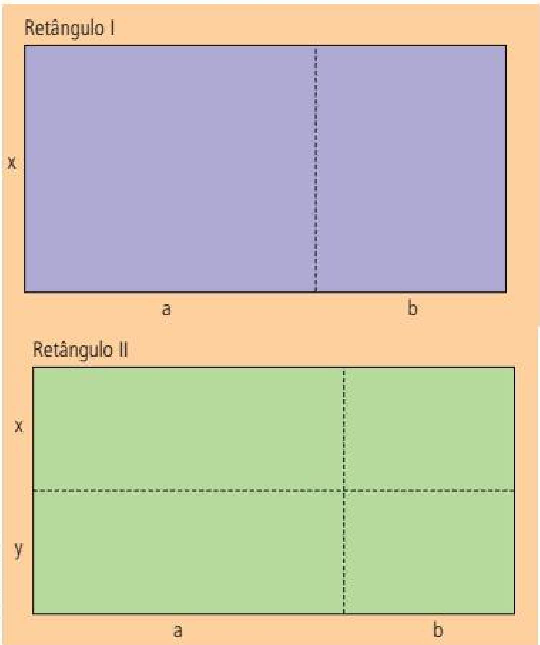
Aurora boreal, Ilhas Lofoten, Noruega. Foto de 2015.

CAPÍTULO 15 POLINÔMIOS

Para a confecção de uma simples caixa de papelão, geralmente utilizada para embalar produtos, podemos ter de recorrer a conhecimentos matemáticos. A diminuição de 2 mm^2, por exemplo, na quantidade de material que é empregado na produção de uma caixa de sapatos, pode ser considerada insignificante por nós. Entretanto, quando consideramos que milhões delas serão fabricadas, essa "economia" numa caixa pode tornar-se acentuada.

Nos três últimos anos do Ensino Fundamental, aspectos importantes da Álgebra foram abordados, entre eles: expressões algébricas, polinômios e equações. Muitas vezes, não nos damos conta da ligação da Álgebra com outras partes da Matemática. A título de exemplo, observe atentamente as duas figuras representadas a seguir, em que *x*, *y*, *a* e *b* estão representando medidas de comprimento na mesma unidade.

Podemos obter as áreas dessas duas figuras utilizando a fórmula do cálculo da área de um retângulo.



Figuras: © DAE

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

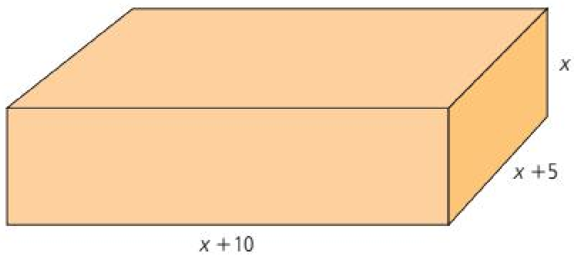
1. Como expressar a área do retângulo I como adição de duas expressões?
2. Essa área poderia ser representada por uma só expressão na forma de produto?
3. Como expressar a área do retângulo II como adição de quatro expressões?
4. Essa área poderia ser representada por uma só expressão na forma de produto?

Neste capítulo e nos três outros estudaremos polinômios e equações polinomiais.

Polinômio

Considere a situação a seguir.

Uma indústria de papelão lança no mercado embalagens em forma de paralelepípedo reto, em que as dimensões são variáveis, conforme representado na figura abaixo:



Note que as arestas estão representadas, em centímetros, por x, $x + 5$ e $x + 10$. Assim, o comprimento medirá 5 cm a mais que a largura, que, por sua vez, terá 5 cm a mais que a altura. Para cada valor real positivo de x teremos uma caixa com o formato de paralelepípedo retângulo. Observe alguns valores de x e as medidas correspondentes das arestas:

Valor de x	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
1	11	6	1
4	14	9	4
10	20	15	10
12	22	17	12
20	30	25	20

Interessa-nos descobrir aqui duas expressões: a primeira seria, em função de x, a da área total da caixa (o que será gasto de papelão para revestir, desconsiderando desperdícios); a segunda, também em função de x, a que fornece o volume ocupado pela caixa.

Lembre-se de que a área total A_t e o volume V de um paralelepípedo retângulo de arestas medindo a, b e c são obtidos pelas relações:

$A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

e

$V = abc$

Assim, podemos obter, em função de x, a área total e o volume da caixa correspondente.

- Área total:

  $A_t = 2 \cdot [(x + 10)(x + 5) + (x + 10)x +$
  $+ (x + 5)x]$

  $A_t = 2 \cdot (x^2 + 5x + 10x + 50 + x^2 + 10x +$
  $+ x^2 + 5x)$

  $A_t = 2 \cdot (3x^2 + 30x + 50)$

  $A_t = 6x^2 + 60x + 100$

- Volume:

  $V = abc$

  $V = (x + 10)(x + 5)x$

  $V = (x + 10)(x^2 + 5x)$

  $V = x^3 + 5x^2 + 10x^2 + 50x$

  $V = x^3 + 15x^2 + 50x$

No cálculo da área total e do volume do paralelepípedo, encontramos duas expressões algébricas que fornecem a área total e o volume do paralelepípedo em função de x. Observando o segundo membro de cada uma dessas igualdades, temos $6x^2 + 60x + 100$ e $x^3 + 15x^2 + 50x$.

Essas duas expressões algébricas são conhecidas como **expressões polinomiais** ou, simplesmente, **polinômios**.

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x toda expressão na forma:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... +$
$+ a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

em quê

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$

são números complexos denominados coeficientes;

n é um número natural;

o maior expoente de x entre os termos não nulos do polinômio é denominado grau do polinômio.

Exemplos:

1. São exemplos de polinômios:

- $6x^2 + 40x - 25 \rightarrow$ polinômio do 2º grau formado por 3 termos
- $x^3 + 4x^2 - 5x + 2\sqrt{3} \rightarrow$ polinômio do 3º grau formado por 4 termos
- $9x^4 + 4ix^3 - 2x^2 + 7i \rightarrow$ polinômio do 4º grau formado por 4 termos
- $7x^{10} - 44i \rightarrow$ polinômio do 10º grau formado por 2 termos

2. Não são exemplos de polinômios:

- $6x^{-2} + 4x - 5$
- $\sqrt{x^3} + 4x^{-2} - x + 8$

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Explique o motivo de as duas últimas expressões exemplificadas anteriormente não serem polinômios.

Retornando ao exemplo da fabricação de caixas de papelão em formato de paralelepípedo reto, encontraremos as igualdades que fornecem a área total e o volume da caixa em função de x, isto é:

$A_t = 6x^2 + 60x + 100$ e $V = x^3 + 15x^2 + 50x$

Note que são duas funções cujas leis de formação são expressas por polinômios. Dizemos que todas as funções $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por polinômios são ditas **funções polinomiais**.

Toda função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$ e sendo x um número complexo qualquer, é denominada e **função polinomial de grau *n***, em que n é um número natural.

Observações:

1. Se o grau de uma função polinomial for zero, então a função é definida por $f(x) = a_0$, sendo que $a_0 \neq 0$.
2. Como a cada função polinomial associamos um único polinômio e, reciprocamente, a cada polinômio associamos uma única função polinomial, quando nos referirmos a um polinômio estamos também nos referindo à função polinomial, e vice-versa.
3. Cada termo de um polinômio é dito monômio.

Exemplo:

Observe alguns exemplos de polinômios:

- $f(x) = 4x^2 - 7x + 10 \to$ é um polinômio de grau 2 (dizemos função polinomial do 2º grau);
- $P(x) = 47x - 15 \to$ é um polinômio de grau 1 (ou função polinomial do 1º grau);
- $f(x) = 2 \to$ é um polinômio de grau zero (ou função constante);
- $P(x) = 0 \to$ é um polinômio identicamente nulo (também é uma função constante).

Um polinômio é identicamente nulo quando todos os seus coeficientes são iguais a zero.

Observação:

Como no polinômio identicamente nulo todos os coeficientes são iguais a zero, não se define o grau do polinômio.

Exemplo:

Vamos determinar os valores dos números reais a, b e c para que o polinômio definido por

$p(x) = (a - 1)x^2 + (b + 4)x + c - 5$

seja identicamente nulo.

Se o polinômio é identicamente nulo, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero. Assim, temos:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b + 4 = 0 \Rightarrow b = -4 \\ c - 5 = 0 \Rightarrow c = 5 \end{cases}$$

Portanto, se $a = 1$, $b = -4$ e $c = 5$, então o polinômio $p(x)$ será identicamente nulo.

Valor numérico

Quando associamos a todo polinômio uma função polinomial, à medida que atribuímos valores à variável x obtemos valores para o polinômio. Tais valores são chamados de **valores numéricos**.

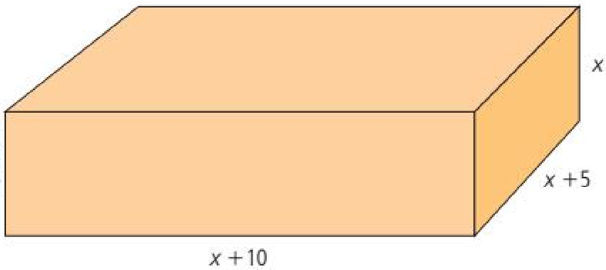


Figura: © DAE

No polinômio $V(x) = x^3 + 15x^2 + 50x$, que representa o volume do paralelepípedo acima, vamos substituir x por 1:

$V(1) = 1^3 + 15 \cdot 1^2 + 50 \cdot 1$

$V(1) = 66$

Dizemos que $V(1) = 66$ é o valor numérico que o polinômio $V(x)$ assume para $x = 1$.

O valor numérico do polinômio $\boldsymbol{p(x)}$ para $\boldsymbol{x = a}$ é o número que se obtém substituindo $\boldsymbol{x}$ por **a** e efetuando todas as operações indicadas pela expressão que define o polinômio. Representamos esse valor por $\boldsymbol{p(a)}$.

Exemplos:

1. Vamos calcular o valor numérico do polinômio $A(x) = 6x^2 + 60x + 100$ para $x = 10$.
   - Substituímos x por 10 no polinômio:

   $A(10) = 6 \cdot 10^2 + 60 \cdot 10 + 100$

   $A(10) = 600 + 600 + 100 \Rightarrow A(10) = 1300$

   Portanto, 1300 é o valor numérico do polinômio $A(x)$ para $x = 10$.

Exemplo:

2. Dado o polinômio $p(x) = 5x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 6x - 18$, vamos calcular o valor numérico desse polinômio para $x = -1$.
   - Substituindo x por -1 no polinômio, temos:

   $p(-1) = 5 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 18$

   $p(-1) = 5 + 10 + 9 - 6 - 18$

   $\underbrace{p(-1) = 0}$

   Valor numério do polinômio $p(x)$ para $x = -1$ é igual a zero.

   Como o valor numérico resultou zero, dizemos que $x = -1$ é raiz ou zero do polinômio $p(x)$.

Num polinômio $p(x)$, se $p(a) = 0$, o número complexo $\boldsymbol{a}$ é denominado raiz ou zero de $p(x)$.

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Quais são os "zeros" do polinômio $p(x)$ definido por $f(x) = x^2 - 9x + 8$?
2. Quantos "zeros" admite um polinômio identicamente nulo?

Identidade de polinômios

Há um conceito de igualdade de polinômios ligado ao que vimos anteriormente sobre valor numérico. A fim de compreendermos como é a igualdade de polinômios, vamos inicialmente considerar dois exemplos.

Exemplo 1:

Sejam os polinômios

$A(x) = x^2 + 4x$ e $B(x) = x^3 - 2x^2$.

- Ao calcularmos os valores numéricos desses dois polinômios para $x = 4$, note o que acontece:

$$x = 4 \rightarrow \begin{cases} A(4) = 4^2 + 4 \cdot 4 \Rightarrow A(4) = 32 \\ B(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 \Rightarrow B(4) = 32 \end{cases}$$

  Os valores numéricos obtidos são iguais, porém os polinômios são diferentes: enquanto $A(x)$ é um polinômio do 2º grau, $B(x)$ é um polinômio do 3º grau.

- Vejamos o que acontece quando calculamos os valores numéricos desses dois polinômios para $x = 3$:

$$x = 3 \rightarrow \begin{cases} A(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 \Rightarrow A(3) = 21 \\ B(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 \Rightarrow B(3) = 9 \end{cases}$$

  Nesse exemplo, constatamos que os valores numéricos são diferentes.

Exemplo 2:

Sejam os polinômios

$A(x) = x^2 + 4x + 3$ e $B(x) = (x + 1)(x + 3)$.

- Ao calcularmos os valores numéricos desses dois polinômios para $x = 10$, note o que acontece:

$$x = 10 \rightarrow \begin{cases} A(10) = 10^2 + 4 \cdot 10 + 3 \Rightarrow A(10) = 143 \\ B(10) = (10 + 1)(10 + 3) \Rightarrow B(10) = 143 \end{cases}$$

  Os valores numéricos são iguais.

- Vejamos o que acontece quando calculamos os valores numéricos desses dois polinômios para $x = 7$:

$$x = 7 \rightarrow \begin{cases} A(7) = 7^2 + 4 \cdot 7 + 3 \Rightarrow A(7) = 80 \\ B(7) = (7 + 1) \cdot (7 + 3) \Rightarrow B(7) = 80 \end{cases}$$

  Também chegamos a valores numéricos iguais.

- Se considerarmos agora um número qualquer representado por $x = a$, teremos:

$$x = a \rightarrow \begin{cases} A(a) = a^2 + 4a + 3 \\ B(a) = (a + 1) \cdot (a + 3) = a^2 + 3a + a + 3 \\ \Rightarrow B(a) = a^2 + 4a + 3 \end{cases}$$

  Nesse caso, dizemos que os dois polinômios assumem valores numéricos iguais para quaisquer valores atribuídos à variável x. Esses dois polinômios são iguais para qualquer valor de x (polinômios idênticos).

Dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são iguais ou idênticos se, e somente se, seus valores numéricos forem iguais para todo número complexo a. Em símbolos:

$$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(a) = B(a),\ \forall a \in \mathbb{C}$$

Observações:

1. Utilizamos o símbolo $\equiv$ para indicar que dois polinômios são idênticos, isto é, são iguais para quaisquer valores atribuídos à variável. O símbolo $\forall$ significa "para todo".
2. Outra maneira de verificar a identidade de polinômios: dois polinômios são idênticos se, e somente se, os coeficientes de mesmo grau forem iguais.

Exemplo:

Utilizando a identidade de polinômios, vamos determinar os valores de A, B e C para que a igualdade de frações algébricas a seguir seja verdadeira:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

- Para compararmos essas frações algébricas, vamos reduzir o primeiro membro da igualdade a uma fração. Assim, teremos:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

$$\frac{A(x^2 + x + 1) + (x - 1)(Bx + C)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

$$\frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx - Bx - C}{x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

$$\frac{(A + B)x^2 + (A + C - B)x + A - C}{x^3 - 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

$$(A + B)x^2 + (A + C - B)x + A - C = 1$$

- Agora temos a igualdade de polinômios. Vamos determinar os valores de A, B e C que a tornam verdadeira.

$$(A + B)x^2 + (A + C - B)x + A - C \equiv 1$$

$$\underbrace{(A + B)}_{0}x^2 + \underbrace{(A + C - B)}_{0}x + \underbrace{A - C}_{1} \equiv 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow B = -A & \text{(I)} \\ A + C - B = 0 & \text{(II)} \\ A - C = 1 \Rightarrow C = A - 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

- Substituindo (I) e (III) em (II), temos:

$$A + C - B = 0$$

$$A + A - 1 - (-A) = 0$$

$$3A = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{3} \\ C = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, temos $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ e $C = -\frac{2}{3}$.

Exercícios resolvidos

1. Dentre os números $-1, 0, 3, -3, i$ e $2i$, quais são raízes da função polinomial $p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$?

$p(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3 = -8$ (-1 não é raiz)

$p(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3$ (0 não é raiz)

$p(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 0$ (3 é raiz)

$p(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + (-3) - 3 = -60$ (-3 não é raiz)

$p(i) = i^3 - 3 \cdot i^2 + i - 3 = 0$ (i é raiz)

$p(2i) = (2i)^3 - 3 \cdot (2i)^2 + 2i - 3 = 9 - 6i$ ($2i$ não é raiz)

Portanto, 3 e i são raízes.

2. Determine os valores de m e n para que o polinômio $p(x) = 2x^3 + m \cdot x^2 + n \cdot x + 12$ satisfaça $p(1) = 12$ e $p(-2) = 18$.

$p(1) = 2 \cdot 1^3 + m \cdot 1^2 + n \cdot 1 + 12 = 12$

$p(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + m \cdot (-2)^2 + n \cdot (-2) + 12 = 18$

Então: $\begin{cases} m + n = -2 \\ 4m - 2n = 22 \end{cases} \therefore m = 3$ e $n = -5$

3. Determine os valores de a, b, c e d de modo que os polinômios $p(x) = (a - 2) \cdot x^3 - 4x^2 + (5 - b) \cdot x - 1$ e $s(x) = -7x^3 + (3c) \cdot x^2 - 7x + 4d + 3$ sejam idênticos.

Para que $p(x)$ seja idêntico a $s(x)$, temos de ter:

$$\begin{cases} a - 2 = -7 \\ 3c = -4 \\ 5 - b = -7 \\ 4d + 3 = -1 \end{cases} \therefore a = -5, b = 12, c = -\frac{4}{3} \text{ e } d = -1$$

4. Utilizando a identidade de polinômios, vamos determinar os valores de A e B para que a igualdade a seguir seja verdadeira:

Reduzindo o primeiro membro a uma fração apenas, temos

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{x+6}{x^2-4}$$

Por identidade de polinômios:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{x+6}{x^2-4}$$

$$\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)\,(x-2)}=\frac{x+6}{x^2-4}$$

$$Ax-2A+Bx+2B=x+6$$

$$(A+B)x-2A+2B=x+6$$

Por identidade de polinômios:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=3 \end{cases}$$

$$2B=4$$

$$B=2 \Rightarrow A=-1$$

5. Um polinômio P(x) é definido pelo seguinte determinante

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$$

Escreva esse polinômio na sua forma polinomial.

• Conforme regra de Sarrus, vamos calcular o determinante:

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$$

$$P(x)=x^2x^4+xx^3x^2-xx^3x^2-xxx^4-x^3x^3$$

$$P(x)=x^6+x^6+x^6-x^6-x^6-x^6$$

$$P(x)=0$$

O polinômio resultante é identicamente nulo.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Indique, em seu caderno, quais das expressões a seguir representam polinômios na variável x. Respostas no Manual do Professor.

a) $3x^3+7x-4$

b) $x^{-2}+3\cdot x^{-1}+2$

c) $-2x+5$

d) x^2-5x+6

e) $x^{\frac{1}{2}}+5$

2. Para quais valores de a, b e c os polinômios $(a+5)\cdot x^2+(b-1)\cdot x+2c-5$ e $7x^2+4x+1$ são idênticos? $a=2$, $b=5$ e $c=3$

3. Considere a função polinomial definida por $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$. Respostas no Manual do Professor.

a) Qual é o grau da função polinomial f?

b) Quais são os valores numéricos correspondentes a $f(1)$, $f(0)$ e $f(-1)$?

c) Quais são os valores numéricos correspondentes a $f(i)$ e $f(-i)$?

4. Determine os valores de m, n e p, de modo que o polinômio $(m-2)\cdot x^2+(n+5)\cdot x+3p-12$ seja identicamente nulo. $m=2$, $n=-5$ e $p=4$

5. Entre os números -1, 0, 1, 3 e -3, quais são as raízes da função polinomial definida por $P(x)=x^3-4x^2+x+6$? -1 e 3

6. Uma função polinomial é definida por $p(x)=x^{2n+3}+2\cdot x^{2n+1}+5$, onde n é um número natural.

a) Calcule o valor de $p(0)$. $p(0)=5$

b) Calcule o valor de $p(-1)$. $p(-1)=2$

7. Obtenha os valores de m e n na função polinomial definida por $f(x)=x^3+m\cdot x^2+n\cdot x+7$, considerando que $f(1)=13$ e $f(-1)=5$. $m=2$ e $n=3$

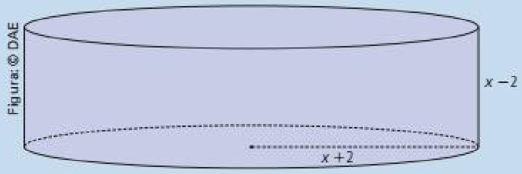
8. Uma função polinomial f é definida por $f(x)=(m^2-4)\cdot x^3+(m-2)\cdot x^2+(m^2-5m+6)\cdot x+3$.

a) Qual é o grau da função f se $m=2$? Para $m=2$ o grau da função f é igual a zero.

b) Qual é o valor de m para que o grau da função f seja igual a 2? $m=-2$

c) Existe algum valor de m para o qual o grau da função f seja igual a 1? Não.

9. As medidas do raio e da altura de um cilindro são, respectivamente, iguais a $x+1$ e $x-2$, como mostra a figura. Respostas no Manual do Professor.



a) Escreva a função que defina o volume do cilindro.

b) Qual é o grau dessa função?

c) Calcule o volume do cilindro se $x=4$.

CAPÍTULO

16 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

O estudo de polinômios envolve também as operações matemáticas. Assim, efetuamos a adição, a subtração e a multiplicação entre dois polinômios. Nosso maior interesse, porém, está na divisão de polinômios. Observe, neste capítulo, que tais operações são feitas de forma análoga às que envolvem expressões algébricas.

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

No início do capítulo anterior, vimos que um polinômio é uma expressão algébrica. Dessa forma, a adição, a subtração e a multiplicação de polinômios seguem os mesmos procedimentos de tais operações com expressões algébricas. A seguir, por meio de exemplos, vamos adicionar, subtrair e multiplicar polinômios. A divisão entre dois polinômios será também abordada neste capítulo.

Exemplos:

1. Dados os polinômios $A(x) = 5x^3 + 3x^2 + 9x - 10$ e $B(x) = 9x^3 + 7x^2 - 7x + 42$, vamos determinar o polinômio $A(x) + B(x)$ correspondente à adição deles.

- Adicionamos os termos de mesmo grau (termos semelhantes):
  $A(x) + B(x) = (5x^3 + 3x^2 + 9x - 10) +$
  $+ (9x^3 + 7x^2 - 7x + 42)$
  $A(x) + B(x) = (5x^3 + 9x^3) + (3x^2 + 7x^2) +$
  $+ (9x - 7x) + (-10 + 42)$
  $A(x) + B(x) = 14x^3 + 10x^2 + 2x + 32$
- Uma forma de visualizar o que foi feito anteriormente é posicionar os termos de mesmo grau (monômios de mesmo grau) um abaixo do outro e adicioná-los, conforme o esquema a seguir:

$$\begin{array}{lr} A(x) \longrightarrow & 5x^3 + 3x^2 + 9x - 10 \\ B(x) \longrightarrow & \underline{9x^3 + 7x^2 - 7x + 42} \\ A(x) + B(x) \longrightarrow & 14x^3 + 10x^2 + 2x + 32 \end{array}$$

A soma (resultado da adição) de dois ou mais polinômios é um polinômio cujos coeficientes são obtidos adicionando os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau.

2. Vamos subtrair agora os mesmos polinômios $A(x)$ e $B(x)$ do exemplo anterior.

- Subtraímos os termos de mesmo grau (termos semelhantes):
  $A(x) - B(x) = (5x^3 + 3x^2 + 9x - 10) -$
  $- (9x^3 + 7x^2 - 7x + 42)$
  $A(x) - B(x) = (5x^3 - 9x^3) + (3x^2 - 7x^2) +$
  $+ (9x + 7x) + (-10 - 42)$
  $A(x) - B(x) = -4x^3 - 4x^2 + 16x - 52$
- Poderíamos utilizar também, na subtração, um esquema colocando os termos de mesmo grau um embaixo do outro, como se fizéssemos a adição do polinômio $A(x)$ com o polinômio $-B(x)$ (trocamos todos os sinais dos termos desse polinômio).

$$\begin{array}{lr} A(x) \longrightarrow & 5x^3 + 3x^2 + 9x - 10 \\ -B(x) \longrightarrow & \underline{-9x^3 - 7x^2 + 7x - 42} \\ A(x) - B(x) \longrightarrow & -4x^3 - 4x^2 + 16x - 52 \end{array}$$

Analogamente ao que ocorre com a adição, a diferença de dois polinômios é um polinômio cujos coeficientes são obtidos subtraindo os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau, conforme a ordem da subtração dos polinômios.

3. Vamos multiplicar os polinômios $A(x) = 2x^3 + 9x - 10$ e $B(x) = 4x^2 - 3$.

- Utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, isto é:
  $A(x) \cdot B(x) = (2x^3 + 9x - 10) \cdot (4x^2 - 3)$
  $A(x) \cdot B(x) = 2x^3 \cdot (4x^2 - 3) + 9x \cdot (4x^2 - 3) -$
  $- 10 \cdot (4x^2 - 3)$
  $A(x) \cdot B(x) = 8x^5 - 6x^3 + 36x^3 - 27x -$
  $- 40x^2 + 30$
  $A(x) \cdot B(x) = 8x^5 + 30x^3 - 40x^2 - 27x + 30$

- Utilizando o esquema de colocar um polinômio embaixo do outro (deixando espaço para os termos que faltam para completar o polinômio), podemos multiplicar os termos chegando ao mesmo resultado:

$$\begin{array}{r}
2x^3 + 9x - 10 \\
4x^2 - 3 \\
\hline
-6x^3 \qquad\qquad -27x + 30 \\
8x^5 + 36x^3 - 40x^2 \qquad\qquad\quad \\
\hline
8x^5 + 30x^3 - 40x^2 - 27x + 30
\end{array}$$

Dizemos que o produto de dois polinômios é um polinômio obtido pela multiplicação de cada termo de um deles por todos os termos do outro. Ao final, adicionamos os resultados.

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Observando as operações entre polinômios e considerando que os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são de graus 3 e 4, respectivamente, responda:

1. Qual é o grau do polinômio $A(x) + B(x)$?

2. E do polinômio $A(x) \cdot B(x)$?

Exercícios resolvidos

1. Sejam $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ e $g(x) = -3x^3 + x^2 - 4$. Determine a expressão de:

a) $f + g$

b) $2f - 3g$

a) $f(x) + g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x + 1 + (-3x^3 + x^2 - 4) = x^3 - x^2 + 7x - 3$

b) $2 \cdot f(x) - 3 \cdot g(x) = 2 \cdot (4x^3 - 2x^2 + 7x + 1) - 3 \cdot (-3x^3 + x^2 - 4) = 17x^3 - 7x^2 + 14x + 14$

2. O polinômio p é de grau 3 e o polinômio s é de grau 5. Determine o grau do polinômio:

a) $p \cdot s$

b) $p^2 \cdot s^3$

c) $p + s$

d) $p^5 + s^3$

Considerando que $gr(p)$ representa o grau do polinômio p, temos:

a) $gr(p \cdot s) = gr(p) + gr(s) = 3 + 5 = 8$

b) $gr(p^2 \cdot s^3) = gr(p^2) + gr(s^3) = 2 \cdot gr(p) + 3 \cdot gr(s) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$

c) O grau de uma soma de polinômios de graus diferentes é igual ao grau do maior polinômio. Logo, $gr(p + s) = gr(s) = 5$.

d) O grau de $p^5 = 5 \cdot gr(p) = 5 \cdot 3 = 15$ e o grau de $s^3 = 3 \cdot gr(s) = 3 \cdot 5 = 15$. Como não conhecemos as expressões dos polinômios p e s, não é possível definir o grau do polinômio $p^5 + s^3$, pois o polinômio resultante pode ser desde o polinômio nulo até um polinômio de grau 15.

3. Quais são os valores de a, b e c, de modo que $\dfrac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-4} + \dfrac{c}{x+2}$, com $x \neq 0$, $x \neq 4$ e $x \neq -2$?

$$\frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{x+2}$$

$$\frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{a \cdot (x-4) \cdot (x+2) + b \cdot x \cdot (x+2) + c \cdot x \cdot (x-4)}{x \cdot (x-4) \cdot (x+2)}$$

$$4x^2 - 28x - 16 = a \cdot (x-4) \cdot (x+2) + b \cdot x \cdot (x+2) + c \cdot x \cdot (x-4)$$

$x = 0 \rightarrow -16 = a \cdot (0 - 4) \cdot (0 + 2) \therefore a = 2$

$x = -2 \rightarrow 4 \cdot (-2)^2 - 28 \cdot (-2) - 16 = c.(-2).(-2-4) \therefore c = \dfrac{14}{3}$

$x = 4 \rightarrow 4 \cdot 4^2 - 28 \cdot 4 - 16 = b \cdot 4 \cdot (4 + 2) \therefore b = -\dfrac{8}{3}$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere as funções polinomiais definidas por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$, $g(x) = 2x^2 + 3$ e $h(x) = -x^3 + 5x^2 - x + 1$. Obtenha os seguintes polinômios: Respostas no Manual do Professor.

a) $f(x) + h(x)$

b) $g(x) - h(x)$

c) $f(x) \cdot g(x)$

d) $[f(x) + h(x)] \cdot g(x)$

2. Em seu caderno, indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. A soma de dois polinômios de grau n é sempre um polinômio de grau n. F

II. O produto de um polinômio de grau n por outro polinômio de grau m é sempre um polinômio de grau $m + n$. V

III. A soma de dois polinômios de grau n pode ser um polinômio de grau n. V

IV. O produto de dois polinômios de grau n é sempre um polinômio de grau $2n$. V

V. A soma de um polinômio de grau m e de outro polinômio de grau n, com $m > n$, é sempre um polinômio de grau m. V

3. As funções polinomiais f, g e h têm graus, respectivamente, iguais a 2, 3 e 4. Determine o grau das seguintes funções polinomiais:

a) f^2 4

b) $f \cdot g$ 5

c) $(f + g) \cdot h$ 7

d) $h - g$ 4

e) $f^4 \cdot g^3 \cdot h^2$ 25

4. Determine os valores de α e β, de modo que a igualdade a seguir seja verdadeira para qualquer valor de x, tal que $x \neq 2$ e $x \neq -1$. $\alpha = 2$ e $\beta = 3$

$$\frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{\alpha}{x - 2} + \frac{\beta}{x + 1}$$

5. Quais valores de a, b e c verificam a igualdade a seguir, qualquer que seja o valor de x? $a = 5$, $b = 3$ e $c = -7$

$$x^2 - 8x + 21 = a(x - 1)(x - 2) + b(x - 1)(x + 1) + c(x - 2)(x + 1)$$

6. O polinômio $12x^2 + 24x + 28$ pode ser escrito como uma diferença de dois cubos perfeitos, ou seja, $12x^2 + 24x + 28 = (x + \alpha)^3 - (x + \beta)^3$, no qual α e β são números reais. Sendo assim, obtenha os valores de α e β. $\alpha = 3$ e $\beta = -1$

7. Determine os valores de A, B e C, de modo que $\frac{3x^2 + 4x + 2}{x \cdot (x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$ para todo x diferente de zero e de -1. $A = 2$, $B = 1$ e $C = -1$

8. Determine o valor de α de modo que a igualdade a seguir seja verdadeira para todo x: $\alpha = 3$

$$(x^2 + 2x + 1)^2 = x^4 + (\alpha + 1) \cdot x^3 + 2\alpha \cdot x^2 + 4x + 1$$

9. A função polinomial definida por $F(x) = 2x^3 + m \cdot x^2 + n \cdot x + p$ é tal que $F(2) = 18$ e $F(x) = -F(-x)$ para todo x.

a) Determine os valores de m, n e p. $m = 0$, $n = 1$ e $p = 0$

b) Calcule o valor de F(1). $F(1) = 3$

10. Existem números p e q, de modo que a expressão $\frac{7x^2 + 3x + 2}{p \cdot x^2 - 6x + q}$ não depende de x, ou seja, assume sempre um mesmo valor.

a) Determine os valores de p e q. $p = -14$ e $q = -4$

b) Qual é o valor constante que a expressão assume? $-\frac{1}{2}$

11. Elabore, para cada item a seguir, polinômios do 4º grau A(x) e B(x), de tal maneira que o polinômio: Resposta pessoal.

a) A(x) + B(x) seja do 3º grau.

b) A(x) + B(x) seja do 2º grau.

c) A(x) + B(x) seja do 1º grau.

Divisão de polinômios

Vimos anteriormente as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios. Precisamos agora compreender como proceder com a divisão. Neste capítulo, além de verificarmos como efetuar uma divisão entre polinômios, vamos também abordar dois importantes teoremas: o do resto e o do fator.

Vejamos, primeiramente, alguns resultados importantes da divisão entre dois números naturais a partir de um exemplo. Observe o que acontece quando dividimos o número 6789 pelo número 34:

$$\begin{array}{r|l} \overset{\text{dividendo}}{6789} & \overset{\text{divisor}}{34} \\ \hline \underset{\text{resto}}{23} & \underset{\text{quociente}}{199} \end{array} \qquad \mathbf{6789 = 34 \cdot 199 + 23}$$

No exemplo, o número 6789 (**dividendo**) está sendo dividido pelo número 34 (**divisor**). Nessa divisão, dois outros números foram determinados: 199 (**quociente**) e 23 (**resto**). Observe que o resto é menor que o divisor. Esses quatro números estão relacionados pela igualdade:

(dividendo) = (divisor) · (quociente) + resto

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Numa divisão de números qual o significado da palavra divisível?
2. Quando um número natural é divisível por 5?
3. Ao dividir um número natural por 7, quantos e quais são os possíveis restos dessa divisão?

E como se faz a divisão de polinômios?

Analogamente à divisão que efetuamos entre dois números naturais, ao dividirmos um polinômio A(x) por outro polinômio B(x), com B(x) $\neq 0$, queremos determinar outros dois polinômios Q(x) e R(x) correspondentes ao quociente e ao resto da divisão, respectivamente. Esses dois polinômios deverão satisfazer às seguintes condições:

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \longrightarrow \begin{cases} A(x) \rightarrow \text{dividendo} \\ B(x) \rightarrow \text{divisor} \\ Q(x) \rightarrow \text{quociente} \\ R(x) \rightarrow \text{resto} \end{cases}$$

1ª condição: A(x) = B(x) · Q(x) + R(x)

2ª condição: o grau de R(x) não pode ser igual nem maior que o grau de B(x). O polinômio R(x) pode também ser igual a zero (polinômio identicamente nulo).

Na segunda condição, se o resto for igual a zero (polinômio identicamente nulo), dizemos que o polinômio dividendo é divisível pelo polinômio divisor, ou seja, a divisão é exata.

Divisão pelo método da chave

Observe, no exemplo a seguir, como proceder para dividir dois polinômios pelo método da chave.

Exemplo:

Queremos dividir o polinômio A(x) = $2x^4 - 5x^3 +$ $+ 7x^2 - 10$ pelo polinômio B(x) = $x^2 + 2x - 3$. Pelo método da chave temos de considerar um procedimento que exige algumas etapas:

1ª etapa: escrevemos os polinômios, dividendo e divisor, em ordem decrescente de seus expoentes. Quando necessário, completamos os termos que estão faltando colocando o zero como coeficiente.

2ª etapa: iniciamos dividindo o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor, obtendo um termo do quociente da divisão.

3ª etapa: multiplicamos o termo obtido na etapa anterior pelo divisor e subtraímos esse produto do dividendo.

4ª etapa: caso a diferença obtida corresponda a um polinômio de grau maior ou igual ao do divisor, ele passa a ser um novo dividendo. Dessa forma, repetimos o que fizemos na 2ª e 3ª etapas.

Observe atentamente como efetuamos a divisão do polinômio A(x) pelo polinômio B(x). Caso necessário, faça a verificação dos resultados.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 0x - 10 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 4x^3 + 6x^2 & 2x^2 - 9x + 31 \\ \cline{1-1}
-9x^3 + 13x^3 + 0x - 10 & \\
+9x^3 + 18x^2 - 27x & \text{quociente da divisão} \\ \cline{1-1}
31x^2 - 27x - 10 & \\
-31x^2 - 62x + 93 & \\ \cline{1-1}
-89x + 83 & \\
\text{resto da divisão} &
\end{array}$$

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Na divisão exemplificada, qual é o quociente da divisão do monômio $2x^4$ por x^2?
2. Qual é o quociente da divisão do monômio $31x^2$ por x^2?

No exemplo anterior, para verificar se a divisão está correta, podemos, a partir do divisor, do quociente e do resto, obter o dividendo A(x):

$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$A(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot (2x^2 - 9x + 31) + (-89x + 83)$

$A(x) = x^2 \cdot (2x^2 - 9x + 31) + 2x \cdot (2x^2 - 9x + 31) -$
$- 3 \cdot (2x^2 - 9x + 31) - 89x + 83$

$A(x) = 2x^4 - 9x^3 + 31x^2 + 4x^3 - 18x^2 + 62x -$
$- 6x^2 + 27x - 93 - 89x + 83$

$A(x) = 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 10$

Resultou o dividendo da divisão.

Note, no exemplo, que o quociente obtido é um polinômio do 2º grau. Já poderíamos saber disso sem efetuar a divisão, pois o grau do quociente é a diferença dos graus dos polinômios dividendo e divisor.

Exemplos:

1. Vamos dividir o polinômio $P(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 25$ pelo polinômio $D(x) = x^2 - 1$.

- Conforme o método da chave, temos:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +10x^2 & -9x & -25 & x^2-1 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & & +3x & & 3x+10 \\ \cline{1-4}
& 10x^2 & -6x & -25 & \\
& -10x^2 & & +10 & \\ \cline{1-4}
& & -6x & -15 &
\end{array}
$$

Assim, o quociente da divisão é o polinômio $Q(x) = 3x + 10$, e o resto é o polinômio $R(x) = -6x - 15$. Para verificar o resultado, podemos efetuar:

$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$P(x) = (x^2 - 1) \cdot (3x + 10) + (-6x - 15)$

$P(x) = 3x^3 + 10x^2 - 3x - 10 - 6x - 15$

$P(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 25$

2. Vamos determinar os valores dos números reais k e m, de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + kx + m$ seja divisível pelo polinômio $D(x) = x^2 - x + 2$.

- Como o polinômio $P(x)$ é divisível por $D(x)$, então o resto é igual a zero. Pelo método da chave, efetuamos a divisão e, ao final, utilizamos o fato de que o resto é o polinômio identicamente nulo:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + kx + m & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 - 2x & x + 3 \\ \cline{1-1}
\quad 3x^2 + (k-2)x + m & \\
\quad -3x^2 + 3x - 6 & \\ \cline{1-1}
\qquad \underbrace{(k+1)x + m - 6} & \\
\qquad \hookrightarrow (k+1)x + m - 6 \equiv 0 &
\end{array}
$$

Assim, como o resto é o polinômio nulo, seus coeficientes são iguais a zero:

$$\begin{cases} k + 1 = 0 \\ m - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -1 \text{ e } m = 6$$

Portanto, $k = -1$ e $m = 6$.

Divisão pelo método dos coeficientes a determinar

O método da chave, visto anteriormente, segue o processo utilizado quando dividimos um número natural por outro número natural. Assim, por exemplo, quando precisamos dividir o número 3 783 por 13, usualmente fazemos:

$$
\begin{array}{r|l}
3\,783 & 13 \\ \cline{2-2}
-26 & 291 \\ \cline{1-1}
118 & \\
-117 & \\ \cline{1-1}
13 & \\
-13 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Em relação à divisão de polinômios, há outro processo que é conhecido como **método dos coeficientes a determinar** (ou método de Descartes). Nesse procedimento empregamos o conceito de identidade de polinômios na divisão $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, onde $P(x)$ é o dividendo, $D(x)$ o divisor, $Q(x)$ o quociente (a ser determinado) e $R(x)$ o resto (também a ser obtido).

Observe, no exemplo a seguir, como empregar esse método para dividir. Após, experimente fazer a mesma divisão com o método da chave. Compare os dois procedimentos para decidir qual deles é mais simples.

Exemplo:

Vamos dividir o polinômio $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 9x + 8$ pelo polinômio $D(x) = x^2 + 4x + 3$ utilizando o método dos coeficientes a determinar.

- Queremos determinar os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, tais que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.
- Quociente:
  Como o dividendo é um polinômio do 3º grau e o divisor é um polinômio do 2º grau, então o polinômio quociente será do 1º grau (diferença dos dois). Assim, podemos representar o quociente por $Q(x) = ax + b$.
- Resto:
  O resto da divisão deverá ser um polinômio de grau menor que o grau do divisor. Se o divisor é do 2º grau, então o resto será, no máximo, um polinômio do 1º grau. Vamos representá-lo por $R(x) = mx + n$.
- Substituímos na igualdade $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ e, conforme a identidade de polinômios, vamos determinar seus coeficientes:
  $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$
  $4x^3 - 6x^2 + 9x + 8 \equiv (x^2 + 4x + 3) \cdot (ax + b) + (mx + n)$

$4x^3 - 6x^2 + 9x + 8 \equiv ax^3 + bx^2 + 4ax^2 + 4bx +$
$+ 3ax + 3b + mx + n$
$4x^3 - 6x^2 + 9x + 8 \equiv ax^3 + (b + 4a)x^2 + (4b +$
$+ 3a + m)x + (3b + n)$

Como os polinômios são idênticos, os coeficientes de mesmo grau são iguais:

$$\begin{cases} 4 = a \\ -6 = b + 4a \\ 9 = 4b + 3a + m \\ 8 = 3b + n \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 4$, $b = -22$, $m = 85$ e $n = 74$. Assim, concluímos que o quociente da divisão é $Q(x) = 4x - 22$ e o resto é $R(x) = 85x + 74$.

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Faça a mesma divisão pelo método da chave.
2. Em sua opinião, qual é o método mais simples?

Divisão por (x 2 a)

Vimos dois procedimentos para a divisão de polinômios: o método da chave e o método dos coeficientes a determinar. Esses dois processos são gerais, mas, quando efetuarmos uma divisão de um polinômio de grau maior ou igual a 1 por um polinômio do 1º grau da forma $(x - a)$, há um procedimento que nos permite obter o quociente e o resto da divisão de um modo bem mais simples, conhecido por dispositivo prático de Briot-Ruffini. Observe o exemplo a seguir.

Para compreendermos como é esse procedimento, utilizaremos a divisão do polinômio $A(x) = 4x^3 - 7x^2 + 10x - 8$ pelo polinômio $D(x) = x - 3$.

- O procedimento utiliza o seguinte esquema:

Raiz do binômio	Coeficientes dos termos em x do dividendo	Termo independente de x do dividendo
	Coeficientes do quociente	Resto

1º passo: Como a raiz do binômio é $x = 3$, colocamos esse número no canto superior à esquerda no dispositivo. Dispomos, à direita, todos os coeficientes dos termos do dividendo em ordem decrescente do expoente. Caso o polinômio esteja incompleto (falte algum termo), colocamos zero como coeficiente do termo que falta:

3	4	−7	10	−8

2º passo: Repetimos, abaixo da linha horizontal, o primeiro coeficiente do dividendo (neste caso é 4); em seguida, multiplicamos esse coeficiente pela raiz do binômio e adicionamos o resultado ao segundo coeficiente do dividendo (neste caso é −7), escrevendo o resultado imediatamente abaixo dele:

3	4	−7	10	−8
	4	5		

$4 \cdot 3 - 7 = 5$

3º passo: O resultado obtido no 2º passo (nesse caso é 5) é, então, multiplicado pela raiz do binômio, e o novo resultado é adicionado ao 3º coeficiente do dividendo (neste caso, 10), e tal soma é escrita imediatamente abaixo dele:

3	4	−7	10	−8
	4	5	25	

$5 \cdot 3 + 10 = 25$

- Esse procedimento é repetido até o último coeficiente do dividendo, isto é:

3	4	−7	10	−8
	4	5	25	67

$25 \cdot 3 - 8 = 67$

Assim, obtemos os coeficientes do quociente da divisão e também o resto da divisão:

3	4	−7	10	−8
	4	5	25	67
	coeficientes do quociente			resto da divisão

Quociente $\rightarrow Q(x) = 4x^2 + 5x + 25$

Resto $\rightarrow R(x) = 67$

Observação:

Como o divisor é um polinômio do 1º grau, o grau do quociente será um grau menor que o do dividendo. Além disso, o resto será um polinômio de grau zero ou será o polinômio identicamente nulo (quando o resto for igual a zero).

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Faça a mesma divisão pelo método da chave.
2. Em sua opinião, qual o método mais simples: o dispositivo prático ou o método da chave?

Exemplos:

1. Vamos obter o quociente e o resto da divisão do polinômio $A(x) = x^4 - 2x^2 + 9x - 15$ pelo polinômio do primeiro grau $B(x) = x + 1$.

- Observando que a raiz do divisor é igual a -1, escrevemos a raiz no canto esquerdo do dispositivo. À sua direita, colocamos os coeficientes completos do dividendo, isto é:

-1	1	0	-2	9	-15

- Conforme vimos no exemplo, seguimos agora o procedimento para a obtenção do resto da divisão e também dos coeficientes do quociente correspondente:

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 0 & -2 & 9 & -15 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -1 \quad -1 \quad 10}_{\text{coeficientes do quociente}} & & & & \underbrace{-25}_{\text{resto da divisão}} \end{array}$$

Portanto, temos quociente

$Q(x) = 1 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 + 10 = x^3 - x^2 - x + 10$

e resto $R(x) = -25$.

2. Vamos obter o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x - 1$ pelo polinômio $D(x) = 2x + 1$.

- Note que o polinômio divisor não é da forma $(x - a)$. Entretanto, podemos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, observando que o divisor pode ser escrito como:

$$2x + 1 = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Sendo assim, a raiz do binômio é $x = -\frac{1}{2}$. No canto superior à esquerda do dispositivo prático, colocamos esse número e procedemos como nos exemplos anteriores:

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{1}{2} & 2 & 3 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & -4 \end{array}$$

- Atenção!

O quociente da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ não é $2x^2 + 2x + 6$. Para obtermos o quociente desejado, deveremos dividir esse resultado por 2, isto é:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 2x + 6)$$

$$Q(x) = x^2 + x + 3$$

O resto da divisão será, neste caso, igual a -4, conforme apareceu no dispositivo prático. Vamos fazer a verificação desse resultado:

$$P(x) = (2x + 1) \cdot (x^2 + x + 3) + (-4)$$

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 6x + x^2 + x + 3 - 4$$

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x - 1$$

Teoremas da divisão de polinômios

Além do dispositivo visto anteriormente para a divisão por um polinômio da forma $(x - a)$, vamos agora conhecer dois resultados importantes: o teorema do resto e o teorema do fator. Enunciaremos cada um desses teoremas e, em seguida, faremos as correspondentes demonstrações.

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio **P(x)** de grau maior ou igual a 1 pelo binômio **$(x - a)$** é o valor numérico desse polinômio para **$x = a$**, que indicamos por **$P(a)$**.

Demonstração:

- Numa divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, e o resultado adicionado ao resto. Como o divisor é um polinômio do 1º grau em ***x***, o resto será uma constante. Sendo $Q(x)$ o quociente e ***r*** a constante correspondente ao resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x - a)$, temos:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$$

- Substituindo nessa igualdade x por a, resulta:
  $P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + r$
  $P(a) = 0 \cdot Q(a) + r$
  $P(a) = r$

Portanto, o resto da divisão é igual ao valor numérico que o polinômio dividendo assume para a raiz do binômio do 1º grau correspondente ao divisor.

Exemplo:

Sabendo que o polinômio $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + mx - 7$ é divisível por $(x - 1)$, vamos determinar o valor do número real ***m***.

- Utilizando o teorema do resto e sendo $x = 1$ a raiz do polinômio divisor, impomos a condição de que o resto seja igual a zero, isto é:
  $r = A(1)$
  $0 = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 7$
  $0 = 2 - 5 + m - 7$
  $m = 10$

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Resolva o mesmo exemplo pelo método da chave e pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini e compare os procedimentos e resultado.
2. Qual é o procedimento mais simples?

Observações:

1. Como a própria denominação dada acima, o teorema do resto é utilizado quando estamos interessados no resto da divisão.

2. Pode-se demonstrar, analogamente, que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ de grau maior ou igual a 1 por um polinômio da forma $ax + b$ $(a \neq 0)$ é igual ao valor numérico desse polinômio para $x = -\dfrac{b}{a}$.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio $P(x)$ de grau maior ou igual a 1 é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, a for raiz de $P(x)$.

Demonstração:

Precisamos provar duas implicações:

1ª Se $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, então $P(a) = 0$.

- Como $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, sabemos que o resto da divisão é igual a zero. Assim, conforme o teorema do resto, temos:
  $r = P(a)$
  $0 = P(a) \Rightarrow a$ é raiz de $P(x)$

2ª Se a é raiz de $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $(x - a)$.

- Como $x = a$ é raiz de $P(x)$, temos que $P(a) = 0$. Conforme o teorema do resto, $P(a)$ é o resto da divisão do polinômio por $(x - a)$. Assim, temos:
  $r = P(a)$
  $r = 0 \Rightarrow P(x)$ é divisível por $(x - a)$

Note que o teorema de D'Alembert é consequência do teorema do resto.

Teorema do fator

Se k é raiz de um polinômio $P(x)$, de grau $x \geqslant 1$, então $(x - k)$ é um fator de $P(x)$.

Demonstração:

- Pelo teorema do resto, a divisão do polinômio $P(x)$ por $x - k$ resulta em um quociente $Q(x)$ e um resto $P(k)$, de tal maneira que:
  $P(x) = (x - k) \cdot Q(x) + P(k)$
- Como $x = k$ é uma raiz de $P(x)$, então $P(k) = 0$. Assim, substituindo na igualdade anterior, temos:
  $P(x) = (x - k) \cdot Q(x) + P(k)$
  $P(x) = (x - k) \cdot Q(x)$
  Portanto, $(x - k)$ é um fator de $P(x)$.

Como consequência do teorema do fator, podemos dizer que $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $P(x)$ for divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

Essa consequência é dividida em duas partes.

1ª parte:

Se $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ e $(x - b)$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

2ª parte:

Se $P(x)$ é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível separadamente por $(x - a)$ e por $(x - b)$.

Observe como podemos justificar a 1ª parte:

- Como P(x) é divisível por ($x - a$) e por ($x - b$), pelo teorema de D'Alembert, temos:
$$P(a) = 0 \text{ e } P(b) = 0 \quad \text{(I)}$$
- Dividindo o polinômio P(x) por $(x - a) \cdot (x - b)$, resulta que o divisor é um polinômio do 2º grau. Assim, o resto da divisão será no máximo um polinômio do 1º grau da forma $mx + n$. Representando o quociente dessa divisão por Q(x), podemos escrever:
$P(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot Q(x) + mx + n$ (II)
- Substituindo em (II) x por a e x por b, conforme (I), obtemos:
$P(a) = (a - a) \cdot (a - b) \cdot Q(a) + ma + n$
$0 = ma + n$ (III)
$P(b) = (b - a) \cdot (b - b) \cdot Q(b) + mb + n$
$0 = mb + n$ (IV)
- Subtraindo, membro a membro, (III) e (IV), temos:
$0 = ma - mb$
$0 = m \cdot (a - b)$
$\downarrow a \neq b$
$m = 0$
- Substituindo esse resultado em (III), obtemos:
$0 = 0 \cdot a + n$
$n = 0$

Portanto, como dissemos que o resto da divisão é $mx + n$ e mostramos que $m = n = 0$, então o resto é igual a zero, isto é, o polinômio P(x) é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

A segunda parte da demonstração do teorema do fator deixamos para você.

Exemplo:

Vamos determinar os valores de m e n de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$ seja divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

- Pela consequência do teorema do fator, se P(x) é divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$, então P(x) é divisível, separadamente, por ($x - 1$) e por ($x - 2$). Assim, temos:
$P(1) = 0$
$1^3 + 2 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + n = 0 \Rightarrow m + n = -3$ (I)
$P(2) = 0$
$2^3 + 2 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + n = 0 \Rightarrow 2m + n = -16$ (II)
- Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $m = -13$ e $n = 10$.

Observe que podemos chegar a esse resultado utilizando o método da chave, como a seguir, considerando que $(x - 1) \cdot (x - 2) = x^2 - 3x + 2$:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 2x^2 + mx + n & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{3-3} & -x^3 + 3x^2 - 2x & x + 5 \\ \cline{1-2} & 5x^2 + (m - 2)x + n & \\ & -5x^2 + 15x - 10 & \\ \cline{1-2} & (m + 13)x + n - 10 & \end{array}$$

Como o polinômio é divisível, concluímos que o resto é o polinômio identicamente nulo. Assim, fazemos:

$$(m + 13)x + n - 10 \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} m + 13 = 0 \Rightarrow m = -13 \\ n - 10 = 0 \Rightarrow n = 10 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1. Obtenha o quociente e o resto da divisão do polinômio $7x^3 - 6x^2 + 5x - 2$ pelo polinômio $x^2 + 1$.

Utilizando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{l|l} 7x^3 - 6x^2 + 5x - 2 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -7x^3 \quad -7x & 7x - 6 \longrightarrow \text{quociente} \\ \hline -6x^2 - 2x - 2 & \\ 6x^2 \qquad + 6 & \\ \hline -2x + 4 \longrightarrow \text{resto} & \end{array}$$

2. Considere o polinômio $P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 100x^{100}$. Qual é o resto da divisão desse polinômio pelo binômio $x - 1$?

Pelo teorema do resto, temos:
P(1) = resto, logo:

$P(1) = 1 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^3 + ... + 100 \cdot 1^{100} = 1 + 2 + 3 + ... + 100 = \left(\frac{1 + 100}{2}\right) \cdot 100 = 5050$

3. O polinômio $x^4 + x^3 + \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 2$ é divisível pelo polinômio $x^2 - x - 2$.

a) Quais são as raízes do polinômio $x^2 - x - 2$?

b) Escreva o polinômio $x^2 - x - 2$ como um produto de dois polinômios do 1º grau.

c) Quais são os valores de α e β?

a) $x^2 - x - 2 = 0$
$x = 2$ ou $x = -1$
b) $x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)$
c) $P(2) = 0 \rightarrow 2^4 + 2^3 + \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 2 = 0$
$P(-1) = 0 \rightarrow (-1)^4 + (-1)^3 + \alpha \cdot (-1)^2 + \beta \cdot (-1) + 2 = 0$

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = -26 \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases} \therefore \alpha = -5 \text{ e } \beta = -3$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Qual é o valor numérico, para $x = 2$, do quociente da divisão do polinômio $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$ pelo polinômio $x^2 - 7x + 6$? Qual é o resto dessa divisão?
O quociente é igual a -3 para $x = 2$ e o resto da divisão é igual a zero.

2. Dividindo um polinômio f por $x^2 + 1$, obtemos o quociente $x^2 - 1$ e resto $x + 1$. Respostas no Manual do Professor.

a) Obtenha o polinômio f.

b) Qual é o valor numérico do polinômio f para $x = 2$?

c) O número -1 é uma das raízes do polinômio f? Justifique sua resposta.

3. Dividindo o polinômio f pelo polinômio g, obtemos o quociente q e o resto r, como mostra o esquema a seguir: Respostas no Manual do Professor.

$$\begin{array}{r|l} f & g \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

a) Se os graus de f e g são, respectivamente, iguais a 5 e 2, qual é o grau de q?

b) Se o grau de g é igual a 3, quais são as possibilidades com relação ao grau de r?

c) Se r é o polinômio nulo, o que se pode afirmar com relação ao seu grau?

4. Dividindo-se o polinômio $x^4 + x^2 + 4$ por um polinômio f, obtemos quociente $x^2 + x + 1$ e resto 3.

a) Obtenha o polinômio f. $f(x) = x^2 - x + 1$

b) Qual é o resto da divisão do polinômio f por $x + 1$? 3

5. Dizemos que um polinômio f é divisível pelo polinômio g se o resto da divisão de f por g é igual a zero.

a) Verifique se o polinômio $x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível pelo polinômio $x^2 - 5x + 6$.

b) Determine o valor de m de modo que o polinômio $x^3 - 2x^2 + m \cdot x - 3$ seja divisível pelo polinômio $x^2 - x + 3$. Respostas no Manual do Professor.

6. Ao dividirmos um polinômio P pelo polinômio D, obtemos o quociente Q e resto R.

a) Se os graus de P e D são iguais, respectivamente, a 10 e 4, qual é o grau de Q?

b) Qual é o quociente da divisão do polinômio P pelo polinômio 2D?

c) Qual é o resto da divisão do polinômio P pelo polinômio 2D? Respostas no Manual do Professor.

7. Um polinômio f é definido pelo determinante $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 3x \\ 1 & 2 & x^3 \end{vmatrix}$.

a) Obtenha o polinômio f.

b) Qual é o valor numérico do polinômio f para $x = 2$?

c) O número zero é uma raiz do polinômio f?

d) O número 1 é uma raiz do polinômio f?

e) Qual é o resto e o quociente da divisão do polinômio f pelo polinômio $x^2 - 1$? Respostas no Manual do Professor.

8. Qual é o resto e o quociente da divisão do polinômio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 7$ pelo polinômio $x - 2$?
O quociente é $x^3 - x^2 + 3x + 5$ e o resto é 17.

9. A seguir, está representada uma divisão de dois polinômios por meio do dispositivo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 3 & m & 1 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & n \end{array}$$

a) Quais são os valores de m e n? $m = -5$ e $n = 40$

b) Qual é o polinômio dividendo? $x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

c) Qual é o polinômio divisor? $x - 3$

10. Obtenha o resto e o quociente da divisão do polinômio $2x^3 + 5x^2 + x - 3$ pelo binômio $2x + 3$.
O quociente é igual a $x^2 + x - 1$ e o resto é igual a zero.

11. O polinômio $x^3 - 5x^2 + m \cdot x - 3$ é divisível pelo binômio $x + 1$.

a) Qual é o valor de m? $m = -9$

b) Verifique se o polinômio é divisível pelo binômio $x - 1$. O polinômio não é divisível por $x - 1$.

12. Qual é a relação entre m e n, de modo que o polinômio $3x^4 + m \cdot x^3 + 5x^2 + n \cdot x - 1$ seja divisível pelo binômio $x - 1$? $m + n = -7$

13. Sabe-se que o polinômio $2x^3 + a \cdot x^2 - 11x + b$ é divisível pelos binômios $x - 1$ e $x - 2$.

a) Quais são os valores de a e b? $a = -1$ e $b = 10$

b) Qual é o valor numérico do polinômio $p(x) = a \cdot x + b$ para $x = 4$? 6

14. Um polinômio f dividido por $x^2 - 2x + 3$ fornece quociente $x + 3$ e resto $x - 2$.

a) Obtenha o polinômio f. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 7$

b) Qual é o resto da divisão do polinômio f pelo binômio $x + 1$? 9

15. Com relação ao polinômio $n \cdot x^{2n} + (n + 1) \cdot x^{2n+1} + 1$, no qual n é um número natural maior que 1, assinale, em seu caderno, V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. O resto da divisão do polinômio pelo binômio $x - 1$ é igual a $2 \cdot (n + 1)$. V

II. O polinômio é divisível pelo binômio $x + 1$. V

III. O polinômio é divisível por $x^2 - 1$. F

IV. Para $n = 2$, o polinômio é divisível por $x - 1$. F

V. Para $n = 3$, o polinômio é divisível por $x + 1$. V

16. A divisão do polinômio $5x^{10} + ... + 2x + 7$ pelo binômio $x - 3$ está representada a seguir:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & \dots & 2 & 7 \\ \hline & 5 & \dots & 6 & r \end{array}$$

Sendo r o resto dessa divisão, qual é o valor de r? 25

17. Os restos das divisões de um polinômio f por $x - 2$ e $x - 4$ são, respectivamente, iguais a 3 e 5.

a) Qual é o valor numérico do polinômio f para $x = 2$? 3

b) Qual é o valor numérico do polinômio f para $x = 4$? 5

c) Qual é o resto da divisão do polinômio f por $x^2 - 6x + 8$? $x + 1$

18. Elabore um polinômio $P(x)$ do 3º grau que seja divisível por $x - 1$, por $x + 1$ e também por $x^2 - 1$.
Resposta pessoal.

CAPÍTULO

17 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

No primeiro capítulo desta Unidade apresentamos uma situação envolvendo uma caixa de papelão com as medidas indicadas na figura a seguir:

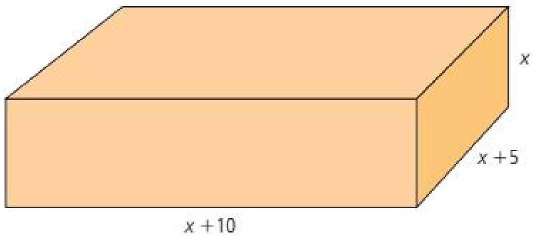


Figura: © DAE

Vamos considerar que as medidas acima estejam em centímetros e que essa caixa tenha de ser fabricada de tal modo que seu volume corresponda a 3000 cm³. Precisamos descobrir as medidas das arestas dessa caixa.

- Vimos que o volume dessa caixa pode ser representado pelo polinômio $V(x)$ tal que:

$V(x) = (x + 10) \cdot (x + 5) \cdot x$

$V(x) = (x + 10) \cdot (x^2 + 5x)$

$V(x) = x^3 + 5x^2 + 10x^2 + 50x$

$V(x) = x^3 + 15x^2 + 50x$

- Como esse volume deverá ser igual a 3000 cm³, temos:

$V(x) = 3\,000$

$x^3 + 15x^2 + 50x = 3\,000$

$x^3 + 15x^2 + 50x - 3\,000 = 0$ → Equação polinomial ou equação algébrica

Neste capítulo e no próximo estudaremos equações polinomiais.

Equação polinomial

Nos últimos anos do Ensino Fundamental você estudou equações polinomiais (ou equações algébricas) quando resolveu equações do 1º e do 2º graus, que são dois exemplos de equações polinomiais. Nosso estudo agora é ampliado.

Denomina-se equação polinomial ou algébrica toda equação que pode ser escrita na forma:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$)

em que os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos, a incógnita x assume valor nos complexos e n, grau da equação, é um número natural maior ou igual a 1.

Exemplo:

São denominadas de equações algébricas:

- $x^3 + 15x^2 + 50x - 3\,000 = 0 \rightarrow$ equação algébrica do 3º grau
- $5x^2 - 3x - 17 = 0 \rightarrow$ equação algébrica do 2º grau
- $(2 - i) \cdot x^4 + 3ix - 1 + 2i = 0 \rightarrow$ equação algébrica do 4º grau
- $0{,}3x^5 - 2{,}1x^3 + 7{,}6x^2 = 0 \rightarrow$ equação algébrica do 5º grau
- $-\dfrac{4}{7}x + 17 = 0 \rightarrow$ equação algébrica do 1º grau

Como nosso objetivo principal no estudo de equações algébricas está relacionado à obtenção de sua solução ou soluções, é importante compreendermos o que é raiz de uma equação e o que significa o conjunto solução.

Solução de uma equação:

Um número complexo α é raiz (ou solução) da equação algébrica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

se, e somente se,

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Exemplo:

Uma solução da equação $x^2 + 9 = 0$ é $x = 3i$, pois, substituindo x por $3i$, a igualdade é satisfeita:

$$x^2 + 9 = 0$$
$$\downarrow x = 3i$$
$$(3i)^2 + 9 = 0$$
$$9i^2 + 9 = 0$$
$$-9 + 9 = 0$$

Conjunto solução de uma equação

Denominamos conjunto solução (ou conjunto verdade) de uma equação algébrica o conjunto formado por todas as raízes da equação.

Exemplo:

Vamos resolver a equação $x^2 - 4x + 13 = 0$ no conjunto dos números complexos e escrever o conjunto solução:

- Utilizando a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2}$$
$$\downarrow \sqrt{-1} = i$$
$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3i \\ x = 2 - 3i \end{cases}$$

Portanto, como a equação é do 2º grau, admite duas soluções. Assim, $S = \{2 + 3i, 2 - 3i\}$.

Observações:

1. Resolvemos uma equação do 1º grau isolando a incógnita.

2. Uma equação do 2º grau pode ser resolvida utilizando a fórmula resolutiva conhecida como fórmula de Bhaskara.

3. Embora existam fórmulas resolutivas para as equações do 3º e 4º graus, elas não são abordadas no Ensino Médio.

4. Para uma equação algébrica do 5º grau ou de grau maior que 5, não existe uma fórmula resolutiva que permita obter as soluções.

Teorema fundamental da Álgebra e teorema da decomposição

Veremos como obter as raízes de equações de grau maior ou igual a três sem fórmulas resolutivas. Existem dois resultados fundamentais sobre esse estudo: o teorema fundamental da Álgebra e o teorema da decomposição.

O primeiro resultado considerado importante na história da Matemática é o chamado teorema fundamental da Álgebra. Esse teorema foi obtido por Carl F. Gauss quando ainda era um jovem talento de 20 anos de idade. Mais tarde, aos 70 anos, ele voltou a analisar esse seu resultado.

Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau x ($n \geqslant 1$) possui pelo menos uma raiz complexa.

Não demonstraremos aqui tal teorema. Note, entretanto, que o teorema não afirma quantas raízes admite uma equação algébrica de grau ***n***. Ele garante a existência de, pelo menos, uma raiz, mas nada podemos afirmar, pelo menos por enquanto, sobre quantas são, exatamente, as raízes de uma equação algébrica de grau ***n***.

Exemplo:

Conforme o teorema fundamental da álgebra, sabemos que a equação:

- $4x^6 - 4x^4 + 5x - 1 = 0$ admite pelo menos uma raíz complexa;

- $x^3 - 10x^2 + 9x + 13 = 0$ admite pelo menos uma raiz complexa.

O teorema a seguir fornece mais informações sobre a quantidade de raízes de uma equação algébrica de grau n.

Todo polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $n \geqslant 1$ e $a_n \neq 0$, pode ser decomposto num produto de n fatores do 1º grau, isto é:

$P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$

A demonstração desse resultado é feita com o auxílio do teorema fundamental da Álgebra. Para isso, temos de demonstrar que, dado um polinômio $P(x)$ de grau $n \geqslant 1$, podemos expressá-lo com o produto de $\boldsymbol{n}$ fatores do 1º grau. Vejamos!

Demonstração:

- Considerando o polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2x^2 + a_1x + a_0$, de grau $n \geqslant 1$, pelo teorema fundamental da Álgebra, existe um número complexo x_1 tal que $P(x_1) = 0$.
- Pelo teorema de D'Alembert, temos que, se $P(x_1) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $(x - x_1)$. Assim, existirá um polinômio $Q_1(x)$ tal que:

  $P(x) = (x - x_1) \cdot Q_1(x)$ (I)
- O polinômio $Q_1(x)$ é de grau $n - 1$ (é o quociente da divisão de $P(x)$ por $x - x_1$). Aplicando a esse polinômio o teorema fundamental da Álgebra, existirá um número x_2 tal que $Q_1(x_2) = 0$.
- Novamente, pelo teorema de D'Alembert, temos que, se $Q_1(x_2) = 0$, então $Q_1(x)$ é divisível por $(x - x_2)$. Assim, existirá um polinômio $Q_2(x)$ tal que:

  $Q_1(x) = (x - x_2) \cdot Q_2(x)$ (II)
- Substituindo (II) em (I), temos:

  $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$
- Procedendo do mesmo modo como fizemos até aqui, chegaremos a:

  $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (\dots) \cdot (x - x_n) \cdot Q_n(x)$

Sendo Q_n uma constante e a_n o coeficiente de x_n, concluímos, pela identidade de polinômios, que $Q_n = a_n$.

Portanto, teremos:

$P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (\dots) \cdot (x - x_n)$

Assim, demonstramos que todo polinômio de grau $n \geqslant 1$ pode ser decomposto em $\boldsymbol{n}$ fatores do 1º grau. Se igualarmos o polinômio $P(x)$ a zero, teremos:

$P(x) = 0$

$a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (\dots) \cdot (x - x_n) = 0$

Sendo assim, toda equação polinomial de grau $\boldsymbol{n}$ tem exatamente $\boldsymbol{n}$ raízes complexas. Na igualdade acima, as raízes são $x_1, x_2, x_3, (\dots), x_n$.

Observação:

A forma fatorada do polinômio $P(x)$ permite-nos afirmar que o conjunto solução da equação polinomial $P(x)$, de grau n, tem no máximo n elementos. Afirmamos isso porque não sabemos se os números complexos $x_1, x_2, x_3, (\dots), x_n$ são todos distintos dois a dois.

Exemplo:

Vamos considerar o polinômio $P(x) = 3x^3 + 9x^2 - 18x - 24$, cujas raízes são $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 2$. Podemos, pelo teorema da decomposição, escrever:

$P(x) = 3x^3 + 9x^2 - 18x - 24$

$P(x) = 3(x + 4) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \rightarrow$ (forma fatorada do polinômio)

Observações:

1. A forma fatorada de uma equação polinomial, mesmo que não contenha todos os fatores do 1º grau, auxilia na busca das soluções da equação.

2. Sendo assim, diante de uma equação algébrica, procure utilizar a fatoração. Lembrando que, se um produto de dois ou mais fatores é igual a zero, necessariamente pelo menos um deles é igual a zero. Esse é um procedimento que pode ser utilizado para a busca de soluções de uma equação algébrica.

Resposta no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Quais são as soluções da equação algébrica $(x - 2) \cdot (x^2 - 9) = 0$?

Exemplo:

Vamos resolver a equação polinomial $x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0$ procedendo com sua fatoração.

- Não há um mesmo termo em comum no primeiro membro. Entretanto, utilizando a fatoração por agrupamento, podemos fatorar os dois primeiros termos e também os dois últimos termos, isto é:

  $x^2 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (x - 1) = 0$

  $\downarrow$ fatoramos o termo $x - 1$

  $(x - 1) \cdot (x^2 + 5) = 0$

- Como o produto é zero, temos:

  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

  ou

  $$x^2 + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{-5} = +\sqrt{5 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \sqrt{5} \cdot i \\ x = -\sqrt{-5} = -\sqrt{5 \cdot (-1)} \Rightarrow x = -\sqrt{5} \cdot i \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \{1, \sqrt{5} \cdot i, -\sqrt{5} \cdot i\}$.

Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini

No exemplo anterior mostramos que o procedimento de fatorar uma equação polinomial auxilia a obtenção das raízes. Entretanto, nem sempre isso é tão simples. Vamos relacionar agora o procedimento para o cálculo do resto da divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau com a resolução de equações polinomiais. Faremos isso considerando um exemplo.

Exemplo:

Vamos admitir que $x = 2$ é uma das raízes da equação $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$. Considerando o polinômio correspondente $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, temos:

- Se $x = 2$ é raiz da equação (ou do polinômio), então $P(2) = 0$. Pelo teorema de D'Alembert ou pelo teorema do resto, sabemos que o polinômio $P(x)$ é divisível por $x - 2$, isto é, o resto é zero.
- Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	1	1	−4	−4
	1	3	2	0

quociente: $x^2 + 3x + 2$ resto: 0

- Podemos, então, reescrever o polinômio $P(x)$ da seguinte forma:

  $P(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 3x + 2)$

Analogamente, a equação polinomial correspondente poderá ser escrita como:

$(x - 2) \cdot (x^2 + 3x + 2) = 0$

$\downarrow$ produto igual a zero

$x - 2 = 0 \Rightarrow x - 2$

ou

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \{2, -1, -2\}$.

Observação:

Note que, pelo exemplo, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, conseguimos, a partir de uma equação do 3º grau e conhecendo uma de suas raízes, "abaixar" o grau da equação, recaindo em uma equação do 2º grau.

Exemplo:

Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obteremos todas as raízes da equação $x^3 - 8x^2 + 22x - 20 = 0$, considerando que uma de suas raízes é igual a 2.

- Vamos "abaixar" o grau da equação pelo dispositivo prático, considerando que $x = 2$ é uma raiz:

2	1	−8	22	−20
	1	−6	10	0

$1x^2 - 6x + 10$

- As duas raízes que estão faltando podem ser obtidas resolvendo a equação:

  $x^2 - 6x + 10 = 0$

  $\downarrow$ fórmula resolutiva

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  $$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

  $$x = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2}$$

  $$x = \frac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + i \\ x = 3 - i \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução da equação dada é $S = \{2, 3 + i, 3 - i\}$.

Multiplicidade de uma raiz

Pelo teorema da decomposição, vimos que um polinômio P(x) de grau $n \geqslant 1$ pode ser fatorado como produto de ***n*** fatores do 1º grau. Entretanto, isso não significa que esses fatores são todos distintos dois a dois. Em relação às raízes da correspondente equação polinomial, isso também não significa que as ***n*** raízes sejam distintas.

Exemplo:

Vamos observar as raízes da equação $P(x) = 0$, sendo $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 5) \cdot (x + 5)$, e o conjunto solução da equação.

- Como P(x) está na forma fatorada, é imediato dizer que as raízes são:
  $x = 1, x = 1, x = 1, x = -5, x = -5$
- Nesse caso, podemos dizer que:
  $x = 1 \rightarrow$ é uma raiz de multiplicidade 3 (ou raiz tripla)
  $x = -5 \rightarrow$ é uma raiz de multiplicidade 2 (ou raiz dupla)
- Também podemos reescrever o polinômio e a equação correspondente da seguinte maneira:
  $P(x) = (x - 1)^3 \cdot (x + 5)^2$ e $(x - 1)^3 \cdot (x + 5)^2 = 0$

Os expoentes 3 e 2, na forma fatorada, indicam que a equação tem 3 fatores iguais a $(x - 1)$ e 2 fatores iguais a $(x + 5)$, isto é, a equação possui uma raiz tripla e uma raiz dupla, respectivamente.

> Se $x = \alpha$ é raiz de multiplicidade m ($m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$) de uma equação $P(x) = 0$, então:
> $P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$, com $Q(\alpha) \neq 0$

Observações:

1. Considerando que $P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$, com $Q(\alpha) \neq 0$, concluímos que P(x) é divisível por $(x - \alpha)^m$.

2. Conforme o valor de m, temos:

- $m = 1 \rightarrow \alpha$ é uma raiz simples;
- $m = 2 \rightarrow \alpha$ é uma raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla);
- $m = 3 \rightarrow \alpha$ é uma raiz de multiplicidade 3 (raiz tripla).

  ⋮

Exemplo:

Vamos verificar, a partir do dispositivo prático de Briot-Ruffini, o grau de multiplicidade da raiz $x = 1$ da equação $2x^5 - 7x^4 + 22x^2 - 26x + 9 = 0$.

- Enquanto resultar zero abaixo do termo independente de x, colocamos o número 1 no canto à esquerda no dispositivo prático:

1	2	−7	0	22	−26	9
1	2	−5	−5	17	−9	0
1	2	−3	−8	9	0	
1	2	−1	−9	0		
	2	1	−8			

diferente de zero

Dessa forma, dizemos que $x = 1$ é uma raiz de multiplicidade 3.

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Quantas raízes complexas admite uma equação do 5º grau?
2. O conjunto solução de uma equação do 5º grau é formado por quantos elementos?
3. As equações $x^3 - 1 = 0$ e $(x - 1)^3 = 0$ apresentam alguma solução em comum? E os conjuntos formados pelas soluções são iguais?

Exercícios resolvidos

1. Com relação à equação $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$:

a) verifique que os números 1 e −1 são raízes da equação;
b) escreva o conjunto solução da equação.

a) $1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$
$(-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 6 = 0$

b)

1	1	−5	5	5	−6
−1	1	−4	1	6	0
	1	−5	6	0	

$x^2 - 5x + 6 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = 3$
$S = \{-1; 1; 2; 3\}$

2. Obtenha os valores de m e n de modo que 2 seja uma raiz dupla da equação $x^3 - x^2 + m \cdot x + n = 0$.

2	1	−1	m	n
2	1	1	$2 + m$	$4 + 2m + n$
	1	3	$8 + m$	0

$$\begin{cases} 4 + 2m + n = 0 \\ 8 + m = 0 \end{cases} \therefore m = -8 \text{ e } n = 12$$

3. Escreva a equação $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ como um produto de fatores de 1º grau e determine seu conjunto solução.

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$
$x^2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (x - 1) = 0$
$(x - 1) \cdot (x^2 + 4) = 0$
$(x - 1) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i) = 0$
$S = \{1; 2i; -2i\}$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Determine o conjunto solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Em seguida, escreva essa equação na forma fatorada. $S = \{2; 3\}$; $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$

2. Sabe-se que o número 2 é uma das raízes da equação $x^2 + a \cdot x - 10 = 0$.

a) Determine o valor de a. $a = 3$

b) Escreva o conjunto solução da equação. $S = \{-5; 2\}$

c) Reescreva a equação, expressando o primeiro membro na forma fatorada. $(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

3. Obtenha as raízes complexas da equação $x^2 - 5ix + 6 = 0$, sendo $i = \sqrt{-1}$. $6i$ ou $-i$

4. Determine o valor de m de modo que o número 2 seja raiz da equação $x^3 - (m + 2) \cdot x^2 + m \cdot x + m + 3 = 0$. $m = 3$

5. Considere a equação polinomial $(x - 1)^2 \cdot (x + 2)^5 \cdot (x - 3) \cdot (x + 7)^3 = 0$. Assinale, em seu caderno, V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. O grau da equação é 10. F

II. 3 é uma raiz de multiplicidade 1, ou seja, uma raiz simples. V

III. 2 é uma raiz de multiplicidade 5. F

IV. As raízes da equação são todas números primos. F

V. O conjunto solução da equação é formado por números positivos e negativos. V

6. Escreva o conjunto solução da equação $(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$. Em seguida, responda:

a) Qual é o número de raízes da equação? 4

b) Qual é o número de elementos do conjunto solução da equação? 3

c) O número de raízes de uma equação é sempre igual ao número de elementos do conjunto solução? Não.

7. Vamos considerar duas equações polinomiais em x:

Equação I: $(x - 2i)^2 \cdot (x + 2i)^2 = 0$

Equação II: $(x - 2i) \cdot (x + 2i) = 0$

Responda:

a) As duas equações são de mesmo grau? Não.

b) As duas equações têm o mesmo número de raízes? Não.

c) As duas equações têm o mesmo número de elementos no conjunto solução? Sim.

8. Uma das raízes da equação $6x^3 + 7x^2 - 14x - 15 = 0$ é -1.

a) Qual é o resto da divisão do polinômio $6x^3 + 7x^2 - 14x - 15$ por $x + 1$? zero

b) Qual é o conjunto solução da equação $6x^3 + 7x^2 - 14x - 15 = 0$? $S = \left\{-1; -\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

9. Na figura a seguir está representada parte do gráfico de uma função polinomial definida por $P(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x - 6$.

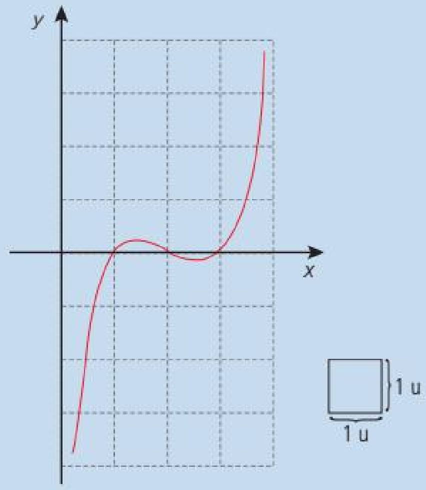


Figura: © DAE

a) Qual é o conjunto solução da equação $P(x) = 0$? $S = \{1; 2; 3\}$

b) Quais são os valores de a e b? $a = -6$ e $b = 11$

c) Qual é o valor de $P(4)$? 6

10. Considere duas funções polinomiais f e g, que satisfazem a relação $f(x) = g(x) + x^2 + 3x + 2$ qualquer que seja o valor real de x. Sabendo que 2 é raiz da equação $f(x) = 0$ e -1 é raiz da equação $g(x) = 0$, calcule:

a) $f(2)$; 0

b) $g(-1)$; 0

c) $g(2) + f(-1)$. -12

11. Qual é a multiplicidade da raiz 2 na equação $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16 = 0$? Qual é o conjunto solução dessa equação? O número 2 é uma raiz de multiplicidade 4 e o conjunto solução da equação é $S = \{-1; 2\}$.

12. A equação polinomial $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ pode ser escrita como $(x - 1)^p \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) = 0$.

a) Qual é o valor de p? 3

b) Quais são os valores de a, b e c? $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.

c) Qual é o número de raízes reais da equação $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$? São 3 soluções reais.

13. Uma função polinomial é dada por $p(x) = \begin{vmatrix} x & 2x & -6 \\ 1 & x & x \\ \frac{1}{2} & 1 & x \end{vmatrix}$.

Respostas no Manual do Professor.

Sabe-se que 2 é raiz da equação $p(x) = 0$.

a) Escreva a equação $p(x) = 0$ na forma polinomial.

b) Escreva o conjunto solução $p(x) = 0$.

14. Sejam as seguintes equações polinomiais na incógnita x:

Equação I: $(x - 2)^3 = 0$ Equação II: $x^3 - 8 = 0$

Sobre essas equações, indique, em seu caderno, com V ou F se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, respectivamente:

a) As duas equações apresentam três soluções. V

b) Na equação I as três raízes são iguais. V

c) Na equação II as três raízes são diferentes. V

d) O número 2 é solução das duas equações. V

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

A história das equações polinomiais é muito antiga. Tem-se conhecimento de que, na Babilônia, cerca de 1800 a.C., alguns métodos de resolução de equações do 2º grau já eram conhecidos. Assim, o problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica, isto é, de um polinômio, é alvo de estudo de muitas pessoas há muito tempo.

As equações lineares são correspondentes às equações do primeiro grau, ou seja, da forma $ax + b = 0$. Segundo registro de historiadores, o primeiro povo a lidar com essas equações foram os egípcios. No Papiro de Ahmes, também conhecido como o Papiro de Rhind, adquirido pelo escocês Henry Rhind, em 1868, numa cidade às margens do Rio Nilo, consta que os egípcios não se referiam a problemas com objetos concretos, mas já tratavam de incógnitas em seus problemas. Um exemplo disso é o problema 24 do Papiro de Ahmes, que pede o valor de *aha*, se "*aha e um sétimo de aha é 19*". Escrevendo isso na forma moderna, temos:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

As **equações quadráticas** são as equações de grau 2, escritas na forma geral:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aritmeticamente, essas equações foram resolvidas pelos egípcios. Euclides e seus seguidores resolveram as geometricamente e algebricamente solucionadas pelos hindus. O matemático e escritor árabe Al-Khwarizmi (780-850) deu regras aritméticas, as quais demonstra por meios geométricos essas equações. Foi através desse escritor que os árabes introduziram o nome Álgebra.

Os indianos trataram as quadráticas algebricamente. Sridhara (750 -?) parece ter sido o primeiro a estabelecer o "método hindu", citado por Bhaskara (1114-1185) na seguinte forma: "*Multiplique ambos os lados da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente do] quadrado e adicione a eles um número igual ao quadrado da original [coeficiente da] quantidade incógnita. [Extraia a raiz]*".

Utilizando a simbologia moderna, temos que:

Dado $ax^2 + bx + c = 0$, temos, inicialmente, $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ e então $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$, portanto, $(2x + b)^2 = b^2 - 4 \cdot ac$. Neste caso, a raiz negativa era deixada de lado.

Omar Khayyam (1048-1131) tem uma regra para a equação do tipo $x^2 + px = q$.

Mais tarde, em 1500, Viète realizou progressos nos métodos algébricos, isto é, reduzia uma quadrática geral a uma quadrática pura usando uma sutil substituição. Assim:

$x^2 + 2ax = b$, fazendo $x = u + z$ e após $z = -a$, a equação se transforma em $u = \sqrt{a^2+b}$, portanto $x = -a + \sqrt{a^2+b}$.

Harriot (1560-1621) mostra soluções por fatorização, e, entre os métodos mais aplicados atualmente, citamos aqueles em que o discriminante é utilizado, o qual foi introduzido por Euler (1750) e Bezout (1775), e mais tarde aprimorado por Sylvestre (1840) e Hesse (1844).

As **equações cúbicas** são as equações de grau 3, isto é, da forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

As cúbicas apresentam uma história muito fascinante, pois são equações que apresentavam certo grau de dificuldade naquela época. Temos notícia de que Arquimedes (225 a.C.) manipulou uma equação cúbica vinda de um problema geométrico. Omar Khayyam, poeta e algebrista, classificou treze casos de cúbicas que ele resolveu. Uma característica que marcou esse período foram os debates realizados entre grandes matemáticos.

Fibonacci foi desafiado em debate a resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Apesar de existirem vários métodos para resolver uma equação do 3º grau, a história não responde à pergunta:

"*Quem propôs a solução da equação do terceiro grau?*".

No começo do século XVI, o matemático italiano de Bolonha, Scipione Del Ferro, resolveu cúbicas da forma $x^3 + ax = b$. Del Ferro revela o segredo desse método de resolução a um estudante, chamado Antônio Maria Flor. Antônio, vinte anos mais tarde, realiza um debate com outro italiano de nome Tartaglia. Cada um deles enviou 30 problemas ao outro, e aquele que resolvesse o maior número de problemas em 50 dias venceria o duelo. Tartaglia direcionou seus esforços às cúbicas que não continham o termo do primeiro grau. Resolvendo esse caso, quando faltava menos de duas semanas para o debate, ele descobriu a solução da cúbica em que o termo do segundo grau não existia. Assim, sabendo desses dois métodos, solucionou todos os problemas em menos de duas horas, derrotando seu oponente.

Cardano pediu o esquema a Tartaglia, como conta o historiador Bell. Tartaglia, após muita insistência, fornece o esquema a Cardano sob promessa de manter segredo. Embora exista muita dúvida quanto à autoria dessa fórmula, Cardano sem dúvida contribuiu significativamente para o desenvolvimento da teoria das equações algébricas.

ANDRADE, Celia Maria Finuzzi de. *Solução de equações algébricas*: um apanhado histórico. Boletim da SBMAC, 06/1991,v. 2, n. 2, série II. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97159/Marcelo_Moro.PDF?sequence51>. Acesso em: 26 mai. 2016

QUESTÕES

Resolva os exercícios no caderno.

De acordo com o texto, responda:

1. Segundo a história, qual foi o primeiro povo a lidar com equações lineares?
2. Qual foi o matemático que desenvolveu regras aritméticas para as equações quadráticas?
3. Quais foram os fatores que levaram Tartaglia a vencer a disputa com Antônio Maria Flor sobre as equações cúbicas da forma $x^3 + ax = b$?

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Vimos que existem equações algébricas em que podemos ter raiz simples, como também podemos ter raiz de multiplicidade 2, 3 e assim por diante. Como podemos interpretar o gráfico das funções polinomiais correspondentes?

O gráfico abaixo foi feito numa folha quadriculada e representa uma função polinomial em que o número zero é uma raiz de multiplicidade 2, enquanto o número -3 é raiz simples. Você poderá novamente explorar a ferramenta para construção de gráficos no computador para verificar gráficos de funções polinomiais com raízes múltiplas.

1. Construa o gráfico da função polinomial $f(x) = (x - 1)^2$. Em seguida, responda: quais são as raízes da equação $f(x) = 0$?

2. Construa o gráfico da função polinomial $f(x) = x^2 \cdot (x - 1)$. Depois, responda: quais são as raízes da equação $f(x) = 0$?

3. Construa o gráfico da função polinomial $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)^3$. Depois, responda: quais são as raízes da equação $f(x) = 0$?

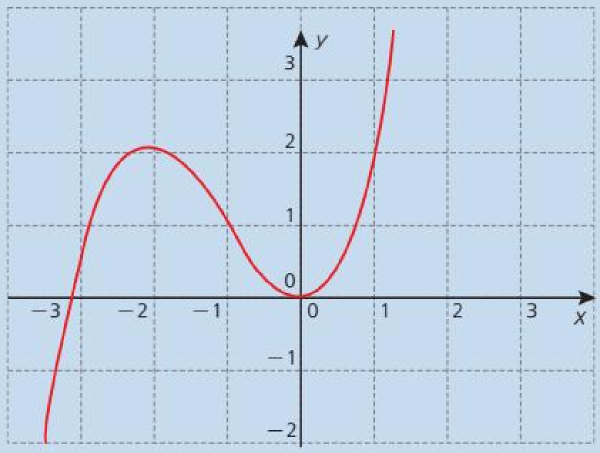
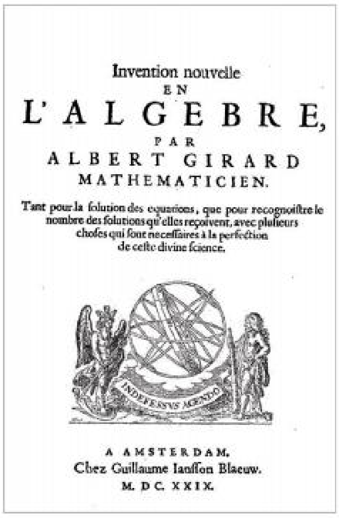


Gráfico: © DAE

CAPÍTULO 18

TEOREMAS E RELAÇÕES ENTRE RAÍZES



Coleção Particular

Capa de um dos trabalhos de Girard sobre Álgebra.

Como o próprio título do capítulo sugere, estudaremos alguns resultados importantes dados na forma de teoremas que nos permitirão "pesquisar" um pouco mais sobre as soluções de uma equação polinomial.

Iniciamos abordando a existência de relações entre as raízes de uma equação polinomial e os correspondentes coeficientes. São as chamadas **relações de Girard**. Algumas dessas relações normalmente são vistas na ocasião do estudo de equações do 2º grau ainda no Ensino Fundamental. Outras são ampliações feitas para equações de grau maior que 2.

Albert Girard (1595-1632) viveu a maior parte de sua vida na Holanda. Além das relações algébricas que apresentamos a seguir, também se interessou por Geometria e Trigonometria. Em 1626, publicou um trabalho que contém o mais antigo uso das abreviações de seno, tangente e secante que utilizamos atualmente.

Na ilustração ao lado, temos a capa de um trabalho de Girard sobre Álgebra.

Relações de Girard

A seguir, apresentaremos e demonstraremos algumas das relações entre as raízes de uma equação algébrica e seus coeficientes.

Equações do 2º grau

Dada uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, sendo x_1 e x_2 suas raízes, temos, pelo teorema da decomposição:

$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$\downarrow$ Dividindo membro a membro por a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

$\downarrow$ Conforme identidade de polinômios

$$\begin{cases} \text{coeficiente de } x: \dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \text{termo independente de } x: \dfrac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Sendo x_1 e x_2 as raízes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, são válidas as relações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \rightarrow \text{soma das raízes} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \rightarrow \text{produto das raízes} \end{cases}$$

Equações do 3º grau

Dada uma equação do 3º grau na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$), sendo x_1, x_2 e x_3 suas raízes, temos, pelo teorema da decomposição:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

↓ Dividindo membro a membro por a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

↓ Desenvolvendo o segundo membro (omitimos algumas passagens)

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

↓ Conforme identidade de polinômios

$$\begin{cases} \text{coeficiente de } x^2: \dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ \text{coeficiente de } x: \dfrac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} \\ \text{termo independente de } x: \dfrac{d}{a} = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes de uma equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$), são válidas as relações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \rightarrow \text{soma das raízes} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} \rightarrow \text{soma dos produtos das raízes duas a duas} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \rightarrow \text{produto das raízes} \end{cases}$$

Analogamente podemos estabelecer as relações para equações do 4º grau em diante. Assim, para uma equação de grau n da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-2}x_{n-1}x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Quantas relações entre raízes e coeficientes podem ser estabelecidas, conforme Girard, para uma equação do 4º grau?
2. E para uma equação de grau n, sendo $n \geqslant 2$?

A seguir, observe como podemos utilizar as relações de Girard.

Exemplo:

Vamos considerar que α, β e γ são as raízes da equação $2x^3 + 4x^2 - 3x - 10 = 0$. Podemos, sem resolver a equação, determinar os valores a seguir.

a) $\alpha + \beta + \gamma$

b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

c) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

d) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

- Observe que os três primeiros valores podem ser determinados imediatamente a partir das relações de Girard para uma equação do 3º grau, ou seja:

a) $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{4}{2} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = -2$

b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{-3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{3}{2}$

c) $\alpha\beta\gamma = -\frac{-10}{2} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 5$

- Para calcular a soma dos inversos das raízes, conforme último item, podemos agrupar essas frações numa só, obtendo assim o quociente entre duas das relações de Girard para uma equação do 3º grau:

d) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{-\frac{3}{2}}{5} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{3}{10}$$

Exemplo:

Vamos resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, sabendo que as três raízes estão em progressão aritmética.

- Se as três raízes estão em P.A., utilizamos o seguinte artifício: $x_1 = \alpha - r$, $x_2 = \alpha$ e $x_3 = \alpha + r$. Considerando a primeira relação de Girard:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$\alpha - r + \alpha + \alpha + r = -\frac{-9}{1}$

$3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ (3 é uma raiz)

- Como conhecemos uma raiz, vamos utilizar o dispositivo prático para "abaixar" o grau da equação:

3	1	−9	23	−15
	1	−6	5	0

$\underbrace{1 \quad -6 \quad 5}_{1x^2 - 6x + 5}$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\downarrow$ Resolvendo a equação pela fórmula resolutiva

$x = 1$ ou $x = 5$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{1, 3, 5\}$.

Exemplo:

Vamos resolver a equação $x^3 - 3x - 2 = 0$ sabendo que ela admite uma raiz de multiplicidade dois.

- Consideremos que as três raízes dessa equação são:

$x_1 = x_2 = \alpha$ e $x_3 = \beta$

- Utilizando a primeira relação de Girard (soma das três raízes), temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$\alpha + \alpha + \beta = -\frac{0}{1}$

$2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha$

- Substituindo na terceira relação de Girard (poderia ser também na segunda relação), temos:

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$

$\alpha \cdot \alpha \cdot \beta = -\frac{-2}{1}$

$\downarrow \beta = -2\alpha$

$\alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = 2$

$\alpha^3 = -1$

$\alpha = -1 \Rightarrow \beta = 2$

Portanto, o conjunto solução da equação algébrica é $S = \{-1, 2\}$. Note que -1 é uma raiz dupla.

Exercícios resolvidos

1. Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a zero.

Sejam r, s e t as raízes da equação $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, de modo que $s + t = 0$. Temos que:

$r + s + t = -\frac{-5}{1} \Rightarrow r + 0 = 5 \therefore r = 5$.

Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

5	1	−5	−4	20
	1	0	−4	0

$x^2 - 4 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = -2$

Logo:

$S = \{-2; 2; 5\}$

2. Determine o conjunto solução da equação $x^3 + 9x^2 - 54x - 216 = 0$, sabendo que as raízes estão em progressão geométrica.

Sejam $\frac{m}{q}$, m e mq (com q sendo a razão da PG) as raízes da equação $x^3 + 9x^2 - 54x - 216 = 0$, temos:

$\frac{m}{q} \cdot m \cdot mq = -\frac{-216}{1} \Rightarrow m^3 = 216 \therefore m = 6$

Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

6	1	9	−54	−216
	1	15	36	0

$x^2 + 15x + 36 = 0 \therefore x = -3$ ou $x = -12$

Logo,

$S = \{-12; -3; 6\}$

3. As dimensões de um paralelepípedo retângulo, em metros, são dadas pelas raízes da equação $x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$.

a) Qual é a área total desse paralelepípedo?

b) Qual é o volume desse paralelepípedo?

Sejam a, b e c as dimensões do paralelepípedo, temos:

a) $S_{TOTAL} = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot \frac{41}{1} = 82$ u.a.

b) $V = abc = -\frac{(-42)}{1} = 42$ u.v.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere a equação $2x^3 - 7x^2 + 5x + 2 = 0$. Sendo α, β e γ suas raízes, calcule:

a) $\alpha + \beta + \gamma$ $\frac{7}{2}$

b) $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ $\frac{5}{2}$

c) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ -1

2. Qual é a soma e o produto das raízes da equação $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$?

A soma das raízes é igual a 2 e o produto é igual a 5.

3. Sejam m e n as raízes de uma equação de grau 2, escreva matematicamente cada uma das sentenças a seguir, como no exemplo.

Respostas no Manual do Professor.

Soma dos inversos das raízes: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

a) Inverso da soma das raízes.

b) Soma dos quadrados das raízes.

c) Quadrado da soma das raízes.

d) Inverso da soma dos quadrados das raízes.

e) Soma dos inversos dos quadrados das raízes.

4. Se α e β são as raízes da equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, calcule:

Respostas no Manual do Professor.

a) $\alpha + \beta$

b) $\alpha \cdot \beta$

c) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

d) $\alpha^2 + \beta^2$

5. A soma dos inversos das raízes da equação $x^2 - m \cdot x + 96 = 0$ é igual a $\frac{5}{24}$.

a) Qual é o valor de m? $m = 20$

b) Quais são as raízes da equação? 12 ou 8

6. Considere a equação $x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$. Sejam α, β e γ as raízes dessa equação, calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)}{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)}.$$ $E = 1$

7. Sabe-se que a equação $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$ admite duas soluções imaginárias: $x = 3i$ e $x = -3i$.

Respostas no Manual do Professor.

a) Utilizando a primeira relação de Girard para a equação do 3º grau, obtenha a raiz que está faltando.

b) O item anterior poderia ser resolvido utilizando a terceira relação de Girard? Justifique.

8. Se os números 2, 3 e 5 são as raízes da equação $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, determine os valores de a, b e c.

$a = -10$, $b = 31$ e $c = -30$

9. Sabe-se que as raízes da equação $x^3 - 12x^2 + k \cdot x - 48 = 0$ formam uma progressão aritmética.

a) Qual é o conjunto solução da equação? $S = \{2; 4; 6\}$

b) Qual é o valor de k? $k = 44$

10. Uma das raízes da equação $x^3 - 6x^2 + m \cdot x + 30 = 0$ é igual à soma das outras duas.

a) Qual é o valor de m? $m = -1$

b) Escreva o conjunto solução da equação. $S = \{-2; 3; 5\}$

11. As raízes da equação $x^3 - 13x^2 + 39x - 27 = 0$ formam uma progressão geométrica.

a) Qual é o conjunto solução da equação? $S = \{1; 3; 9\}$

b) Qual é a razão da progressão geométrica crescente?

A razão da progressão geométrica crescente é igual a 3.

12. Os coeficientes α, β, γ e λ da função polinomial f, definida por $f(x) = x^4 + \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \lambda$, são números inteiros. As raízes da equação $f(x) = 0$ são inteiras, sendo que duas são pares e duas são ímpares. Descubra quantos coeficientes são pares e quantos coeficientes são ímpares. A equação apresenta 2 coeficientes ímpares e 3 coeficientes pares.

Teorema das raízes imaginárias

Você já deve ter observado que algumas equações admitem raízes imaginárias (complexas não reais). Apenas para exemplificar, vamos considerar dois exemplos de equações que apresentam raízes imaginárias.

Exemplo:

Vamos determinar as raízes das seguintes equações do 2º grau:

a) $2x^2 + 8 = 0$

b) $x^2 + (2 - i)x = 0$

A equação do item **a** admite duas raízes imaginárias conjugadas que podem ser obtidas de forma imediata:

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8$$

$$x^2 = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{-4} = +\sqrt{4 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 2i \\ x = -\sqrt{-4} = -\sqrt{4 \cdot (-1)} \Rightarrow x = -2i \end{cases}$$

A equação do item **b** admite apenas uma raiz imaginária, isto é:

$$x^2 + (2 - i)x = 0$$

$$x \cdot [x + (2 - i)] = 0$$

$$x \cdot (x + 2 - i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 + i \end{cases}$$

O teorema que apresentaremos e demonstraremos a seguir permite conhecer um pouco mais a respeito das raízes de uma equação polinomial. Ele é conhecido como teorema das **raízes complexas**, mas aquelas que não são reais. Optamos por denominá-lo simplesmente **teorema das raízes imaginárias**.

Se um número complexo $z = a + bi$ (com a, $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$) é raiz de uma equação algébrica com todos os coeficientes reais e de grau $n > 1$, então o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Explique:

Por que a equação apresentada anteriormente no item **a** está em conformidade com o teorema, isto é, apresenta duas raízes imaginárias conjugadas, enquanto a equação mostrada no item **b** não apresenta duas raízes imaginárias?

A demonstração do teorema apresentado utiliza propriedades do conjugado de um número complexo.

- Vamos considerar o número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ e a equação polinomial com todos os coeficientes reais:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- Se o número complexo z é raiz dessa equação, então temos:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

- Membro a membro, nessa igualdade, tomamos os conjugados, ou seja:

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \overline{0}$$

No primeiro membro, conforme propriedade, o conjugado de uma soma é igual à soma dos conjugados. Já no segundo membro, o conjugado de zero é o próprio zero:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

- Como o conjugado de um produto é o produto dos conjugados, podemos escrever:

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}} \cdot \overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0$$

- O conjugado de qualquer número real é o próprio número real. Assim, como todos os coeficientes da equação são reais, temos:

$$a_n \cdot \overline{z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \overline{z^{n-2}} + \ldots + a_2 \cdot \overline{z^2} + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0$$

- Sendo o produto de fatores iguais uma potência natural, concluímos que o conjugado de uma potência será a potência do conjugado. Dessa forma, obtemos:

$$a_n \cdot (\overline{z})^n + a_{n-1} \cdot (\overline{z})^{n-1} + a_{n-2} \cdot (\overline{z})^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot (\overline{z})^2 + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0$$

Portanto, dessa última igualdade, concluímos que o número complexo $\overline{z}$ é raiz da equação polinomial.

Observações:

1. O teorema anterior é válido quando os coeficientes da equação polinomial são todos reais.

2. Quando um número imaginário $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ é raiz de multiplicidade $\boldsymbol{m}$ de uma equação polinomial com todos os coeficientes reais, o número imaginário $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação e com a mesma multiplicidade.

3. Como a ocorrência de raízes imaginárias, numa equação polinomial com todos os coeficientes reais, ocorre aos pares, temos uma consequência: toda equação de grau ímpar, com todos os coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz real.

Exemplos:

1. Considere que uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raízes os números 2, -5, $2 + i$ e $4 - 7i$. Qual é o grau dessa equação?

- Como os coeficientes são todos reais, a equação admite, conforme teorema das raízes imaginárias e os dados acima, as seguintes raízes:

  $x_1 = 2$

  $x_2 = -5$

  $x_3 = 2 + i \Rightarrow x_4 = 2 - i$ (imaginária conjugada)

  $x_5 = 4 - 7i \Rightarrow x_6 = 4 + 7i$ (imaginária conjugada)

  Encontramos, portanto, 6 raízes. Dessa forma podemos dizer que a equação polinomial correspondente será no mínimo do 6º grau. Note, não podemos afirmar com certeza qual é o grau exato da equação, pois não sabemos se existem outras raízes e, além disso, nada sabemos sobre o grau de multiplicidade das raízes que foram dadas.

2. Vamos obter todas as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$, considerando que $x = i$ é uma de suas raízes.

- Essa equação pode ser resolvida a partir da informação dada, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, considerando que conhecemos duas raízes (a raiz imaginária e, pelo teorema, a sua conjugada):

i	1	2	1	2
$-i$	1	$2 + i$	$2i$	0
	1	2	0	

$\underbrace{1 \quad 2}_{1x + 2}$

- Recaindo na equação do 1º grau, temos que $x = -2$ também é raiz. Portanto, o conjunto solução é $S = \{i, -i, -2\}$.

- Outra maneira de resolver seria considerando o teorema das raízes imaginárias e a primeira relação de Girard, ou seja:

  $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$

  $i + (-i) + x_3 = -\dfrac{2}{1}$

  $0 + x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -2$

- Um terceiro procedimento seria observando que, se i e $-i$ são raízes, temos que o polinômio correspondente $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ é divisível por $(x - i) \cdot (x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$. Utilizando a divisão de polinômios, pelo método da chave, temos:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & +x & +2 & x^2 + 1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & & -x & & x + 2 \\
\cline{1-4}
 & 2x^2 & & +2 & \\
 & -2x^2 & & -2 & \\
\cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

- Logo, considerando que o dividendo é o divisor multiplicado pelo quociente (o resto é zero), temos:

$$P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x + 2)$$

  Igualando a zero, resolvemos a equação correspondente:

$$(x^2 + 1) \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

3. Utilizando o teorema das raízes imaginárias e as relações de Girard, vamos determinar os coeficientes reais m, n e p da equação $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, considerando que os números $2 - i$ e 1 são suas raízes.

- Como os coeficientes são reais, se $2 - i$ é raiz, então $2 + i$ também é raiz. Dessa forma, conforme relações de Girard, temos:

  1ª relação:

  $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{m}{1}$

  $2 - i + 2 + i + 1 = m \Rightarrow m = -5$

  2ª relação:

  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{n}{1}$

  $(2 - i) \cdot (2 + i) + (2 - i) \cdot 1 + (2 + i) \cdot 1 = n$

  $4 - i^2 + 2 - i + 2 + i = n \Rightarrow n = 9$

  3ª relação:

  $x_1x_2x_3 = -\dfrac{p}{1}$

  $(2 - i) \cdot (2 + i) \cdot 1 = -p$

  $4 - i^2 = -p \Rightarrow p = -5$

Teorema das raízes racionais

Além do teorema das raízes imaginárias, visto anteriormente, outro teorema pode auxiliar-nos na pesquisa de raízes de uma equação polinomial. Aqui, como enunciaremos a seguir, deve-se tomar o cuidado de observar que os coeficientes da equação polinomial correspondente sejam **números inteiros**.

> Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros
>
> $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração:

- Considerando que $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, então:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

- Multiplicando membro a membro essa igualdade por q^n:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \text{ (I)}$$

- Deixamos, nessa igualdade, a_0q^n no segundo membro e, depois, colocamos p em evidência no primeiro membro, ou seja:

$$p \cdot (a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n$$

- Nessa igualdade, como todos os coeficientes são inteiros, p e q também são inteiros. Temos, então:

$$\underbrace{p}_{\text{inteiro}} \cdot \underbrace{(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1})}_{\text{inteiro}} = \underbrace{-a_0q^n}_{\text{inteiro}}$$

  Dessa forma, podemos afirmar que p é divisor de $-a_0q^n$. Como sabemos que p e q são primos entre si (p não pode ser divisor de q^n), concluímos que p é divisor de a_n.

- Retornando à igualdade (I), deixamos agora a_np^n no segundo membro e colocamos q em evidência no primeiro membro:

$$q \cdot (a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q^1 + \ldots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n$$

- Analogamente ao que consideramos anteriormente, temos:

$$\underbrace{q}_{\text{inteiro}} \cdot \underbrace{(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q^1 + \ldots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1})}_{\text{inteiro}} = \underbrace{-a_np^n}_{\text{inteiro}}$$

  Dessa forma, podemos afirmar que q é divisor de $-a_np^n$. Como sabemos que p e q são primos entre si (q não pode ser divisor de p^n), concluímos que q é divisor de a_n.

Observação:

Uma consequência imediata do teorema das raízes racionais é sobre a existência de raízes inteiras: Se p é uma raiz inteira da equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$, então p é divisor de a_0.

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Explique o que são números primos entre si. Exemplifique!
2. Explique, a partir do teorema das raízes racionais, a observação anterior sobre raízes inteiras.

Exemplo:

Vamos determinar as raízes da equação polinomial $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = 0$.

- Conforme o teorema das raízes racionais, vamos inicialmente obter os divisores (positivos e negativos) do termo independente e também do coeficiente de maior grau.
  Divisores do termo independente (a_0):
  $d(-2) = \{1; -1; 2; -2\} \rightarrow$ valores possíveis para p.
  Divisores do coeficiente de maior grau (a_n):
  $d(3) = \{1; -1; 3; -3\} \rightarrow$ valores possíveis para q.
- Obtemos, agora, os possíveis valores para $\frac{p}{q}$ dividindo os divisores do termo independente pelos divisores do coeficiente de maior grau. Assim procedendo, chegamos aos seguintes valores:
  $\rightarrow 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$
- Verificamos, por tentativa, quais desses números são raízes (conforme dispositivo prático de Briot-Ruffini):

−1	3	−2	−7	−2
	3	−5	−2	0

$\underbrace{3 \quad -5 \quad -2}_{3x^2 - 5x - 2}$

Se a equação dada é do 3º grau, basta encontrarmos uma raiz, pois conseguimos, com isso, "abaixar" o grau da equação correspondente. Procedendo com a resolução da equação do 2º grau:

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

↓ Fórmula resolutiva

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \left\{2, -1, -\frac{1}{3}\right\}$. Temos duas raízes racionais inteiras (divisores do termo independente de x) e uma raiz racional não inteira.

Exemplo:

Vamos verificar se a equação $2x^3 - 4x^2 + 7x - 5 = 0$ admite alguma raiz inteira.

- Conforme observação acima, se a equação admitir alguma raiz inteira, será divisor do termo independente de x, neste caso, divisor de -5. Vejamos os divisores de -5:
  $d(-5) = \{1; -1; 5; -5\}$
- Substituindo esses valores na equação (poderíamos utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini), temos:
  $x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 5 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 1$ (é raiz)
  $x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (1)^2 + 7 \cdot (-1) -$
  $- 5 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ (não é raiz)
  $x = 5 \rightarrow 2 \cdot 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 - 5 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 5$ (não é raiz)
  $x = -5 \rightarrow 2 \cdot (-5)^3 - 4 \cdot (-5)^2 + 7 \cdot (-5) -$
  $- 5 \neq 0 \Rightarrow x = -5$ (não é raiz)

Observação:

O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais. Note que, se elas existirem, esse teorema fornece indicativos (a partir dos divisores do termo independente de x e dos divisores do coeficiente de maior grau) de como você poderá obtê-las.

Exercícios resolvidos

1. Considere a equação $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$.
   a) Escreva o conjunto das possíveis raízes racionais dessa equação.
   b) Escreva o conjunto solução dessa equação.

a) $\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{6}; \pm 2; \pm\frac{2}{3}; \pm 3; \pm\frac{3}{2}; \pm 6\right\}$

b) Testando algumas das possíveis raízes racionais, encontramos −1 como raiz. Logo:

−1	6	−7	−7	6
	6	−13	6	0

$6x^2 - 13x + 6 = 0 \therefore x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$

$S = \left\{-1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

2. Uma das raízes da equação $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 25 = 0$ é o número complexo $1 + 2i$.

a) O número complexo $1 - 2i$ é também raiz dessa equação?

b) Qual é o conjunto solução dessa equação?

a) Sim, pois os coeficientes são reais.

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{(-6)}{1}$

$1 + 2i + 1 - 2i + x_3 + x_4 = 6$

$x_3 + x_4 = 4$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{-25}{1}$

$(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) \cdot x_3 \cdot x_4 = -25$

$x_3 \cdot x_4 = -5$

$\begin{cases} x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 \cdot x_4 = -5 \end{cases} \therefore x_3 = -1 \text{ e } x_4 = 5$

$S = \{1 + 2i; 1 - 2i; -1; 5\}$

3. Determine o conjunto solução da equação $x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 4x - 12 = 0$ sabendo que i (unidade imaginária) é uma de suas raízes.

Como os coeficientes do polinômio são reais, $-i$ também é raiz. Logo:

i	1	3	-3	-9	-4	-12
$-i$	1	$3 + i$	$-4 + 3i$	$-12 - 4i$	$-12i$	0
	1	3	-4	-12	0	

Seja $q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. As possíveis raízes racionais para o polinômio q são: $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$. Testando algumas das possíveis raízes racionais, encontramos 2 como raiz. Logo:

2	1	3	-4	-12
	1	5	6	0

$x^2 + 5x + 6 = 0 \therefore x = -2$ ou $x = -3$

Logo:

$S = \{-3; -2; 2; -i; i\}$

4. Determine o grau mínimo que deve ter uma equação algébrica de coeficientes reais considerando que admite i, $2 - i$ e 10 como raízes, com multiplicidade 4, 2 e 3, respectivamente.

Conforme teorema das raízes imaginárias, se a equação com coeficientes reais admite uma raiz imaginária de multiplicidade m, admite também sua conjugada com o mesmo grau de multiplicidade. Dessa forma, temos:

$x = i$ (multiplicidade 4) $\Rightarrow x = -i$ (multiplicidade 4)

$x = 2 - i$ (multiplicidade 2) $\Rightarrow x = 2 + i$ (multiplicidade 2)

$x = 10$ (multiplicidade 3)

O grau da equação correspondente é igual ao número total de raízes, isto é:

Grau $= 4 + 4 + 2 + 2 + 3 = 15$

A equação deverá ser no mínimo do 15º grau.

5. Na equação $x^3 + x^2 + kx + 15 = 0$, em que k é um número real, sabe-se $1 - 2i$ é uma de suas raízes. Nessas condições, determine o conjunto solução dessa equação.

Conforme relações de Girard e o teorema das raízes imaginárias, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{1}$

$1 + 2i + 1 + 2i + x_3 = -1$

$2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -3$

Como temos que determinar o valor do coeficiente k, vamos substituir x por -3, isto é

$x^3 + x^2 + kx + 15 = 0$

$(-3)^3 + (-3)^2 + k(-3) + 15 = 0$

$k = -1$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Com relação à equação $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$, responda: Respostas no Manual do Professor.

a) Quais são os divisores do termo independente da equação?

b) Quais são os divisores do coeficiente do termo de maior grau da equação?

c) Conforme teorema, quais são as possíveis raízes racionais da equação?

2. Uma equação polinomial, cujos coeficientes são reais, apresenta os números complexos 5, $1 + 2i$ e $3 - i$ como raízes.

a) O número complexo $1 - 2i$ é necessariamente raiz da equação? Sim.

b) O número complexo $-3 + i$ é necessariamente raiz da equação? Não.

c) Qual é o menor grau possível dessa equação? 5

3. Uma equação com coeficientes reais e de grau 3 apresenta como raízes os números complexos 1, $2i$ e $-2i$.

a) Escreva uma equação como um produto de fatores do primeiro grau, conforme as raízes indicadas. $(x - 1) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i) = 0$

b) Escreva a equação na forma $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

4. Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$, sabendo que o número complexo $2 - 3i$ é uma das suas raízes. $S = \{2 - 3i; 2 + 3i; 2\}$

5. Uma equação de grau 4, cujos coeficientes são reais, apresenta os números $1 + i$ e i como raízes.

a) Quais são as outras raízes da equação? $1 - i$ e $-i$

b) Escreva a equação na forma $x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$

6. Quais são os valores reais de m e n na equação $x^2 + m \cdot x + n = 0$, sabendo que o número $3 + 4i$ é umas das suas raízes? $m = -6$ e $n = 25$

7. Considere o polinômio $P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + \alpha \cdot x + \beta$, sendo α e β dois números reais.

a) Qual é o valor de $P(i)$ em função de α e β, sendo i a unidade imaginária? $P(i) = -2 + \beta + (\alpha + 4) \cdot i$

b) Quais são os valores dos números reais α e β considerando que $P(i) = 0$? $\alpha = -4$ e $\beta = 2$

8. Todas as raízes da equação $4x^4 - 23x^2 + 9x + 10 = 0$ são racionais. Respostas no Manual do Professor.

a) Qual é o conjunto que apresenta todas as possíveis raízes da equação? Sim.

b) Qual é o conjunto solução da equação?

9. Uma equação com coeficientes reais apresenta como raízes os números complexos 3, $2 + i$ e $1 - i$, com multiplicidades 2, 3 e 5, respectivamente.

a) Qual é o menor número de raízes reais dessa equação? Duas.

b) Qual é o menor número de raízes complexas dessa equação? 18

c) Qual é o grau mínimo dessa equação? 18

d) Comparando o menor número de raízes complexas com o grau mínimo, o que você observa? São iguais.

10. Uma das raízes da equação $x^3 - x^2 + m \cdot x + n = 0$, onde m e n são números reais, é o número complexo $2 + i$.

a) Quais são as outras raízes da equação?

b) Qual é o valor de m? $2 - i$ e -3

c) Qual é o valor de n? $n = 15$

11. Uma curiosidade: em uma equação cujos coeficientes são inteiros, se um número da forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, com a e b não negativos, é raiz da equação, então o número $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ também será. Para verificar essa afirmação, considere as equações $x^2 - 4x + 1 = 0$ e $\sqrt{3} \cdot x^2 - 6x + 2\sqrt{3} = 0$.

a) O número $2 + \sqrt{3}$ é raiz da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$? Sim.

b) O número $2 - \sqrt{3}$ é raiz da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$? Sim.

c) O número $1 + \sqrt{3}$ é raiz da equação $\sqrt{3} \cdot x^2 - 6x + 2\sqrt{3} = 0$? Sim.

d) O número $1 - \sqrt{3}$ é raiz da equação $\sqrt{3} \cdot x^2 - 6x + 2\sqrt{3} = 0$? Não.

12. Uma equação do 4º grau, cujos coeficientes são inteiros, apresenta os números $\sqrt{5}$ e $1 + \sqrt{2}$ como raízes. Quais são as demais raízes dessa equação, conforme curiosidade apresentada na atividade anterior? Escreva a equação na forma $x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$
Respostas no Manual do Professor.

Algumas conclusões

Procure responder ou mesmo pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo o estudo de polinômios e equações polinomiais. Caso sinta alguma dificuldade em obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais.

1. Uma função afim e uma função quadrática são exemplos de polinômios?

2. Quando dois polinômios de mesmo grau são idênticos?

3. O que é um polinômio identicamente nulo?

4. Como podemos, numa divisão de polinômios, relacionar os polinômios dividendo, divisor, quociente e resto?

5. Qual é o teorema do resto?

6. Uma equação polinomial de grau n admite quantas raízes?

7. Qual é o número máximo de elementos do conjunto solução de uma equação polinomial de grau n?

8. É possível que uma equação polinomial do 5º grau tenha apenas um elemento no conjunto solução? Explique.

9. Qual é o teorema das raízes imaginárias? E das raízes racionais?

10. O que podemos calcular com as relações de Girard, por exemplo, para uma equação do 3º grau?

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas para as questões acima. Em seguida, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (FMP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial definida por $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 9$.

O fato de $x = 3$ ser um zero da função f é equivalente ao fato de o polinômio $x^4 - 3x^3 + 3x - 9$ ser divisível por:

a) $x^2 - 9$
b) $x + 3$
c) 3
d) $x - 3$
e) x

2. (PUC-PR) Se $(x - 2)$ é um fator do polinômio $x^3 + kx^2 + 12x - 8$, então, o valor de k é igual a:

a) -3
b) 2
c) 3
d) 6
e) -6

3. (PUC-RJ) Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que $p(x)$ é igual a:

a) $2x^2(x - 2)$
b) $2x(x - 1)(x + 1)$
c) $2x(x^2 - 2)$
d) $x(x - 1)(x + 1)$
e) $x(2x^2 - 2x - 1)$

4. (PUC-RS) A representação gráfica da função dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, intercepta o eixo das abscissas no ponto em que $x = 2$. Então, o resto da divisão de $f(x)$ por $x - 2$ é:

a) -2
b) 0
c) 2
d) $-c$
e) c

5. (UFRGS-RS) Considere os polinômios $p(x) = x^3$ e $q(x) = x^2 + x$. O número de soluções da equação $p(x) = q(x)$, no conjunto dos números reais, é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

6. (UFSJ-MG) Considere os polinômios:

$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 12$, $r(x) = x + 2$ e $q(x) = \dfrac{p(x)}{r(x)}$

Sobre as raízes da equação $q(x) = 0$, é correto afirmar que:

a) a soma de todas as raízes é igual a -1.
b) duas das raízes são inteiras.
c) duas das raízes são números complexos, um localizado no 1º quadrante e outro localizado no 3º quadrante do plano de Argand-Gauss.
d) a soma das raízes inteiras é 2.

7. (Uern) Divisor: $x^2 + x$;

Resto: $1 - 7x$;

Quociente: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é:

a) $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$
b) $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3$
c) $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1$
d) $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1$

8. (Uece) Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ onde a, b e c são números reais, então o valor de $a - b + c$ é:

a) 9
b) 10
c) 12
d) 13

9. (Unesp-SP) Sabe-se que, na equação $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, uma das raízes é igual à soma das outras duas. O conjunto solução (S) desta equação é:

a) $S = \{-3, -2, -1\}$
b) $S = \{-3, -2, +1\}$
c) $S = \{+1, +2, +3\}$
d) $S = \{-1, +2, +3\}$
e) $S = \{-2, +1, +3\}$

10. (UEPG-PR) Ao dividir o polinômio $P(x)$ por $x - 2$, obtém-se o quociente $2x^2 + 5$ e o resto 3. Nessas condições, assinale o que for correto. 02 + 04 = 06

01) $P(x)$ é divisível por $x + 1$.
02) $P(x)$ é um polinômio do 3º grau.
04) $P(0) = -7$
08) O termo independente de x no polinômio vale 11.

11. (Unicamp-SP) Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + + x^2 - ax - 3$, onde a é um número real. Sabendo que r e $-r$ são raízes reais de $p(x)$, podemos afirmar que $p(1)$ é igual a:

a) 3

b) 1

c) -2

d) -4

12. (FGV-SP) Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, então, $n + m$ é igual a:

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

13. (Udesc) Um polinômio $p(x)$ dividido por $x + 1$ deixa resto 16; por $x - 1$ deixa resto 12, e por x deixa resto -1. Sabendo que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x + 1)(x - 1)x$ é da forma $ax^2 + bx + c$, então o valor numérico da soma das raízes do polinômio $ax^2 + bx + c$ é:

a) $\frac{3}{5}$

b) 2

c) $\frac{2}{15}$

d) 4

e) -2

14. (Uem-pas) Seja um polinômio $p(x) = (a - 3)x^3 + + (b^2 + 1)x^2 + (c^2 + 2c - 3)x + d$ na variável x. Assinale a(s)alternativa(s) correta(s). $04 + 08 = 12$

01) Para todo a, b, c e d números reais, o grau de $p(x)$ é 3.

02) Existem valores reais para a, b, c e d, de forma que $p(x)$ seja identicamente nulo.

04) Se $c = -3$ ou $c = 1$, o coeficiente de x no polinômio $p(x)$ é nulo.

08) Se $g(x) = -5x^3 + (b + 1)x^2 + (c^2 + 3)x + 2d$, então para $a = -2$, $b = 1$, $c = 3$ e $d = 0$ temos que $p(x) = g(x)$.

16) Se $a = -3$, então o coeficiente de x^4 no polinômio $h(x) = p(x) \cdot (2x + 1)$ é nulo.

15. (UPF-RS) Se o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^2 + mx + p$ é divisível por $D(x) = x^2 + 1$, o valor de $m - p$ é:

a) -3

b) -1

c) 0

d) 2

e) 3

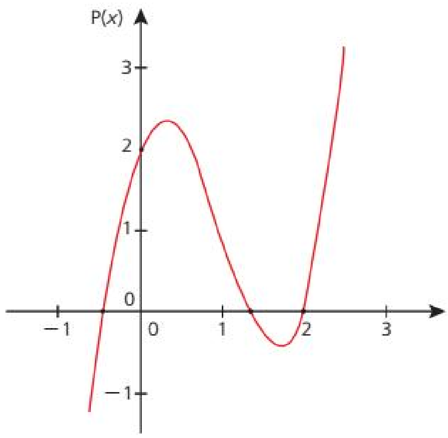
16. (Unicamp-SP) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, $-r$ e s.

a) Determine os valores de r e s. $r = 3$ ou $r = -3$ e $s = 2$

b) Calcule $p(z)$ para $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária. $p(1 + i) = 7 - 11i$

17. (Uerj) Observe o gráfico da função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.

Respostas no Manual do Professor.



Determine o conjunto solução da inequação $P(x) > 0$.

18. (Unesp-SP) O polinômio $P(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x + b$ é divisível por $x - 2$ e, quando dividido por $x + 3$, deixa resto -45. Nessas condições, os valores de a e b, respectivamente, são:

a) 1 e 4

b) 1 e 12

c) -1 e 12

d) 2 e 16

e) 1 e -12

DESAFIO

(Udesc) Considere o polinômio $f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1$. Sabe-se que as raízes de $f(x)$ são os primeiros termos de uma progressão geométrica infinita, cujo primeiro termo é a maior raiz de $f(x)$, e a soma desta progressão é raiz do polinômio $g(x) = x + a$. Então, o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é:

a) $-\frac{35}{27}$

b) $-\frac{1}{2}$

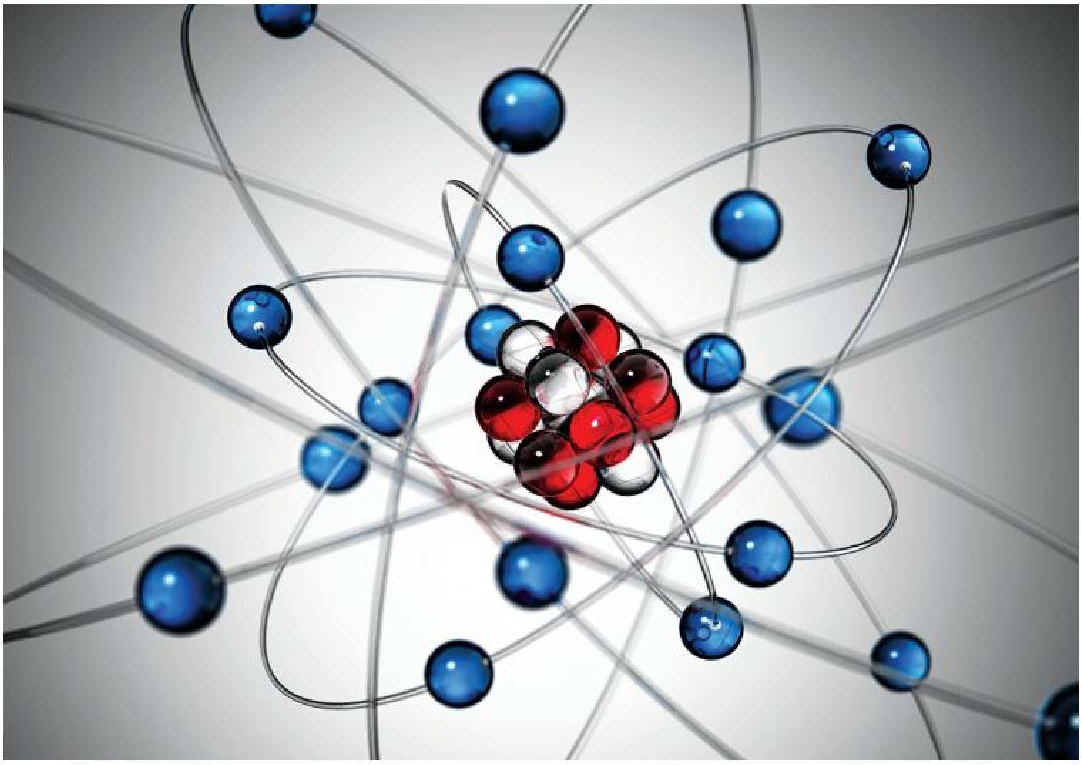
c) $-\frac{2}{3}$

d) -2

e) -81

Imagine uma experiência em um laboratório de física nuclear onde cientistas tentam registrar o movimento de uma partícula subatômica. Suponha que o movimento da partícula tenha começado a ser registrado em algum instante (que será considerado como $t = 0$) e que tenha sido possível identificar sua posição inicial e nos 5 instantes seguintes, obtendo os pontos (0, 10); (1, 10); (2,18); (3, 86); (4, 430); (5, 1 530).

Considere que, com esses dados, os cientistas precisem determinar em que momento *t* a partícula passou ou passará pela posição (*t*, 0). Como isso pode ser feito?



BlackJack3D/iStockphoto.com

Átomos. Ilustração sem escalas; cores-fantasia.

A modelagem de problemas desse tipo (e muitos outros nas ciências em geral, incluindo Engenharia, Física, Química, Economia e Desenvolvimento de sistemas) em geral conta com os polinômios e suas raízes. A busca por fórmulas que determinem as raízes de um polinômio de grau *n* teve início há milênios e se estendeu durante séculos, sendo permeada por intrigas e competições. Veja abaixo alguns personagens dessa história:

- As equações de primeiro e segundo graus eram conhecidas (e solucionadas) desde o antigo Egito. Entretanto, a fórmula conhecida para solucionar qualquer equação do segundo grau em sua forma geral (fórmula de ***Bhaskara***) data do século XII. Passaram-se mais de 300 anos até que personagens da história da Matemática se debruçassem com afinco sobre as equações de terceiro grau. O primeiro deles foi ***Scipione Del Ferro***, italiano que desenvolveu um método para solucionar qualquer equação do tipo $x^3 + bx + c = 0$. Antes de morrer em 1526, ele revelou seu método a ***Antonio de Fiore***, que, em 1535, desafiou ***Nicollo Tartaglia*** em uma competição de resolução de equações. *Tartaglia* conhecia não só o método de *Fiore* como tinha desenvolvido um próprio para equações do tipo $x^3 + ax^2 + c = 0$, ganhando a competição. Em 1539 *Tartaglia* revelou seu método a ***Girolamo Cardano***, que jurou jamais divulgá-lo. Entretanto *Cardano* (cuja fama de jogador e pouco confiável era bastante difundida) descobriu que parte do método de *Tartaglia* constava de uma publicação póstuma de *Del Ferro*. Foi então que, em 1545, *Cardano* publicou *Ars Magna*, um tratado completo sobre resolução de equações do terceiro grau de qualquer tipo, contendo não só o segredo de *Tartaglia* como também um método geral para solucionar a equação de quarto grau, que havia sido desenvolvido por ***Ludovico Ferrari***, discípulo de *Cardano*. Em 1548, indignado, *Tartaglia* desafiou *Cardano* para uma competição matemática, mas *Cardano* não compareceu. Especula-se que *Cardano* tenha enviado *Ferrari* em seu lugar e que *Ferrari* tenha vencido a disputa, ganhando o emprego de *Tartaglia*.

- Em 1572, ***Rafael Bombelli*** percebe que a fórmula então conhecida como fórmula de *Cardano* (e mais tarde rebatizada de fórmula de *Cardano-Tartaglia*) não era prática, pois ocultava soluções racionais em expressões irracionais. Para resolver tal problema *Bombelli* usou uma técnica algébrica que daria início aos números complexos. As falhas da fórmula de Cardano foram solucionadas anos depois por ***François de Viète***. Nos 250 anos que se seguiram, todos os esforços para resolver equações de 5º grau falharam até que, em 1799, ***Paolo Ruffini*** conseguisse provar que era impossível determinar uma fórmula que gerasse as soluções de uma equação desse tipo. Sua prova, entretanto, não era satisfatória e foi refeita mais tarde por ***Niels Henrik Abel*** em um trabalho que serviu de base para ***Evariste Gallois***, que não só a melhorou como a incrementou com uma técnica que auxiliava na classificação das equações de 5º grau como solucionáveis ou não. A história desse trabalho de *Gallois* envolve um intenso romance: desde pequeno o francês só se interessava por matemática e aos 12 anos já havia superado seus professores. Tinha comportamento rude e aparentemente pouca didática, pois não conseguia ser claro ao explicar suas ideias brilhantes. A má fama atrapalhava bastante sua vida acadêmica e quando, ao se envolver em questões políticas relacionadas ao nome de seu pai, acabou causando o suicídio de seu progenitor, seu temperamento piorou bastante. Ainda assim seu trabalho mais brilhante tinha chance de ser premiado pela Academia Francesa, não fosse o fato de ter sido extraviado e não entregue para avaliação do concurso. Certo de que havia sido traído, *Gallois* se envolve cada vez mais com os rebeldes republicanos, deixando a matemática de lado. Sua rebeldia o levou à prisão e, um mês antes do final da sentença, foi liberado devido a uma epidemia de cólera. Nessa época se envolveu em uma trama de romance com uma mulher comprometida, o que o levou a um duelo de armas com um atirador exímio. Na noite antes do duelo e sabendo de seu fim certo, *Gallois* passa a noite escrevendo o teorema que explicaria o enigma da equação do 5º grau entre exclamações do tipo "eu não tenho tempo". Ele realmente faleceu no duelo, mas foi a partir de seu trabalho que se definiu o fim da busca: não seria possível encontrar uma forma definitiva para nenhuma equação de grau $n > 4$.

- Sabendo que não seria possível definir uma fórmula para encontrar as raízes de um polinômio qualquer, a comunidade matemática se preocupou em determinar ao menos os tipos de raízes que aparecem em um polinômio e assim buscar formas de fatorar polinômios de grau $n > 4$ em polinômios menores. Foi daí que surgiu o teorema fundamental da Álgebra, enunciado por ***Albert Girard*** e demonstrado em 1746 por ***Jean D'Alembert*** e em 1799 por ***Carl Friederich Gauss***. Com posse desse teorema e das relações de Girard, tornou-se possível encontrar raízes racionais quando existentes, determinar o número de raízes complexas de um polinômio e obter outras informações acerca do intervalo onde as raízes se encontram. O desenvolvimento do cálculo e dos conceitos de derivada e integral permitiu que os gráficos das funções polinomiais ficassem determinados em muitos casos, auxiliando na busca geométrica das raízes. Outro resultado tão útil quanto as relações de Girard na busca de soluções racionais para um polinômio de coeficientes inteiros foi descoberto por

Coleção Particular

Evariste Gallois (1811-1832)

Coleção Particular/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Jean Le Rond D´Alembert (1717-1783).

um colega de *Gauss* chamado ***Ferdinand Gotthold Max Einsenstein***. Como *Gallois*, *Einsenstein* faleceu antes dos 30 anos. Como o francês, esse alemão também foi preso por sua ligação ao partido republicano, período em que a saúde ficou debilitada causando sua morte por tuberculose. Também como *Gallois*, teve contribuições matemáticas em diversas áreas. No campo das equações polinomiais desenvolveu um critério que ficou conhecido como critério de *Einsenstein*: dado um polinômio de coeficientes inteiros $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sendo a_n o coeficiente do maior grau de x, podemos afirmar que o polinômio é irredutível no campo dos racionais (ou seja, não pode ser fatorado como dois polinômios racionais de grau maior que 1) se encontrarmos um número primo P que seja divisor de todos os coeficientes excetuando a_n e tal que P^2 não seja divisor de a_0. Uma vez encontrado um primo P que satisfaça essas condições, classifica-se o polinômio como irredutível. Se P não puder ser encontrado, nada podemos afirmar sobre o polinômio.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

The Pushkin State Museum of Fine Arts, Moscou/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Questões e investigações

Resolva os exercícios no caderno.

1. Voltando ao problema inicial, como você o resolveria? (Não é preciso resolvê-lo, apenas determinar um método.)
2. Considere o seguinte polinômio de grau 5:
   $P(x) = x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 26x^2 + 38x - 10$
   Esse polinômio passa por todos os pontos encontrados pelos cientistas (verifique se achar necessário) e é redutível, ou seja, pode ser fatorado em dois polinômios de graus menores. Quais são os possíveis graus desses dois polinômios?
3. Note que $x = 2 + i$ é uma raiz de $P(x)$ (verifique se achar necessário). Conhecendo essa raiz, é possível fatorar $P(x)$ como um produto de dois polinômios $Q(x)$ e $S(x)$, sendo $Q(x)$ de grau 3 e $S(x)$ de grau 2. Encontre esses polinômios.
4. Utilizando o critério de Eisenstein, verifique se $Q(x)$ é irredutível. Se for redutível, encontre as raízes de $Q(x)$. Se for irredutível, descreva o que isso significa para o processo de busca das raízes.
5. Pela fórmula de Cardano, encontra-se para $Q(x)$ a solução $x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ (verifique se achar necessário). Sabe-se que $Q(x)$, por ser do terceiro grau, deveria ter três raízes. Como é possível encontrar as outras duas raízes?

UNIDADE 6

AS CÔNICAS

Uma antena parabólica, a trajetória de um planeta, a sombra de um abajur representam exemplos da presença de curvas especiais, conhecidas por cônicas.

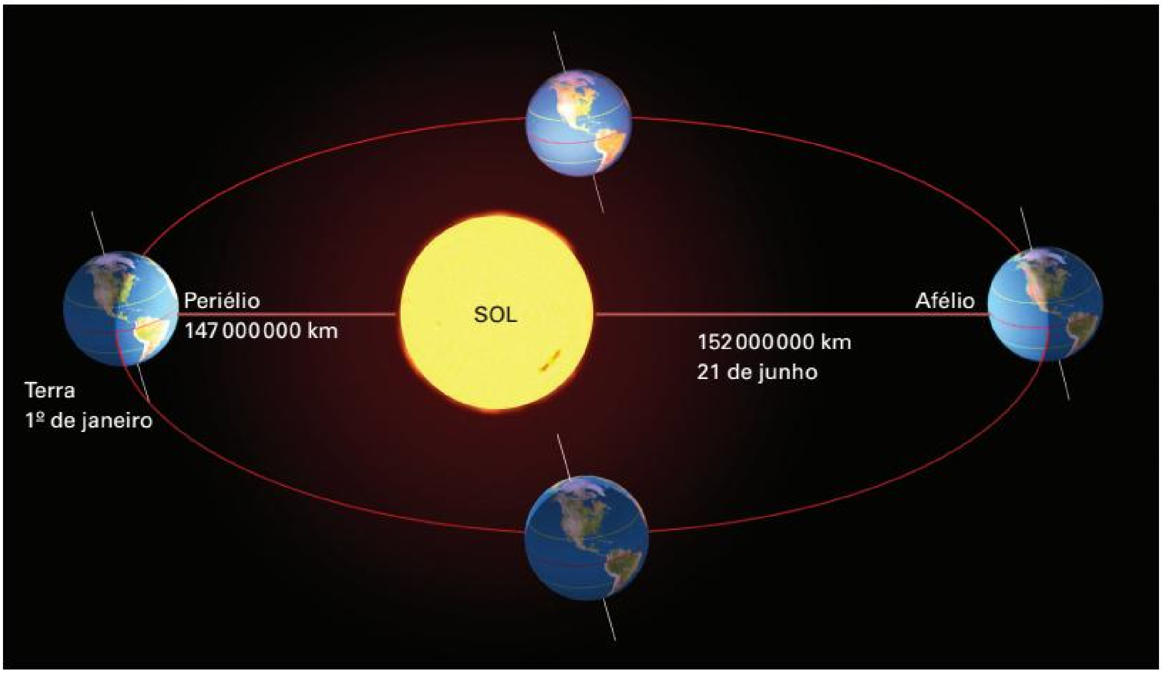
Nesta Unidade, abordaremos o estudo em Geometria Analítica de três cônicas: elipse, hipérbole e parábola.

DEA/ARCHIVIO J. LANGE/Getty Images

Antenas parabólicas em Piero Fanti Space Center, Abruzzo, Itália. Foto de 2015.

CAPÍTULO

19 ELIPSE



Modelo de trajetória elíptica da Terra ao redor do Sol.

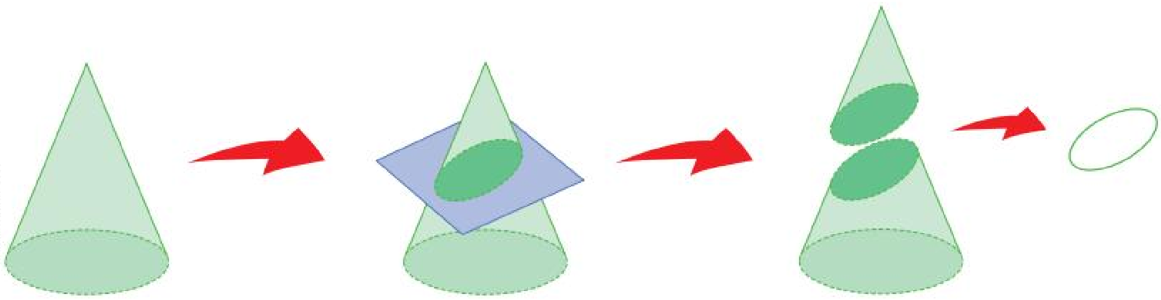
Personagens dedicados e ousados, que participaram ativamente da história da evolução da humanidade, enfrentaram crenças e diversas resistências na tentativa de encontrar um modelo que pudesse descrever os movimentos dos corpos celestes. O astrônomo Johannes Kepler provou a validade do chamado modelo heliocêntrico, no qual os corpos giram em torno do Sol, indo mais além, concluindo que as órbitas são elípticas.

Como a trajetória da Terra é elíptica, nosso planeta se aproxima e se afasta do Sol, dependendo da época do ano. Na ilustração acima, observe atentamente o ponto indicado em que a Terra está mais próxima do Sol e aquele em que ela está mais distante.

Neste capítulo, estudaremos a curva denominada **elipse**, sua representação no plano cartesiano e sua equação.

ELIPSE E SEUS ELEMENTOS

A curva denominada elipse pode inicialmente ser observada na secção de um cone circular reto por um plano oblíquo ao plano que contém a base:

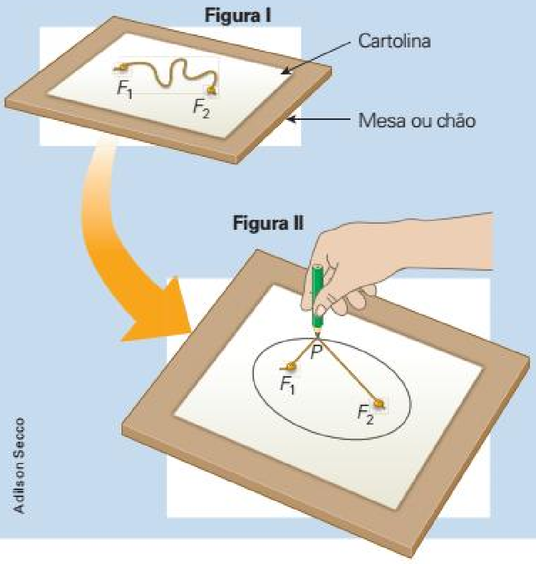


Vamos imaginar que construímos um cone utilizando cera, como em uma vela. Se considerarmos o plano α (oblíquo ao plano da base do cone) seccionando esse cone, conforme indica a ilustração anterior, obteremos uma curva (borda). Essa curva dá a ideia de elipse. Você poderá realizar uma experiência simples de construção de uma elipse. Essa experiência pode ser executada no chão ou em cima de uma mesa.

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Essa construção pode ser feita em pequenos grupos de acordo com as instruções a seguir.



- Fixe uma cartolina numa superfície plana (a mesa, por exemplo). Sobre a cartolina prenda, com alfinetes, as extremidades de um barbante de cerca de 50 centímetros de comprimento. O barbante deve ficar frouxo, como sugere a figura I.
- Com um lápis, mantendo o barbante esticado (observe a figura II), você poderá desenhar na cartolina uma curva. Note que, para traçar essa curva, precisamos de dois pontos fixos (os alfinetes), de tal forma que a distância entre eles seja menor que o comprimento do barbante.

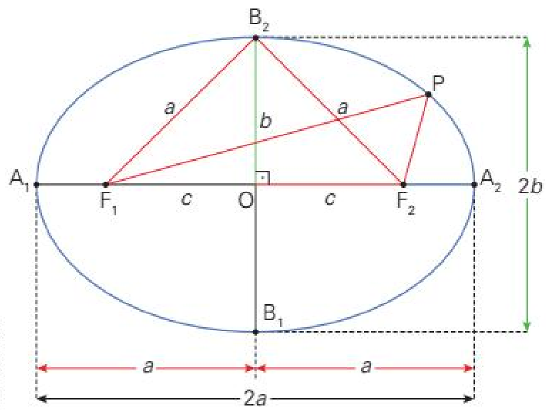
Caso você faça essa experiência, obterá a curva denominada **elipse**. Os dois pontos fixos representados pelos alfinetes são chamados de **focos** da elipse. Como mantivemos sempre esticado o barbante enquanto desenhávamos na cartolina, o comprimento do barbante permaneceu constante. Essa distância correspondente ao comprimento do barbante representa uma constante importante, que caracteriza a elipse.

De modo geral, temos:

> **Elipse** é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos desse plano, denominados **focos**, é constante e maior que a distância entre eles.

Elementos da elipse

Para que possamos compreender melhor a elipse, precisamos destacar alguns de seus elementos. Procure identificar cada um deles no desenho abaixo:



- **Focos** – São os pontos fixos representados por F_1 e F_2.
- **Distância focal** – É a distância entre os dois focos: no desenho corresponde a $F_1F_2 = 2c$.
- **Centro** – É o ponto O, ponto médio do segmento F_1F_2.
- **Eixo maior** – É o segmento A_1A_2, cujo comprimento é $2a$.
- **Eixo menor** – É o segmento B_1B_2, cujo comprimento é $2b$.
- **Excentricidade** – Representada pela letra e, é a razão $\frac{c}{a}$.

Note que, na figura anterior, aparece destacado um triângulo retângulo. Podemos, por meio dele, obter uma relação métrica entre as medidas dos semieixos focal, maior e menor da elipse, isto é:

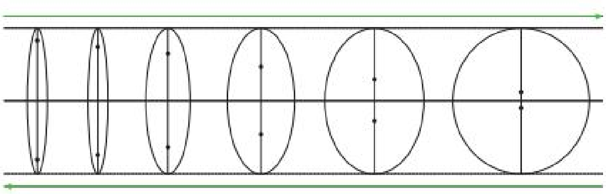
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observações:

1. A elipse possui dois eixos de simetria: eixo maior e eixo menor.
2. A excentricidade da elipse foi apresentada como a razão entre os comprimentos dos semieixos focal e maior, logo, considerando que são medidas positivas, de tal forma que $0 < c < a$, podemos dizer que a excentricidade será um número maior que zero e menor que 1, isto é, $0 < e < 1$.
3. Conforme o valor da excentricidade, podemos afirmar se ela é mais ou menos achatada.

Exemplo:

Considere as seguintes elipses em que fixamos a medida do eixo maior e variamos a medida da distância focal.



- Note que, da esquerda para direita, a distância focal vai diminuindo (os focos se aproximam). Como fixamos o comprimento do eixo maior, significa que o comprimento do eixo focal diminui cada vez mais, isto é, dizemos que a excentricidade se aproxima de zero.
- Se, entretanto, olharmos da direita para a esquerda, teremos a distância focal aumentando, ou seja, podemos dizer que a excentricidade se aproxima de 1.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

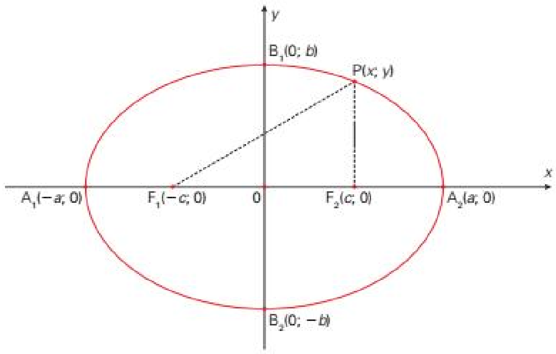
Respostas no Manual do Professor.

1. Se a excentricidade se aproxima de 1, a elipse tende a ficar mais arredondada ou achatada? E quando a excentricidade se aproxima de zero?
2. Imaginando os focos coincidindo ou ficando cada vez mais próximos, que curva tenderia à elipse? Qual seria a excentricidade?

EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

Com base na definição de elipse vista anteriormente, podemos agora obter sua equação no plano cartesiano. Primeiro, vamos analisar o caso em que a elipse tem seu centro coincidindo com a origem do plano de coordenadas cartesianas.

Considere a elipse com centro no ponto O(0; 0), as extremidades do eixo maior nos pontos $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$, as extremidades do eixo menor nos pontos $B_1(0; b)$ e $B_2(0; -b)$. Além disso, os focos são representados por $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$, conforme ilustração a seguir.



Figuras: © DAE

Para obter a equação da elipse, vamos considerar um ponto P(x; y) qualquer, pertencente à curva. Pela definição de elipse:

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_1F_2$$
$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2$$
$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

2a representa a constante na definição de elipse

Utilizando a fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos de um plano cartesiano a partir de suas coordenadas, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

↓ elevando ao quadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

↓ reunindo termos semelhantes:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

↓ dividindo por 4 e elevando ao quadrado:

$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2 + x^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

↓ reunindo termos semelhantes:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

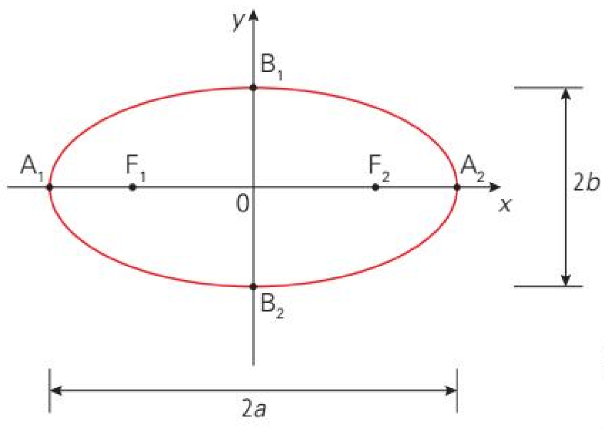
↓ observando a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

↓ dividindo por a^2b^2:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{equação reduzida da elipse}}$$

Essa é a equação da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e focos pertencentes ao eixo das abscissas:



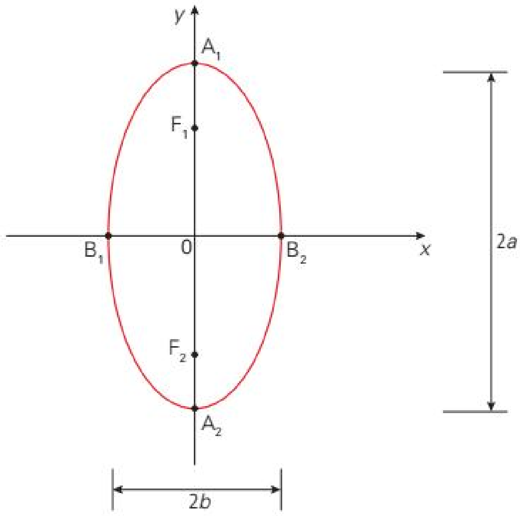
Figuras: © DAE

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é denominada equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e focos no eixo das abscissas.

Observação:

Podemos dizer que, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então esse ponto pertence à elipse de centro na origem, de semieixos medindo *a* e *b*, cujos focos pertencem ao eixo das abscissas.

E se o eixo focal da elipse estiver no eixo das ordenadas e o centro na origem, como será sua equação?



Demonstra-se, analogamente, que a equação será $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, isto é:

A equação $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ é denominada equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e focos no eixo das ordenadas.

Observação:

Podemos dizer que, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz a equação $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, então esse ponto pertence à elipse de centro na origem, de semieixos medindo *a* e *b*, cujos focos pertencem ao eixo das ordenadas.

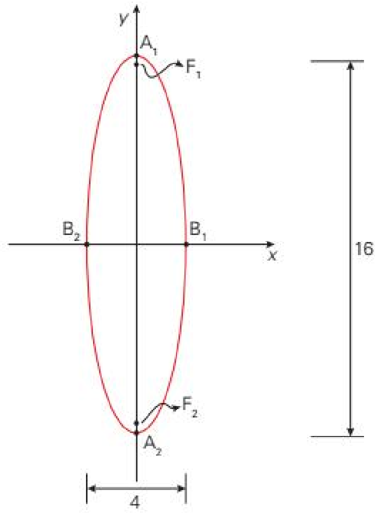
Exemplos:

1. Dada a equação da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}=1$, vamos obter as coordenadas dos focos e das extremidades do eixo maior.

- Observando os denominadores da equação dada, temos que $64 > 4$, isto é, o eixo maior da elipse está no eixo das ordenadas. Sendo assim:

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$
$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

- O eixo maior da elipse tem extremidades nos pontos $A_1(0; 8)$ e $A_2(0; -8)$. Já o eixo menor tem suas extremidades nos pontos $B_1(2; 0)$ e $B_2(-2; 0)$, conforme figura a seguir:



- Cálculo das coordenadas dos focos, conhecendo-se os valores de a e b:

$$a^2 + b^2 + c^2$$
$$8^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{60}$$

Portanto, os focos da elipse têm coordenadas $F_1(0; \sqrt{60})$ e $F_2(0; -\sqrt{60})$

2. Dada a equação $9x^2 + 16y^2 = 144$, mostraremos que ela representa uma elipse e determinaremos sua excentricidade.

- Na equação da elipse na forma reduzida, o segundo membro da igualdade correspondente é igual a 1. Dessa forma, vamos dividir a equação apresentada, membro a membro, pelo número 144:

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$
$$\downarrow : 144$$
$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- Observando a equação na forma reduzida, temos:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$
$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

- Cálculo do comprimento do semieixo focal:

$$a^2 + b^2 + c^2$$
$$4^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

- Excentricidade:

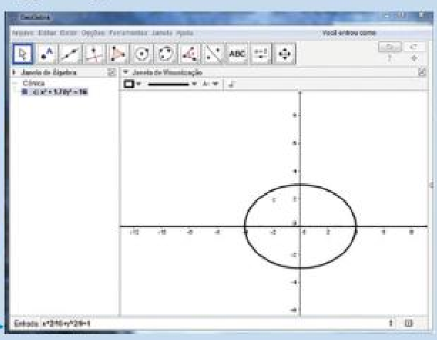
$$e = \frac{c}{a}$$
$$e = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Você pode utilizar o GeoGebra (ou *Winplot*) para representar no plano cartesiano a elipse a partir de sua equação. Observe a seguir a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



observe como digitamos a equação da elipse: x^2/16+y^2/9=1

Figuras: © DAE

1. Elabore equações reduzidas de várias elipses e explore o GeoGebra obtendo suas curvas no plano cartesiano.

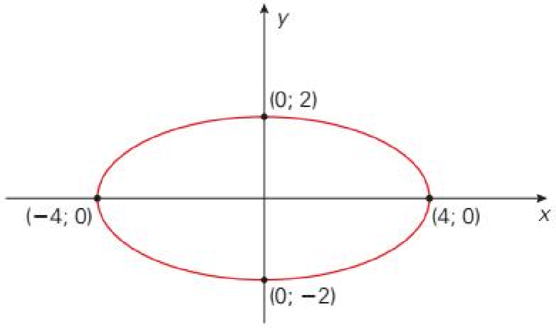
2. Verifique o que acontece com a elipse quando fazemos variar apenas o valor de b^2 numa equação. Assim, por exemplo, descubra como ficam os gráficos das elipses de equações $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$ para os seguintes valores da constante real k:

a) $k = 1$ b) $k = 2$ c) $k = 3$ d) $k = 4$

3. Obtenha os gráficos das elipses de equações $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ e $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.

Exercícios resolvidos

1. Observe a elipse representada na figura abaixo e, em seguida, determine:



a) as coordenadas dos focos da elipse;

b) a distância focal;

c) a medida do eixo maior da elipse;

d) a medida do eixo menor da elipse.

b) $2a = 8 \therefore a = 4$

$2b = 4 \therefore b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 4^2 = 2^2 + c^2 \therefore c = 2\sqrt{3}$

Assim, as coordenadas dos focos são

$(2\sqrt{3}; 0)$ e $(-2\sqrt{3}; 0)$

b) $2c = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $2a = 8$

d) $2b = 4$

2. Escreva a equação reduzida da elipse cujo centro está na origem do sistema cartesiano e que passa pelos pontos (5; 0), (−5; 0) e (0; 3).

$a = 5$ e $b = 3$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3. A equação de uma elipse é $25x^2 + 16y^2 = 400$.

a) Determine a distância focal.

b) Calcule a excentricidade.

c) Represente a elipse em um plano cartesiano.

$25x^2 + 16y^2 = 400$

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = \frac{400}{400} \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

a) $b^2 = 16 \therefore b = 4$

$a^2 = 25 \therefore b = 5$

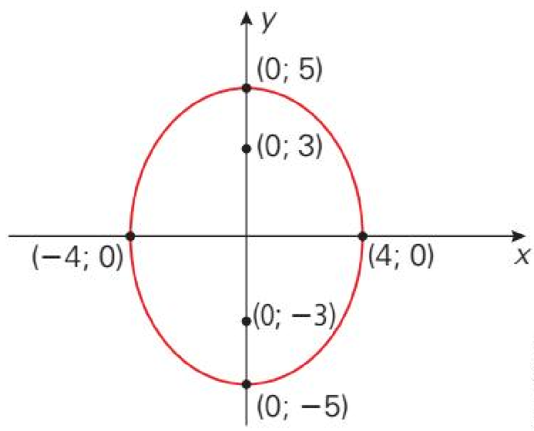
$a^2 = b^2 + c^2$

$5^2 = 4^2 + c^2 \therefore c = 3$

Assim, a distância focal é igual a 6.

b) $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c)

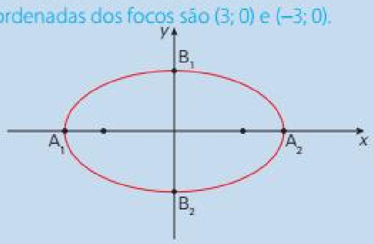


Figuras: © DAE

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. De acordo com os dados, determine as coordenadas dos focos da elipse, sabendo que o eixo focal está no eixo das abscissas e o centro coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
As coordenadas dos focos são (3; 0) e (−3; 0).



2. O eixo menor de uma elipse mede 12 e a distância focal mede 16. Respostas no Manual do Professor.

a) Calcule a medida do eixo maior dessa elipse.

b) Calcule a excentricidade da elipse.

c) Represente em um plano cartesiano a elipse, sabendo que seu centro está localizado na origem do sistema cartesiano ortogonal e o eixo maior está contido no eixo das abscissas.

3. Calcule a excentricidade de uma elipse, sabendo que a medida do eixo maior é igual ao triplo da medida do eixo menor. (Utilize a aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}41$.)
Aproximadamente 0,94.

4. Escreva, em seu caderno, as afirmativas verdadeiras que correspondem a uma elipse cujas coordenadas dos focos são $F_1(-6; 0)$ e $F_2(6; 0)$.

I. V I. Essa elipse tem o eixo focal sobre o eixo das abscissas.

II. F II. Essa elipse tem o eixo focal sobre o eixo das ordenadas.

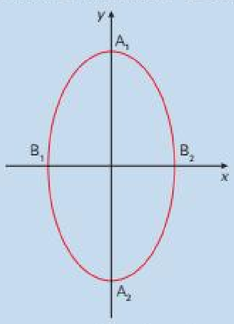
III. V III. Nessa elipse temos $c = 6$.

IV. F IV. Nessa elipse temos $a = 6$.

V. V V. O centro da elipse coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

5. Considerando as coordenadas dos vértices de uma elipse $A_1(0; 4)$ e $A_2(0; -4)$, cujo centro é $O(0; 0)$, podemos afirmar que o eixo focal está sobre qual dos eixos cartesianos? Eixo das ordenadas.

6. Considere a elipse representada no plano cartesiano abaixo, com o centro na origem, eixo maior medindo 50 cm e eixo menor medindo 40 cm.



a) Determine as coordenadas dos pontos A_1, A_2, B_1 e B_2. $A_1(0; 25)$, $A_2(0; -25)$, $B_1(-20; 0)$ e $B_2(20; 0)$.

b) Calcule a excentricidade dessa elipse. $e = 0{,}6$

7. Em seu caderno, indique V ou F, caso as afirmações sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. F I. A medida do eixo maior da elipse de equação $\frac{x^2}{144} + \frac{x^2}{64} = 1$ é 12.

II. V II. O eixo menor da elipse de equação $\frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{10} = 1$ está contido no eixo das abscissas.

III. F III. Os focos da elipse de equação $16x^2 + 9y^2 = 144$ são os pontos $(\sqrt{7}; 0)$ e $(-\sqrt{7}; 0)$

8. Existe um ponto pertencente à elipse de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$ cuja abscissa seja igual ao dobro da ordenada? Em caso afirmativo, qual(is) é(são) esse(s) ponto(s)? Resposta no Manual do Professor.

9. Considere a equação da elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{x^2}{100} = 1$, cujo centro coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

a) O eixo maior está sobre qual dos eixos coordenados? Eixo das ordenadas.

b) Determine a excentricidade da elipse. $e = 0{,}6$

10. Obtenha a equação de uma elipse cujo centro é o ponto $(0; 0)$ e que passa pelos pontos de intersecção da reta de equação $3x - 4y = 12$ com os eixos coordenados. Além disso, calcule a excentricidade dessa elipse.
Resposta no Manual do Professor.

11. Uma elipse tem centro na origem do sistema cartesiano, o eixo maior contido no eixo das abscissas, passando pelo ponto $(4; \sqrt{2})$ e sua excentricidade igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Determine a equação da elipse.

b) Calcule a distância focal.

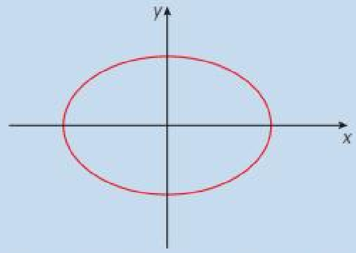
Respostas no Manual do Professor.

12. Sobre a elipse de equação $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$, responda:
Respostas no Manual do Professor.

a) quais são os pontos de intersecção da elipse com os eixos coordenados?

b) qual é a área do quadrilátero cujos vértices são as intersecções da elipse com os eixos coordenados?

13. No plano cartesiano foi desenhada a seguinte elipse centrada na origem.



Figuras: © DAE

a) Elabore um problema de modo a obter a equação dessa elipse.

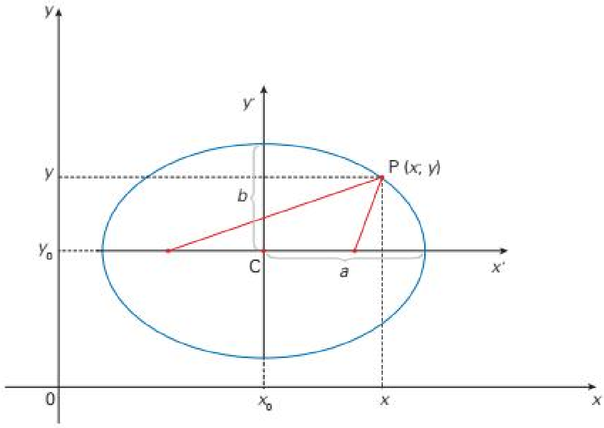
b) Elabore outro problema de modo que a elipse tenha excentricidade $\sqrt{5}$.

Apresente esses dois problemas para a turma discutir possibilidades de solução. Respostas pessoais.

EQUAÇÃO DA ELIPSE COM CENTRO FORA DA ORIGEM

Vimos como obter a equação da elipse em que o centro coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e o eixo focal está em um dos dois eixos coordenados. Podemos ampliar esse estudo, considerando o centro como outro ponto qualquer e os eixos (maior e menor) paralelos aos eixos coordenados.

Inicialmente, considere uma elipse em que o centro é o ponto $C(x_0; y_0)$ e os eixos são paralelos aos eixos coordenados, como representado a seguir.

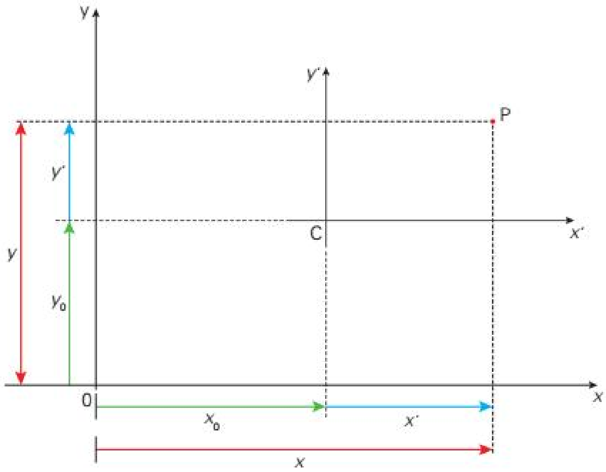


Queremos a equação dessa elipse.

Note que os eixos traçados com centro no ponto C, indicados por x' e y', formam outro sistema de coordenadas cartesianas (referencial $x'Cy'$). Como a elipse está com centro no ponto C, podemos escrever sua equação nesse novo referencial, isto é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Precisamos obter a equação da elipse no sistema xOy, então vamos estabelecer relações entre as coordenadas de um ponto qualquer nos dois sistemas. Observe um ponto P representado nesses dois sistemas:



Figuras: © DAE

Analisando na figura as coordenadas do ponto P, temos, conforme as setas coloridas:

$$x = x_0 + x' \Rightarrow x' = x - x_0 \quad \text{(I)}$$
$$y = y_0 + y' \Rightarrow y' = y - y_0 \quad \text{(II)}$$

Substituindo as equações (I) e (II) na equação da elipse obtida em relação ao referencial $x'Cy'$, podemos obter a equação da elipse no referencial xOy, isto é:

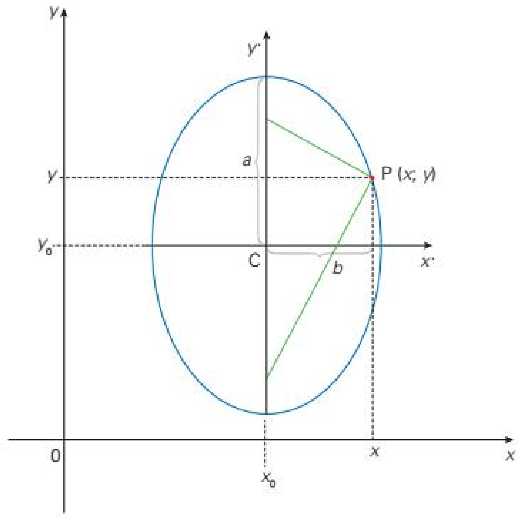
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$\downarrow$ substituindo (I) e (II)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

equação reduzida da elipse com centro em $C(x_0; y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo das abscissas

Analogamente, podemos obter a equação da elipse em que o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas, como indicado na figura a seguir.



A partir da equação:

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

$\downarrow$ substituindo (I) e (II)

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} v = 1$$

equação reduzida da elipse com centro em $C(x_0; y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas

Observações:

1. O sistema referencial $x'Cy'$, conforme visto anteriormente, corresponde a uma **translação** do sistema xOy.
2. Nas duas equações obtidas, caso façamos $x_0 = y_0 = 0$, teremos a elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas xOy.

Exemplo:

Vamos considerar a equação do 2º grau em x e y, dada por $x^2 + 9y^2 - 6x - 36y + 36 = 0$, e verificar se essa equação representa ou não a equação de uma elipse.

- Utilizando trinômios quadrados perfeitos (produtos notáveis), podemos reescrever a equação dada da seguinte maneira:

$$x^2 + 9y^2 - 6x - 36y + 36 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9y^2 - 36y = -36$$
$$x^2 - 6x + 9 \cdot (y^2 - 4y) = -36$$
$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 9 \cdot (y^2 - 4y + 4 - 4) = -36$$
$$(x - 3)^2 - 9 + 9 \cdot (y - 2)^2 + 9 \cdot (-4) = -36$$
$$(x - 3)^2 + 9 \cdot (y - 2)^2 = 9$$
$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

Portanto, a equação é de uma elipse com centro no ponto (3; 2) e eixo focal paralelo ao eixo das abscissas.

Observação:

A área da região limitada por uma elipse pode ser calculada com base nas medidas dos semieixos maior e menor:

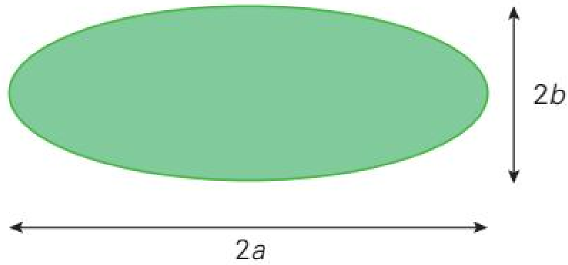


Figura: © DAE

Área da região limitada pela elipse:

$A = \pi ab$,

em que ***a*** é a medida do semieixo maior e ***b*** é a medida do semieixo menor.

Resolva os exercícios no caderno.

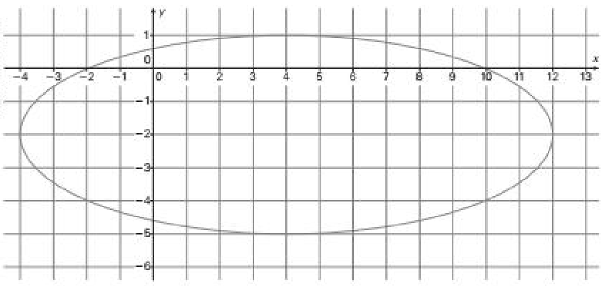
Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

Nessa relação para o cálculo da área limitada por uma elipse, responda: considerando que a e b têm a mesma medida, essa expressão estaria calculando a área de que figura plana?

Exercícios resolvidos

1. Determine a equação da elipse da figura a seguir.



Figuras: © DAE

$2a = 12 - (-4) \rightarrow 2a = 16 \therefore a = 8$

$2b = 1 - (-5) \rightarrow 2b = 6 \therefore b = 3$

Centro: $\left(\frac{-4+12}{2}; \frac{-5+1}{2}\right) = (4; -2)$

Logo:

$$\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

2. Determine o centro, os vértices e a excentricidade da elipse $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$.

$9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

$9(x^2 - 4x) + 4y^2 = 0$

$9 \cdot [(x^2 - 4x + 4) - 4] + 4y^2 = 0$

$9 \cdot (x - 2)^2 - 36 + 4y^2 = 0$

$9(x - 2)^2 + 4y^2 = 36$

$$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Centro: (2; 0)

$a^2 = 9 \therefore a = 3$ e $b^2 = 4 \therefore b = 2$

Vértices: $(2; 0 + 3) = (2; 3)$ e $(2; 0 - 3) = (2; -3)$

$a^2 = b^2 + c^2 \therefore 3^2 = 2^2 + c^2 \therefore c = \sqrt{5}$

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Portanto, as coordenadas do centro são (2; 0), dos vértices são (2; 3) e (2; –3), e a excentricidade é igual a $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. Uma elipse tem centro no ponto (2; 3), o eixo maior (paralelo ao eixo das abscissas) mede 10 e o eixo menor mede 8.

a) Escreva a equação da elipse.

b) Calcule a excentricidade.

c) Represente a elipse em um plano cartesiano.

a) $2a = 10 \therefore a = 5$ e $2b = 8 \therefore b = 4$

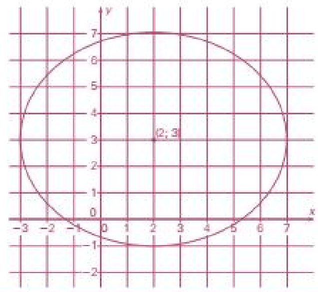
$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{4^2}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

b) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5^2 = 4^2 + c^2 \therefore c = 3$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

c)



Figuras: © DAE

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Com relação à elipse de equação $\frac{(x-1)^2}{81}+\frac{(y+2)^2}{64}=1$, responda:

a) Quais são as coordenadas do seu centro? (1; −2)

b) Quais são as coordenadas dos vértices? (10; −2) e (−8; −2)

2. Uma elipse, cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados, tem centro no ponto (3; 2) e é tangente aos eixos coordenados. Escreva a equação e calcule a excentricidade. Respostas no Manual do Professor.

3. O centro de uma elipse é o ponto (−3; 1), um dos focos é o ponto (−3; 5), e o eixo menor mede 16.

a) Obtenha as coordenadas do outro foco. (−3; −3)

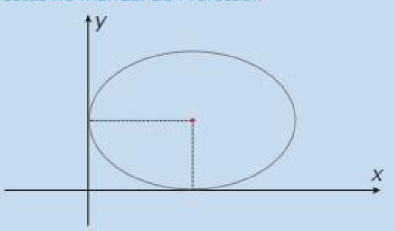
b) Obtenha a medida do eixo maior. $8\sqrt{5}$

c) Escreva a equação da elipse. $\frac{(x+3)^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{80}=1$

4. Determine a equação da elipse conforme dados a seguir. Resposta no Manual do Professor.

- Os focos são os pontos de coordenadas $F_1(1; -3)$ e $F_2(7; -3)$.
- O centro é o ponto C(4; −3).
- A excentricidade da elipse é $\frac{1}{2}$.

5. A elipse representada a seguir tangencia os eixos coordenados e tem seu centro no ponto A(5; 3). Respostas no Manual do Professor.



a) Determine o comprimento do eixo maior.

b) Determine o comprimento do eixo menor.

c) Escreva as coordenadas dos vértices.

d) Escreva as coordenadas dos focos.

e) Calcule a excentricidade dessa elipse.

f) Obtenha a equação reduzida dessa elipse.

6. A equação do 2º grau em x e y representa a equação de uma elipse: $9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$.

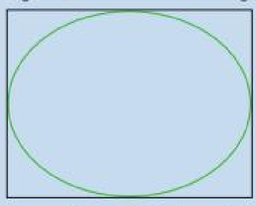
Obtenha: Respostas no Manual do Professor.

a) a equação reduzida dessa elipse;

b) as coordenadas do centro, dos vértices e dos focos dessa elipse;

c) a excentricidade dessa elipse.

7. Uma elipse, cuja equação é $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$ está inscrita em um retângulo, como mostra a figura a seguir:



a) Determine as dimensões do retângulo. Respostas no Manual do Professor.

b) Calcule a área da elipse, utilizando a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.

c) Calcule a área exterior à elipse e interior ao retângulo.

8. Escreva a equação de uma elipse que tem centro coincidindo com o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 200 = 0$, cuja medida do eixo maior, paralelo ao eixo das abscissas, é igual à medida do diâmetro dessa circunferência e que possui excentricidade igual a $\frac{4}{5}$. $\frac{(x-3)^2}{225}+\frac{(y+4)^2}{81}=1$

9. A entrada de um túnel tem o formato de uma semielipse, como mostra a figura a seguir: $2\sqrt{3}$ metros.

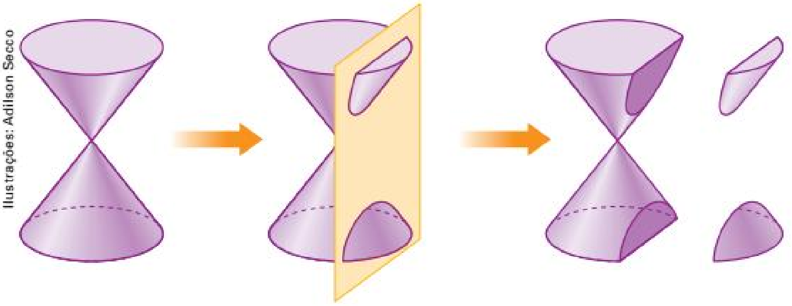
A largura do túnel é de 12 metros, e a altura máxima é de 4 metros. Qual é a altura h do túnel em um ponto do solo localizado a 3 metros de distância do centro?

CAPÍTULO

20 HIPÉRBOLE

Vamos imaginar que construímos dois cones (em que os vértices coincidem) utilizando cera ou outro material que possa ser cortado (como em uma vela). Se considerarmos agora um plano α seccionando esses dois cones (não passando pelos vértices), conforme indica a ilustração a seguir, obtemos uma curva (borda) em cada um dos dois cones. Essas duas curvas nos dão a ideia de uma hipérbole.

Ilustrações: Adilson Secco

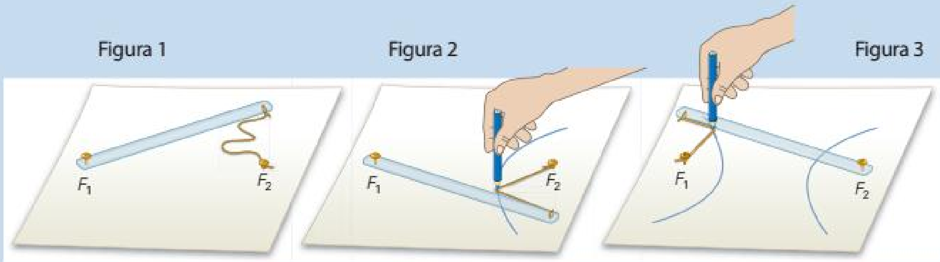


Assim como mencionamos na elipse, você poderá realizar uma experiência simples de construção de uma hipérbole. Essa experiência pode ser executada no chão ou em cima de uma mesa.

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Essa construção pode ser feita em pequenos grupos de acordo com as instruções a seguir.



- Inicialmente consiga uma régua com dois furos em suas extremidades, um barbante de comprimento um pouco menor que a régua, dois alfinetes e uma cartolina.
- A cartolina deverá ser fixada numa superfície plana como a de uma mesa (ou chão).
- Em uma das extremidades da régua (em um dos furos) deverá ser fixado um alfinete (F_1 na figura 1); na outra extremidade (outro furo da régua), uma ponta do barbante. A outra ponta do barbante deverá ser presa pelo outro alfinete na cartolina (F_2 na figura 1), de tal maneira que o módulo da diferença entre o comprimento do barbante e o da régua seja menor que a distância entre F_1 e F_2.
- Utilize o lápis, como indicado na figura 2, para traçar a curva: com a ponta do lápis você deverá pressionar o barbante contra a régua, deslizando-a sobre a cartolina, mantendo sempre esticado o barbante.
- Esse procedimento deverá ser repetido, invertendo-se depois os pontos de fixação da régua na cartolina com a outra extremidade (ver figura 3).

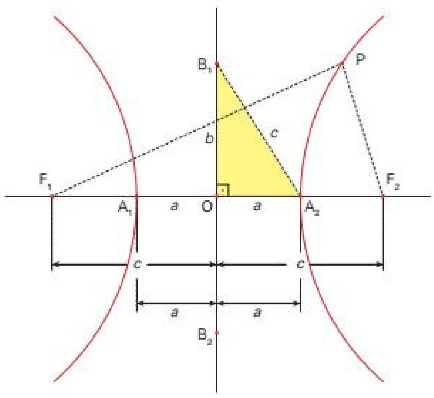
HIPÉRBOLE E SEUS ELEMENTOS

Com base no experimento sugerido anteriormente, podemos traçar a curva conhecida como **hipérbole**. Conforme essa construção, precisamos de dois pontos fixos (os alfinetes: um prendendo a régua e outro prendendo uma das extremidades do barbante), que chamaremos de **focos da hipérbole**.

Agora, vamos definir uma hipérbole:

> **Hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tal que a diferença de suas distâncias (em módulo) a dois pontos fixos desse plano, denominados **focos**, é constante e menor que a distância entre os focos.

Para que possamos compreender melhor a hipérbole, vamos destacar, na figura a seguir, alguns elementos.



- **Focos** – São os pontos fixos representados por F_1 e F_2.
- **Distância focal** – É a distância entre os dois focos: no desenho corresponde a $F_1F_2 = 2c$.
- **Centro** – É o ponto O, ponto médio do segmento F_1F_2.
- **Eixo real ou transverso** – É o segmento A_1A_2 cujo comprimento é $A_1A_2 = 2a$.
- **Eixo imaginário ou conjugado** – É o segmento B_1B_2 cujo comprimento é $B_1B_2 = 2b$.
- **Excentricidade** – Representada pela letra *e*, é a razão $e = \frac{c}{a}$.

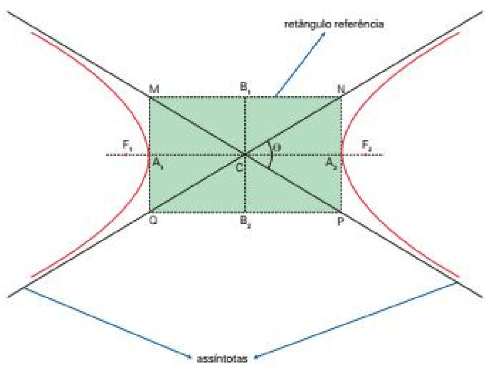
Note que, na figura anterior, aparece destacado um triângulo retângulo. Podemos, com base nele, obter uma relação métrica entre as medidas dos semieixos focal, real e imaginário da hipérbole, isto é:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Observações:

1. A hipérbole possui dois eixos de simetria: eixos real e imaginário.
2. A excentricidade da hipérbole foi apresentada como a razão entre os comprimentos dos semieixos focal e real, logo, considerando que são medidas positivas, de tal forma que $0 < a < c$, podemos dizer que a excentricidade será um número maior que 1, isto é, $e > 1$.

Além dos elementos observados, na construção de uma hipérbole vamos considerar um **retângulo referência** e suas diagonais, que denominaremos **assíntotas da hipérbole**:



Figuras: © DAE

Esse retângulo tem o centro no ponto C (centro da hipérbole) e lados paralelos (MN e QP) ou perpendiculares (MQ e NP) ao eixo real. Note, ainda, que CN = CQ = c (comprimento do semieixo focal). O comprimento do semieixo imaginário é tal que $CB_1 = CB_2 = b$.

O ângulo θ indicado é chamado de **abertura da hipérbole**. Em relação à abertura da hipérbole, pode ocorrer de o ângulo θ ser reto. Teremos, então, como retângulo de referência, um quadrado. Quando isso ocorrer, a curva correspondente será chamada de **hipérbole equilátera**.

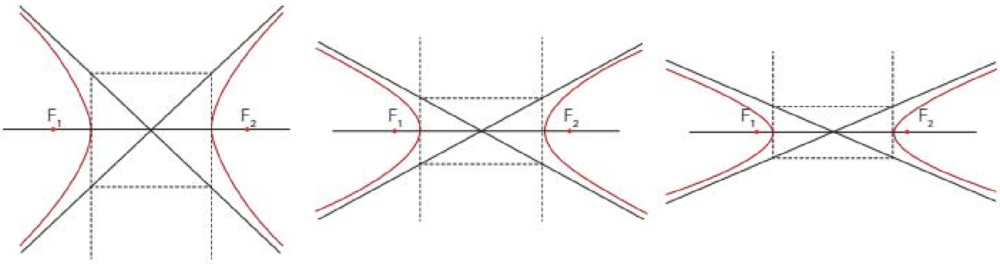
Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

O que dizer sobre os comprimentos dos eixos real e imaginário, no caso da hipérbole equilátera?

Observação:

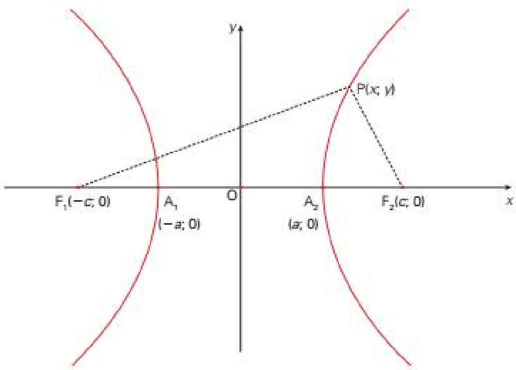
A excentricidade de uma hipérbole fornece uma informação importante a respeito da "abertura". A seguir, temos três hipérboles em que o comprimento do eixo real é o mesmo. Comparando as distâncias entre os focos das hipérboles, vemos que, da primeira para a terceira, elas estão diminuindo. Assim, podemos dizer que a excentricidade da primeira será maior que a excentricidade da segunda, que, por sua vez, será maior que a da terceira, ou seja, quanto maior a excentricidade, maior será a abertura da hipérbole.



EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

De acordo com a definição de hipérbole vista anteriormente, podemos agora obter sua equação no plano cartesiano. Primeiro, vamos considerar o caso em que a hipérbole tem seu centro coincidindo com a origem do plano de coordenadas cartesianas.

Considere a hipérbole com centro no ponto O(0; 0), as extremidades do eixo real nos pontos $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$, e os focos representados pelos pontos $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$, conforme ilustração a seguir.



Figuras: © DAE

Para obter a equação da hipérbole, vamos considerar um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à curva. Assim, pela definição de hipérbole temos:

$$|PF_1 - PF_2| = |A_1F_1 - A_1F_2|$$
$$|PF_1 - PF_2| = |A_1A_2|$$
$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$2a$ representa a constante na definição da hipérbole

Utilizando a fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos de um plano cartesiano por meio de suas coordenadas, temos:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

↓ Elevando ao quadrado

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2$$

↓ Reunindo termos semelhantes

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2-4cx$$

↓ Dividindo por 4 e elevando ao quadrado

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

↓ Reunindo termos semelhantes

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

↓ Multiplicando por - 1

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

↓ Observando a relação: $c^2 = a^2 + b^2$

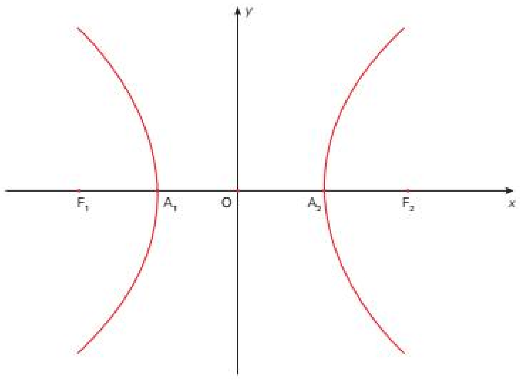
$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

↓ Dividindo por a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

equação reduzida da hipérbole

Essa é a equação da hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e eixo focal pertencente ao eixo das abscissas:

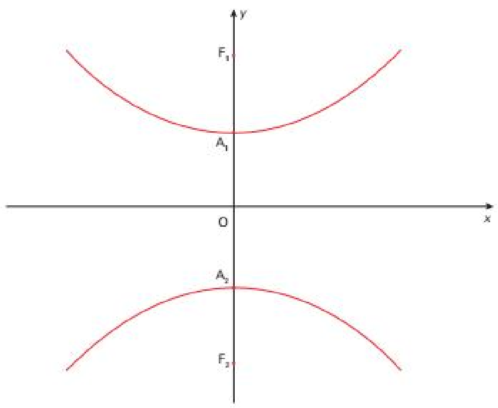


> A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é denominada equação reduzida da hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e focos no eixo das abscissas.

Observação:

Podemos dizer que, se um ponto P(x, y) satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, então esse ponto pertence à hipérbole de centro na origem, de semieixos real e imaginário medindo a e b, cujos focos pertencem ao eixo das abscissas.

Se o eixo focal da hipérbole estiver no eixo das ordenadas e o centro na origem, como será essa equação?



Figuras: © DAE

Demonstra-se, analogamente, que a equação será $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, isto é:

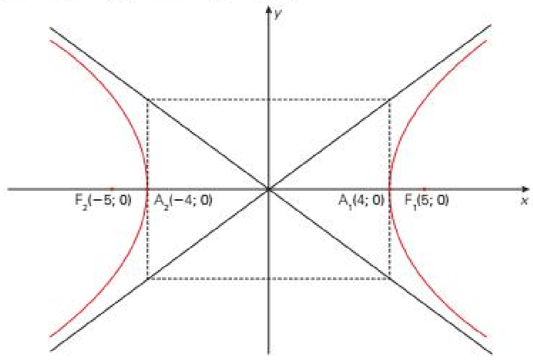
> A equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ é denominada equação reduzida da hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e focos no eixo das ordenadas.

Observação:

Podemos dizer que, se um ponto P(x, y) satisfaz a equação $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, então esse ponto pertence à hipérbole de centro na origem, de semieixos real e imaginário medindo a e b, cujos focos pertencem ao eixo das ordenadas.

Exemplo:

Vamos determinar a equação da hipérbole representada a seguir e calcular sua excentricidade, sendo os focos os pontos $F_1(5; 0)$ e $F_2(-5; 0)$, e os vértices correspondentes às extremidades do eixo real os pontos $A_1(4; 0)$ e $A_2\ (-4; 0)$.



- Conforme informações do enunciado, os focos estão no eixo das abscissas. Além disso, temos:

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$
$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

- Utilizando a relação métrica sobre os comprimentos dos semieixos real, focal e imaginário, podemos determinar o comprimento de b, isto é:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$5^2 = 4^2 + b^2 \Rightarrow b = 3$$

- Conhecendo os valores de a e b, podemos escrever a equação reduzida da hipérbole correspondente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$$

- Cálculo da excentricidade:

$$e = \frac{c}{a}$$
$$e = \frac{5}{4} \Rightarrow e = 1{,}25$$

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Observando o retângulo referência de uma hipérbole podemos determinar o ângulo de abertura. Como determinar o ângulo de abertura conhecendo-se o valor da excentricidade da hipérbole?

2. Qual é a medida do ângulo de abertura da hipérbole do exemplo anterior, cuja excentricidade é 1,25?

Exemplos:

1. Dada a equação $x^2 - 36y^2 = 144$, vamos mostrar que ela representa uma hipérbole e determinar sua excentricidade.

- A equação da hipérbole na forma reduzida possui o segundo membro da igualdade correspondente à unidade. Assim, vamos dividir a equação apresentada, membro a membro, pelo número 144:

$$x^2 - 36y^2 = 144$$
$$\downarrow \div 144$$
$$\frac{x^2}{144} - \frac{36y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{4} = 1$$

- Da forma reduzida da equação da hipérbole, temos:

$$a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$$
$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

- Considerando a relação métrica, podemos obter o comprimento do semieixo focal:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 12^2 + 2^2 \Rightarrow c = \sqrt{148}$$

- Excentricidade:

$$e = \frac{c}{a}$$
$$e = \frac{\sqrt{148}}{12} \Rightarrow e \cong 1{,}014$$

2. Vamos determinar a excentricidade de uma hipérbole equilátera.

- Na hipérbole equilátera, os eixos real e imaginário possuem a mesma medida. Assim, vamos expressar a medida do semieixo focal em função do semieixo real (poderia ser em função do semieixo imaginário):

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\downarrow a = b$$
$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

- Calculando a excentricidade, vem:

$$e = \frac{c}{a}$$
$$e = \frac{a\sqrt{2}}{a} \Rightarrow e = \sqrt{2}$$

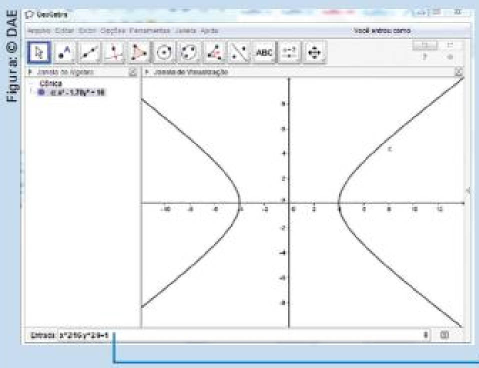
EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Você pode utilizar o GeoGebra (ou Winplot) para representar no plano cartesiano a hipérbole de sua equação. Observe, a seguir, a hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Figura: © DAE



observe como digitamos a equação da hipérbole: x^2/16−y^2/9=1

1. Elabore equações reduzidas de várias hipérboles e explore o GeoGebra obtendo suas curvas no plano cartesiano.

2. Obtenha os gráficos das hipérboles de equações:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \text{ e } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

3. Obtenha os gráficos de duas hipérboles equiláteras com centro na origem: a primeira, com o eixo focal contido no eixo das abscissas e, a segunda, com o eixo focal contido no eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

1. Determine as coordenadas dos focos de uma hipérbole tal que:

- o eixo real mede 6 u.c.;
- o eixo imaginário mede 8 u.c.;
- o eixo real está no eixo das abscissas;
- o centro coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

$2a = 6 \therefore a = 3$ e $2b = 8 \therefore b = 4$

$c^2 = 3^2 + 4^2 \therefore c = 5$

Assim, as coordenadas dos focos da hipérbole são $(-5; 0)$ e $(5; 0)$.

2. Sobre a hipérbole representada pela equação $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ determine:

a) a distância focal;

b) a medida do eixo real;

c) a medida do eixo imaginário.

$a^2 = 16 \therefore a = 4$ e $b^2 = 9 \therefore b = 3$

a) $c^2 = 4^2 + 3^2$

$c^2 = 25 \therefore c = 5$

A distância focal é igual a 10.

b) $2a = 8$

c) $2b = 6$

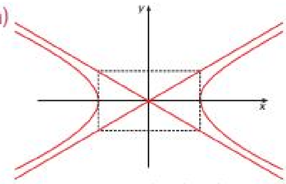
3. Lembrando que a equação do feixe de retas por um ponto é dada por $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, em que m é o coeficiente angular da reta e $(x_0; y_0)$ é um ponto pertencente à reta, é possível obter as equações das assíntotas de uma hipérbole. Por exemplo, considere a hipérbole de equação $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{3} = 1$

a) represente a hipérbole e suas assíntotas em um plano cartesiano ortogonal.

b) qual é a medida do ângulo de abertura dessa hipérbole?

c) quais são as equações das assíntotas?

a)



b) Seja θ o ângulo de abertura dessa hipérbole:

$a^2 = 9 \therefore a = 3$ e $b^2 = 3 \therefore b = \sqrt{3}$

$\text{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \therefore \theta = 60°$

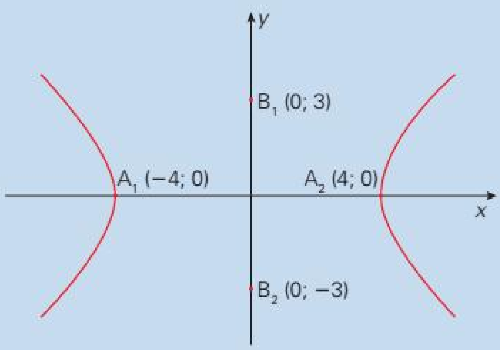
c) $y - 0 = \text{tg}30° \cdot (x - 0)$ e $y - 0 = \text{tg}150° \cdot (x - 0)$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$ e $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Observe a hipérbole representada na figura a seguir e determine:



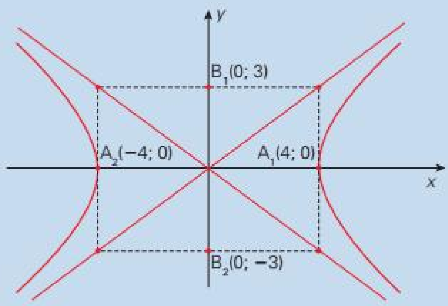
a) as coordenadas dos focos da hipérbole; $(5; 0)$ e $(-5; 0)$

b) a distância focal; 10

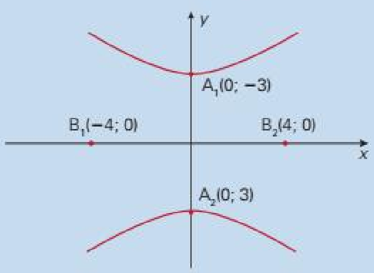
c) a medida do eixo real; 8

d) a medida do eixo imaginário. 6

2. Em relação à atividade 1, represente em seu caderno as assíntotas da hipérbole e calcule sua excentricidade. $e = 1{,}25$



3. Na figura a seguir está representada uma hipérbole cujos eixos real e imaginário medem, respectivamente, 6 e 8.



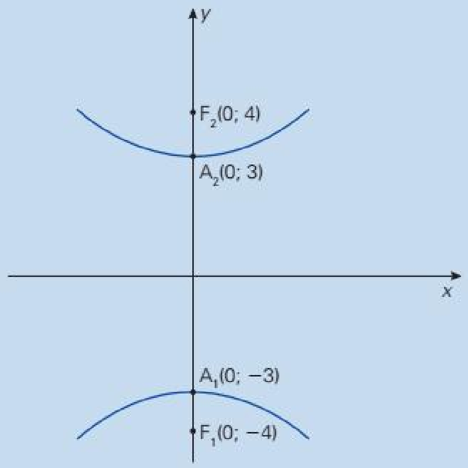
Figuras: © DAE

a) Determine as coordenadas dos focos da hipérbole. (0; 5) e (0; −5).

b) Determine a equação de uma elipse cujos vértices são os focos da hipérbole e cujo eixo menor mede 8. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

4. Determine a medida dos eixos real e imaginário da hipérbole que tem por coordenadas F_1 (5; 0), F_2 (−5; 0), B_1 (0; 4) e B_2 (0; −4), em que F_1 e F_2 são os focos e B_1 e B_2 são as extremidades do eixo imaginário. Eixo real: 6 u.c.; eixo imaginário: 8 u.c.

5. De acordo com as coordenadas dadas, represente em um plano cartesiano a hipérbole, sabendo que seu centro está localizado na origem do sistema cartesiano ortogonal e o eixo real está contido no eixo das ordenadas: F_1 (0; −4), F_2 (0; 4), A_1 (0; −3), e A_2 (0; 3), em que F_1 e F_2 são os focos e A_1 e A_2 são as extremidades do eixo real.



Figuras: © DAE

6. Obtenha a medida do eixo real e as coordenadas dos focos da hipérbole de centro na origem, definida pela equação $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{21} = 1$. Eixo real: 20 u.c.; focos: (−11; 0) e (11; 0).

7. Verifique se são verdadeiras ou falsas as alternativas que representam a hipérbole cuja equação reduzida é

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

I. O seu eixo real está sobre o eixo das ordenadas. F

II. Essa hipérbole tem o seu eixo real sobre o eixo das abscissas. V

III. Nessa hipérbole, temos $b = 6$. V

IV. Nessa hipérbole, temos $a = 10$. F

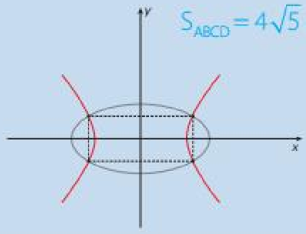
V. O centro da hipérbole coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas. V

VI. A diagonal do retângulo que serve de base para as assíntotas da hipérbole mede $2c$. V

8. Sendo θ a medida do ângulo de abertura de uma hipérbole, é válida a relação: $\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{a}$, em que a e b são, respectivamente, as medidas dos semieixos real e imaginário. Calcule a medida do ângulo de abertura de uma hipérbole cuja excentricidade é igual a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 60°

9. A elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 9$ e a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 4$ se intersectam nos pontos A, B, C e D. Represente a elipse e a hipérbole em um plano cartesiano e calcule a área do retângulo ABCD.

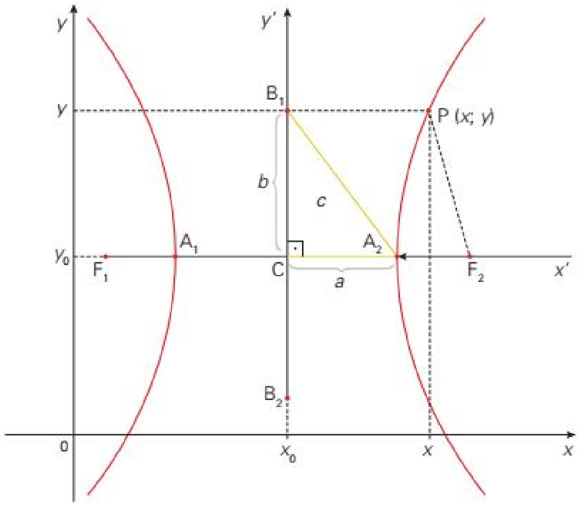
$S_{ABCD} = 4\sqrt{5}$ unidades de área.



EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE COM CENTRO FORA DA ORIGEM

Vimos como obter a equação da hipérbole em que o centro coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e o eixo focal está em um dos dois eixos coordenados. Podemos ampliar esse estudo, considerando a hipérbole quando o centro é outro ponto qualquer, e os eixos (real e imaginário) são paralelos aos eixos coordenados.

Inicialmente, considere uma hipérbole em que o centro é o ponto $C(x_0; x_0)$, e os eixos são paralelos aos eixos coordenados, como representado a seguir.



Figuras: © DAE

Assim como procedemos com a elipse, os eixos indicados x' e y' formam outro sistema de coordenadas cartesianas em que o centro é o ponto C (outro referencial). Assim, a equação da correspondente hipérbole nesse sistema é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Analogamente à elipse, podemos substituir $\boldsymbol{x'}$ e $\boldsymbol{y'}$, nessa equação, por:

$$x' = x - x_0$$
$$y' = y - y_0$$

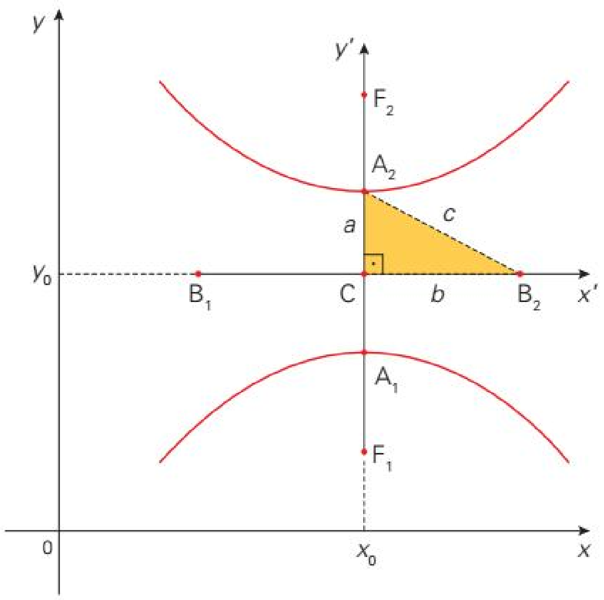
Ou seja:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

↓ substituindo (I) e (II)

$$\underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}_{\text{equação reduzida da hipérbole com centro em } C(x_0;\, y_0) \text{ e eixo focal paralelo ao eixo das abscissas.}}$$

Analogamente, podemos obter a equação da hipérbole em que o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas, como indicado na figura a seguir.



A partir da equação:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

↓ substituindo (I) e (II)

$$\underbrace{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1}_{\text{equação reduzida da hipérbole com centro em } C(x_0;\, y_0) \text{ e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas.}}$$

Observações:

1. O sistema referencial $x'Cy'$, conforme visto anteriormente, corresponde a uma **translação** do sistema xOy.
2. Nas duas equações obtidas, caso façamos $x_0 = y_0 = 0$, teremos a hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas xOy.

Exemplo:

Vamos considerar a equação do 2º grau em x e y, dada por $x^2 - 9y^2 - 6x - 36y - 52 = 0$, e verificar se essa equação representa ou não a equação de uma hipérbole.

- Utilizando trinômios quadrados perfeitos (produtos notáveis), podemos reescrever a equação dada da seguinte maneira:

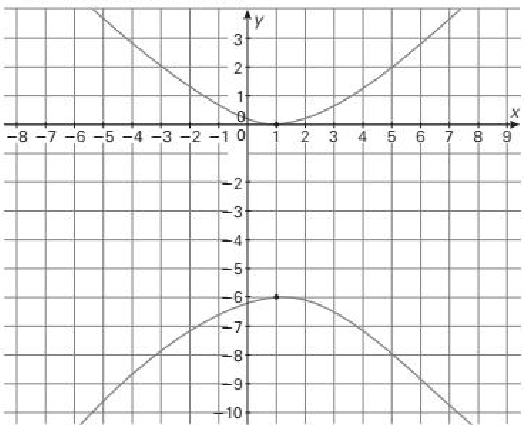
$$x^2 - 9y^2 - 6x - 36y - 52 = 0$$
$$x^2 - 6x - 9y - 36y = 52$$
$$x^2 - 6x + 9 - 9 - 9 \cdot (y^2 + 4y + 4 - 4) = 52$$
$$(x^2 - 3)^2 - 9 - 9 \cdot (y + 2)^2 - 9 \cdot (-4) = 52$$
$$(x^2 - 3)^2 - 9 \cdot (y + 2)^2 = 52$$
$$\frac{(x - 3)^2}{25} - \frac{(y - 2)^2}{\frac{25}{9}} = 1$$

Portanto, a equação é de uma hipérbole com centro no ponto (3; –2) e eixo focal paralelo ao eixo das abscissas.

Exercícios resolvidos

1. Obtenha a equação da hipérbole equilátera representada na figura a seguir.

Figuras: © DAE



$2a = 6 \therefore a = 3$

$2b = 6 \therefore b = 3$

Centro: $(1; -3)$

Logo:

$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

2. Determinar a equação da hipérbole com eixo real paralelo ao eixo das abscissas, com centro em $(-1; 4)$, eixo real medindo 16 e distância focal medindo 28.

Eixo real: $2a = 16 \therefore a = 8$

Distância focal: $2c = 28 \therefore c = 14$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 14^2 = 8^2 + b^2 \therefore b^2 = 132$

Logo:

$$\frac{(x+1)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{132} = 1$$

3. Determine as equações das assíntotas da hipérbole $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

$a^2 = 25 \therefore a = 5$

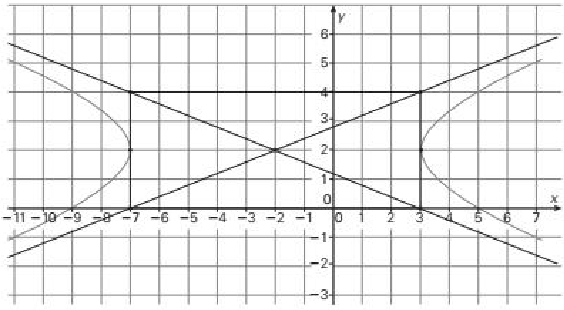
$b^2 = 4 \therefore b = 2$

Uma das assíntotas passa pelos pontos: $(2; 2)$, $(-2-5; 2-2) = (-7; 0)$ e $(-2+5; 2+2) = (3; 4)$. Escolhendo dois desses pontos, sua equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -7 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \therefore 2x - 5y + 14 = 0$$

A outra assíntota passa pelos pontos: $(-2; 2)$, $(-2-5; 2+2) = (-7; 4)$ e $(-2+5; 2-2) = (3; 0)$. Escolhendo dois desses pontos, sua equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -7 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \therefore 2x + 5y - 6 = 0$$

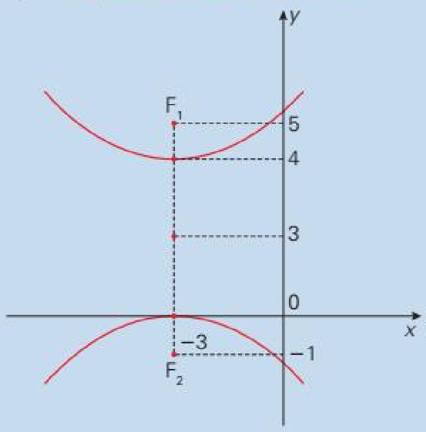


Portanto, as equações das assíntotas são $2x - 5y + 14 = 0$ e $2x + 5y - 6 = 0$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Obtenha a equação da hipérbole representada na figura a seguir: Respostas no Manual do Professor.



2. Obtenha a equação de uma hipérbole com centro no ponto $(2; 5)$ e um dos vértices no ponto $(5; 5)$, cuja distância focal é igual a 10.
Resposta no Manual do Professor.

3. Uma hipérbole tem equação $\frac{(x+9)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{20} = 1$.
Respostas no Manual do Professor.

a) Quais são as coordenadas do centro dessa hipérbole?

b) Quais são as coordenadas dos focos dessa hipérbole?

c) Qual é a sua distância focal?

d) Qual é a excentricidade da hipérbole?

4. Escreva as coordenadas dos focos da hipérbole de equação $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{48} = 1$. $(-5; 11)$ e $(-5; -5)$

5. O centro de uma hipérbole coincide com o foco de abscissa positiva da elipse de equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. Respostas no Manual do Professor.

Além disso, um dos vértices da hipérbole coincide com o ponto de abscissa positiva correspondente à extremidade do eixo maior da elipse. Considerando que a hipérbole passa pelo ponto (0; 5):

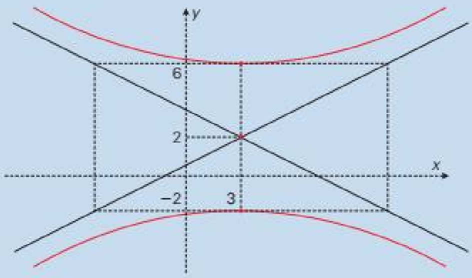
a) quais são as coordenadas do centro da hipérbole?

b) qual é a equação da hipérbole?

c) represente a hipérbole e a elipse em um mesmo plano cartesiano.

6. A equação da hipérbole, representada no plano cartesiano a seguir, é dada por $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{64} = 1$. Respostas no Manual do Professor.

Determine:



Figuras: © DAE

a) as coordenadas do centro, dos vértices e dos focos da hipérbole;

b) as equações das assíntotas.

7. Quando a equação de uma hipérbole não se encontra na forma canônica, ou seja, na forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} =$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ podemos transformar a equação utilizando procedimentos algébricos.

Observe o exemplo:

$4x^2 - 9y^2 = 36$

Dividimos, então, a equação por 36:

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

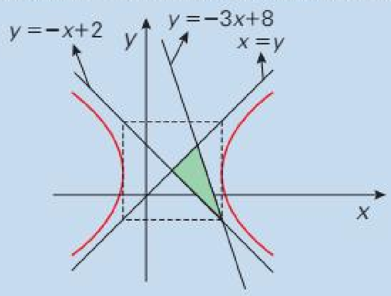
Utilize o procedimento descrito anteriormente para escrever as equações das hipérboles na forma canônica.

a) $9x^2 - 25y^2 = 225$ Respostas no Manual do Professor.

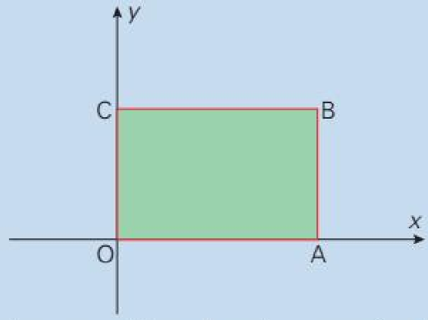
b) $y^2 - x^2 = 4$

c) $2x^2 - 3y^2 = -6$

8. Calcule a área do triângulo determinado pelas assíntotas da hipérbole de equação $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ e a reta de equação $y = -3x + 8$, representadas na figura a seguir. 2 unidades de área.



9. Considere, no plano cartesiano abaixo, o desenho de um retângulo OABC, de tal maneira que as coordenadas do ponto B sejam (6; 4).



Elabore um problema de modo que o retângulo acima represente o "retângulo referência" para uma hipérbole nesse plano cartesiano. Resposta pessoal.

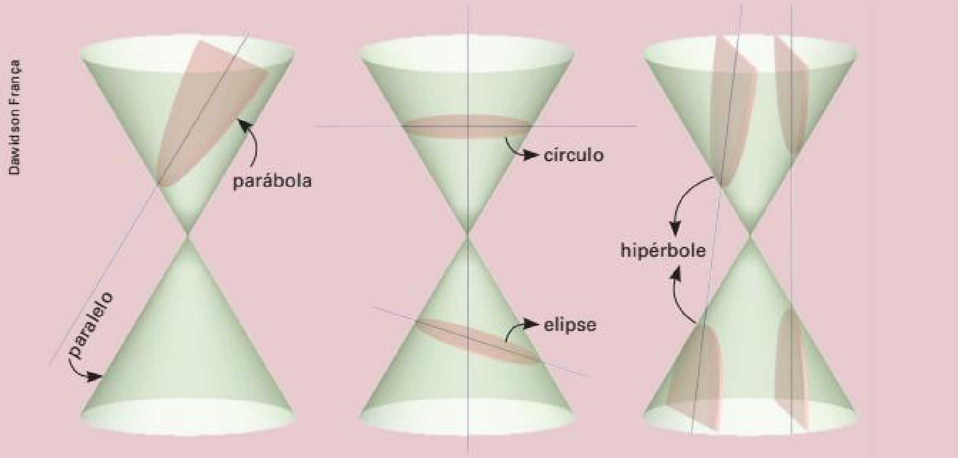
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Na história da Matemática, os conceitos são mais importantes que a terminologia, mas a mudança de nome das secções cônicas teve significado mais profundo do que o usual. Durante cerca de um século e meio as curvas não tinham tido designações além de descrições banais do modo pelo qual tinham sido descobertas – secções de cones acutângulo (*oxytome*), secções de cone retângulo (*orthotome*) e secções de cone obtusângulo (*amblytome*). Arquimedes tinha continuado a usar esses nomes (embora se diga que também usou o nome "parábola" como sinônimo para secção de cone retângulo). Foi Apolônio (talvez seguindo sugestão de Arquimedes) quem introduziu os nomes "elipse" e "hipérbole" para essas curvas. Leia os textos a seguir.

As palavras *elipse*, *parábola* e *hipérbole* não foram inventadas expressamente; e, provieram de uso anterior, provavelmente dos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. *Ellipsis* (significa que falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada); *hyperbola* (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra *parábola* (colocar ao lado ou comparar) não indicava nem excesso nem deficiência.

Fonte: Disponível em: < astro.if.ufrgs.br >.



Apolônio aplicou essas palavras num contexto novo como nomes para as secções planas. A equação familiar moderna para a parábola com vértices na origem é $y^2 = lx$ (em que *l* é o *lactus rectum* ou parâmetro, agora frequentemente representado por 2p, ou ocasionalmente por 4p). Isto é, a parábola tem a propriedade que para qualquer ponto sobre ela o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abscissa *x* e o parâmetro *l*. As equações da elipse e da hipérbole, também com um vértice como origem, são $(x \pm a)^2 / a^2 \pm y^2 / b^2 = 1$ ou $y^2 = lx\, b^2x^2 / a^2$ (em que l é novamente *lactus rectum* ou parâmetro $2b^2$ / a). Isto é, para a elipse $y^2 < lx$ e para a hipérbole $y^2 > lx$, são as propriedades das curvas que são representadas por essas desigualdades que sugeriram os nomes dados por Apolônio há mais de dois milênios e que ainda estão firmemente associados a ele.

O comentador Eutocius foi responsável por uma impressão errônea, ainda bastante difundida, de que as palavras elipse, parábola e hipérbole foram adotadas por Apolônio para indicar que o plano de secções não atingia, passava ao lado ou cortava a segunda folha do cone. Não é isso que Apolônio afirmou em *As cônicas*.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010. p. 100.

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

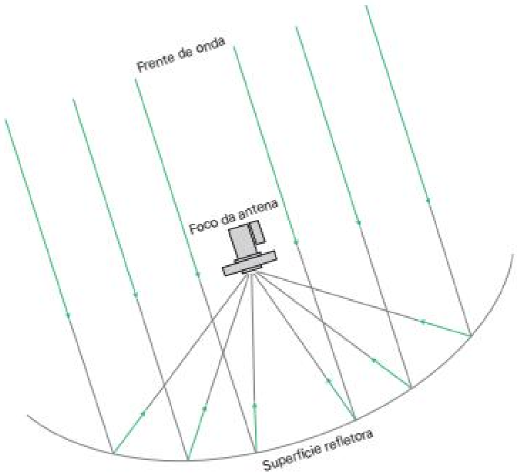
De acordo com os textos, responda:

1. Além de descrições banais, que tipos de designações as secções cônicas tinham?
2. Como surgiram as palavras elipse, parábola e hipérbole? O que elas significavam?

CAPÍTULO

21 PARÁBOLA

As antenas que captam sinais do espaço (por exemplo, sinais de satélites) são parabólicas. O motivo pode ser observado na ilustração a seguir. Como os sinais que recebemos são muito fracos, é necessário que sejam captados e amplificados. Na ilustração abaixo, os sinais atingem a antena e convergem para um ponto. Esse ponto, conforme comentaremos mais adiante, é o foco da parábola.



Adilson Secco

Outro exemplo da presença de curvas são certas construções, como a Ponte Juscelino Kubitschek, também conhecida como Ponte JK. Situada em Brasília, ela liga o Lago Sul, Paranoá e São Sebastião à parte central do chamado Plano Piloto.

Stefan Kolumban/Pulsar Imagens

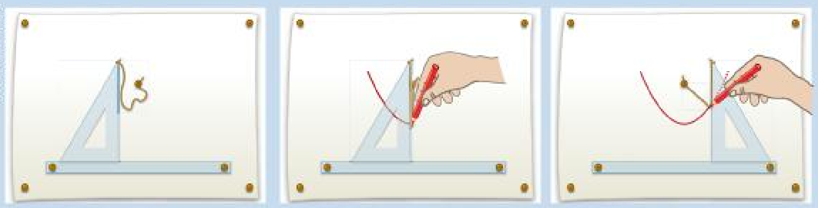
Ponte Juscelino Kubitscheck sobre o Lago Paranoá, Brasília, DF. Foto de 2013.

No volume 1 desta Coleção, estudamos que o gráfico, no plano cartesiano, de qualquer função quadrática é uma curva denominada **parábola**. Agora faremos uma ampliação desse estudo, seguindo a mesma ideia dos dois capítulos anteriores. Inicialmente, veremos como podemos obter uma parábola.

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Você ainda pode realizar uma experiência – assim como foi sugerido para o caso da hipérbole e da elipse – para desenhar uma parábola. Tenha em mão uma cartolina, uma régua, um esquadro, um barbante cujo comprimento corresponda à mesma medida do cateto maior do esquadro e um alfinete.



Adilson Secco

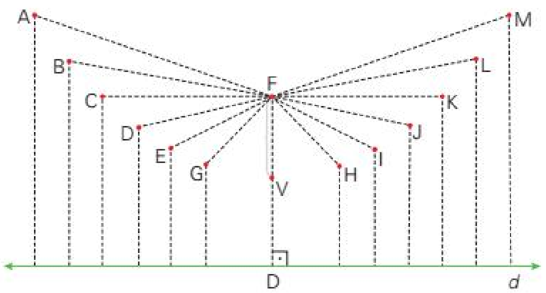
Figura 1 Figura 2 Figura 3

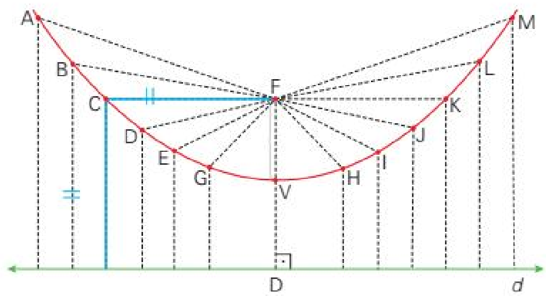
- Após prender a cartolina numa superfície plana (chão ou mesa), fixe uma extremidade do barbante no ponto A, conforme a figura 1, isto é, na extremidade do esquadro. A outra extremidade do barbante deve ser presa num ponto F.
- Pressionando o barbante contra o esquadro com a ponta do lápis, conforme as figuras 1 e 2, movimente o esquadro rente à régua (que permanece fixa).
- Assim, deslocando o esquadro e mantendo o barbante esticado, a ponta do lápis desenhará uma parte da parábola.
- Quando, nesse movimento, o esquadro passar do ponto F (figura 2 para figura 3), deve-se inverter a posição dele para continuar o desenho.

A curva construída, conforme sugestão anterior, é uma **parábola**. O ponto F será chamado de **foco** da parábola. Se traçar uma reta utilizando a posição da régua que permaneceu fixa, você obterá a **diretriz** da parábola.

Parábola e seus elementos

Na figura a seguir, sugerimos outra possibilidade de construção: inicialmente, marcam-se pontos que sejam equidistantes do ponto F e da reta *d*, para depois ligá-los por meio de uma curva. A reta indicada pela letra *d* corresponde à diretriz da parábola.





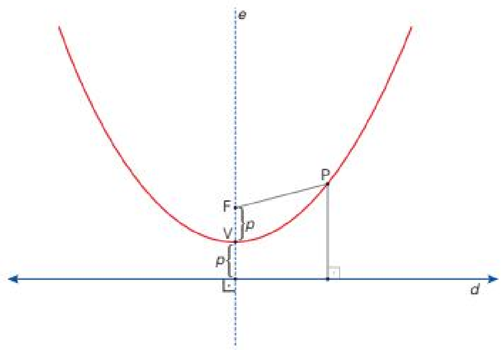
Figuras: © DAE

Observando atentamente a figura, é possível perceber que cada ponto marcado está situado à mesma distância da diretriz e do foco. É isso que caracteriza essa curva!

Agora, vamos definir uma parábola:

> **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos de um plano que distam igualmente de uma reta fixa (diretriz) e de um ponto fixo (foco) não pertencente à diretriz.

Para que possamos compreender melhor, vamos destacar a seguir alguns dos elementos da parábola:



- **Foco** – É o ponto fixo representado por F.
- **Reta diretriz** – É a reta *d*.
- **Eixo de simetria** – É a reta *e* que passa pelo foco F, perpendicularmente à diretriz.
- **Vértice** – É o ponto V, interseção da parábola com o eixo de simetria.
- **Parâmetro** – É a distância $2p$ do foco à diretriz.

Observações:

1. Conforme a definição de parábola, se um ponto P pertence à parábola, ele estará situado à mesma distância do foco F e da reta diretriz *d*. Assim, conforme figura, temos $d_{P,F} = d_{P,d}$.
2. Como o ponto V (vértice) pertence à parábola, ele está situado à mesma distância do foco e da reta diretriz. Assim, temos $d_{V,F} = d_{V,d} = p$.

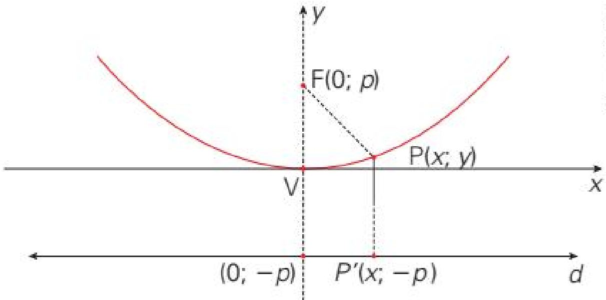
Equação reduzida da parábola

Com base na definição de parábola, podemos agora obter a equação no plano cartesiano.

Analise cada caso a seguir, em que o vértice é a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

1º caso – Eixo de simetria no eixo das ordenadas e concavidade voltada para cima.

Considere a parábola com vértice na origem, isto é, V(0; 0), o foco no ponto F(0; p) e a reta diretriz d dada pela equação $y + p = 0$ (p é um número real positivo correspondente à metade do parâmetro).



Figuras: © DAE

- Para obter a equação reduzida da parábola, consideramos um ponto P(x, y) qualquer pertencente à curva. Pela definição de parábola, sendo $d_{P,F}$ a distância do ponto P ao ponto F, e $d_{P,d}$ a distância do ponto P à diretriz d (é igual a $d_{P,P'}$), temos:

$$d_{P,F} = d_{P,d}$$

$$d_{P,F} = d_{P,P'}$$

↓ fórmula de distância entre dois pontos

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

↓ elevando ao quadrado, membro a membro

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (x-x)^2 + (y+p)^2$$

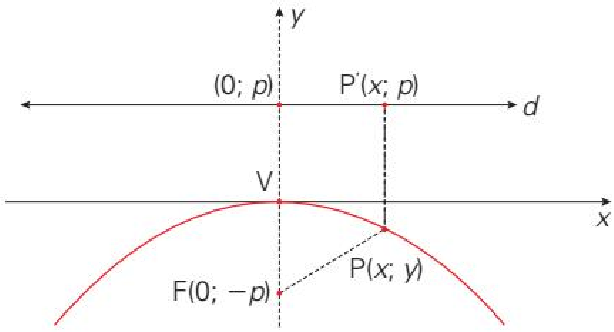
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = 0^2 + y^2 + 2py + p^2$$

$$\underbrace{x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{1}{4p}x^2}$$

equação reduzida da parábola com vértice na origem, foco F(0; p) e reta diretriz $y + p = 0$

2º caso – Eixo de simetria no eixo das ordenadas e concavidade voltada para baixo.

Considere a parábola com vértice na origem, isto é, V(0; 0), o foco no ponto F(0; $-p$) e a reta diretriz d dada pela equação $y - p = 0$ (p é um número real positivo correspondente à metade do parâmetro).



- Para obter a equação reduzida da parábola, consideramos um ponto P(x, y) qualquer pertencente à curva. Pela definição de parábola, sendo $d_{P,F}$ a distância do ponto P ao ponto F, e $d_{P,d}$ a distância do ponto P à diretriz d (é igual a $d_{P,P'}$), temos:

$$d_{P,F} = d_{P,d}$$

$$d_{P,F} = d_{P,P'}$$

↓ fórmula de distância entre dois pontos

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2}$$

↓ elevando ao quadrado, membro a membro

$$(x-0)^2 + (y+p)^2 = (x-x)^2 + (y-p)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = 0^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$\underbrace{x^2 = -4py \Rightarrow y = -\frac{1}{4p}x^2}$$

equação reduzida da parábola com vértice na origem, foco F(0; $-p$) e reta diretriz $y - p = 0$

Resolva os exercícios no caderno.

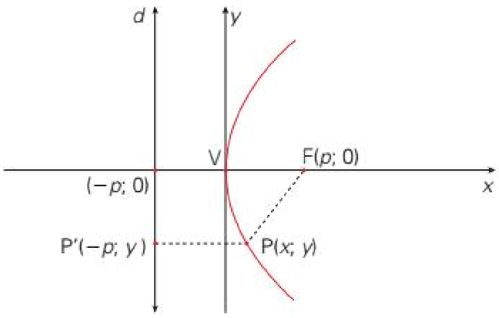
Questões e reflexões

Resposta no Manual do Professor.

Pelas equações reduzidas das duas parábolas, como você verifica se a concavidade é voltada para cima ou para baixo?

3º caso – Eixo de simetria no eixo das abscissas e concavidade voltada para a direita.

Considere a parábola com vértice na origem, isto é, V(0; 0), o foco no ponto F(p; 0), e a reta diretriz d dada pela equação $x + p = 0$ (p é um número real positivo correspondente à metade do parâmetro).



- Para obter a equação reduzida da parábola, consideramos um ponto P(x, y) qualquer pertencente à curva. Pela definição de parábola, sendo $d_{P,F}$ a distância do ponto P ao ponto F, e $d_{P,d}$ a distância do ponto P à diretriz *d* (é igual a $d_{P,P'}$), temos:

$$d_{P,F} = d_{P,d}$$
$$d_{P,F} = d_{P,P'}$$

↓ fórmula de distância entre dois pontos

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

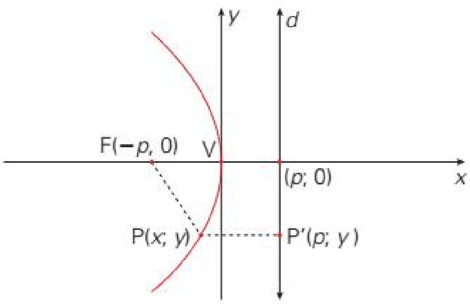
↓ elevando ao quadrado, membro a membro

$$(x-p)^2 + (y-0)^2 = (x+p)^2 + (y-y)^2$$
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 + 0^2$$
$$y^2 = 4px \Rightarrow x = \frac{1}{4p}y^2$$

equação reduzida da parábola com vértice na origem, foco F(*p*; 0) e reta diretriz $x + p = 0$

4º caso – Eixo de simetria no eixo das abscissas e concavidade voltada para a esquerda.

Considere a parábola com vértice na origem, isto é, V(0; 0), o foco no ponto F(−*p*; 0) e a reta diretriz *d* dada pela equação $x - p = 0$ (*p* é um número real positivo correspondente à metade do parâmetro).



- Para obter a equação reduzida da parábola, consideramos um ponto P(x, y) qualquer pertencente à curva. Pela definição de parábola, sendo $d_{P,F}$ a distância do ponto P ao ponto F, e $d_{P,d}$ a distância do ponto P à diretriz *d* (é igual a $d_{P,P'}$), temos:

$$d_{P,F} = d_{P,d}$$
$$d_{P,F} = d_{P,P'}$$

↓ fórmula de distância entre dois pontos

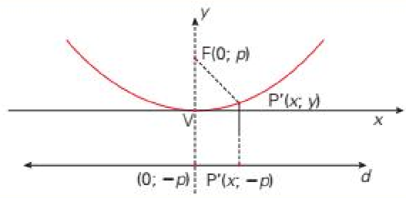
$$\sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2}$$

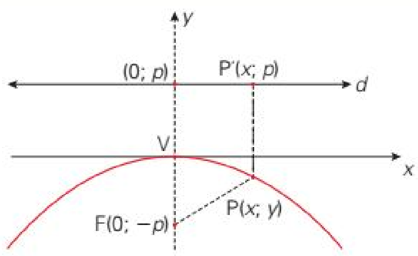
↓ elevando ao quadrado, membro a membro

$$(x+p)^2 + (y-0)^2 = (x-p)^2 + (y-y)^2$$
$$x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 + 0^2$$
$$y^2 = -4px \Rightarrow x = -\frac{1}{4p}y^2$$

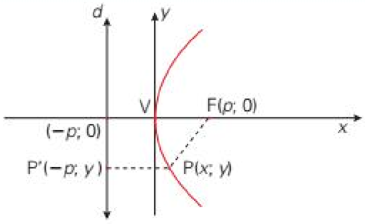
equação reduzida da parábola com vértice na origem, foco F(−*p*; 0) e reta diretriz $x - p = 0$

Os quadros a seguir resumem os quatro casos de parábolas observados anteriormente:

PARÁBOLA

CONCAVIDADE
Voltada para cima (coeficiente de x^2 é maior que zero).
EQUAÇÃO
$y = \frac{1}{4p}x^2$

PARÁBOLA

CONCAVIDADE
Voltada para baixo (coeficiente de x^2 é menor que zero).
EQUAÇÃO
$y = -\frac{1}{4p}x^2$

PARÁBOLA



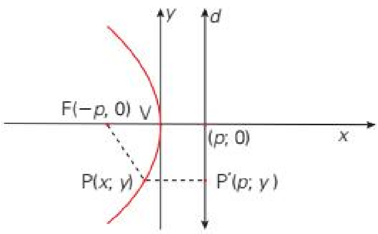
CONCAVIDADE

Voltada para direita
(coeficiente de y^2 é maior que zero).

EQUAÇÃO

$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

PARÁBOLA



CONCAVIDADE

Voltada para esquerda
(coeficiente de y^2 é menor que zero).

EQUAÇÃO

$$x = -\frac{1}{4p}y^2$$

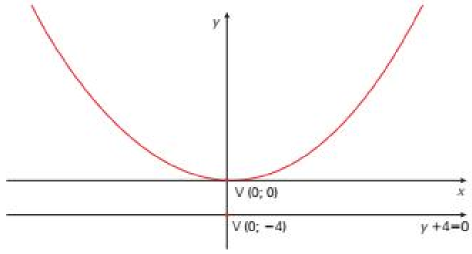
Observações:

Nos quatro casos vistos, chegamos às equações a partir das parábolas. É importante, embora não façamos tais demonstrações, que você compreenda que as recíprocas também são verdadeiras. Em outras palavras, dadas as equações, podemos obter as parábolas, conforme os casos mencionados no quadro.

Exemplos:

1. Vamos obter a equação da parábola com vértice na origem do sistema de coordenadas cartesianas, concavidade voltada para cima e equação da diretriz dada por $y + 4 = 0$.

- Conhecendo as coordenadas do vértice e a equação da diretriz, podemos fazer um esboço da parábola correspondente:

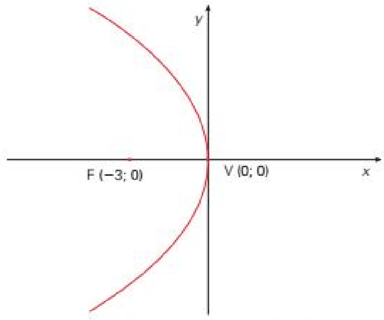


- Como $2p$ (parâmetro da parábola) é a distância do foco à diretriz, p representará a distância da diretriz ao vértice, isto é, $p = 4$. Sendo a concavidade da parábola voltada para cima, podemos obter sua equação:

$$y = \frac{1}{4p} \cdot x^2$$

$$y = \frac{1}{4 \cdot 4} \cdot x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{16}x^2$$

2. A partir do gráfico a seguir, vamos obter a equação da parábola correspondente.



Figuras: © DAE

- Como $2p$ é o dobro da distância do foco ao vértice da parábola, é imediato obtermos o valor de p a partir das coordenadas do foco e do vértice:

$$p = 0 - (-3) \Rightarrow p = 3$$

- Assim, a equação da parábola com a concavidade voltada para a esquerda, conforme o gráfico, é:

$$x = -\frac{1}{4p} \cdot y^2$$

$$x = -\frac{1}{4 \cdot 3} \cdot y^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{12}y^2$$

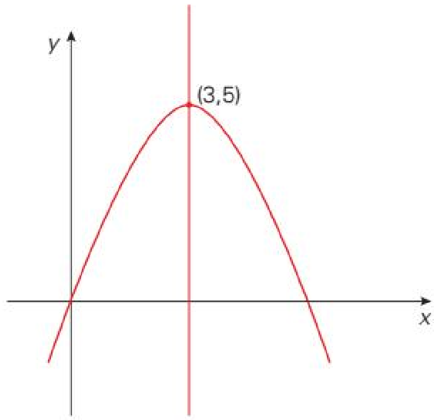
Observação:

Caso seja possível, utilize o GeoGebra para construir os gráficos de algumas parábolas a partir de suas equações.

Exercícios resolvidos

1. Represente, no plano cartesiano, uma parábola cujo vértice é o ponto (3; 5), a concavidade é voltada para baixo e ela passa pela origem. Represente, também, o eixo de simetria da parábola e escreva sua equação.

Figuras: © DAE



Como a reta que representa o eixo de simetria da parábola tem $x = 3$ para qualquer valor de y, temos que a equação do eixo de simetria da parábola é $x = 3$.

2. O eixo de simetria de uma parábola com vértice na origem é o eixo das abscissas. Escreva a equação dessa parábola sabendo que ela passa pelo ponto $(-5; 5\sqrt{2})$.

A equação da parábola é do tipo:

$$x = -\frac{1}{4p} \cdot y^2$$

Logo:

$$-5 = -\frac{1}{4p} \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 \therefore 4p = 10$$

$$x = -\frac{1}{10} \cdot y^2$$

3. A equação de uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano é representada por $2x^2 + 5y = 0$. Determine:

a) as coordenadas do foco;

b) a equação da reta diretriz.

$$2x^2 + 5y = 0 \therefore y = -\frac{2}{5} \cdot x^2$$

a) $-\frac{1}{4p} = -\frac{2}{5} \therefore p = \frac{5}{8}$

Assim, as coordenadas do foco da parábola são $\left(0; -\frac{5}{8}\right)$.

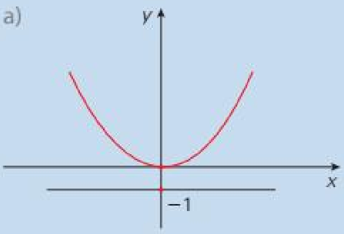
b) A equação da reta diretriz é $y = \frac{5}{8}$ ou $y - \frac{5}{8} = 0$.

Exercícios propostos

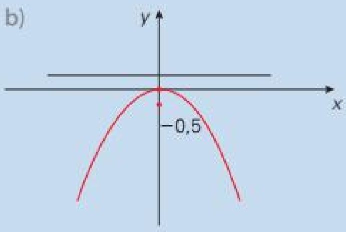
Resolva os exercícios no caderno.

1. Nas parábolas representadas nas figuras a seguir, escreva as coordenadas dos pontos correspondentes ao vértice, ao foco, e obtenha a equação da reta diretriz.

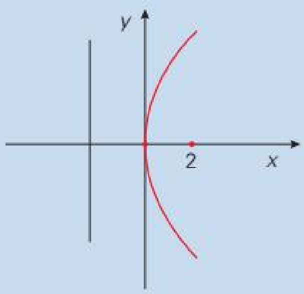
a)



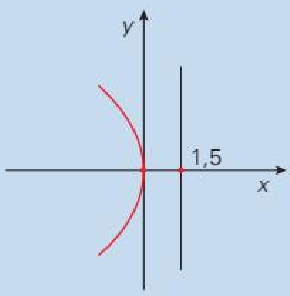
b)



c)



d)



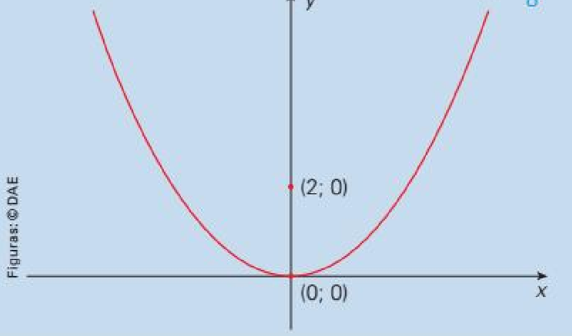
Respostas no Manual do Professor.

2. Em cada uma das parábolas do exercício anterior, diga se a concavidade é voltada para cima, para baixo, para a esquerda ou para a direita.
Respostas no Manual do Professor.

3. Vértice, foco e equação da reta diretriz: se conhecermos dois desses elementos de uma parábola, podemos determinar o terceiro e, além disso, dizer para onde a concavidade está voltada. Sendo assim, responda:
   a) qual é o vértice e para onde está voltada a concavidade de uma parábola cujo foco é o ponto (0; 3) e cuja reta diretriz tem equação $y = -3$?
   b) qual é a equação da reta diretriz e para onde está voltada a concavidade de uma parábola cujo foco é o ponto (4; 0) e o vértice é o ponto (1; 0)?
   c) qual é o foco e para onde está voltada a concavidade de uma parábola cujo vértice é o ponto (–1; 2) e a reta diretriz tem equação $x = 1$?
   d) qual é o vértice e para onde está voltada a concavidade de uma parábola cujo foco é o ponto (–4; –1) e a reta diretriz tem equação $y = 5$?
   Respostas no Manual do Professor.

4. Indique, em seu caderno, V ou F, conforme as afirmações a seguir sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.
   a) A reta diretriz de uma parábola é perpendicular ao eixo de simetria. V
   b) O foco da parábola não pertence ao seu eixo de simetria. F
   c) O ponto de encontro da parábola com seu eixo de simetria é o vértice da parábola. V
   d) Uma parábola, representada no plano cartesiano, tem seu vértice situado sempre na origem desse sistema de coordenadas. F
   e) As distâncias do vértice de uma parábola à reta diretriz e desse mesmo vértice ao correspondente foco são iguais. V
   f) A distância do foco ao vértice de uma parábola é a metade da distância desse mesmo foco à reta diretriz dessa parábola. V

5. Uma parábola tem vértice na origem e foco no ponto (2; 0).
   Obtenha:
   a) a equação da reta diretriz dessa parábola;
   $x = -2$ ou $x + 2 = 0$
   b) a equação reduzida dessa parábola.
   $y = \frac{1}{8} \cdot x^2$



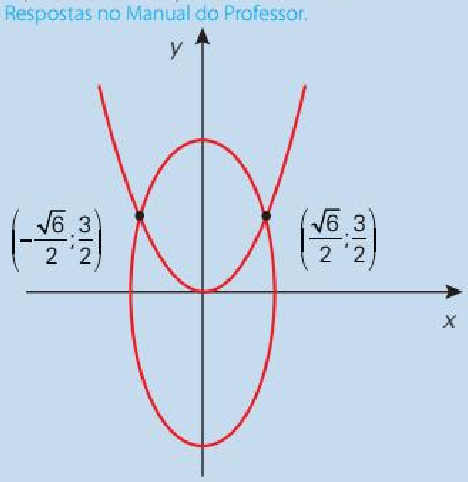
Figuras: © DAE

6. Obtenha o valor de m, para que o foco da parábola de equação $x^2 = 2my$, cujo vértice coincide com a origem do sistema cartesiano, seja o ponto F(0; 4). $m = 8$

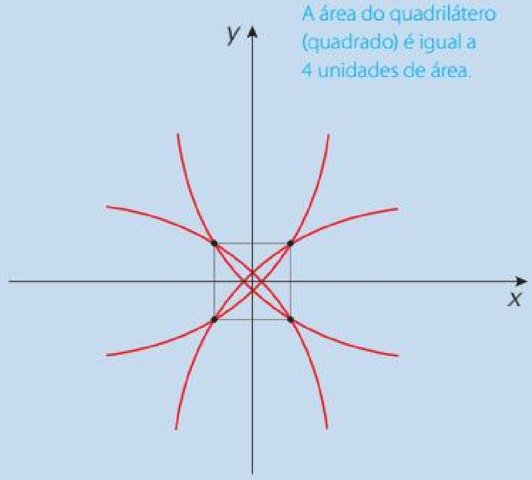
7. Sabendo que o vértice da parábola cuja equação é $y^2 = -20x$ coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, indique:
   a) em qual dos eixos cartesianos está o foco da parábola. O foco da parábola está localizado no eixo das abscissas.
   b) a equação da reta diretriz. $x = 5$ ou $x - 5 = 0$

8. Determine os pontos de interseção da parábola de equação $x^2 = 4y$ e da reta de equação $4x - 4y - 3 = 0$.
   Respostas no Manual do Professor.

9. Determine os pontos de interseção da parábola de equação $y = x^2$ e da elipse de equação $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   Em seguida, represente em seu caderno a parábola e a elipse no mesmo plano cartesiano.
   Respostas no Manual do Professor.



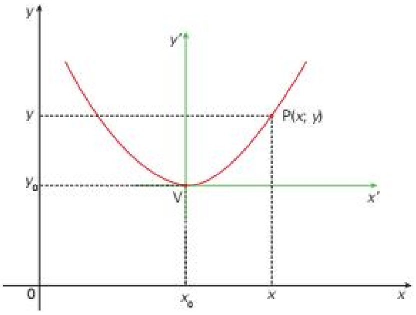
10. Representе, em um mesmo plano cartesiano, as parábolas correspondentes às equações $y^2 = x$, $y^2 = -x$, $x^2 = y$ e $x^2 = -y$. Em seguida, desenhe o quadrilátero formado pelos pontos de interseção de duas quaisquer dessas curvas diferentes da origem. Finalmente, calcule a área desse quadrilátero.
    A área do quadrilátero (quadrado) é igual a 4 unidades de área.



Equação da parábola com vértice fora da origem

Vimos como obter a equação da parábola com vértice na origem e eixo de simetria no eixo das abscissas ou no eixo das ordenadas. Agora, vamos considerar a parábola com o centro em outro ponto qualquer (diferente da origem) e o eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados. Também, aqui, teremos quatro casos.

1º caso – O eixo de simetria paralelo ao eixo y, vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e concavidade para cima.



Figuras: © DAE

Assim como ocorreu com a elipse e a hipérbole, temos aqui um referencial $x'Vy'$ (o vértice é a origem). Nesse referencial, a equação da parábola, conforme visto anteriormente, é:

$$y' = \frac{1}{4p}x'^2$$

Observando que $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$ temos:

$$y' = \frac{1}{4p}x'^2$$

$$\underbrace{y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2}_{\text{equação reduzida da parábola com vértice em } V(x_0; y_0) \text{ e concavidade voltada para cima}}$$

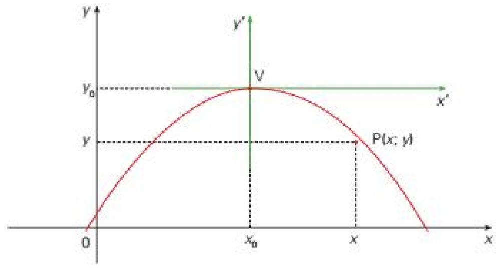
Observação:

É importante que você, por meio da equação e da parábola esboçada, saiba obter as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz. Analisando a figura, podemos concluir que:

coordenadas do foco $\rightarrow F(x_0, y_0 + p)$

equação da diretriz $\rightarrow y - (y_0, - p) = 0$

2º caso – O eixo de simetria paralelo ao eixo y, vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e concavidade para baixo.



No referencial $x'Vy'$ (o vértice é a origem), a equação da parábola, conforme visto anteriormente, é:

$$y' = -\frac{1}{4p}x'^2$$

Observando que $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, temos:

$$y' = -\frac{1}{4p}x'^2$$

$$\underbrace{y - y_0 = -\frac{1}{4p}(x - x_0)^2}_{\text{equação reduzida da parábola com vértice em } V(x_0; y_0) \text{ e concavidade voltada para baixo}}$$

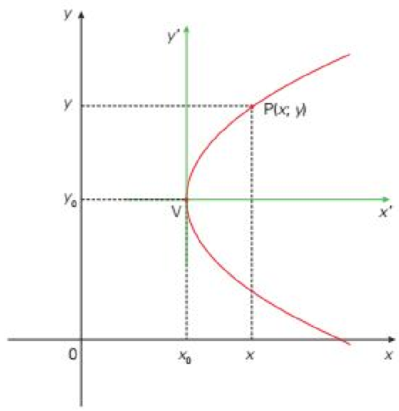
Observação:

Por meio da equação e da parábola esboçada, vamos obter as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz. Analisando a figura, podemos concluir que:

coordenadas do foco $\rightarrow F(x_0, y_0 - p)$

equação da diretriz $\rightarrow y - (y_0 + p) = 0$

3º caso – O eixo de simetria paralelo ao eixo x, vértice no ponto $V(x_0; y_0)$ e concavidade para a direita.



No referencial $x'Vy'$ (o vértice é a origem), a equação da parábola, conforme visto anteriormente, é:

$$x' = \frac{1}{4p}y'^2$$

Observando que $x' = x - x_o$ e $y' = y - y_o$, temos:

$$x' = \frac{1}{4p}y'^2$$

$$\underbrace{x - x_0 = \frac{1}{4p}(y - y_o)^2}_{\boxed{\text{equação reduzida da parábola com vértice em } V(x_0, y_0) \text{ e concavidade voltada para a direita}}}$$

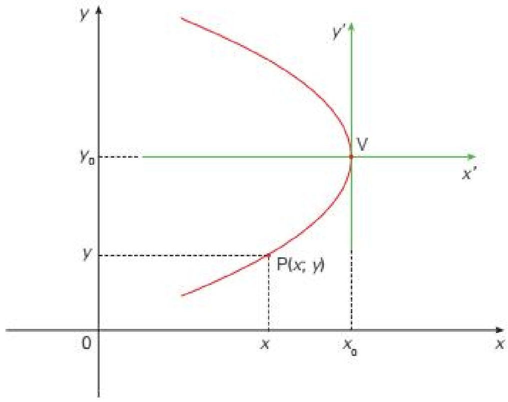
Observação:

Por meio da equação e da parábola esboçada, vamos obter as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz. Analisando a figura, podemos concluir que:

coordenadas do foco $\rightarrow F(x_o + p, y_o)$

equação da diretriz $\rightarrow x - (x_o - p) = 0$

4º caso – O eixo de simetria paralelo ao eixo x, vértice no ponto $V(x_o; y_o)$ e concavidade para a esquerda.



No referencial $x'Vy'$ (o vértice é a origem), a equação da parábola, conforme visto anteriormente, é:

$$x' = -\frac{1}{4p}y'^2$$

Observando que $x' = x - x_o$ e $y' = y - y_o$, temos:

$$x' = -\frac{1}{4p}y'^2$$

$$\underbrace{x - x_o = -\frac{1}{4p}(y - y_o)^2}_{\boxed{\text{equação reduzida da parábola com vértice em } V(x_0; y_0) \text{ e concavidade voltada para a esquerda}}}$$

Observação:

Por meio da equação e da parábola esboçada, vamos obter as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz. Analisando a figura, podemos concluir que:

coordenadas do foco $\rightarrow F(x_o - p, y_o)$

equação da diretriz $\rightarrow x - (x_o + p) = 0$

Exemplos:

1. Por meio da equação da parábola $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$, vamos obter as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz.

- Reescrevendo a equação dada e comparando com a equação correspondente ao 3º caso, temos:

$$x + 4 = \frac{1}{12} \cdot (y - 3)^2$$

$$x - x_o = \frac{1}{4p}(y - y_o)^2$$

Vértice e o valor de p:

$V(x_o; y_o) \Rightarrow V(-4; 3) \rightarrow$ coordenadas do vértice

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

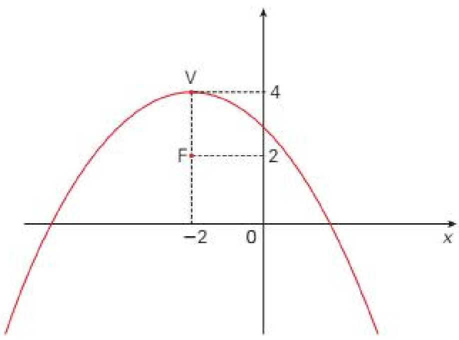
- Como a parábola tem a concavidade voltada para a direita, o foco tem a mesma ordenada que o vértice. Já a abscissa tem 3 unidades (valor de p) a mais que a abscissa do vértice. Assim, podemos obter as coordenadas do foco:

$F(-4 + 3, 3) \Rightarrow F(-1, 3) \rightarrow$ coordenadas do foco

- A diretriz será perpendicular ao eixo das abscissas e está situada 3 unidades à esquerda do vértice, isto é:

$x - (-4 - 3) = 0 \Rightarrow x + 7 = 0 \rightarrow$ equação da reta diretriz

2. Com base no gráfico a seguir, vamos obter a equação reduzida da parábola.



Figuras: © DAE

Pela figura, temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo e o vértice é o ponto V(−2; 4). Dessa forma, a equação será:

$$y - y_0 = -\frac{1}{4p}(x - x_0)^2$$

$$y - 4 = -\frac{1}{4p}(x + 2)^2$$

- Como o parâmetro da parábola é o dobro da distância do vértice ao foco, temos:

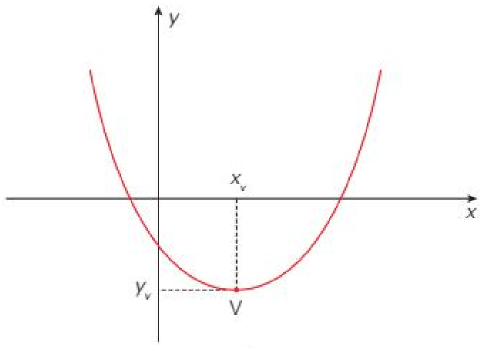
$$2p = 2 \cdot (4 - 2)$$
$$2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

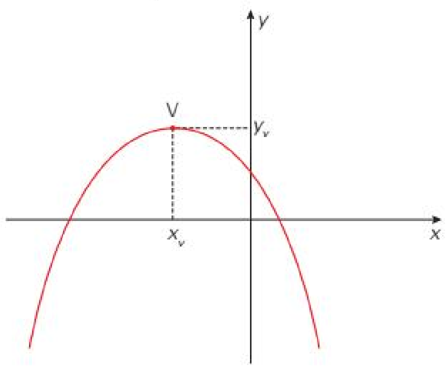
- Assim, a equação da parábola é:

$$y - 4 = -\frac{1}{4 \cdot 2}(x + 2)^2 \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{8} \cdot (x + 2)^2$$

Função quadrática e parábola

No volume 1 desta Coleção, quando estudamos funções, observamos que o gráfico de qualquer função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, para a, b e c números reais, com $a \neq 0$, é uma parábola. Numa função $y = f(x)$, para cada valor de x no domínio há apenas um valor de y em correspondência. Assim, os gráficos das funções quadráticas são de dois tipos: concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo.





Figuras: © DAE

As coordenadas do vértice dessas parábolas podem ser determinadas a partir das seguintes relações:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Podemos, partindo da lei de formação da função quadrática, obter a equação reduzida da parábola (também conhecida como fórmula canônica). Para tanto, utilizamos o procedimento de completar o trinômio em x:

$$y = 3x^2 - 6x - 10$$
$$y = 3(x^2 - 2x) - 10$$
$$y = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 10$$
$$y = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 - 10$$
$$y = 3(x - 1)^2 - 13 \Rightarrow y + 13 = 3\,(x - 1)^2$$

Vamos comparar essa equação com a equação correspondente ao 1º caso, obtida anteriormente:

$$y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$$

e

$$y - y_0 = \frac{1}{4p} \cdot (x - x_0)^2$$

Concluímos que:

- $a = \frac{1}{4p}$
- Quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima, e quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

Exemplo:

Dada a função quadrática definida por $y = 3x^2 - 6x - 10$, vamos obter as coordenadas do vértice da correspondente parábola e a equação da diretriz.

- Utilizando o procedimento de completar trinômio, temos:

$$y = 3x^2 - 6x - 10$$
$$y = 3(x^2 - 2x) - 10$$
$$y = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 10$$
$$y = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 - 10$$
$$y = 3(x - 1)^2 - 13 \Rightarrow y + 13 = 3\,(x - 1)^2$$

Assim, as coordenadas do vértice são V(1, −13).

- A partir do valor de a ($a = 3$), determinamos p:

$$a = \frac{1}{4p}$$

$$3 = \frac{1}{4p} \Rightarrow p = \frac{1}{12}$$

- Como a concavidade da parábola é voltada para cima, o foco tem a mesma abscissa do vértice, e a ordenada é a ordenada do vértice adicionado ao valor de p:

$$F\left(1, -13 + \frac{1}{12}\right) \Rightarrow F\left(1, -\frac{155}{12}\right)$$

- A reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas, p unidades abaixo do vértice:

$$y = -13 - \frac{1}{12} \Rightarrow y + \frac{157}{12} = 0$$

Exercícios resolvidos

1. Obtenha a equação da parábola que tem eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas, foco em (1; 5) e reta diretriz $x = 3$.

$2p = 3 - 1$

$p = 1$

Vértice: $\left(\frac{1+3}{2}; 5\right) = (2; 5)$

Logo:

$x - 2 = -\frac{1}{4 \cdot 1}(y - 5)^2 \therefore x - 2 = -\frac{1}{4}(y - 5)^2$

2. Determine o vértice, o foco e a equação da reta diretriz da parábola $x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$.

$x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = -8y - 1 + 9$

$(x + 3)^2 = -8(y - 1)$

$-\frac{1}{8}(x + 3)^2 = y - 1$

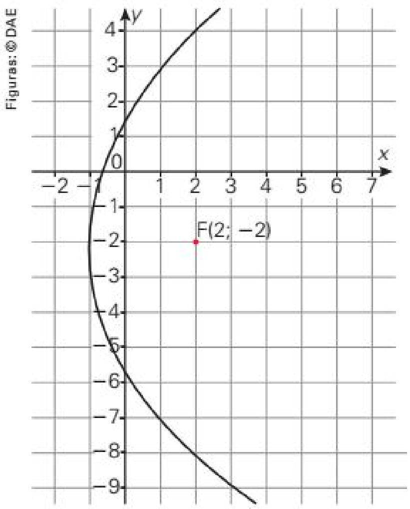
Vértice: (−3; 1)

$-\frac{1}{4p} = -\frac{1}{8} \therefore p = 2$

Foco: (−3; 1 − 2) = (−3; −1)

Reta diretriz: $y = 1 + 2 \therefore y = 3$

3. Obtenha a equação reduzida da parábola a seguir, sabendo que seu foco é o ponto F(2; −2).



Vértice: (−1; −2)

$p = 2 - (-1)$ $p = 3$

Logo:

$x + 1 = \frac{1}{12}(y + 2)^2$

Exercícios propostos

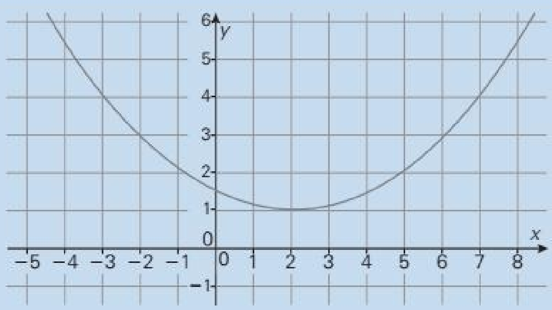
Resolva os exercícios no caderno.

1. Uma parábola, quando representada no plano cartesiano, tem vértice no ponto V(3; 4) e foco no ponto F(7; 4). Obtenha a equação: Respostas no Manual do Professor.

a) da reta diretriz dessa parábola.

b) da parábola.

2. Represente, no plano cartesiano, a parábola de equação $(x - 2)^2 = 8 \cdot (y - 1)$ e, em seguida, indique as coordenadas do vértice, do foco e a equação da reta diretriz.
Vértice: (2; 1). Foco: (2; 3).
Equação da reta diretriz: $y = -1$ ou $y + 1 = 0$.



3. Uma parábola tem foco no ponto $(-1; 5)$ e reta diretriz de equação $x - 3 = 0$. Respostas no Manual do Professor.

   a) Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

   b) Qual é a equação da parábola?

4. Determine o vértice, o foco e a equação da reta diretriz das parábolas cujas equações são: Respostas no Manual do Professor.

   a) $x^2 + 4x - 6y + 22 = 0$

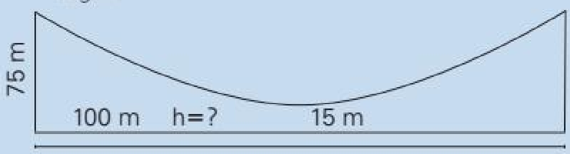
   b) $y^2 - 2y + 4x + 13 = 0$

5. Considere as parábolas de equações $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 12x + 28$.

   a) Determine os pontos em que as parábolas se intersectam. $(8; 60)$ e $(-2; 0)$

   b) Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos de intersecção das duas parábolas. $y = 6x + 12$

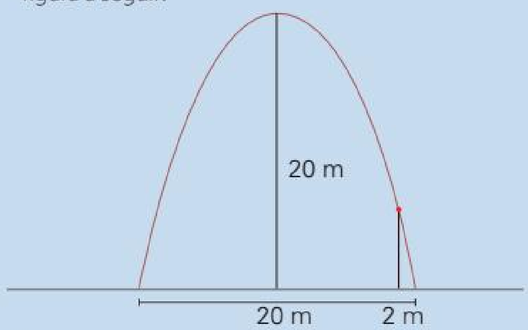
6. Considere que os cabos de uma ponte têm o formato aproximado de uma parábola, como mostra a figura a seguir:



Figuras: © DAE

O comprimento da ponte é de 400 metros. Além disso, as hastes de ferro que sustentam os cabos medem 75 metros, e o ponto mais baixo desses cabos está a uma distância de 15 metros do solo. Qual é a altura *h* que esses cabos se encontram do solo a uma distância de 100 metros de qualquer uma das extremidades? 30 metros

7. Uma construção de concreto em uma praça tem o formato aproximado de uma parábola, como mostra a figura a seguir:



Calcule a distância em que se encontra do solo um ponto do arco que dista 2 metros de uma de suas extremidades. 7,2 metros.

8. Elabore um problema envolvendo a simetria de duas parábolas. Resposta pessoal.

Algumas conclusões

Procure responder algumas questões envolvendo o estudo de elipse, hipérbole e parábola. Caso sinta alguma dificuldade em obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais.

Questões:

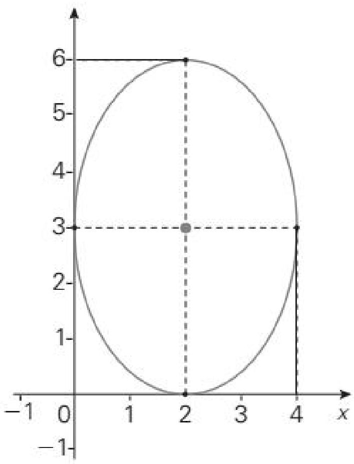
1. Como você define elipse?
2. Quais são as denominações dos três eixos de uma elipse?
3. Como calculamos a excentricidade de uma elipse?
4. Qual é a equação reduzida da elipse de centro no ponto (m, n), eixo maior medindo $2a$ e eixo menor medindo $2b$, sendo o eixo local paralelo ao eixo das abscissas?
5. Como você define hipérbole?
6. Quais são as denominações dos três eixos de uma hipérbole?
7. O que indica a excentricidade de uma hipérbole?
8. Como você define parábola?
9. O que significa parâmetro de uma parábola?
10. Quais são as possibilidades de concavidade de uma parábola, já estudadas?

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas a essas questões. Em seguida, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (Unesp-SP) A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados. Resposta no Manual do Professor.



Valendo-se das informações contidas nesta representação, determine a equação reduzida da elipse.

2. (Enem) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I. é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

II. é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1.

III. é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$.

IV. é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$.

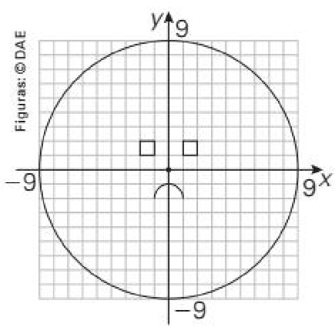
V. é o ponto $(0, 0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

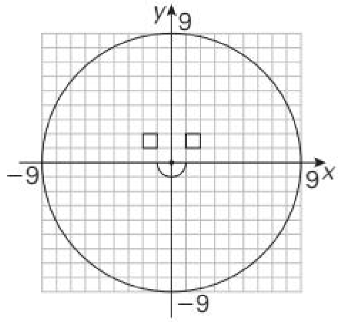
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

a)

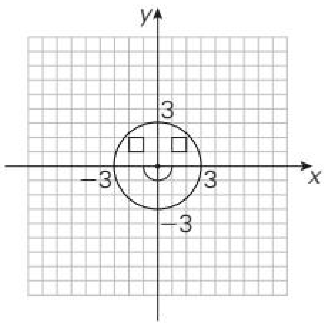
Figuras: ©DAE



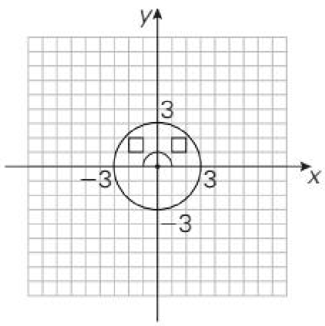
b)



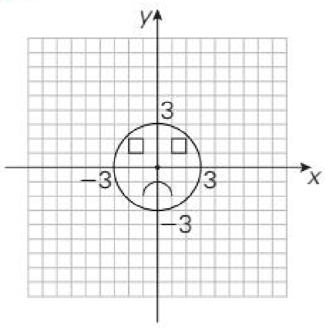
c)



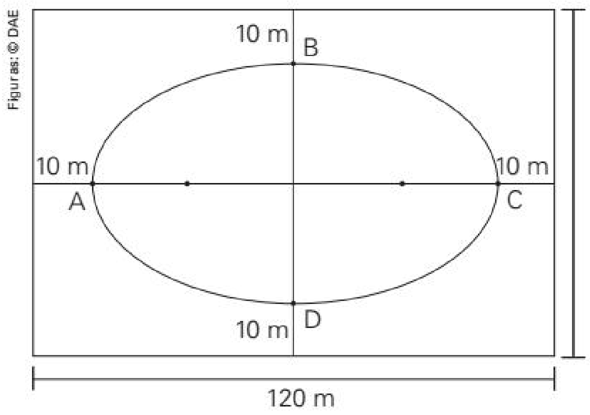
d)



e)



3. (UFPB) A secretaria de infraestrutura de um município contratou um arquiteto para fazer o projeto de uma praça. Na figura a seguir, está o esboço do projeto proposto pelo arquiteto: uma praça em formato retangular medindo 80 m · 120 m, onde deverá ser construído um jardim em forma de elipse na parte central.

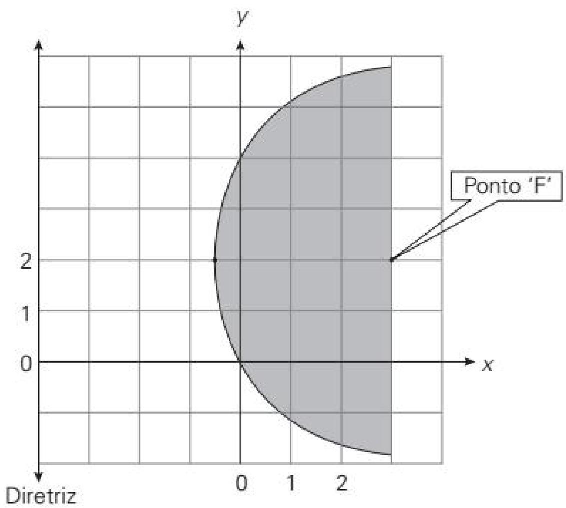


Estão destacados na figura os segmentos AC e BD que são, respectivamente, o eixo maior e o menor da elipse, bem como os pontos F_1 e F_2, que são os focos da elipse onde deverão ser colocados dois postes de iluminação.

Com base nessas informações, conclui-se que a distância entre os postes de iluminação será, aproximadamente, de:

a) 68 m
b) 72 m
c) 76 m
d) 80 m
e) 84 m

4. (Uema) Uma família da cidade de Cajapió – MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida abaixo, coberta com uma folha quadriculada.



Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será:

a) $(y-2)^2 = 7(2x+1)$

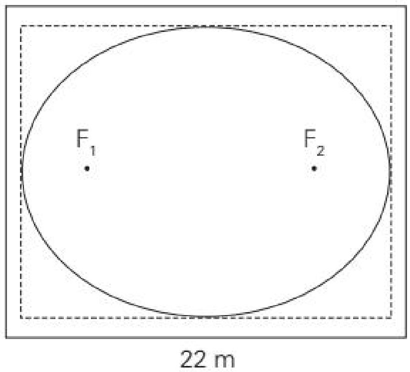
b) $(y+2)^2 = 7(2x+1)$

c) $(y-3)^2 = 12(x+1)$

d) $(y-2)^2 = -7\left(2x - \frac{1}{7}\right)$

e) $(y+3)^2 = \frac{12}{7}(x-1)$

5. (UFRN) Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.



O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos.

Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de:

a) 3 m b) 4 m c) 5 m d) 6 m

6. (FGV-SP) Sendo m o maior valor real que x pode assumir na equação analítica $(x-2)^2 + 4(y+5)^2 = 36$, e n o maior valor real que y pode assumir nessa mesma equação, então, $m + n$ é igual a:

a) 8 c) 6 e) 3
b) 7 d) 4

7. (UEM-PR) Sobre a cônica de equação $x^2 + 4y^2 = 9$ assinale o que for correto. 01 + 02 + 04 + 16 = 23

01) Trata-se de uma elipse.

02) A cônica intercepta o eixo das abscissas em (3, 0) e (−3, 0).

04) Se A e B são pontos da cônica que não são colineares com os focos D e E da cônica, os triângulos ADE e BDE possuem o mesmo perímetro.

08) A circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$ tangencia essa cônica.

16) O ponto $\left(2\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertence à cônica.

Resolva os exercícios no caderno.

8. (Udesc) A área delimitada por uma elipse cuja equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ é dada por $A = ab\pi$. Então, a área da região situada entre as elipses de equações $16x^2 + 25y^2 = 400$ e $16x^2 + 9y^2 = 144$ é:

a) 12π *u.a.*

b) 20π *u.a.*

c) 8π *u.a.*

d) 256π *u.a.*

e) π *u.a.*

9. (FGV-SP) No plano cartesiano, há dois pontos R e S pertencentes à parábola de equação $y = x^2$ e que estão alinhados com os pontos A(0, 3) e B(4, 0).

A soma das abscissas dos pontos R e S é:

a) −0,45

b) −0,55

c) −0,65

d) −0,75

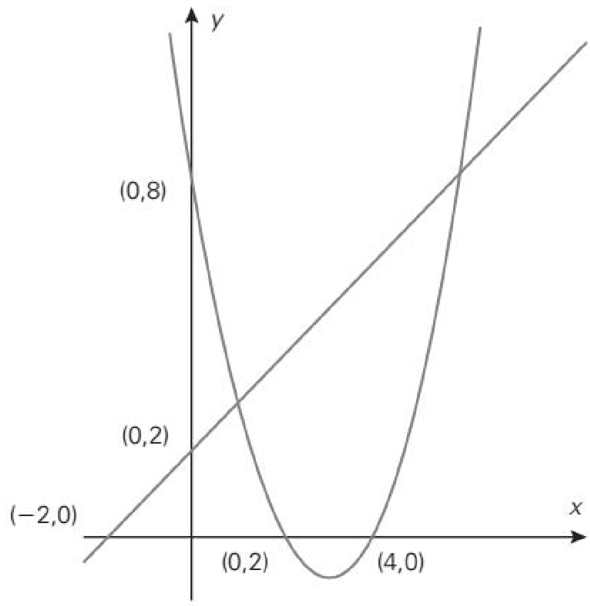
e) −0,85

10. (PUC-RJ) Considere a parábola de equação $y = x^2 - 3x + 4$.

a) Em quais pontos a reta de equação $y = 2x$ intercepta a parábola? (1; 2) e (4; 8)

b) Para quais valores reais de m a reta de equação $y = mx$ intercepta a parábola em exatamente um ponto? $m = -7$ ou $m = 1$

11. (PUC-RJ) A figura abaixo mostra uma reta e uma parábola de eixo vertical.



Figuras: © DAE

a) Sabendo que a reta corta os eixos nos pontos $(-2,0)$ e $(0,2)$, encontre a equação da reta. $y = x + 2$

b) Sabendo que a parábola corta os eixos nos pontos (0,8), (2,0) e (4,0), encontre a equação da parábola. $y = x^2 - 6x + 8$

c) Encontre os pontos de interseção entre a reta e a parábola. (1; 3) e (6; 8)

12. (UEM-PR) Um aluno desenhou, em um plano cartesiano, duas cônicas (elipse ou hipérbole), uma de excentricidade 0,8 e outra de excentricidade 2,4, tendo ambas como foco o par de pontos (−12,0) e (12,0). 02 + 04 + 08 + 16 = 30

Assinale o que for correto.

01) A cônica de excentricidade 0,8 é uma hipérbole.

02) A cônica de excentricidade 2,4 passa pelo ponto (5,0).

04) As cônicas descritas possuem quatro pontos em comum.

08) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$ é uma equação para a cônica de excentricidade 0,8.

16) A cônica de excentricidade 0,8 passa pelo ponto (0,9).

13. (UFPE) Para cada número real a, analise as proposições a seguir, referentes à representação geométrica da equação $x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

Se a = 1, a equação representa uma circunferência. F

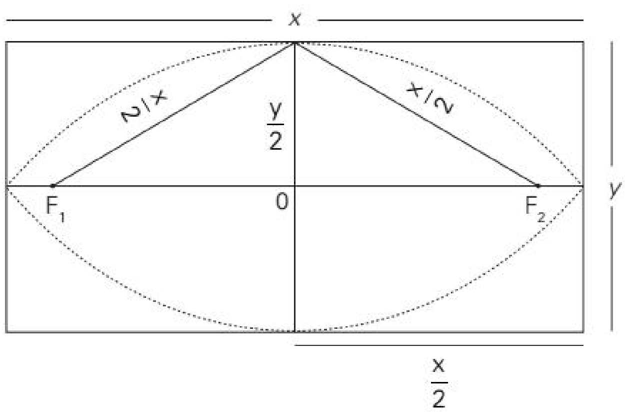
Se a = 0, a equação representa uma reta. V

Se a = 3, a equação representa uma hipérbole. F

Se a = −2, a equação representa uma elipse. F

Se a = −1, a equação representa a união de duas retas. V

14. (UEPB) Deseja-se construir uma praça em forma de elipse em um terreno retangular de dimensões x metros e y metros, com $x > y$, de perímetro 300 m e área 5 000 m², conforme nos mostra a figura.



Estando previstas as instalações de duas torres de iluminação, uma em cada foco da elipse, F_1 e F_2, local de melhor distribuição e aproveitamento das mesmas, concluímos que a distância em metros entre as torres é:

a) $100\sqrt{3}$

b) $25\sqrt{3}$

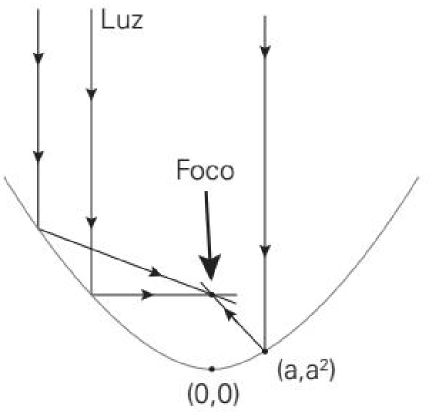
c) $50\sqrt{3}$

d) $40\sqrt{3}$

e) $30\sqrt{3}$

15. (UFPR) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo y), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a, a^2), serão refletidos na direção da reta $4ay + (1 - 4a^2)x = a$

$\left(0; \frac{1}{4}\right)$



Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1, 1) e (2, 4) se encontrarão.

16. (UFT-TO) Considere $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $b \in \mathbb{R}$. Encontre os valores de b, tais que no plano cartesiano xy, a reta $y = x + b$ intercepta a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ em um único ponto. A soma dos valores de b é:

a) 0

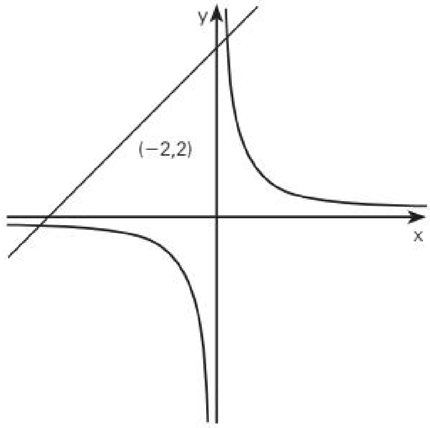
b) 2

c) $2\sqrt{5}$

d) $\sqrt{5}$

e) $-2\sqrt{5}$

17. (PUC-RJ) Considere a hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$ mostrada na figura abaixo:



Figuras: © DAE

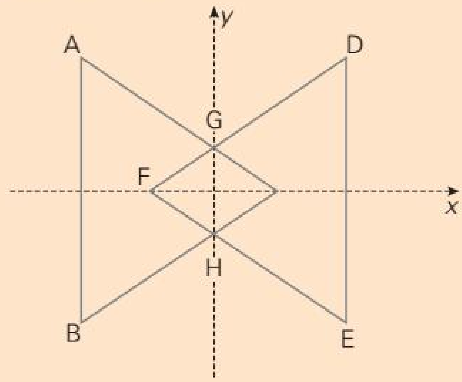
a) Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y = x + 2$.
$(-2 + \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5})$ e $(-2 - \sqrt{5}; 2 - \sqrt{5})$

b) Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y = x \cdot 2$.
Não há intersecção entre a hipérbole e a reta.

c) Para quais valores do parâmetro real m a reta de equação $y = 2 = m(x + 2)$ intersecta a hipérbole em exatamente um ponto? $m = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ou $m = 0$

DESAFIO

(IME-RJ) Os triângulos ABC e DEF são equiláteros com lados iguais a m. A área da figura FHCG é igual à metade da área da figura ABHFG. Determine a equação da elipse de centro na origem e eixos formados pelos segmentos FC e GH.



a) $48x^2 + 36y^2 - \sqrt{2}m^2 = 0$

b) $8x^2 + 16y^2 - \sqrt{3}m^2 = 0$

c) $16x^2 + 48y^2 - 3m^2 = 0$

d) $8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$

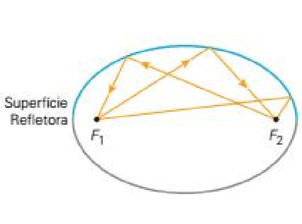
e) $16x^2 - 24y^2 - m^2 = 0$

EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

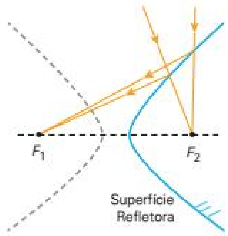
Orientações e respostas no Manual do Professor.

- Veja a seguir as propriedades reflexivas de cada uma das cônicas.
- Na parábola, qualquer raio paralelo ao eixo refletirá para o foco.
- Na elipse, qualquer raio que parta de um foco refletirá no outro foco.
- Na hipérbole, qualquer raio que incida na direção de um foco será refletido para o outro foco.

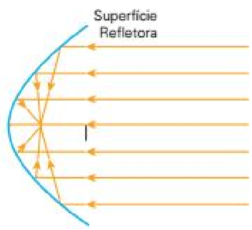
Elipse



Hipérbole



Parábola



Figuras: © DAE

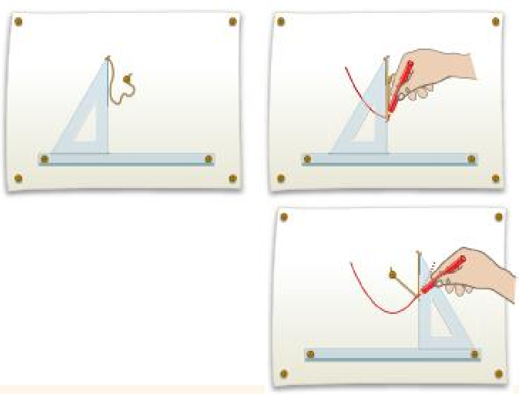
Tais propriedades fizeram com que essas curvas fossem aplicadas em diversos sistemas físicos, como faróis de carro, salas de museus conhecidas como “sala do sussurro”, telescópios e muitos outros.

1. Relacione cada um dos três exemplos citados acima com uma das três curvas desenhadas. Pesquise por que cada curva foi escolhida para determinada construção.

2. Outros exemplos de aplicação das parábolas são os fornos solares e as antenas parabólicas. Pesquise sobre esses objetos e outros que utilizem as outras duas curvas em suas construções.

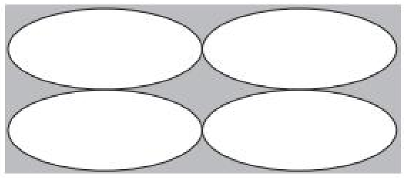
3. Retome a técnica de desenho da parábola utilizando a régua, o esquadro e o barbante. Considere que a régua tenha sido apoiada paralelamente ao eixo horizontal de um plano cartesiano graduado em cm, 2 cm abaixo do eixo.

Se o ponto F escolhido foi (−1; 4), qual a equação dessa parábola?



Adilson Secco

4. Imagine que um terreno retangular será utilizado para construir quatro "salas do sussurro" tangentes, como na figura abaixo:

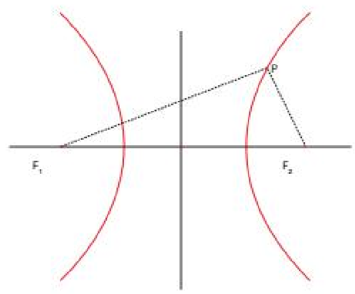


Se na planta do terreno, feita em computador, a elipse do canto inferior esquerdo foi definida pela equação $16x^2 - 25x^2 - 400 = 0$, responda:

Qual será a equação reduzida da elipse que ocupa o canto superior direito?

Qual é a área da região cinza?

5. Considere um sistema de espelhos hiperbólico de distância focal 20 cm construído dentro de um telescópio refletor. Um raio de luz incide no ponto P, como na figura abaixo, e percorre uma distância de 16 cm até atingir o foco F_1. Sabendo que o triângulo PF_1F_2 é retângulo, determine a equação dessa hipérbole. (Considere como centro o ponto (0,0).)



Bibliografia

Leituras complementares

Ao longo desta Coleção, você encontra alguns textos que selecionamos e que versam sobre conteúdos de Matemática, sobre o desenvolvimento da própria Matemática e, também, sobre a vida de importantes personagens, que oferecem valiosas contribuições para esse universo. Caso você queira ampliar um pouco esse contato por meio dos textos relacionados a esses temas, sugerimos algumas referências elaboradas numa linguagem semelhante, algumas vezes, aos romances. São textos que contêm informações e curiosidades diversas relacionadas à história da Matemática.

Boa leitura!

ATALAY, Bulent. *A Matemática e a Mona Lisa*: a confluência da arte com a ciência. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Mercuryo, 2007.

BELLOS, Alex. *Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática. Tradução de Berilo Vargas e Claudio Carina. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BENTLEY, Peter J. *O livro dos números*: uma história ilustrada da Matemática. Tradução de Maria Luiz X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2009.

DEVLIN, Keith. *O gene da Matemática*: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. Tradução de Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

________. *O instinto matemático*: Por que você é um gênio da Matemática. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2000.

DU SAUTOY, Marcus. *A música dos números primos*: a história de um problema não resolvido na Matemática. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2007.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Cia. das Letras, 1997.

GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Cia. das Letras, 1999.

LIVIO, Mario. A *equação que ninguém conseguia resolver*. Tradução de Jesus de Paula Assis. Rio de Janeiro: Record, 2008.

________. *Razão áurea*: a história de Fi, um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.

NETZ, Reviel; NOEL, William. *O codex Arquimedes*. Tradução de Pedro Bernardo e Pedro Elói Duarte. Lisboa: Edições 70, 2007.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 356 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 1998.

Referências bibliográficas

As obras a seguir representam importantes referências para o estudo e a reflexão sobre a Matemática.

ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Tradução de Adalgisa Campos da Silva. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?* Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução de Alberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

________. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

HOGBEN, Lancelot Thomas. *Maravilhas da Matemática*: Influência da Matemática nos conhecimentos humanos. [S.l]. São Paulo. Globo, 1958.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: S.B.M., 1996. (Coleção do Professor de Matemática.)

MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides*: a história da Geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

padrões e relações

3

Manual do
PROFESSOR

Adilson Longen

Licenciado em Matemática, doutor e mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Autor de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Foi professor universitário e atualmente é professor de Matemática em escolas da rede particular.

1ª edição
São Paulo – 2016

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

3º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora do Brasil

APRESENTAÇÃO

Procuramos neste manual não apenas abordar nossas concepções a respeito do ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática, mas também dar subsídios para auxiliar o professor na utilização dos três livros como um instrumento importante em sala de aula. Pensamos em fornecer, além das ideias gerais sobre os conteúdos e seus objetivos, contribuições a respeito da necessidade de reflexão sobre os assuntos que fazem parte do Ensino Médio. Essas reflexões também levam em conta a avaliação e seu importante papel dentro do processo como um todo. Sabemos, como professores, da urgência de adotar cada vez mais uma atitude reflexiva sobre nosso trabalho em sala de aula. Essa postura permite conduzir o aluno a uma formação matemática desejável nesse estágio da escolarização.

Um livro didático pode, por exemplo, incluir momentos que permitam a utilização de calculadoras e recursos no computador, mas é necessário que tanto a escola quanto o docente invistam tempo e se organizem para que isso seja possível. O cotidiano de um professor de Ensino Médio exige, entre outras coisas, estar "antenado" não apenas aos conteúdos que devem ser trabalhados mas também com a realidade dos alunos. O mundo dos adolescentes é cercado pela mídia e pelas tecnologias, que, para eles, o tornam muito mais "vivo". Se para nós, em algumas ocasiões, arrastar um *mouse* pode representar um grande avanço, para nossos alunos já é algo trivial. Aos poucos, aquela cena de um professor com um livro em uma das mãos e um toco de giz na outra deve sofrer transformações. Não que o livro ou o giz devam ser abandonados, mas o personagem que os segura precisa realmente buscar formas de envolver os alunos, de convencê-los da necessidade de ter uma boa formação matemática para, entre outras coisas, compreender melhor esse espetacular mundo das tecnologias.

Esperamos dar alguma contribuição a você, professor. Propomos talvez mais perguntas do que respostas, por entendermos que, por meio das interrogações, somos levados a reflexões e a novas dúvidas decorrentes dessas reflexões. Respostas serão dadas, outras questões serão levantadas. É o processo que nos move. É a forma como podemos evoluir. Esperamos que a leitura deste manual possa, de alguma forma, contribuir. Bom trabalho!

Sumário

1. O Ensino Médio – diretrizes

A Educação Básica, formada pela Educação Infantil, pelo Ensino Fundamental e pelo Ensino Médio, está fundamentada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. O conhecimento dessas diretrizes é desejável e necessário a todos aqueles que, de alguma maneira, atuam na Educação Básica. Apontaremos a seguir, resumidamente, algumas dessas ideias norteadoras e comentários para motivar sua discussão.

Finalidades do Ensino Médio

Para o Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, apontam-se as seguintes finalidades:

> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

BRASIL. Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)*. Lei n. 9.394, de 20 dez. 1996. Brasília, DF, p. 169. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Comentário

Ao ingressar no Ensino Médio, o aluno já adquiriu diversos conhecimentos sobre números, tratamento da informação, Geometria e Álgebra. Assim, as retomadas são naturalmente feitas visando ao aprofundamento e à consolidação desse aprendizado. O trabalho, por exemplo, no campo numérico exigirá do aluno uma boa compreensão do número real (racional ou irracional) para que possa ser feita uma ampliação com os números complexos.

O estudo de situações do cotidiano auxilia na compreensão da relação entre teoria e prática. Assim, o trabalho com medidas, Geometria e tratamento da informação pode ser direcionado nesse sentido. Além disso, o uso da calculadora e do computador possibilita que o aluno explore ferramentas para desenvolver conhecimentos em Matemática.

Desafios do Ensino Médio

A identidade e a diversificação no Ensino Médio são citadas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional como desafios a serem enfrentados:

> Um dos principais desafios da educação consiste no estabelecimento do significado do Ensino Médio, que, em sua representação social e realidade, ainda não respondeu aos objetivos que possam superar a visão dualista de que é mera passagem para a Educação Superior ou para a inserção na vida econômico-produtiva. Esta superação significa uma formação integral que cumpra as múltiplas finalidades da Educação Básica e, em especial, do Ensino Médio, completando a escolaridade comum necessária a todos os cidadãos. Busca-se uma escola que não se limite ao interesse imediato, pragmático e utilitário, mas, sim, uma formação com base unitária, viabilizando a apropriação do conhecimento e desenvolvimento de métodos que permitam a organização do pensamento e das formas de compreensão das relações sociais e produtivas, que articule trabalho, ciência, tecnologia e cultura na perspectiva da emancipação humana.

LDB, p. 170.

Comentário

Quando nós, professores, somos questionados pelos alunos "Para que serve estudar Geometria de Posição?" (ou outro conteúdo), não podemos dar a resposta pragmática "Cai no vestibular". O estudo desse tema, por exemplo, transcende em muito esse objetivo. O contato do aluno com o conhecimento do método axiomático permite ampliar seu poder de argumentação diante de situações não necessariamente referentes à Matemática. Diversas profissões, como a de advogado, exigem argumentações irrefutáveis e sem falhas.

Do mesmo modo, conhecer Matemática Financeira e Estatística permite não apenas resolver problemas colocados na forma de exercícios na disciplina de Matemática. A tomada de decisões em diversas profissões exige a análise profunda de informações estatísticas e de projeções financeiras que normalmente são apresentadas por meio de gráficos. Mesmo na vida particular, essa tomada de decisões pode afetar o bolso das pessoas: a compra parcelada de um carro, por exemplo. Quais são os juros embutidos?

Avaliação no Ensino Médio

Três são as dimensões básicas de avaliação conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica: avaliação da aprendizagem, avaliação institucional interna e externa e avaliação de redes de Educação Básica. Observe a seguir cada uma dessas dimensões.

> A *avaliação da aprendizagem*, que conforme a LDB pode ser adotada com vistas à promoção, aceleração de estudos e classificação, deve ser desenvolvida pela escola refletindo a proposta expressa em seu projeto político-pedagógico. Importante observar que a avaliação da aprendizagem deve assumir caráter educativo, viabilizando ao estudante a condição de analisar seu percurso e, ao professor e à escola, identificar dificuldades e potencialidades individuais e coletivas.
>
> A *avaliação institucional interna* é realizada a partir da proposta pedagógica da escola, assim como do seu plano de trabalho, que devem ser avaliados sistematicamente, de maneira que a instituição possa analisar seus avanços e localizar aspectos que merecem reorientação.
>
> A *avaliação de redes de ensino* é responsabilidade do Estado, seja realizada pela União, seja pelos demais entes federados. Em âmbito nacional, no Ensino Médio, ela está contemplada no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que informa sobre os resultados de aprendizagem estruturados no campo da Língua Portuguesa e da Matemática, lembrando-se o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), que mede a qualidade de cada escola e rede, com base no desempenho do estudante em avaliações do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP) e em taxas de aprovação.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica*. Brasília, DF, 4 maio 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril.../15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf>. Acesso em: 15 abr. 2016.

Comentário

Temos nesse contexto o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), que, desde seu surgimento, vem passando por transformações gradativas e assumindo funções diferentes que visam à democratização do ensino. Atualmente, por exemplo, a pontuação obtida no Enem pode ser utilizada como forma de ingresso em instituições de Ensino Superior das seguintes formas:

- Pelo sistema de seleção unificada (Sisu) como fase única;
- Como primeira fase no processo de ingresso;
- Compondo com o vestibular tradicional o processo de ingresso;
- Para ocupação de vagas remanescentes do vestibular.

As mudanças estabelecidas a partir de 2009 no Enem estão também relacionadas a vários fatores. Um deles é a necessidade de reformulação do currículo do Ensino Médio (observando-se a Base Comum Nacional Curricular). Outro é proporcionar uma melhor qualidade no Ensino Médio brasileiro, pois esse exame avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos não de forma isolada, mas de forma conjunta.

O Exame Nacional do Ensino Médio

O Enem é composto de uma redação e de 180 questões e é realizado em dois dias. Essas questões estão divididas em quatro áreas do conhecimento (45 questões para cada área):

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;
- Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e suas Tecnologias.

As questões são elaboradas como base na Matriz de Referência (difundida pelo MEC), em que são descritas as competências e habilidades desejáveis para um aluno no fim do Ensino Médio. Elas estão fundamentadas em cinco eixos cognitivos comuns às quatro áreas do conhecimento:

> I. *Dominar linguagens (DL)*: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
>
> II. *Compreender fenômenos (CF)*: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
>
> III. *Enfrentar situações-problema (SP)*: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
>
> IV. *Construir argumentação (CA)*: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
>
> V. *Elaborar propostas (EP)*: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

BRASIL. Ministério da Educação. *Matriz de Referência do ENEM 2009*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/matriz_referencia_novoenem>. Acesso em: 15 abr. 2016.

Comentário

A teoria dos conjuntos, por exemplo, é uma parte dos assuntos abordados no Ensino Médio em que a linguagem matemática se faz presente. A simbologia empregada na Matemática representa uma simplificação na escrita, mas é dotada de significados importantes. Quando escrevemos $y = f(x)$, por exemplo, estamos indicando que a variável y depende da variável x, ou, conforme o contexto, que a grandeza representada por y é uma função da grandeza representada por x.

É desejável que o aluno, ao enfrentar uma situação-problema, compreenda inicialmente o que é proposto e, a seguir, tenha o hábito de elaborar mentalmente um plano para buscar uma solução. Essas são apenas duas etapas importantes na resolução de problemas que levam o aluno a enfrentar situações novas, além de tornar as aulas muito mais motivadoras.

A formação do professor

São inúmeras as preocupações em relação à formação do professor. Existem problemas crônicos e reconhecidos na formação desse profissional que acabam refletindo em seu desempenho em sala de aula. Nesse sentido, muitas escolas tomam iniciativas promovendo discussões, criando grupos de estudos e até incentivando professores a ingressar em cursos de formação continuada promovidos em suas comunidades. Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica, "é necessário repensar a formação dos professores para que possam enfrentar as novas e diversificadas tarefas que lhes são confiadas na sala de aula e além dela".

Essas preocupações já faziam parte do projeto de lei que propunha o II Plano Nacional de Educação, para o decênio 2011-2020. Nele são previstos, entre suas diretrizes, a valorização do professor, incluindo também o fortalecimento da formação inicial e continuada dos docentes. Sobre essa valorização, destacam-se as seguintes metas:

• Meta 15: Garantir, em regime de colaboração entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, que todos os professores da Educação Básica possuam formação específica de nível superior, obtida em curso de licenciatura na área de conhecimento em que atuam.

• Meta 16: Formar 50% dos professores da Educação Básica em nível de pós-graduação *lato* e *stricto sensu*, garantir a todos formação continuada em sua área de atuação.

• Meta 17: Valorizar o magistério público da Educação Básica a fim de aproximar o rendimento médio do profissional do magistério com mais de onze anos de escolaridade do rendimento médio dos demais profissionais com escolaridade equivalente.

• Meta 18: Assegurar, no prazo de dois anos, a existência de planos de carreira para os profissionais do magistério em todos os sistemas de ensino.

BRASÍLIA. Ministério da Educação. Plano Nacional de Educação 2011-2020. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7116-pl-pne-2011-2020&Itemid=30192>. Acesso em: 16 abr. 2016

Comentário

Sabemos que a escola carrega enormes preocupações ligadas a reformulações e atualizações. Exatamente neste ponto é que compreendemos se encontrar uma das oportunidades de contribuir para a formação continuada dos professores. Como existem essas preocupações quanto às constantes e necessárias atualizações, o docente, fazendo parte do chamado "projeto educativo da escola", naturalmente acaba se envolvendo com diversas questões ligadas ao seu papel: discussões sobre problemas de aprendizagem, comportamentos, elaboração de programas de cursos, de projetos diversos implantados pela escola, entre outras.

Além da formação contínua do professor realizada na própria escola, há outras possibilidades. Entre elas, destacamos a formação realizada presencialmente em faculdades e universidades e aquela efetuada por meio da educação a distância. Esta última, em crescimento em nosso país, exige suportes de comunicação, como acesso à internet e às plataformas utilizadas para os cursos. O procedimento desse tipo de formação baseia-se geralmente na articulação entre as atividades a distância (videoconferências) e as atividades presenciais.

No que diz respeito à questão social, cada vez mais o professor tem de conviver com os interesses de alunos e pais no dia a dia da escola e saber administrá-los. Se considerarmos o ponto de vista da escola, é exigida do professor a participação ativa não apenas nas definições dos rumos políticos e pedagógicos da instituição como também no gerenciamento de projetos de trabalho. Olhando pelo lado pessoal, o professor é continuamente solicitado a participar de discussões coletivas com seus colegas, além de preocupar-se com aquelas tarefas diárias que sua profissão exige. Desse modo, a escola é para o professor fonte primordial de questões para pesquisa.

Assim, cada vez mais o docente pode encontrar condições para obter o aprofundamento teórico necessário para enfrentar e resolver as questões encontradas no âmbito escolar. Tanto as instituições de formação presencial ou a distância quanto a mídia social vêm oferecendo oportunidades de participação em grupos de estudos na área de Educação Matemática.

Procure, em sua cidade, centros, geralmente ligados às universidades, que promovem cursos de pós-graduação e encontros para debater a educação. Além disso, existem revistas e boletins de Educação Matemática que podem ser assinados pela própria escola. No fim deste manual, sugerimos algumas referências sobre formação docente.

2. A área de Matemática no Ensino Médio

Quais são os principais objetivos da Matemática na Educação Básica? E os objetivos da Matemática no Ensino Médio? Essas perguntas exigem uma profunda reflexão sobre o que entendemos ser a Matemática, nosso objeto de estudo.

Reflexões sobre a Matemática

O que é Matemática? Como ensiná-la? O que ensinar?

Keith Devlin, professor do Departamento de Matemática da Universidade Stanford, é conhecido no Brasil por seus livros interessantes sobre o tema. Entre eles, dois se destacam: *O gene da Matemática* e *O instinto matemático*. Neste último, encontramos uma reflexão interessante em um de seus capítulos, cujo título é O que é Matemática?. Reproduzimos parte dessa reflexão a seguir.

> Os números surgiram logo que nossos antepassados reconheceram que conjuntos de, por exemplo, três bois, três lanças e três mulheres tinham algo em comum: o caráter tríplice. O padrão em questão é de numerosidade, isto é, tamanho de um conjunto. Os números propriamente ditos são objetos inventados para descrever esses padrões: o número 1 descreve o padrão da unidade, 2 descreve a duplicidade, e assim por diante.
>
> Uma vez que você tem números, pode ver padrões entre esses números, por exemplo, $2 + 3 = 5$, e assim surge a Aritmética. Padrões de forma, importantes na designação de quem possui tal ou qual pedaço de terra ou na construção de edifícios, deram origem à Geometria, uma palavra que deriva da expressão grega para "medição terrestre". Quando combina padrões de forma com padrões de números, você obtém a Trigonometria.
>
> No século XVII, Isaac Newton, na Inglaterra, e Gottfried Leibniz, na Alemanha, inventaram de forma independente o cálculo diferencial e integral, o estudo dos padrões de movimento contínuo e suas variações. Antes do cálculo, a Matemática se restringia essencialmente a padrões estáticos: contagem, medição e descrição de forma. Com a introdução de técnicas para lidar com movimentos e variações, os matemáticos puderam estudar o deslocamento dos planetas e de corpos em queda livre na Terra, o funcionamento de máquinas, o fluxo de líquidos, a expansão de gases, forças físicas como o magnetismo e a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a disseminação de epidemias, a flutuação dos lucros, e assim por diante.
>
> Aproximadamente na mesma época em que Newton e Leibniz estavam inventando o cálculo, os matemáticos franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662) trocaram uma série de cartas nas quais desenvolveram os fundamentos da área da Matemática conhecida como teoria da probabilidade, que estuda padrões que surgem quando você repete um evento aleatório muitas vezes, como o lançamento de moedas ou dados. (O trabalho deles era totalmente motivado pelo desejo de seus ricos protetores de melhorar o desempenho nas mesas de apostas europeias.)
>
> A atual tecnologia computacional surgiu do estudo dos padrões do pensamento lógico, a área da Matemática conhecida com lógica formal.

DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009. p. 36-37.

Compreendemos, assim como esse autor, que a Matemática trata de padrões. Também a Matemática que ensinamos nas escolas está repleta de padrões e, além disso, intimamente relacionada a outros temas. Essa é uma visão do que podemos considerar como sendo a Matemática.

Morris Kline é o autor do livro (em espanhol) *Matemáticas para los estudiantes de humanidades* (Matemática para os estudantes de humanidades). O primeiro capítulo dessa obra tem um título, no mínimo, intrigante: "Por que estudar Matemáticas?". Não vamos aqui discutir o plural por ele empregado ao referir-se a "matemáticas", mas observar uma interessante reflexão que ele promove sobre sua importância. Em determinada parte desse capítulo, Kline afirma:

> O tema tem muitas facetas ou, como alguém diria, tantas cabeças como a hidra mitológica. É possível considerar as matemáticas como linguagem, como classe particular de estrutura lógica, como corpo de conhecimentos sobre o número e o espaço, como série de métodos para extrair conclusões, com a essência do nosso conhecimento do mundo físico ou como mera atividade intelectual divertida. Mas seria muito difícil descrever com exatidão cada um desses aspectos em poucas palavras.

KLINE, Morris. *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. Fondo de Cultura Económica de España, 1992. p. 13. (Tradução nossa.)

Um pouco mais adiante no texto de Kline, há algumas ideias que podemos utilizar como ponto de partida para refletir sobre a importância da Matemática:

> Dessas reflexões se chega à conclusão de que os sentidos, a medição e a experimentação, para não considerar senão três formas diferentes de adquirir conhecimento, são insuficientes em muitas situações. A razão é essencial. O advogado, o médico, o cientista e o engenheiro se valem da razão todos os dias para chegar a conhecimentos que de outra maneira seriam inacessíveis ou que somente seriam obtidos a custo em excesso elevado e enorme gasto de energia. As matemáticas, mais que nenhuma outra atividade humana, dependem do raciocínio para produzir conhecimentos.
>
> KLINE. p. 13.

Ao citarmos dois autores relacionados às pesquisas e à história dessa ciência, pretendemos evidenciar a grande dificuldade em definirmos Matemática ou em delinearmos essa disciplina no Ensino Médio. Se concordamos que a Matemática trabalha com padrões, também aceitamos que a partir desses padrões é essencial o entendimento e o estabelecimento das correspondentes relações, papel fundamental na elaboração do conhecimento matemático.

Apenas como exercício mental, sugerimos que você, caro professor, defina segundo seu ponto de vista o que é Matemática. Registre essa definição no início de um período letivo. No início do próximo período letivo, faça o mesmo e compare essas definições. É bem provável que sejam distintas, pois os estudos transformam nosso conhecimento e nossas concepções.

Objetivos da Matemática na Educação Básica

Em 2015, um documento resultante de um profundo estudo de especialistas foi apresentado à sociedade para uma etapa de discussões: a *Base Nacional Comum Curricular*. É a base para a renovação e também o aprimoramento da Educação Básica como um todo.

Na área de Matemática para a Educação Básica, destaca-se seu papel fundamental e a forma como seu conhecimento deve ser considerado:

> A Matemática assume um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania. Em uma sociedade cada vez mais baseada no desenvolvimento tecnológico, os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, tais como compreensão de dados em gráficos, realização de estimativas e percepção do espaço que nos cerca, entre outras.
>
> O desenvolvimento desta área do conhecimento, a Matemática, foi e continua sendo por meio das relações que o homem estabelece com a sociedade em que vive. O conhecimento matemático é fruto da busca, pelo ser humano, de respostas a problemas que a sociedade lhe apresenta em suas práticas sociais. A Matemática não é, e não pode ser vista pela escola, como um aglomerado de conceitos antigos e definitivos a serem transmitidos ao/à estudante. Ao contrário, no processo escolar, é sempre fundamental que ele/a seja provado/a a construir e a atribuir significado aos conhecimentos matemáticos.
>
> Dessa forma, a Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para os fenômenos que nos cercam. Esses modelos compreendem não somente os conceitos, mas as relações entre eles, procedimentos e representações de diversas ordens.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. (Proposta preliminar para consulta pública). Brasília, DF, 16 set. 2015. p. 127. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Um pouco mais adiante, nesse mesmo documento, aponta-se a apropriação do conhecimento matemático como condição fundamental para que o aluno da Educação Básica possa atingir plenamente a cidadania. Para tanto, é necessário o desenvolvimento de uma forma de raciocinar. A partir daí são apontados os seguintes objetivos gerais da área de Matemática para a Educação Básica:

- Estabelecer conexões entre os eixos da Matemática e entre esta e outras áreas do saber.
- Resolver problemas, criando estratégias próprias para sua resolução, desenvolvendo imaginação e criatividade.

- Raciocinar, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar.
- Comunicar-se, utilizando as diversas formas de linguagens empregadas em Matemática.
- Utilizar a argumentação matemática apoiada em vários tipos de raciocínio.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 129.

Objetivos da Matemática no Ensino Médio

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (ainda em estudo), temos preocupações bem atuais com essa fase da Educação Básica:

> O Ensino Médio caracteriza-se como a última etapa da Educação Básica. Não é uma etapa isolada e independente das anteriores, mas, sim, uma etapa complementar, que deve oferecer condições ao estudante para ampliar e consolidar as aprendizagens do Ensino Fundamental e desenvolver novas capacidades de interpretar e refletir sobre diferentes contextos. Para isso, no âmbito da escola, é necessário rever e redimensionar o currículo, de modo que a Matemática ao ser apresentada ao estudante evidencie sua relevância social e cultural e seu papel no desenvolvimento histórico da ciência.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 149.

Em nossa sociedade, temos uma diversidade de situações em que o conhecimento matemático é necessário: como um importante instrumento para lidar com situações cotidianas; como apoio a outras áreas do conhecimento; como uma maneira de conduzir o desenvolvimento de habilidades do pensamento.

Durante os três anos que compreendem o Ensino Médio, a Matemática representa uma parte do conhecimento humano extremamente importante não apenas para ler e interpretar nossa realidade mas também para ampliar e construir uma visão de mundo. Não podemos nos esquecer de que estamos formando alunos que se encontram em processo de escolha profissional.

Além do caráter instrumental, a Matemática que é abordada nessa importante etapa da escolarização coloca-se como uma ciência com características próprias e linguagem específica. Entretanto, tem uma função de integrar outras áreas do conhecimento, como as demais Ciências da natureza. Nesse sentido, devemos ter como preocupação a utilização de contextos diversos quando da abordagem de conteúdos dessa disciplina.

> A Matemática do Ensino Médio deve priorizar conceitos e procedimentos que possibilitem o estabelecimento de conexões tanto entre diversas ideias matemáticas, como com outras áreas do conhecimento, atentando para suas aplicações sociais. O estudo das funções, por exemplo, deve priorizar aspectos relacionados à variação entre grandezas, permitindo que o/a estudante desenvolva efetivamente o pensamento funcional, em substituição às habilidades relativas à simples manutenção simbólico-algébrica, normalmente privilegiada pela escola.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 150.

Ao aprenderem a Matemática contextualizada e integrada, sempre que possível, com outras áreas do conhecimento ou até mesmo com questões do cotidiano, os alunos desenvolvem habilidades essenciais para a estruturação do pensamento, que os auxiliam cada vez mais na busca pela compreensão e interpretação de situações diversas. Desenvolvem também o hábito de argumentar e a capacidade de analisar e tomar decisões.

Compreendemos a necessidade do saber matemático na formação de habilidades de pensamento e como instrumento essencial em outras áreas do conhecimento. Acreditamos ainda que a formação do jovem pode ocorrer levando em conta a dimensão histórica do próprio conhecimento matemático, além, é claro, dos contextos necessários para aprender Matemática.

Com o acesso cotidiano relativamente fácil às tecnologias diversas, espera-se que a disciplina de Matemática, o professor e o aluno sejam inseridos em tais importantes recursos:

> O trabalho com a Matemática no Ensino Médio pode ser enriquecido por meio de propostas pautadas no uso de recursos tecnológicos como instrumentos que visem auxiliar na aprendizagem e na realização de projetos,

sem anular o esforço da atividade compreensiva. Há diversos *softwares* disponíveis na Internet que se aplicam ao estudo das construções geométricas ou das funções. Há, ainda, planilhas eletrônicas que auxiliam na organização de dados e na elaboração de tabelas e gráficos.

Para tanto, é necessário que a escola possibilite aos/às estudantes o acesso, de modo ético e responsável, a *softwares* e *sites* de pesquisa. A produção rápida e excessiva de informações na sociedade atual requer um eficiente pensamento analítico para compreender pesquisas de opinião, índices econômicos, doenças, problemas ambientais, entre outros.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 150-151.

Resumindo o que abordamos até aqui sobre o Ensino Médio, precisamos construir uma Matemática em sala de aula que proporcione a nossos alunos uma visão dela como uma ferramenta útil para resolver problemas diversos de sua vida cotidiana e, na mesma medida, uma visão da Matemática como uma ciência logicamente estruturada.

Sendo assim, apresentamos os objetivos gerais da área de Matemática no Ensino Médio extraídos da Base Nacional Comum Curricular:

- Aplicar conhecimentos matemáticos em situações diversas, na compreensão das demais ciências, de modo a consolidar uma formação científica geral;

- Expressar-se oral, escrita e graficamente, valorizando a precisão da linguagem, na comunicação de ideias e na argumentação matemática;

- Compreender a Matemática como ciência, com sua linguagem própria e estrutura lógico-dedutiva;

- Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de um mesmo campo e entre os diferentes eixos (Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções), bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;

- Desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções, trabalhando coletivamente, respeitando o modo de pensar dos/as colegas e aprendendo com eles/as;

- Analisar criticamente os usos da Matemática em diferentes práticas sociais e fenômenos naturais, para atuar e intervir na sociedade;

- Recorrer às tecnologias digitais para descrever e representar matematicamente situações e fenômenos da realidade, em especial aqueles relacionados ao mundo do trabalho.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 151-152.

Note que a Base Nacional Comum Curricular já indica como eixos para a Matemática no Ensino Médio: Geometria; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade; Números e Operações; Álgebra e Funções.

O Enem e a Matemática

Apresentamos a seguir as sete competências e as 30 habilidades elencadas na Matriz de Referência para a prova de Matemática e suas Tecnologias. Embora sejam habilidades diferentes (H1 até H30), podemos encontrar em questões e situações diversas mais de uma habilidade envolvida. Citamos, após cada competência, um exemplo de questão do próprio Enem, com resolução e comentários.

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Com a implantação da Base Nacional Comum Curricular, é necessário que, como professores, tenhamos uma postura reflexiva permanente sobre os conteúdos trabalhados, de tal forma que possamos associar e elencar as competências e habilidades que estão sendo trabalhadas. Essa deve ser uma dinâmica presente em nossas aulas, para que também o aluno passe, de maneira clara e objetiva, a compreender cada vez mais a Matriz de Referência do Enem.

3. Uma coleção de livros de Matemática no Ensino Médio

Professor, agora que já abordamos as principais referências nacionais sobre o Ensino Médio, vamos procurar inserir nossa coleção de Matemática nesse importante estágio da escolarização. Observaremos a seguir a estrutura desse material de apoio na formação desses jovens ao longo dos três anos.

De modo geral, a **abordagem** que acreditamos ser adequada para o ensino da Matemática deve considerar a necessidade de contextos, observando aplicações, sempre que possível. A apresentação prematura de conceitos, por meio de uma estéril cadeia de definições e propriedades, nem sempre deve ser o caminho percorrido. Entendemos que o raciocínio dedutivo deve ser trabalhado e valorizado, porém de forma gradativa. É desejável que demonstrações sejam feitas sempre que auxiliem na construção do conhecimento matemático. Dependendo do conteúdo, podemos sugerir verificações empíricas de determinadas propriedades ou demonstrações (de natureza dedutiva) de outras propriedades, levando em conta o nível de interesse e de compreensão dos alunos.

Resumindo, na **metodologia** de ensino em que nos baseamos, o aluno deve ser participativo na construção do conhecimento, resolvendo e discutindo situações propostas. Deve ser continuamente incentivado a explorar determinados temas, a utilizar **ferramentas** como a calculadora e o computador em **investigações** que são conduzidas no desenvolvimento de alguns conteúdos, sempre que isso for possível. Não queremos, com isso, deixar de lado as chamadas sistematizações necessárias na consolidação dos conhecimentos adquiridos. Como professores, devemos interferir construtivamente por meio de indagações que instiguem os alunos. Se assim procedemos, também devemos saber escutar as conclusões, suposições e dificuldades que esses mesmos alunos ativos exponham.

Distribuição dos conteúdos

Os conteúdos que tradicionalmente compõem o Ensino Médio estão divididos em três volumes. Nesta coleção, cada volume, por sua vez, está dividido em unidades subdivididas em capítulos. Nos quadros a seguir há a descrição correspondente a essa distribuição, conforme nossa escolha.

1º ANO	
Unidade 1 Números e conjuntos	Capítulo 1 – Números reais Capítulo 2 – Noções básicas de conjuntos Capítulo 3 – Operações entre conjuntos
Unidade 2 Tópicos de Geometria Plana	Capítulo 4 – Figuras geométricas planas Capítulo 5 – Semelhança de figuras planas Capítulo 6 – Áreas de figuras planas
Unidade 3 Funções	Capítulo 7 – Relação de dependência entre grandezas Capítulo 8 – Introdução à Geometria Analítica Capítulo 9 – Função afim Capítulo 10 – Função quadrática
Unidade 4 Trigonometria no triângulo	Capítulo 11 – Trigonometria no triângulo retângulo Capítulo 12 – Trigonometria em um triângulo qualquer
Unidade 5 Funções exponenciais	Capítulo 13 – Potenciação nos reais Capítulo 14 – Função exponencial Capítulo 15 – Logaritmos Capítulo 16 – Função logarítmica
Unidade 6 Sequências numéricas	Capítulo 17 – Sequências Capítulo 18 – Progressão aritmética Capítulo 19 – Progressão geométrica

No Volume 1, a Unidade 2 representa uma retomada dos principais tópicos de Geometria Plana estudados no Ensino Fundamental. Escolhemos incluir tal assunto nesse volume, pois, no seguinte, além da chamada Geometria de Posição, desenvolvemos tópicos de Geometria Espacial.

2º ANO	
Unidade 1 Matemática Financeira	Capítulo 1 – Proporção e porcentagem Capítulo 2 – Juros simples Capítulo 3 – Juros compostos
Unidade 2 Trigonometria	Capítulo 4 – Trigonometria na circunferência Capítulo 5 – Relações trigonométricas Capítulo 6 – Transformações trigonométricas
Unidade 3 Matrizes, determinantes e sistemas lineares	Capítulo 7 – Matrizes e determinantes Capítulo 8 – Sistemas de equações lineares
Unidade 4 Geometria Espacial	Capítulo 9 – Geometria Espacial de Posição Capítulo 10 – Poliedros Capítulo 11 – Prismas Capítulo 12 - Pirâmides
Unidade 5 Análise combinatória	Capítulo 13 – Princípio fundamental da contagem Capítulo 14 – Permutações Capítulo 15 – Combinações e arranjos Capítulo 16 – Binômio de Newton
Unidade 6 Probabilidades e Estatística	Capítulo 17 – Introdução à teoria das probabilidades Capítulo 18 – Cálculo de probabilidades Capítulo 19 – Adição e multiplicação de probabilidades Capítulo 20 – Introdução à Estatística Capítulo 21 – Medidas de tendência central

Tradicionalmente, o estudo da Geometria Espacial é desenvolvido apenas no Volume 2. Optamos, porém, por deixar para o Volume 3 parte desse tema: cilindros, cones e esferas. Assim, esse importante assunto da Matemática do Ensino Médio não é esgotado em apenas um ano.

Introduzimos também no Volume 2 o estudo da Estatística até medidas de tendência central. Entretanto, no início do Volume 3, fazemos uma retomada e ampliamos com as medidas de dispersão.

3º ANO	
Unidade 1 Estatística e probabilidades	Capítulo 1 – Medidas de tendência central (retomada) Capítulo 2 – Medidas de dispersão Capítulo 3 – Probabilidades e Estatística
Unidade 2 Geometria Analítica	Capítulo 4 – Coordenadas cartesianas Capítulo 5 – A reta no plano cartesiano Capítulo 6 – Distância, área e ângulo Capítulo 7 – A circunferência no plano cartesiano
Unidade 3 Geometria Espacial	Capítulo 8 – Cilindros Capítulo 9 – Cones Capítulo 10 – Esferas
Unidade 4 Números complexos	Capítulo 11 – O conjunto dos números complexos Capítulo 12 – Operações na forma algébrica Capítulo 13 – Forma trigonométrica Capítulo 14 – Operações na forma trigonométrica
Unidade 5 Polinômios e equações algébricas	Capítulo 15 – Polinômios Capítulo 16 – Operações com polinômios Capítulo 17 – Equações algébricas Capítulo 18 – Teoremas e relações
Unidade 6 As cônicas	Capítulo 19 – Elipse Capítulo 20 – Hipérbole Capítulo 21 – Parábola

Não incluímos o estudo de limites e derivadas porque o consideramos adequado à etapa posterior ao Ensino Médio. São conhecimentos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, presentes em alguns cursos de graduação, sendo por isso mais restritos ao Ensino Superior.

Estrutura das unidades em cada volume

Vimos que cada um dos três volumes contém seis unidades, subdivididas em capítulos. Vamos descrever agora como cada unidade está estruturada, da abertura ao fechamento. Para facilitar, utilizamos algumas ilustrações retiradas dos volumes da coleção.

Desenvolvimento dos conteúdos

De modo geral, podemos dizer que cada capítulo é iniciado com alguma situação-problema, um exemplo que desencadeia os conteúdos. As situações apresentadas ou os exemplos dados referem-se a contextos variados, que podem se relacionar à própria Matemática e seus conteúdos, ao cotidiano ou até mesmo a outra disciplina.

Para o desenvolvimento dos conteúdos, utilizamos algumas seções que devem auxiliar o trabalho do professor e dos alunos nesse sentido. São elas:

Questões e reflexões

É desejável que o aluno tenha uma postura reflexiva e participativa no desenvolvimento do conteúdo trabalhado. Assim, uma forma de envolvê-lo é fazendo perguntas diversas, que podem, evidentemente, ser ampliadas pelo professor. Algumas vezes, tais perguntas são colocadas ao longo da teoria para sondar o conhecimento prévio do aluno, verificar sua compreensão e potencializar suas reflexões. Em outros momentos, as perguntas propostas têm o caráter de verificação imediata em meio a exemplos que foram desenvolvidos, conduzindo o aluno a alguma resolução.

Com essas questões esperamos respostas que também devem ser analisadas pelo professor como sondagem de aprendizagem, fornecendo indícios de compreensão ou de dúvidas, esperadas na construção do conhecimento. Embora tais respostas ou sugestões de respostas estejam no Manual do Professor, elas objetivam muito mais a opinião e o envolvimento do aluno do que qualquer preocupação com exatidão.

Exercícios resolvidos

Como os capítulos apresentam subdivisões, propomos diversos exemplos e exercícios resolvidos. Os exemplos estão distribuídos ao longo do capítulo e servem de apoio ao desenvolvimento do conteúdo, articulando a teoria com a resolução. Os exercícios resolvidos, por outro lado, constituem exemplos de como solucionar problemas matemáticos que dizem respeito àquele conteúdo, passo a passo.

Diante dos exercícios resolvidos e dos exemplos, sugerimos que o professor ora reproduza os passos da resolução na lousa, ora promova discussões, orientando o aluno a acompanhar no próprio livro as resoluções. Essa maneira de observar exemplos e exercícios resolvidos cria o hábito desejável de "caminhar por si só", de refletir sobre como fazer e de buscar a compreensão de forma independente.

Exercícios propostos

A aprendizagem de conceitos matemáticos ocorre quando os alunos conseguem estabelecer relações entre conteúdos e são capazes de compreendê-los. Para que isso ocorra e haja segurança ao fazer Matemática, é necessária a fixação de certos procedimentos e a manipulação das relações estabelecidas. Esse é um dos objetivos de tais exercícios. Eles devem ser encaminhados tão logo as explicações dos conteúdos correspondentes sejam dadas. De acordo com a escolha do professor, podem ser propostos para resolução individual em sala de aula ou em duplas. É fundamental também que sejam devidamente corrigidos na aula, como forma de verificação das ideias básicas desenvolvidas. É necessário observar as dúvidas levantadas pelos alunos, pois são elementos que permitem ao professor fazer, eventualmente, retomadas necessárias ou acrescentar mais exemplos e exercícios.

Como desejamos o desenvolvimento da autonomia dos alunos, sempre é recomendável que exercícios sejam selecionados como "tarefa" a ser executada fora da sala de aula. Indicamos, então, que a verificação de procedimentos e exercícios ocorra também entre os próprios alunos.

Por vezes, há mais exercícios relativos a determinados assuntos. Isso ocorre pela característica do tema, que pode ter uma quantidade maior de conceitos e procedimentos exigidos para sua compreensão e desenvolvimento.

Geralmente, as últimas atividades exigem do aluno algo mais que uma simples fixação. Não são atividades com grau elevado de complexidade, mas foram elaboradas procurando articulação com outros assuntos já estudados ou questionando os alunos de forma um pouco diferenciada em relação às primeiras atividades. O objetivo é propor situações diferentes para valorizar a busca de estratégias de resolução. Algumas vezes, os alunos deverão, por exemplo, elaborar enunciados com base em determinadas condições. O intuito é conduzir o aluno a observar como é a estrutura do enunciado de uma situação-problema e as relações entre seus dados.

Observação

Dificuldades são esperadas e devem ser utilizadas para promover debates em sala de aula. A discussão coletiva dessas atividades e sua resolução, observando formas diferentes de procedimentos e impressões dos alunos sobre como pensaram, devem ser valorizadas e conduzidas pelo professor.

Exercícios de vestibulares e Enem

Os alunos do Ensino Médio têm diversas expectativas que precisam ser levadas em consideração em sua formação. Uma delas é a legítima preocupação com o ingresso em uma universidade brasileira. Para tanto, é necessário que, desde o 1º ano desse estágio da escolarização, eles tenham o hábito de enfrentar situações presentes em questões de vestibular. Isso não quer dizer que a grande motivação do ensino aqui proposto seja o vestibular em si, e sim que essa é uma de suas finalidades.

No fim de cada unidade apresentamos uma diversidade de questões retiradas de exames de vestibular que envolvem os conteúdos trabalhados. Geralmente não são de imediata resolução, por isso consideramos importante que algumas delas sejam resolvidas coletivamente em sala de aula. Outras, a critério do professor, podem ser encaminhadas ou sugeridas aos alunos como autoavaliação. Aquelas com grau de complexidade maior na resolução podem ser utilizadas como componente da própria avaliação (em forma de trabalho em pequenos grupos). No fim do Manual do Professor, essas questões estão resolvidas.

Como o Enem também é uma preocupação de nossos alunos, incluímos questões que já fizeram parte desse importante exame brasileiro. Elas aparecem em meio às de vestibular. Mencionamos no Manual do Professor a habilidade (ou as habilidades) exigida na questão.

Sugerimos ao professor que, ao corrigir ou verificar coletivamente tais questões, as habilidades correspondentes sejam identificadas e comentadas para a turma toda. É um trabalho simples, mas fundamental para a formação e preparação do aluno para o Enem: habituá-lo a observar as habilidades que estão sendo exigidas dele.

No fechamento da unidade também apresentamos sugestões do trabalho com habilidades e competências, além das questões do Enem.

Todas as unidades trazem no fim uma questão desafiadora (a última da unidade). Embora o caráter de desafio possa ser considerado subjetivo de aluno para aluno, geralmente a questão escolhida exige um conhecimento da parte teórica com maior profundidade ou apresenta uma complexidade maior em sua resolução.

O desafio pode ser ampliado pelo professor, caso queira, e em conformidade com a turma. Atualmente, com as facilidades de acesso às informações e *sites* especializados de busca, é possível acessar não apenas outras questões de vestibular e do próprio Enem mas também questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBMs) e das Olimpíadas Brasileiras de Matemática da Escola Pública (OBMEPs).

Explorando

Em alguns momentos, ao longo da coleção, propomos atividades com características bem diferentes dos Exercícios Propostos ou dos Exercícios de Vestibulares e Enem. No Explorando, as atividades objetivam, entre outras coisas, como o próprio nome da seção indica, explorar determinado conteúdo ou situação. Compreendemos que a formação de nossos alunos no Ensino Médio precisa cada vez mais ser conduzida no sentido de valorizar e potencializar o aspecto investigativo. Além disso, as ferramentas computacionais e a calculadora representam meios presentes no cotidiano de nossos alunos que não podem ficar distantes da sala de aula.

O uso da calculadora, de instrumentos geométricos ou de ferramentas computacionais é sugerido em algumas dessas atividades. Assim, é preciso que haja, caso tais atividades sejam desenvolvidas em sala de aula, como sugerimos, uma prévia organização, solicitando que os alunos tragam os instrumentos necessários ou que a própria escola os disponibilize.

Observações

1. A calculadora pode ser empregada como instrumento, além das atividades sugeridas nesta seção. Por exemplo, existem exercícios em que o cálculo numérico é apenas auxiliar. Nesses casos, o uso da calculadora acaba liberando mais tempo para que o aluno possa refletir sobre o exercício e os resultados encontrados.

2. O computador faz parte do cotidiano do aluno. É um aliado importante a ser trazido para a sala de aula não apenas pelo interesse do aluno mas também por seu emprego na construção de gráficos, na elaboração de tabelas e na construção de planilhas. Não são somente gráficos estatísticos, mas gráficos de funções e gráficos de curvas diversas, como elipse, hipérbole e parábola.

3. Para a construção de gráficos, sugerimos dois aplicativos importantes e de acesso gratuito: Winplot e Geogebra.

Embora o número de atividades do Explorando seja relativamente pequeno, elas podem ser ampliadas pelo professor juntamente com as ideias criativas que os alunos apresentam quando estão diante de ferramentas computacionais, por exemplo. Uma investigação matemática muitas vezes começa com uma simples pergunta que o professor faz à turma ou até mesmo com uma curiosidade observada por um aluno. Nesse tipo de atividade, o envolvimento do aluno ocorre de forma imediata. Nosso papel, como professores, é estimular a curiosidade para que o aspecto investigativo faça parte do aprendizado.

Textos na Matemática

Com base no livro *Letramento no Brasil:* habilidades matemáticas, tivemos a ideia de elaborar atividades nesta coleção didática que representassem um convite à leitura de textos. Compreendemos que a Matemática não pode ser resumida, de modo tacanho, à busca de soluções de questões e de problemas. Como atividade humana que é, precisa também ser compreendida por sua história, pela identificação de personagens responsáveis por descobertas que a transformaram e pelas dificuldades encontradas nas buscas de explicações convincentes para determinada teoria.

Ao realizarmos um trabalho com textos da história da Matemática estamos, de certa maneira, procedendo a uma contextualização sociocultural. Nosso objetivo é, então, compreender o conhecimento científico como resultado de uma construção humana dentro de um processo histórico e social.

Apresentamos pelo menos um texto em cada unidade. Entretanto, conforme referências apresentadas no fim deste manual, outros também podem ser analisados e encaminhados pelo professor para leitura e análise de seus alunos.

Os textos que envolvem personagens da história da Matemática são geralmente muito bem aceitos e comentados pelos alunos. É importante dizer-lhes que determinados personagens recebem inteiramente o crédito de um feito, ao passo que outros que também deram contribuições permanecem no anonimato ou desconhecidos. Sabemos também que alguns não tiveram o merecimento devido, enquanto para outros o reconhecimento foi tardio.

Algumas dessas trajetórias de vida e/ou de superação são exemplos importantes para o conhecimento e a reflexão de nossos alunos. Como não se emocionar com a precocidade de Gauss e com a produção Matemática intensa de Euler, apesar de sua cegueira? Como não ficar triste diante do fim prematuro de um potencial extraordinário como o de Galois? Nossos alunos precisam também ver esse outro lado dessa atividade que denominamos Matemática.

Os textos versam não apenas sobre a história da Matemática e de personagens mas também sobre a história dos conteúdos. Por vezes, utilizamos a forma textual para abordar explicações necessárias para a compreensão de conteúdos diversos.

No fim de alguns textos elencamos questões ou sugestões de atividades que podem ser utilizadas para verificar a compreensão do texto ou para potencializar ampliações a critério do professor e dos próprios alunos.

Observação

Recomendamos, no fim do livro do aluno, algumas obras interessantíssimas para leitura. São referências que abordam a história da Matemática e algumas vezes de seus personagens, numa linguagem bem atraente. Sugerimos que os alunos leiam pelo menos um desses livros ao longo do ano. Talvez até essa leitura possa fazer parte de uma atividade de avaliação: por exemplo, depois de ler o livro, o aluno apresenta, de forma resumida, as ideias principais contidas nele.

Algumas conclusões

As unidades desta coleção contêm grandes temas subdivididos em outros. Esses temas são desenvolvidos em sala de aula durante determinado tempo, ocupando, muitas vezes, semanas. Assim, é aceitável e esperado, por exemplo, que nossos alunos apresentem dificuldades em relação ao domínio do que foi abordado. Mesmo que eles resolvam os exercícios propostos e participem ativamente das aulas, é natural e necessário que façam retomadas e resumos dos principais conceitos e ideias trabalhadas na unidade.

Assim, como uma espécie de roteiro, propomos uma reflexão sobre o que foi desenvolvido na unidade voltada ao conteúdo. Tal reflexão é conduzida por meio de dez questões que podem ser ampliadas pelo professor. Ao procurar a resposta para cada uma dessas questões, o aluno é remetido diretamente à verificação da aprendizagem. Não é necessário que ele apresente para a turma as respostas para tais questões, pois estamos diante de uma autoavaliação sobre o entendimento ou não do objeto de estudo.

Sugerimos que esse caráter de autoavaliação seja motivado pelo professor e utilizado como uma reflexão sobre as ideias principais que compõem o assunto estudado. Essa pode também ser uma maneira de criar o hábito de fazer resumos e retomadas de conteúdos.

Fechamento da unidade

Já abordamos neste manual as competências e habilidades do Enem. Sugerimos um trabalho ao longo do desenvolvimento dos conteúdos visando à compreensão das habilidades presentes na Matriz de Referência. Propusemos também questões nos Exercícios de Vestibulares e Enem que já fizeram parte desse exame. Mas podemos ir um pouco além.

Como fechamento da unidade, a seção que aqui apresentamos cumpre com o objetivo de ampliar o trabalho visando ao Enem. É o desenvolvimento das habilidades sendo realizado em um contexto diferente. Propomos a leitura de um texto de cunho formativo relacionado às Ciências, podendo também estar ligado à arte, modelagem matemática, inclusão social ou história da Matemática; enfim, procuramos diversificar. Depois da leitura de cada um desses textos, alguns questionamentos são sugeridos.

É importante que se compreenda que não se trata de uma leitura complementar ou de uma atividade que possa ser descartada. Ela está estruturada com a finalidade de proporcionar aos alunos um trabalho um pouco diferente em sua formação. Sugerimos que tais atividades façam parte da avaliação do aluno, como um componente de desenvolvimento de habilidades e de compreensão de texto. Nesse sentido, o encaminhamento em duplas ou trios seria o recomendado.

As respostas ou sugestões de respostas às questões são apresentadas no Manual do Professor.

Componentes e personagens na construção do conhecimento

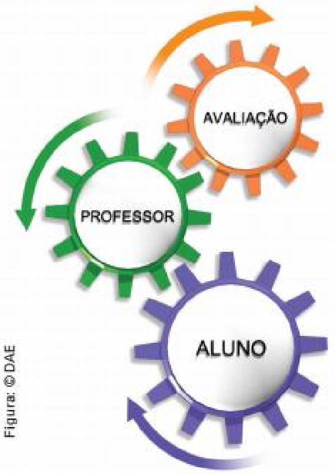


Figura: © DAE

O livro didático de Matemática é apenas um instrumento que apresenta os temas e fornece alguns possíveis caminhos a serem seguidos para o desenvolvimento dos conteúdos nele inseridos. A maneira como ele é trabalhado dia a dia em sala de aula, como é manipulado pelo aluno em seus estudos e pelo professor ao organizar seu trabalho e ao propor formas de avaliação são componentes decisivos para a construção do conhecimento. É uma verdadeira engrenagem que precisa ser montada para que funcione:

Assim, precisamos analisar como relacionar esses componentes e personagens!

Professor, aluno e atitudes

Como este é um manual destinado ao professor, propomos algumas reflexões para que a construção do conhecimento resulte numa aprendizagem significativa para o aluno. Entendemos que outros tópicos poderiam aqui ser incorporados pelo docente durante sua atividade. O que temos a seguir é uma proposta para análise e discussão.

- O livro didático de Matemática é uma referência; entretanto, o papel do professor é fundamental. Sua postura deve estar ligada à ideia de facilitador, orientador e incentivador da aprendizagem. Sempre que possível, ele deve instigar o aluno e valorizar sua autonomia. Ao aluno, cabe o papel ativo na construção do conhecimento.

Ao considerarmos que o papel do aluno deve ser ativo, certamente teremos uma exigência bem maior do professor, que deverá saber ouvir e discutir impressões vindas do aluno. Na sala de aula, é recomendável que as carteiras não estejam sempre distribuídas em filas. As discussões devem colocar o aluno lado a lado, para que ele aprenda a ouvir e a defender seus argumentos.

Nesta coleção, esses momentos podem ocorrer diante do que chamamos Questões e reflexões, após a leitura de um Texto na Matemática, com a verificação de respostas e procedimentos quando de Exercícios propostos, na abertura e no fechamento da unidade e também no Explorando. Cabe ao professor, com sua experiência, administrar o encaminhamento de tais atividades.

- Os conceitos matemáticos precisam, sempre que possível, ser inicialmente trabalhados de forma intuitiva, por meio de exemplos e boas questões. Somente depois é que serão formalizados.

Quando abordamos as primeiras ideias de Geometria Analítica, nós, professores, podemos questionar os alunos sobre o que é necessário saber para localizar um ponto na superfície terrestre. Apenas nesse questionamento acabamos envolvendo não apenas o aluno mas também outra área do conhecimento: a Geografia.

Outro exemplo seria o primeiro contato dos alunos com o tema funções. Podemos solicitar a eles que informem a relação entre o número do calçado que utilizam e o tamanho dos seus pés. Estamos aqui diante do conceito de funções.

- Vivenciar, sempre que possível, alguns conteúdos desenvolvidos.

Quando iniciamos o estudo de probabilidades, por exemplo, podemos levar para a sala de aula moedas, dados, cartas de baralho, roletas, volantes de loteria esportiva, resultados da Mega-Sena e outros jogos conhecidos, propondo questões diversas.

Se o assunto é função quadrática, podem-se levar para a sala de aula pedaços de barbante com 20 metros de comprimento e solicitar que os alunos construam no chão, utilizando esses fios, alguns retângulos com 20 metros de perímetro. Depois, pergunta-se a eles, por exemplo: Quais são as medidas dos lados desses retângulos e quais são suas respectivas áreas? Em seguida, eles devem descobrir as medidas dos lados do retângulo que apresenta a maior área possível.

- Utilizar instrumentos tecnológicos, mesmo que para verificação de resultados.

Independentemente do livro didático, que já sugere atividades nesse sentido, proponha outras com a utilização de calculadoras. Quando o assunto estudado é, por exemplo, números irracionais, podemos pedir aos alunos que investiguem certas raízes quadradas com a calculadora, elevando os resultados ao quadrado para verificarem então o que ocorre.

Se o assunto é Trigonometria, além dos exercícios e atividades propostos no livro devemos estimular os alunos a sondar os valores das razões trigonométricas com o auxílio da calculadora.

Se o tema é Estatística, podemos encaminhar atividades coletivas de construção de tabelas e gráficos, por exemplo, com o auxílio de planilhas eletrônicas. Nossos alunos estão inseridos numa sociedade em que o computador é de uso diário. Talvez tenham dificuldades para construir os gráficos, daí o caráter investigativo e o direcionamento para o trabalho em grupo, em que as trocas auxiliam na superação das dificuldades esperadas.

- Propor leituras sobre a história da Matemática, os personagens, os assuntos.

Em Textos na Matemática, propomos momentos de leitura. Mais uma vez, além desses textos, outros podem ser selecionados e pesquisados pelo professor, que também pode solicitar que os próprios alunos pesquisem a respeito. Se estiverem, por exemplo, trabalhando com Geometria Plana, eles podem pesquisar textos em livros de história da Matemática sobre os números figurados ou sobre o método da exaustão.

- Incentivar a curiosidade e o espírito de pesquisa dos alunos.

Boas questões feitas por nós, professores, durante o desenvolvimento dos conteúdos despertam nos alunos a curiosidade. Se, por exemplo, estivermos abordando o plano cartesiano e citarmos Descartes e Fermat, podemos solicitar que façam uma pesquisa sobre o último teorema de Fermat.

Outro exemplo: ao abordarmos a progressão geométrica, podemos questionar os alunos sobre fractais e como obtê-los. Uma simples pesquisa na internet será suficiente para que eles deparem com imagens fantásticas geradas por computador tendo como base a teoria dos fractais.

- Desafiar a capacidade resolutiva dos alunos.

Bons desafios geram boas e diferentes estratégias de resolução. Muitas vezes, a forma como trabalhamos em sala de aula, mesmo sem querer, está viciada em procedimentos-padrão de resolução. Não é raro depararmos com raciocínios muitas vezes inimagináveis de nossos alunos. Como professores, não podemos, independentemente dos conteúdos estudados no livro didático, deixar de lado desafios lúdicos que provoquem positivamente os alunos, envolvendo-os cada vez mais. As sugestões, dadas anteriormente neste manual, de utilizar questões da OBM e da OBMEP representam essa valorização.

• Estimular os alunos a observar o aspecto lógico-dedutivo da Matemática.

No Ensino Médio, é necessário que enfatizemos em nossas aulas, sempre que possível, que as "verdades" matemáticas necessitam de demonstrações. Isso não precisa ficar restrito à Geometria, como tradicionalmente ocorre.

Assim, no estudo das equações algébricas, por exemplo, a demonstração do teorema das raízes imaginárias, acompanhando o que o livro propõe e discutindo rapidamente as passagens, deve merecer atenção dos alunos.

No estudo de logaritmos, as propriedades operatórias podem e devem ser justificadas passo a passo por meio das propriedades conhecidas de potenciação.

• A Matemática e a cidadania devem caminhar juntas.

Entendemos que o ambiente da sala de aula deve ser concebido como uma comunidade ativa. Cada aluno carrega uma história de vida, algumas vezes feita de dificuldades e superações, outras totalmente descompromissada e até alheia ao ambiente em construção. Cada pessoa tem suas próprias características. Somos diferentes fisicamente, temos gostos musicais diferentes, encaramos a vida de modo diferente, nossas atitudes diante de uma situação que a vida nos impõe não são as mesmas. As pessoas têm expectativas e sonhos que devem ser respeitados.

A Matemática representa uma ciência historicamente construída e necessita de um ambiente de sala de aula adequado para que seja desenvolvida e auxilie a formação do aluno como cidadão. Nesse sentido, nossas aulas não podem estar ao largo dos acontecimentos e questões sociais envolvendo aluno, escola e comunidade como um todo.

As informações e notícias fazem parte do cotidiano e nos são repassadas por meio de linguagens matemáticas. Porcentagens, gráficos e tabelas inundam a mídia e precisam de conhecimentos matemáticos para uma análise crítica, desejável em todo cidadão. A modelagem matemática, por exemplo, está presente em diversas áreas da atividade humana. A Matemática, portanto, precisa ser conduzida em nossas aulas como um instrumento importante para a interpretação do mundo em sua diversidade de contextos.

Quando procuramos em nossas aulas propiciar a criação de estratégias diferentes diante da abordagem de um assunto ou levamos o aluno a comprovar resultados, a justificar e a construir argumentos sólidos, favorecendo sua criatividade e desenvolvendo um trabalho coletivo que respeite opiniões diversas das suas, estamos formando um cidadão crítico.

Além desses procedimentos e atitudes que sugerimos acima – alguns dos quais possivelmente já presentes na rotina dos professores –, outros poderiam aqui ser elencados. São procedimentos que não exigem de nós, professores, grandes mudanças, mas alguns cuidados, algumas atitudes que certamente trazem um maior envolvimento dos alunos, uma aula muito mais dinâmica, em que eles são convidados a fazer Matemática, em vez de simplesmente assistirem a alguém encenando Matemática.

Professor, aluno e avaliação

Durante muito tempo, a avaliação dos alunos tinha a finalidade de medir seu desempenho. Por meio da atribuição de notas, sua natureza era classificatória. Nesse sentido, ela era utilizada para promover ou não o aluno para a série seguinte. Atualmente entendemos que a avaliação não pode ser reduzida a esse fim. É claro que essa maneira de pensar a avaliação está ligada ao contexto histórico em que era empregada. Sendo assim, vamos examinar diferentes ideias sobre a avaliação.

Usaremos como referência o livro *Avaliação e Educação Matemática*, de Paulo Abrantes, para observar diferentes concepções de avaliação assumidas ao longo do tempo. Caso o professor queira, no fim deste manual recomendamos outras obras para o estudo do tema.

Avaliação como medida

> Considerando o ensino associado à transmissão de conhecimentos (o professor falando e escrevendo no quadro), a aprendizagem é interpretada como a capacidade que o aluno possui de reproduzir o que lhe foi passado. Temos aí uma concepção de aprendizagem fortemente ligada à memorização. Nesse caso, a ênfase é no resultado, e diferentes formas de aprender não são levadas em consideração. Essa perspectiva de avaliação, denominada avaliação como medida, pressupõe que se pode medir e exprimir por meio de uma nota a aprendizagem do aluno. Essa nota (medida), por sua vez, é comparada à média das notas da turma à qual o aluno pertence, classificando-o em relação à sua turma.

A avaliação como medida ocorre após certo número de aulas ou certa quantidade de conteúdos desenvolvidos. Caso o aluno tenha uma nota baixa, a responsabilidade de modo geral recai sobre ele mesmo. Imediatamente são levantadas justificativas para tal desempenho: falta de interesse do aluno, pouca capacidade de entendimento, dentre outras. Nessa perspectiva de avaliação, a parcela de responsabilidade do professor praticamente não é considerada. Essa é uma perspectiva danosa à formação dos alunos, pois a avaliação não permite compreender o modo como o aluno entendeu determinado conteúdo, o que inviabiliza ajustes no modo de ensinar.

ABRANTES, Paulo. *Avaliação e Educação Matemática.* Rio de Janeiro: MEM/USU-Gepem, [1995?]. p. 11-12. (Reflexões em Educação Matemática).

Avaliação como distância

Associar a avaliação a uma medida levou, a certa altura, a uma preocupação com o rigor e a objetividade. Procuravam-se instrumentos que medissem os conhecimentos dos alunos de um modo "rigoroso" e independente da subjetividade da pessoa que decide, nomeadamente do professor.

[...]

Uma das consequências, em termos de avaliação, era deixar de considerar o modelo do professor e tomar como referência um conjunto de objetivos previamente definidos. As questões dos testes eram preparadas com base em matrizes de objetivos-conteúdos, isto é, tabelas de duas entradas nas quais uma das dimensões continha uma sequência dos tópicos do programa e a outra se referia aos níveis do domínio cognitivo da taxonomia de Bloom. O resultado da avaliação passava a ser encarado como uma medida de distância entre a resposta do aluno e o objetivo.

ABRANTES, [1995?]. p. 12.

Essa forma de avaliar ficou conhecida como **avaliação por objetivos**, que surgiu tendo como preocupação o rigor e a objetividade, isto é, procuravam-se instrumentos que medissem os conhecimentos dos alunos mais rigorosamente, independentemente da subjetividade do professor. Com base na avaliação por objetivos, duas novas formas de avaliação apareceram: **avaliação de diagnóstico** e **avaliação formativa**.

A avaliação de diagnóstico (expressão usada por Paulo Abrantes) tinha como finalidade verificar se o aluno tinha ou não os pré-requisitos necessários para aprender os próximos tópicos do programa. Quanto à avaliação formativa, ela ocorria durante o processo de ensino e aprendizagem e tinha como meta detectar se os alunos estavam ou não prontos para "atingir os objetivos" que tinham sido previamente estabelecidos. Se o resultado apontasse que eles não estavam prontos, atividades de remediação (recuperação) lhes eram encaminhadas. Nessa forma de avaliar, curtos períodos de ensino eram seguidos por momentos formais de avaliação. Tanto a avaliação formativa como a de diagnóstico estão ligadas à avaliação como distância.

Avaliação como interpretação

De acordo com uma nova visão de aprendizagem, não é importante apenas a correção ou incorreção das respostas do aluno numa dada prova de avaliação mas também os processos que o levam a produzir essas respostas. Mais do que controlar, a função do professor é interpretar, identificar problemas, gerar hipóteses explicativas. Mais do que medir o desvio em relação a comportamentos previamente determinados, importa compreender as razões do erro. O erro é uma fonte de informação essencial e não algo a ser tratado de um modo contabilístico ou que apenas se pretende evitar enquanto "comportamento observável". Se estamos doentes, não ficamos satisfeitos com um tratamento imediato que esconda os sintomas; queremos descobrir as causas da doença.

ABRANTES, [1995?]. p. 14.

Conforme a citação acima sugere, a avaliação como interpretação é contínua, ocorrendo durante o processo de ensino e aprendizagem, e tem uma estreita ligação com esse processo. A preocupação principal nessa perspectiva de avaliar não é a medida que indica a distância em relação ao modelo estabelecido pelo professor ou ditado por aqueles comportamentos previamente estabelecidos como corretos ou esperados.

Acreditamos cada vez mais na avaliação como interpretação, por considerá-la muito mais que uma simples medida. Por meio dela, podemos, como professores, obter indícios do desenvolvimento do aluno na aquisição e no domínio de conceitos e procedimentos matemáticos. A avaliação, desse modo, não pode se resumir a uma prova – uma só forma de avaliar. Aspectos como participação durante as aulas, colaboração nas atividades, comportamentos e posicionamentos nas atividades em grupo, quando devidamente observados, podem fornecer fortes indícios sobre o real desenvolvimento dos alunos. Acreditamos em uma avaliação em que o objetivo central esteja ligado à dimensão educativa.

Não é apenas o aluno que está sendo avaliado. Mais que tudo isso, o ensino organizado por nós, professores, também está sendo avaliado. Resumindo, a forma de avaliação que concebemos inclui:

- momentos diferentes de avaliação (não apenas uma prova);
- formas diversas de avaliar (individualmente, em grupo, coletivamente);
- vários instrumentos (provas dissertativas, testes, pesquisas, comentários sobre leituras etc.);
- autoavaliação do aluno (o que permite reconhecer possíveis dificuldades a serem sanadas);
- observações contínuas dos alunos no processo como um todo (atitudes, intervenções orais, desenvolvimento de pequenas tarefas etc.);
- discussão com os alunos sobre as formas de avaliação que serão consideradas.

Discutir anteriormente com os alunos as formas de avaliação reforça a participação deles. Problemas do cotidiano da sala de aula, como a indisciplina, também devem ser colocados para a turma nesse momento como parte de um processo. As chamadas "regras do jogo" devem ser claras e cumpridas pelas duas partes, sob pena de surgirem incoerências e um desenvolvimento do trabalho bem aquém do desejável.

Falamos acima da necessidade de autoavaliação. Naturalmente, é preciso que os alunos saibam fazê-la. No fim de cada unidade da coleção, sugerimos em *Algumas conclusões* questões que podem ser utilizadas para verificar conceitos principais trabalhados. Além disso, propomos a seguir outras questões relacionadas a esse tipo de avaliação, e não apenas à assimilação de conteúdos.

Em relação às minhas atitudes

1. Nas atividades individuais que foram propostas para eu realizar, como me situo?

( ) Realizei com empenho.

( ) Poderia ter me empenhado mais.

( ) Simplesmente não tomei conhecimento.

( ) Outro: ____________________

2. Nas atividades em grupo que foram propostas, como foi meu comportamento?

( ) Participei ativamente.

( ) Poderia ter me envolvido mais.

( ) Em nada contribuí para a realização da atividade.

( ) Outro: ____________________

3. Quando em sala de aula, diante de uma dúvida, de que maneira me classifico como aluno?

( ) Procuro questionar.

( ) Deixo para depois, pois acredito que naturalmente essa dúvida será sanada.

( ) Omito-me, pois perguntar em sala de aula só atrapalha.

( ) Outro: ____________________

4. Quando em sala de aula um colega emite uma opinião, de que modo me posiciono?

( ) Simplesmente me omito.

( ) Acho que a opinião dele não deve ser considerada.

( ) Procuro refletir sobre a opinião dele e, às vezes, emito a minha.

( ) Outro: ____________________

5. Em relação àquelas questões mais difíceis que são propostas como forma de desafio, qual é meu comportamento?
   ( ) Não tenho a mínima curiosidade de resolver.
   ( ) Gosto de buscar a solução, mesmo que não consiga.
   ( ) Procuro identificar minhas dificuldades para eliminá-las, retomando conteúdo já estudado ou solicitando ajuda do professor.
   ( ) Outro: ______________________________

Observação: Outras questões podem ser elaboradas e acrescentadas tanto pelo professor quanto pelos alunos. Fornecemos aqui apenas algumas sugestões.

Em relação aos conteúdos trabalhados

1. Quando o professor deu explicações, como me comportei?
   ( ) Não prestei total atenção às explicações dadas.
   ( ) Poderia ter prestado mais atenção e participado fazendo mais perguntas.
   ( ) Prestei muita atenção e participei emitindo opiniões e fazendo perguntas pertinentes.
   ( ) Outro: ______________________________
2. Sobre a dificuldade de compreensão dos conteúdos, como os classifico?
   ( ) O conteúdo é muito difícil.
   ( ) O conteúdo é fácil, mas tenho dificuldade em compreender.
   ( ) O conteúdo é fácil e não apresento dificuldade em compreender.
   ( ) Outro: ______________________________
3. Quais foram os exercícios em que não apresentei dificuldades para resolver e fiz individualmente sem nenhuma ajuda?
   ____
   ____
4. Quais foram os exercícios que resolvi com o auxílio de um colega ou outra pessoa?
   ____
   ____
5. De quais assuntos da unidade necessito fazer alguma retomada?
   ____
   ____

Observação: Outras questões podem ser elencadas pelo professor e pelos alunos.

É claro que essa autoavaliação deve ser um instrumento muito bem discutido. Mencionamos apenas algumas das possíveis questões para compor esse processo. Outras podem se mostrar também interessantes. Não temos dúvida em afirmar que os professores se encontram em melhor posição para verificar aprendizagens e julgar o progresso dos alunos quando contam com a contribuição destes para a composição do resultado final do processo de avaliação.

Com essas considerações, queremos pontuar que existem diferentes formas de avaliar e que não podemos deixar de pensar e discutir a avaliação.

No início desta discussão sobre a avaliação, apresentamos textos de Paulo Abrantes. Em seu estudo, ele utilizou uma pesquisa realizada por um grupo de pesquisadores, traduzida para a língua portuguesa como *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Segundo o documento, pensar em mudanças na avaliação não deve excluir a necessidade de outras mudanças interligadas:

- **Quanto aos conteúdos**. A mudança deve seguir em direção a uma variedade rica de tópicos matemáticos e situações problemáticas.

- **Quanto à aprendizagem**. A mudança a ser planejada deve caminhar em direção a problemas de investigação, deixando para trás a repetição e a memorização.
- **Quanto ao ensino**. A direção desejada é aquela em que o papel do professor deixa de ser o de simples "dizer" e passa a ser o de "questionar e ouvir".
- **Quanto à avaliação**. A mudança na visão de avaliação deve se voltar a um sistema baseado em evidências provenientes de fontes múltiplas, abandonando a confiança nos resultados de um teste único, e ao reconhecimento dos julgamentos profissionais dos professores, deixando para trás o uso exclusivo de evidências de origem externa.

Mencionamos esses tópicos para que nossa perspectiva de avaliação contemple conteúdos, aprendizagem e ensino. São necessárias profundas e frequentes discussões a respeito de avaliação que não podem ficar restritas a um momento, a uma forma ou apenas ao conteúdo.

4. Referências

Dividimos as referências em tópicos com o objetivo de facilitar possíveis e recomendáveis pesquisas. Algumas destas obras poderiam pertencer a mais de um tópico. São leituras que certamente remeterão o professor a outras referências. Além disso, nos *sites* de busca podemos conhecer outras obras. Diversos são os grupos em nosso país pesquisando o ensino e a aprendizagem da Matemática. Teses de doutorado e dissertações de mestrado também são encontradas facilmente.

Ainda que nosso trabalho como professor demande uma boa carga horária semanal, precisamos cada vez mais refletir sobre o que fazemos. Isso pode ser feito com a leitura crítica do que outras pessoas estão produzindo sobre avaliação em Matemática, história da Matemática e, de modo geral, ensino e aprendizagem da Matemática.

Boa leitura!

Avaliação

Embora neste manual já tenhamos abordado o assunto, a avaliação em Matemática precisa ser continuamente discutida e estudada. Elencamos a seguir algumas referências, incluindo a obra de Abrantes citada anteriormente, um trabalho interessantíssimo que gerou várias pesquisas.

ABRANTES, Paulo. *Avaliação e Educação Matemática.* Rio de Janeiro: MEM/USU-Gepem, [1995?]. (Reflexões em Educação Matemática). Disponível em: <www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Avalia%E7%E3o%20e%20EducaMatem%E1tica%20Paulo%20Abrantes.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2016.

BALLESTER, Margarida et al. *Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2003. (Inovação Pedagógica).

MORAES, Cesar Augusto do Prado. *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica. Jundiaí/SP: Pacto Editorial, 2012.

PERRENOUD, P. et al. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação. São Paulo: Artmed, 2002.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos (Coord./Org.). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática:* métodos alternativos – Projeto Fundão. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática (UFRJ), 1997.

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). *Avaliação em Matemática:* história e perspectivas atuais. Campinas/SP: Papirus, 2008.

Sugestão inicial: *Avaliação em Matemática*: história e perspectivas atuais

Sinopse extraída do livro:

> O livro percorre o trajeto seguido pela avaliação escolar em Matemática no país desde os tempos do Brasil Império até os mais recentes exames promovidos por órgãos oficiais.
>
> Os resultados de pesquisas deste grupo de autores permitem ao leitor conhecer os processos e as modificações ao longo do tempo dos exames preparatórios – ritual de passagem que faz parte da história de nosso último

século. A obra também faz uma reflexão sobre as práticas pedagógicas evidenciadas pelas provas de admissão no ensino secundário, desde a época de sua instituição até sua extinção na década de 1970. Além disso, traz uma análise das concepções docentes a respeito desse tema – causa de tanta controvérsia entre professores e alunos – e, finalmente, discute exames como Saeb, Enem, Provão e Sinaes, apontando novas perspectivas para a avaliação escolar em Matemática.

Formação do professor

A formação do professor passa, antes de qualquer coisa, por seu interesse em participar continuamente de discussões. Ela não pode ser resumida à leitura de uma ou outra obra, de um ou outro artigo. Precisa ser discutida. Sabemos da dificuldade, muitas vezes, da participação em encontros de discussão sobre nossa profissão, sobre a Matemática escolar, seu ensino e aprendizagem. Por isso, uma motivação para ampliações futuras de estudos pode estar nestas leituras:

ALMEIDA, Maria Isabel de. *O sindicato como instância formadora dos professores*: novas contribuições ao desenvolvimento profissional. Tese (Doutorado) – FE-USP. São Paulo, 1999.

CURY, Helena Noronha. *Formação de professores de Matemática*: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (Orgs.). *Formação de professores de Matemática*: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul/RS: IPR, 2012.

FIORENTINI, Dario (Org.). *Formação de professores de Matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas/SP: Mercado de Letras, 2003.

LIMA, Maria Socorro Lucena. *A formação contínua do professor nos caminhos e descaminhos do desenvolvimento profissional*. Tese (Doutorado) – FE-USP. São Paulo, 2001.

Sugestão inicial: *Formação de professores de Matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares

Sinopse extraída do livro:

> Os educadores matemáticos constituem um dos grupos profissionais que mais procuram se aventurar por novos caminhos e com outros olhares em relação à formação do professor, aos seus saberes e à sua prática docente.
>
> O leitor verá, nesta obra, que a tentativa de utilizar as tecnologias de informação e comunicação na formação de professores e no ensino de Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.
>
> As reflexões e estudos deste livro, produzidos sob a concepção da formação docente como um processo contínuo, sempre inconcluso e mediado por práticas reflexivas e investigativas, trazem subsídios teóricos e práticos à formação inicial do professor de Matemática e ao desenvolvimento de seu conhecimento profissional.

Próxima sugestão: *Formação de professores de Matemática*: reflexões e propostas

Sinopse extraída do livro:

> Neste livro, docentes de cursos de formação de professores de Matemática, de instituições públicas e particulares, de várias regiões do Brasil, expõem suas práticas na docência e suas ideias sobre o que pode ser feito para modificar os currículos de Licenciatura em Matemática. A diversidade de disciplinas e de metodologias abordadas pode contribuir para o aprofundamento dos debates que já vêm sendo desenvolvidos, em documentos oficiais ou em fóruns de licenciaturas, sobre as reformulações curriculares nessa área.

História da Matemática

As obras abaixo listadas representam fontes de consulta. Não há necessidade de uma leitura ininterrupta. Assim, por exemplo, quando iniciamos determinado assunto, é interessante buscar nestas fontes algum texto que possa ser utilizado em sala de aula não apenas como apoio, mas também como forma de levar o aluno à compreensão da Matemática como uma ciência historicamente construída.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1996.

COLEÇÃO Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula. Vários autores. São Paulo: Atual, 1993.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas/SP: Editora da Unicamp, 2004.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre: Globo, 1958.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomos 1 e 2.

Sugestão de consulta: *Introdução à história da Matemática*

Sinopse extraída do livro:

> Nesta obra clássica, Howard Eves narra a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos. Este livro é um verdadeiro curso de Matemática, detendo-se no exame de obras importantes – sem se limitar às pequenas histórias, notas biográficas e amenidades. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época abordada. Uma das obras mais completas da área da história da Matemática, pode ser utilizada por estudantes e professores tanto de Matemática quanto de História ou Educação.

Conhecimentos matemáticos

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

COLEÇÃO do Professor de Matemática. Vários autores. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 12 volumes.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DIEUDONNÉ, Jean. *A formação da Matemática contemporânea*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

HERSH, Reuben; DAVIS, Philip J. *A experiência matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 3 volumes. (Coleção do Professor de Matemática).

Sugestão de estudos: *A experiência matemática*

Sinopse extraída do livro:

> Em quatro milênios, uma grande quantidade de material, conhecido como Matemática, evoluiu e tornou-se ligado, de várias maneiras, à nossa vida diária. Qual é a natureza da Matemática? Qual o seu significado? Quais as suas preocupações? Qual a sua metodologia? Como é criada e usada?
>
> Bem significativamente, foram feitas poucas tentativas por pesquisadores matemáticos para escrever sobre sua ciência de uma maneira interessante e compreensível pelo público em geral. Reconhecendo que sua própria fascinação com o significado e objetivo da Matemática é ainda mais forte do que sua fascinação com a produção real de Matemática, os autores oferecem uma viagem pessoal estimulante desta ciência e examinam o complexo de fatores que determina sua estrutura e aplicações.

Observação

Essa obra engloba conhecimentos matemáticos, além de história e filosofia da Matemática.

Outras leituras sobre a Matemática

As indicações a seguir representam leituras intrigantes e curiosas sobre conteúdos, emprego prático da Matemática e aspectos da história dessa ciência. A linguagem adotada pelos autores, algumas vezes, segue a dos romances de ficção. Alguns desses livros não são indicados apenas para nós, professores, mas também para nossos alunos.

ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

ATALAY, Bulent. *A Matemática e a* Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Mercuryo, 2007.

BARDI, Jason Socrates. *A guerra do cálculo*. Tradução de Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BELLOS, Alex. *Alex no País dos Números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática. Tradução de Berilo Vargas e Claudio Carina. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BENNETT, Deborah J. *Aleatoriedade*. Tradução de Waldéa Barcellos. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BERLINSKI, David. *O advento do algoritmo*: a ideia que governa o mundo. Tradução de Leila Ferreira de Souza Mendes. São Paulo: Globo, 2002.

BESSON, Jean-Louis (Org.). *A ilusão das estatísticas*. Tradução de Emir Sader. São Paulo: Editora Unesp, 1995.

DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

______. *O gene da Matemática*. Tradução de Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.

ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Tradução de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GARBI, Gilberto G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

GRANGER, Gilles Gaston. *O irracional*. Tradução de Álvaro Lorencini. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

KAPLAN, Robert. *O nada que existe*: uma história natural do zero. Tradução de Laura Neves. Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

LIVIO, Mario. *Razão áurea*: a história de fi, um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides*: a história da Geometria – Das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

Sugestão inicial: *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado

Sinopse extraída do livro:

> "Quando será que eu vou usar isso?" Essa é a clássica pergunta de nove entre dez alunos às voltas com cálculos, fórmulas e equações. Para muitos, de fato, a Matemática que aprendemos na escola é algo totalmente abstrato, muito distante do mundo prático e real. O matemático Jordan Ellenberg nos mostra, porém, que a Matemática está em todo lugar e se relaciona com questões do nosso cotidiano. Munidos dos instrumentos matemáticos adequados, podemos saber o verdadeiro significado de informações que antes considerávamos inquestionáveis.
>
> [...]
>
> Com rigor e irreverência, Ellenberg aborda os mais variados assuntos para explicar de modo simples e claro os conceitos mais complicados. Nada escapa desse amplo mosaico: o resultado das eleições presidenciais, o futuro da obesidade, a pintura renascentista italiana, o que o Facebook sabe (e o que ele não sabe) a seu respeito e até mesmo a existência de Deus.

Ensino e aprendizagem da Matemática

Acreditamos que estas referências também podem ser utilizadas para a formação do professor de Matemática. Indicamos obras de pesquisadores preocupados com o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, relacionadas à área denominada Educação Matemática. Em cada um destes livros outras obras são indicadas sobre assuntos diversos voltados a essa área de pesquisa

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Tendência em Educação Matemática).

BRITO, Márcia Regina Ferreira (Org.). *Solução de problemas e Matemática escolar*. Campinas/SP: Alínea, 2006.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação Matemática. São Paulo: Summus/ Campinas/SP: Unicamp, 1986.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela (Orgs.). *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas/ SP: FE-Unicamp/Cempem, 2003.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis (Org.). *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.

FOSSA, John A. (Org.). *Facetas do diamante*: ensaios sobre Educação Matemática e história da Matemática. Rio Claro/SP: Editora da SBHMat, 2000.

GIARDINETTO, José R. Boettger. Matemática escolar e Matemática da vida cotidiana. Campinas/SP: Autores Associados, 1999. (Polêmicas do Nosso Tempo).

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).

Sugestão inicial: *Investigações matemáticas na sala de aula*

Sinopse extraída do livro:

> No Dicionário Aurélio, investigar significa: fazer diligências para achar, pesquisar, indagar, inquirir, examinar com atenção, esquadrinhar. É o que trata este livro, onde os autores, todos portugueses, abordam as investigações matemáticas e sua importância no ensino e no aprendizado de professores e alunos.
>
> Diversos estudos em educação mostram que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento, e em numerosas experiências já empreendidas com o trabalho investigativo os alunos têm mostrado um grande entusiasmo pela Matemática. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

Sites recomendados

Indicamos a seguir alguns endereços eletrônicos que podem ser utilizados pelos professores em sua formação continuada, no estudo da área de Educação Matemática, para verificar as pesquisas voltadas à história da Matemática e as reflexões sobre conteúdos e procedimentos.

<www.mathema.com.br>: diversas sugestões e reflexões envolvendo o ensino da Matemática.

<www.obmep.org.br>: provas resolvidas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

<www.obm.org.br>: provas resolvidas da Olimpíada Brasileira de Matemática.

<www.edumatec.mat.ufrgs.br>: atividades com uso de tecnologias de informática.

<www.sbem.org.br>: acesso a grupos de trabalhos e pesquisas, e calendário sobre eventos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem).

<www.cabri.com: acesso a uma comunidade virtual sobre a utilização do Cabri na Geometria.

<www.sbembrasil.org.br>: acesso à Educação Matemática em Revista.

<www.rbhm.org.br>: acesso à Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM).

<http://revistas.pucsp.br/emp>: acesso à Educação Matemática Pesquisa – Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Acessos em: 19 mai. 2016.

5. Uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem

O professor Ubiratan D'Ambrosio é conhecido por sua intensa dedicação às questões voltadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Alguns de seus artigos falam sobre a questão da formação do professor. No artigo "Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural" (procure acessar), ele escreveu:

> O professor do futuro será valorizado pela sua ação como animador cultural e comentarista crítico.
>
> O professor que vê sua missão como ensinador de um conteúdo disciplinar tem seus dias contados e rapidamente será substituído por um vídeo ou um CD-ROM ou alguma nova peça de tecnologia ainda em desenvolvimento.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural.
Disponível em: <https:/sites.google.com/site/etnomath/14>. Acesso em: 16 fev. 2016.

Nesse mesmo artigo, Ubiratan D'Ambrosio faz uma extensa e importante reflexão sobre a formação do professor. Já no início, podemos encontrar um pequeno texto escrito por Helen Buckley, que reproduzimos como um ponto de partida para aqueles que querem refletir mais sobre nossa profissão:

> Era uma vez um menino bastante pequeno que contrastava com a escola bastante grande. Uma manhã, a professora disse:
>
> – Hoje nós iremos fazer um desenho.
>
> "Que bom!", pensou o menininho. Ele gostava de desenhar leões, tigres, galinhas, vacas, trens e barcos...
>
> Pegou a sua caixa de lápis de cor e começou a desenhar. A professora então disse:
>
> – Esperem, ainda não é hora de começar! – Ela esperou até que todos estivessem prontos.
>
> – Agora – disse a professora – nós iremos desenhar flores.
>
> E o menininho começou a desenhar bonitas flores com seus lápis rosa, laranja e azul. A professora disse:
>
> – Esperem! Vou mostrar como fazer. – E a flor era vermelha com caule verde. – Assim – disse a professora – agora vocês podem começar.
>
> O menininho olhou para a flor da professora, então olhou para a sua flor. Gostou mais da sua flor, mas não podia dizer isso... virou o papel e desenhou uma flor igual à da professora. Era vermelha com caule verde.
>
> Num outro dia, quando o menininho estava em aula ao ar livre, a professora disse:
>
> – Hoje nós iremos fazer alguma coisa com o barro.
>
> "Que bom!", pensou o menininho.
>
> Ele gostava de trabalhar com barro. Podia fazer com ele todos os tipos de coisas: elefantes, camundongos, carros e caminhões. Começou a juntar e amassar a sua bola de barro.
>
> Então, a professora disse:
>
> – Esperem! Não é hora de começar! – Ela esperou até que todos estivessem prontos. – Agora – disse a professora – nós iremos fazer um prato.
>
> "Que bom!", pensou o menininho. Ele gostava de fazer pratos de todas as formas e tamanhos.
>
> A professora disse:
>
> – Esperem! Vou mostrar como se faz. Assim, agora vocês podem começar.
>
> E o prato era um prato fundo. O menininho olhou para o prato da professora, olhou para o próprio prato e gostou mais do seu, mas ele não podia dizer isso. Amassou seu barro numa grande bola novamente e fez um prato fundo, igual ao da professora.
>
> E muito cedo o menininho aprendeu a esperar e a olhar e a fazer as coisas exatamente como a professora. E muito cedo ele não fazia mais coisas por si próprio. Então aconteceu que o menininho teve que mudar de escola. Essa escola era ainda maior que a primeira.
>
> Um dia a professora disse:
>
> – Hoje nós vamos fazer um desenho.
>
> "Que bom!", pensou o menininho e esperou que a professora dissesse o que fazer. Ela não disse. Apenas andava pela sala.
>
> Então veio até o menininho e disse:
> – Você não quer desenhar?
> – Sim, e o que é que nós vamos fazer?
> – Eu não sei, até que você o faça.
> – Como eu posso fazê-lo?
> – Da maneira que você gostar.
> – E de que cor?
> – Se todo mundo fizer o mesmo desenho e usar as mesmas cores, como eu posso saber o desenho de cada um?
>
> – Eu não sei... – E então, o menininho começou a desenhar uma flor vermelha com caule verde...

In:D'AMBROSIO, Ubiratan. Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural.
Disponível em: <https:/sites.google.com/site/etnomath/14>. Acesso em: 16 fev. 2016.

Boas reflexões diante dessa atividade humana cuja grande finalidade é formar um cidadão com **autonomia**.

PARTE ESPECÍFICA – MANUAL DO PROFESSOR – VOLUME 3

Abordaremos aqui os conteúdos que compõem o volume 3 desta Coleção de Matemática para o Ensino Médio, descrevendo como estão articulados os capítulos na unidade, as seções e como compreendemos as possibilidades de encaminhamento de seus conteúdos. Algumas vezes falaremos dos objetivos a serem conquistados nessa proposta, outras faremos observações de caráter prático, apontando sugestões e alertando para cuidados a serem tomados quando ocorrerem certos desenvolvimentos teóricos.

Unidade 1 – Estatística e Probabilidades

CAPÍTULOS	PRINCIPAIS OBJETIVOS
1. Medidas de tendência central	Compreender que uma medida de tendência central é uma forma de representar um grupo de valores de uma mesma variável; obter as medidas de tendência central de um grupo de valores de uma mesma variável.
2. Medidas de dispersão	Identificar grupos de valores de uma mesma variável mais ou menos homogêneos por meio das chamadas medidas de dispersão; obter as medidas de dispersão de um grupo de valores de uma mesma variável estatística.
3. Probabilidades e Estatística	Relacionar e identificar o cálculo de probabilidades com o estudo de Estatística.

Nesta unidade retomamos o estudo de Estatística iniciado no final do volume 2 desta coleção. Abordamos aqui as chamadas medidas de tendência central e ampliamos o conteúdo com as medidas de dispersão. É importante observar que o estudo feito aqui está baseado em ideias iniciais que podem auxiliar o aluno a compreender aspectos relevantes de Estatística presentes em pesquisas e noticiários que frequentemente fazem parte de seu cotidiano. O último capítulo da unidade procura relacionar, por meio de alguns exemplos, Estatística e probabilidade.

CAPÍTULO 1 – Medidas de Tendência Central

Iniciamos o capítulo chamando a atenção de algumas frases que podem ser encontradas na mídia escrita ou falada. Essas frases dizem respeito às chamadas medidas de tendência central (média aritmética, moda e mediana). Desejamos aqui levar o aluno a observar que a utilização dessas medidas permite dar uma ideia global dos dados presentes, por exemplo, numa pesquisa. Além disso, decisões diversas são tomadas com base no conhecimento de medidas de tendência central.

Este capítulo divide-se em duas partes. Na primeira, estudamos a média aritmética. A partir de um exemplo, procuramos, intuitivamente, conduzir o aluno à compreensão do que vem a ser média aritmética. Somente depois apresentamos sua definição formal. Utilizamos um recurso gráfico (gráfico de colunas) num exemplo para evidenciar o que vem a ser média (retomamos o mesmo exemplo apresentado antes de definir média aritmética).

A média ponderada é aqui apresentada como um caso particular de média aritmética, em que temos a repetição de valores. Fazemos isso por meio de um exemplo. É importante que os exemplos de média aritmética e de média ponderada sejam amplamente discutidos com a turma.

Na segunda parte, duas outras medidas de tendência central são estudadas: moda e mediana. Elas são apresentadas como alternativa para o caso de situações em que a média aritmética não seja representativa para um grupo de valores. No caso de "moda", utilizamos uma situação: Em um grupo de cinco amigos, cada um deles tem uma entre as seguintes notas: (R$ 2,00, R$ 2,00, R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 100,00). Se calcularmos a média aritmética entre as quantias, podemos dizer que, em média, cada um dos cinco amigos possui R$ 22,20. Esse valor, entretanto, não representa o perfil da quantia desse grupo, pois o valor mais frequente é R$ 2,00 (três amigos em cinco têm essa quantia). Definimos, então, "moda" como "a medida de tendência central correspondente ao valor mais frequente de um grupo de valores observados". Alguns exemplos são apresentados e sugerimos que sejam discutidos com os alunos.

A mediana também é uma medida de tendência central. Em um grupo de n valores colocados em ordem crescente ou decrescente, aquele valor que ocupar a posição central (sendo n ímpar) é a mediana. Se a quantidade n de valores for par, a mediana será a média aritmética dos dois valores que ocupam as posições centrais.

Observações e sugestões

- Normalmente quando nos referimos a média, entendemos que é uma média aritmética. É importante comentar com os alunos que a média aritmética nem sempre representa um grupo de valores. Assim, por exemplo, se estão reunidas 5 pessoas com idades de 16 anos, 16 anos, 16 anos, 18 anos e 45 anos, a média aritmética não é tão representativa quanto a moda.
- Uma atividade que pode ser direcionada para resolução em pequenos grupos é a pesquisa de

exemplos da utilização de média em notícias apresentadas em jornais ou revistas. Outra possibilidade é a utilização do conceito de média em outras disciplinas, por exemplo, Química e Física. Cada equipe apresenta um exemplo aos demais.

- Outra atividade de pesquisa que pode ser encaminhada para os alunos é sobre a chamada média quadrática. Em duplas, os alunos poderiam pesquisar o que é uma média quadrática e exemplos de utilização dessa média.
- Na disciplina de Física, pode-se conduzir uma pesquisa sobre exemplos da utilização do conceito de média aritmética e de média ponderada. Essa pesquisa pode ser encaminhada em duplas, com a apresentação coletiva dos resultados.

Questões e reflexões

Página 12

Verificação a partir do exemplo das medalhas. Pode-se solicitar aos alunos que elaborem valores para uma variável e constatem a validade da propriedade a partir dos valores elaborados.

Explorando

Página 17

Sugestão de encaminhamento:

A turma deverá ser dividida em três grupos.

Antes das atividades relacionadas ao que foi estudado aqui, julgamos importante chamar a atenção acerca de uma observação sobre as medidas de tendência central na análise de uma variável contínua. Essa observação aparece no livro do aluno por meio de três gráficos: são as chamadas distribuições de valores (à esquerda, assimétrica à direita e simétrica). Sugerimos que essas ideias sejam exploradas pelos alunos assimétrica. Após apresentar esses gráficos, propomos que a turma seja dividida em três grupos: A, B e C. A cargo do grupo A ficará uma pesquisa sobre a distribuição de valores assimétrica à esquerda; o grupo B deverá pesquisar uma distribuição de valores que seja simétrica; e o grupo C ficará encarregado de pesquisar uma distribuição de valores que seja assimétrica à direita. É importante que cada grupo apresente o resultado da pesquisa aos demais alunos. Essa pesquisa pode ser encaminhada utilizando-se sites de buscas na internet.

As respostas apresentadas dependerão das pesquisas feitas pelos grupos.

CAPÍTULO 2 – Medidas de Dispersão

Este é um capítulo que precisa ser acompanhado com a utilização, aluno, de calculadora, pois isso facilitará bastante a obtenção das chamadas medidas de dispersão num conjunto de valores. Iniciamos retomando a situação apresentada na abertura da unidade sobre o desempenho de dois jogadores de basquete em seis jogos. Ao tomar a decisão de qual desses jogadores seria escalado, observamos que os dois possuem a mesma média aritmética de cestas de 3 pontos. Sendo assim, a média aritmética mostra-se insuficiente para a tomada de decisão. Como tal decisão será tomada?

Conceituamos a amplitude num conjunto de valores. Utilizamos o exemplo de amplitude térmica. Voltando aos jogadores de basquete, obtemos, então, as amplitudes correspondentes aos desempenhos desses dois jogadores (amplitude do número de cestas de 3 pontos). Assim, levamos à compreensão de que, quanto maior a amplitude em um conjunto de valores, maior a dispersão desses valores. Isso indica menos regularidade.

Além da amplitude como medida de dispersão, outras duas medidas podem ser utilizadas: desvio médio, variância e desvio padrão. O desvio médio de um conjunto de valores é definido como "a média aritmética dos módulos dos desvios desses valores". Esses desvios são obtidos em relação à média aritmética. A variância de um conjunto de valores de uma variável estatística é a "média aritmética dos quadrados dos desvios desses valores" também em relação à média aritmética. Como no cálculo da variância os desvios foram elevados ao quadrado, não teremos a mesma unidade dos valores da variável. Daí a necessidade de utilizarmos o chamado desvio padrão (raiz quadrada da variância).

Utilizamos, então, o desvio padrão para analisar como é a dispersão das quantidades de cestas de 3 pontos dos dois jogadores de basquete, considerados inicialmente. Aqui, é necessário que os alunos acompanhem, com o auxílio de uma calculadora, os cálculos para a obtenção dos correspondentes desvios.

Observações e sugestões

- É importante chamar a atenção dos alunos para a utilização de desvio padrão a partir da variância. Se estivermos calculando, por exemplo, a variância de um conjunto de massas de um grupo de pessoas, esse valor estará em quilograma ao quadrado. Se calcularmos a raiz quadrada, obteremos o valor em quilograma (a raiz quadrada da variância será o desvio padrão).
- Um cuidado: quanto maior o desvio padrão, mais disperso (mais heterogêneo) é o conjunto de valores e, reciprocamente, quanto menor o desvio padrão, menos disperso (mais homogêneo) é o conjunto de valores analisados.
- Uma sugestão de atividade de avaliação seria solicitar aos alunos que, em duplas, pesquisassem uma situação de distribuição de valores de uma mesma

variável numa situação presente em jornais ou revistas. Por exemplo: o desempenho da Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa S.A.), a bolsa de valores oficial do Brasil, durante 10 dias consecutivos (poderia ser o número de pontos ao final de cada fechamento). Em duplas, os alunos apresentariam aos demais o estudo das médias e do desvio padrão. Poderiam até elaborar gráficos estatísticos para apresentar aos demais.

Questões e reflexões

Página 23

1. Resposta que depende da previsão do tempo.

2. Resposta que depende dos dados levantados.

3. Resposta que depende da pesquisa.

CAPÍTULO 3 – Probabilidades e Estatística

O objetivo desse capítulo é conduzir os alunos à observação de que probabilidade e Estatística estão intimamente ligadas. Assim, por exemplo, quando uma pesquisa é elaborada e colocada em prática há a necessidade de definir a população-alvo e, dessa população, uma amostra representativa será utilizada na pesquisa. Uma maneira de selecionar quem fará parte da amostra é por meio de escolha aleatória (existem outras maneiras). Além disso, os dados dessa pesquisa precisam ser analisados e apresentados por meio de gráficos. Uma pesquisa, quando é realizada dentro de critérios estabelecidos estatisticamente, apresenta resultados que não são exatos, mas que são bem prováveis.

Após a introdução, em que procuramos conduzir os alunos a observar a ligação entre Estatística e probabilidade, retomamos os aspectos principais estudados sobre probabilidades no Volume 2 desta coleção. Abordamos o conceito de probabilidade, algumas propriedades do cálculo de probabilidade e apresentamos exemplos para essa retomada.

Em seguida, utilizamos um texto do livro *Aleatoriedade*, de Débora J. Bennett, que permite relacionar probabilidade e Estatística.

Observações e sugestões

- Além dos exemplos apresentados na retomada de probabilidades, no início do capítulo, sugerimos que outros sejam apresentados ou propostos aos alunos. Uma ideia seria selecionar algumas questões mais recentes dos vestibulares e ENEM para esse fim.
- O livro *Aleatoriedade*, conforme indicado acima, poderia ser conduzido para uma leitura dos alunos. O capítulo 6, "Acaso ou necessidade?" em particular, é extramemente atrativo e foi dele que extraímos o texto indicado acima. A leitura permitirá conhecer um pouco mais sobre a relação entre probabilidade e Estatística.

Questões e reflexões

Página 31

1. Aproximadamente 99,99 %.

2. $C_{60}^{6} = \dfrac{60!}{6!(60-6)!} = \dfrac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

História da Matemática

Página 34

Sugestão de encaminhamento:

Leitura em duplas, com discussão coletiva das respostas para as questões propostas.

O texto é sobre a história do desenvolvimento da Estatística. No texto encontramos contribuições de personagens diversas, de áreas diferentes do conhecimento.

Respostas para as questões propostas:

1. O primeiro dado estatístico disponível foi o de registros egípcios de presos de guerra, datados de 5000 a.C.

2. Os estudos consistiam em análises de nascimentos e mortes, realizadas através das Tábuas de Mortalidade, que deram origem às atuais Tábuas de Mortalidade usadas pelas companhias de seguros. Um dos resultados mais importantes na época foi a constatação de que o percentual de nascimento de crianças do sexo masculino (51%) era levemente superior ao do sexo feminino (49%).

3. Ronald Aylmer Fisher apresentou os princípios de planejamento de experimentos, introduzindo os conceitos de "aleatorização", ou aleatoriedade, e da Análise da Variância, procedimentos muito usados atualmente.

Explorando habilidades e competências

Página 44

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com discussão coletiva das respostas para as questões propostas.

Respostas:

1.

Filhos	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Frequência absoluta	157	298	219	195	84	47	1000
Frequência relativa	15,7%	29,8%	21,9%	19,5%	8,4%	4,7%	100%
Frequência acumulada	15,7%	45,5%	67,4%	86,9%	95,3%	100,0%	

2. Pela frequência acumulada, pode-se notar que o valor mediano inteiro é 2 filhos por mulher. Pela frequência relativa, pode-se ver que o valor modal é 1 filho por mulher.

3. $\left(\dfrac{0+298+2\cdot 219+195\cdot 3+84\cdot 4+47\cdot 5}{1000}\right)=$

$=\dfrac{1892}{1000}\cong 1{,}89$ filho por mulher.

Esse valor está $\dfrac{(2{,}1-1{,}89)}{2{,}1}=10\%$ abaixo da taxa de reposição.

4. Para que ela tenha mais de 2,1 filhos, ela deve ter, pelo menos, 3 filhos. A quantidade de mulheres com 3 ou mais filhos é 195 + 84 + 47 = 326. Logo, a probabilidade de uma delas ser escolhida é $\dfrac{326}{1000}$ – 32,6%

5. A amplitude será dada por 2,2 – 1,5 = 0,7.

O desvio será dado por:

X	1,5	1,67	1,67	1,7	1,81	1,9	2,1	2,2	2,2	1,89
$(x - \text{média})^2$	0,0729	0,01	0,01	0,0049	0,0016	0,0169	0,1089	0,1849	0,1849	0,0144
Variância	0,0609									
Desvio	0,2469									

Unidade 2 – Geometria Analítica

CAPÍTULOS	PRINCIPAIS OBJETIVOS
4. Coordenadas cartesianas	Compreender que, no plano cartesiano, associamos a cada ponto um par ordenado e, reciprocamente, a cada par ordenado associamos um ponto; calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano a partir de suas coordenadas.
5. A reta no plano cartesiano	Compreender a condição de alinhamento de três pontos a partir de suas coordenadas no plano cartesiano; obter e identificar as diferentes formas de equações de uma reta no plano cartesiano.
6. Distância, área e ângulo	Estabelecer a fórmula que permite calcular a distância de um ponto a uma reta, a partir das coordenadas do ponto e da equação geral da reta; calcular a área de um triângulo representado no plano cartesiano, a partir das coordenadas de seus vértices; obter a medida do ângulo entre duas retas concorrentes no plano cartesiano, conhecidas suas equações.
7. A circunferência no plano cartesiano	Obter a equação da circunferência, conhecendo-se a medida de seu raio e as coordenadas de seu centro no plano cartesiano; obter a medida do raio e as coordenadas do centro de uma circunferência no plano cartesiano, conhecendo-se sua equação geral; identificar posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre circunferências no plano cartesiano.

Esta unidade é um pouco mais extensa, por causa da quantidade de gráficos no plano cartesiano que não podem ser em tamanho reduzido, sob pena de dificultar a compreensão dos alunos. Tanto no livro do 1º ano como no do 2.º, alguns gráficos de funções foram representados no plano cartesiano. Assim, parte da unidade não representará novidade para o aluno.

A unidade está dividida em quatro capítulos que abordam ponto, reta e circunferência no plano cartesiano. No início desse estudo, é importante destacar que associamos, a cada ponto de um plano, um par de valores (par ordenado) e, reciprocamente, a cada par de valores associamos um ponto do plano.

Na última unidade deste livro, ampliamos o estudo de Geometria Analítica, considerando as chamadas cônicas: elipse, hipérbole e parábola.

CAPÍTULO 4 – Coordenadas Cartesianas

O capítulo, relativamente curto e de fácil compreensão, está dividido em duas partes. Na primeira parte, iniciamos retomando a reta numérica. A partir dessa reta numérica, traçamos outra passando pelo zero (será a origem), perpendicularmente à primeira. A partir daí, estabelecemos um sistema de referência que permite localizar cada ponto do plano a partir de duas coordenadas: abscissa (horizontal) e ordenada (vertical). Falamos, nessa primeira parte, dos quadrantes (já é do conhecimento dos alunos) em que o plano cartesiano é dividido.

A segunda parte do capítulo trata da distância entre dois pontos no plano cartesiano, a partir de suas coordenadas. Mesmo que tenhamos observado como calcular essa distância, esse conceito deve ser cuidadosamente trabalhado, pois está presente em diversas situações relacionadas a lugar geométrico (um exemplo pode ser encontrado na última unidade desta coleção, quando definimos elipse, hipérbole e parábola como lugar geométrico de pontos do plano cartesiano).

Além da distância de pontos, também abordamos as coordenadas do ponto médio de um segmento (a demonstração é feita por meio do teorema de Tales) e algumas demonstrações analíticas de propriedades da Geometria Plana. Essa é uma importante conexão que permite aos alunos observar a Geometria Plana sob o ponto de vista da Geometria Analítica. Nesse sentido, sugerimos que os exemplos apresentados sejam amplamente discutidos com os alunos.

Observações e comentários

- Outras propriedades da Geometria Plana poderiam ser selecionadas para que os alunos, em pequenos grupos, fizessem suas demonstrações analíticas, além dos exemplos mencionados no final do capítulo, antes das atividades propostas.
- Já que mencionamos no início do capítulo as chamadas coordenadas geográficas, pode-se sugerir uma atividade sobre a localização de pontos na superfície terrestre. Uma ideia seria utilizar *sites* de busca que tenham mapas. Neles, é possível localizar cidades e locais, observar suas coordenadas e a partir daí observar distâncias entre locais.

Questões e reflexões

Página 49

1. Os pontos e suas coordenadas são: G(−7, 0) e E(5, 0).

2. Possuem abscissa igual a zero.

3. O ponto de maior abscissa é A(3, 6). O de maior ordenada é A(3, 6).

Página 51

Sim, a distância seria a mesma.

Textos na Matemática

Página 56

Sugestão de encaminhamento:

Leitura coletiva, com as discussões das respostas para as questões propostas.

O texto aborda o personagem-chave para o desenvolvimento da Geometria Analítica: René Descartes. Aqui é interessante observar a história de vida de Descartes, sua saúde fraca e sua trajetória.

Respostas para as questões propostas:

O *Discurso sobre o método*, por vezes traduzido como *Discurso do método*, ou ainda *Discurso sobre o método para bem conduzir a razão na busca da verdade dentro da ciência*, é um tratado matemático e filosófico de René Descartes, publicado em Leiden, na Holanda, em 1637. Inicialmente apareceu com outros trabalhos de Descartes, *Dioptrique*, *Meteores* e *Geometrie*. Uma tradução para o latim foi produzida em 1656 e publicada em Amsterdam.

O tratado, ao lado de *Meditações sobre filosofia primeira*, *Princípios de filosofia* e *Regras para a direção do espírito*, constitui a base da epistemologia do filósofo, sistema que passou a ser conhecido como cartesianismo. O *Discurso* propõe um modelo quase matemático para conduzir o pensamento humano, uma vez que a Matemática tem por característica a certeza, a ausência de dúvidas.

2. Descartes nunca presenciou uma batalha no exército do príncipe de Nassau, mas lutou junto às forças oponentes do duque da Bavária. Ele havia se alistado no exército para viajar, não por razões políticas.

Descartes apreciou seus dias no exército, encontrando pessoas de diferentes países e também encontrando a solidão que desejava ardentemente, a fim de estudar Matemática e Ciência, além de ponderar sobre a natureza do Universo.

3. Descartes descreveu Issac Beeckman como "a inspiração e o pai espiritual de meus estudos".

CAPÍTULO 5 – A Reta no Plano Cartesiano

Iniciamos o capítulo retomando função afim, estudada no primeiro livro desta coleção. Temos aqui uma importante conexão. Além de ampliarmos o estudo das retas (uma reta perpendicular ao eixo *x*, por exemplo, que não foi estudada no primeiro ano, pois não representa uma função $x = f(x)$, aqui é estudada), outra conexão fundamental é estabelecida já no início do capítulo: na Geometria Euclidiana, dois pontos distintos determinam uma reta; já na Geometria Analítica, dois pares ordenados vão determinar a equação da reta.

Este é um capítulo extenso. Iniciamos tratando da condição de alinhamento de três pontos. Por meio de semelhança de triângulos, chegamos à condição que permite verificar se três pontos estão ou não alinhados no plano cartesiano, conhecidas suas coordenadas. Esse é um resultado importante para o estabelecimento da equação de uma reta. É importante chamar a atenção dos alunos quanto à utilização do cálculo de determinantes para o estabelecimento da condição de alinhamento de três pontos conhecendo-se suas coordenadas no plano cartesiano. A partir da condição de alinhamento de três pontos, obtemos a equação geral da reta. Alguns exemplos são discutidos no livro do aluno e permitem a esperada compreensão de que, se temos as coordenadas de dois pontos no plano cartesiano, podemos obter a equação da reta que passa por esses dois pontos.

Relembramos então as posições relativas entre duas retas no plano e trazemos essa análise para o plano cartesiano, particularmente para as equações gerais das retas. É importante discutir, mesmo que de forma rápida, os exemplos encaminhados no livro do aluno.

Passamos então a estudar o coeficiente angular de uma reta no plano cartesiano. Como podemos obter o coeficiente angular? Propomos duas maneiras: a partir do ângulo (tangente do ângulo) que a reta forma com o eixo *x*, ou a partir das coordenadas de dois pontos da reta (o quociente da variação das ordenadas pela correspondente variação das abscissas).

Ao abordar o coeficiente angular de uma reta no plano cartesiano, o objetivo maior é conduzir os alunos a obterem a equação da reta por um ponto, conhecido o coeficiente angular. É a conhecida "equação do feixe de retas por um ponto". Sabemos que por um ponto qualquer do plano passam infinitas retas. As equações dessas retas são da forma $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ considerando que as coordenadas do ponto são $(x_0; y_0)$ e m é o coeficiente angular. Como são infinitas retas que passam por esse ponto, o que muda de uma reta para outra é o valor do coeficiente angular. Estamos, assim, preparando os alunos para a equação reduzida de uma reta, que é o objetivo dessa parte do capítulo. É bem provável que os alunos considerem a equação reduzida da reta, estudada aqui, como algo conhecido deles (é a conexão com função afim, conforme início do capítulo). Embora o que é aqui trabalhado não represente dificuldade, entendemos que a equação reduzida da reta é a forma de equação da reta mais importante, pois permite observar imediatamente não apenas o coeficiente angular (que está ligado de forma direta ao ângulo que a reta forma com o eixo *x*), mas também o ponto em que a reta intersecta o eixo *y* (coeficiente linear).

É a partir da equação da reta na forma reduzida que importantes conclusões sobre paralelismo e perpendicularidade de retas são estabelecidas. Temos também outras formas de equações da reta: a equação segmentária da reta (é importante observar como chegamos à equação segmentária da reta a partir da equação reduzida) e a equação paramétrica da reta.

Observações e sugestões

- No início do capítulo, ao abordarmos a condição de alinhamento de três pontos, mostramos como chegar a essa condição por meio de determinantes. Novamente temos uma conexão entre dois assuntos da Matemática: Determinantes e Geometria Analítica. Seria interessante retomar, por meio de outros exemplos, o cálculo de determinantes, observando algumas propriedades estudadas no volume anterior.
- Embora o trabalho de Geometria Analítica no Ensino Médio esteja relacionado às coordenadas cartesianas, os alunos podem ser motivados a pesquisarem sobre a existência de outras maneiras de localizar pontos em um plano. Um exemplo é o sistema de coordenadas polares. Pode-se, nesse sentido, sugerir uma atividade de pesquisa de como utilizar as coordenadas polares, de como podemos converter coordenadas cartesianas para coordenadas polares e vice-versa. Talvez essa pesquisa possa compor a avaliação da unidade.
- Na explicação dada sobre o coeficiente angular, foi realizada uma demonstração de que o coeficiente angular é o valor da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *x* no sentido anti-horário. Aproveite o momento para justificar que ângulos suplementares, diferentes de 90º, têm tangentes opostas, isto é:

$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = \frac{\text{tg}\,180° - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,180° \cdot \text{tg}\,\alpha} = \frac{0 - \text{tg}\,\alpha}{1 + 0 \cdot \text{tg}\,\alpha}$$

Questões e reflexões

Página 58

1. O valor do coeficiente de *x* na função representa a taxa de crescimento da função. Ela pode ser definida por $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (o quociente da variação de *y* pela variação de *x*).

2. Se a taxa de crescimento for positiva, a função é crescente; se for negativa, a função é decrescente; se for igual a zero, a função é constante.

Página 61

1. Resposta pessoal. Substituímos *x* por 7 e *y* por −10 na equação correspondente. Caso resulte numa igualdade numérica verdadeira, o ponto pertence à reta. Caso não resulte numa igualdade numérica, o ponto não pertence à reta.

2. Substituindo *x* por −3 e *y* por 5, temos:
$2 \cdot (-3) - 4 \cdot 5 - 10 \neq 0$.
O ponto não pertence à reta.

Página 62

O valor de *k* é −14 para que as retas sejam coincidentes.

Página 70

O valor de *a* indica o coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$.

Página 74

Passagem (I): A tangente da adição de dois arcos é o quociente entre o seno e o cosseno da adição desses dois arcos.

Passagem (II): Utilizamos a fórmula para a adição e subtração de dois arcos.

Passagem (III): Substituímos os valores de cosseno e seno de 90º.

Passagem (IV): Substituímos cosseno sobre o seno de um arco por cotangente desse arco.

Explorando

Página 64

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com apresentação coletiva de resultados.

Já mencionamos o Winplot para a construção de gráficos. Aqui, numa atividade exploratória, sugerimos outra ferramenta a ser utilizada pelos alunos: o GeoGebra. Os alunos deverão baixar gratuitamente esse programa em computadores. Após, conforme mencionado no livro do aluno, deverão conhecer o funcionamento dessa ferramenta e explorá-la com a construção de gráfico.

Sugerimos que construam gráficos de algumas retas a partir de suas equações apresentadas na forma geral. Eles podem ser incentivados a fazer outras construções, conforme o estudo de reta neste capítulo seja desenvolvido.

CAPÍTULO 6 – Distância, Área e Ângulo

O presente capítulo exige um pouco mais dos alunos, além de permitir um trabalho maior de associação com temas estudados em Geometria Plana. Divide-se em três partes: distância de ponto à reta, área de um triângulo no plano cartesiano e ângulo entre duas retas concorrentes.

Iniciamos a primeira parte comentando o que foi estudado sobre distância entre dois pontos no plano cartesiano, a partir de suas coordenadas. Agora, queremos calcular a distância entre um ponto e uma reta do plano, conhecidas as coordenadas do ponto e também a equação da reta. Como existem infinitas distâncias entre um ponto não pertencente à reta e a reta, é importante atentar que desejamos aqui a menor das distâncias (ela é a projeção ortogonal do ponto sobre a reta, assunto estudado em Geometria Espacial de posição no livro 2 desta coleção). Podemos encontrar a reta que passa pelo ponto e é perpendicular à reta dada. Ao obtermos a interseção dessas duas retas, reduzimos o problema de distância de ponto à reta ao problema de distância entre dois pontos. Esse procedimento, embora correto, é trabalhoso. Demonstramos, então, uma relação que permitirá obter essa distância, conhecidas apenas as coordenadas do ponto e a equação geral da reta. A demonstração precisa ser discutida com os alunos.

Apresentamos um exemplo importante, no final dessa primeira parte do capítulo, relacionado ao cálculo da área de um triângulo representado no plano cartesiano. Como a área do triângulo é a metade do comprimento da base pela altura correspondente, a base é obtida pela distância de dois pontos (dois vértices do triângulo) e a altura é obtida fazendo a distância do ponto (terceiro vértice do triângulo) à reta (reta que contém os dois outros vértices do triângulo).

Iniciando a segunda parte do capítulo, retomamos esse exemplo de forma mais genérica, para que os alunos compreendam que podemos obter a área de um triângulo a partir das coordenadas do vértice. É nesse sentido que conduzimos essa segunda parte do capítulo. Não recomendamos que, simplesmente, seja apresentado o resultado (fórmula dada pelo determinante a partir das coordenadas dos três vértices do triângulo) sem as devidas justificativas. No livro do aluno, apresentamos a demonstração que, insistimos, deve ser discutida com os alunos.

Na terceira parte do capítulo, falamos de ângulo entre duas retas concorrentes no plano cartesiano. Queremos favorecer a compreensão de que podemos obter o ângulo entre duas retas quaisquer no plano cartesiano se conhecermos suas equações na forma reduzida. O procedimento que adotamos para justificar isso está baseado em propriedades da Geometria Plana a respeito de ângulos de triângulo. Também aqui é possível retomar a condição de paralelismo e perpendicularidade entre retas. Recomendamos que os exemplos apresentados nessa parte sejam discutidos com os alunos.

Observações e sugestões

- O Geogebra pode ser utilizado para a compreensão e visualização das ideias trabalhadas neste capítulo: distância de ponto a reta e cálculo da área do triângulo a partir das coordenadas de seus vértices. Incentive os alunos a explorarem, nesse sentido, o Geogebra.
- É fundamental que as demonstrações apresentadas no Livro do Aluno sejam amplamente discutidas com eles. Assim, embora trabalhosa, a demonstração da distância entre um ponto e uma reta no plano cartesiano permite um trabalho algébrico que amplia o conhecimento sobre a geometria das coordenadas.

Questões e reflexões

Página 88

Significa que os pontos dados estão alinhados.

CAPÍTULO 7 – A Circunferência no Plano Cartesiano

Já estudamos ponto e reta no plano cartesiano. Agora, o capítulo aborda o estudo da circunferência. Dois problemas básicos devem ser compreendidos para melhor entendimento do capítulo. O primeiro consiste em, conhecendo-se as coordenadas do centro e a medida do raio de uma circunferência, obter sua equação. O segundo, conhecendo-se a equação da circunferência, devemos ter condições de chegar às coordenadas do centro e à medida do raio. O capítulo está dividido em três partes, visto que as duas primeiras são dedicadas à resolução desses dois problemas básicos.

Na primeira parte, definimos circunferência trigonométrica como um lugar geométrico Assim, a partir das coordenadas do centro e a medida do raio, obtemos a equação reduzida da circunferência. Encaminhamos exemplos, que devem ser discutidos com a turma.

Na segunda parte do capítulo, estudamos a equação normal (equação geral) da circunferência. Queremos não apenas obter as coordenadas do centro e o raio da circunferência a partir de uma equação geral do 2º grau em x e y que representa uma circunferência, como também estabelecer as condições para que uma equação do 2º grau em x e y possa, de fato, representar uma circunferência. Recomendamos que o procedimento de "completar os quadrados" seja adotado. É necessário observar atentamente os exemplos apresentados.

Na terceira parte do capítulo, observamos as posições relativas entre reta e circunferência no plano cartesiano a partir de suas equações, além da posição entre ponto e circunferência e entre duas circunferências. Propomos exemplos a serem discutidos com a turma. Após os exemplos, mencionamos que podemos discutir as posições relativas entre reta e circunferência não apenas por meio de suas equações, mas também observando a distância entre ponto e reta. O ponto é o centro da circunferência. Assim, se a distância entre o centro da circunferência e a reta coincidir com a medida do raio da circunferência, a reta e a circunferência são tangentes. Se essa distância for menor que a medida do raio, a reta e a circunferência serão secantes. Finalmente, se a distância for maior que a medida do raio, então a reta e a circunferência serão exteriores.

Observações e sugestões

- A obtenção da equação reduzida da circunferência a partir de sua equação normal exige do aluno o conhecimento sobre produtos notáveis, particularmente o procedimento de completar trinômios quadrados perfeitos. Nesse sentido, seria interessante encaminhar alguns exemplos. Esse procedimento será novamente utilizado para a obtenção de equações da elipse, da hipérbole e também da parábola, conforme última unidade deste livro.
- Embora não tenhamos sugerido no livro do aluno, o Geogebra deve ser incentivado para a construção de circunferências a partir de suas equações. Uma ideia é propor que eles elaborem equações reduzidas de circunferências e apresentem suas representações gráficas a partir dele.

Questões e reflexões

Página 94

Resposta pessoal. Lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes do ponto C dado, sendo que a distância é r unidades de comprimento.

Página 98

Para ser um trinômio quadrado perfeito, devemos ter $k = \frac{9}{4}$.

Página 101

1. A reta é exterior à circunferência.

2. Nenhuma solução.

3. A reta é secante à circunferência.

Página 102

Se a distância do ponto ao centro for igual ao raio, o ponto pertence à circunferência; se a distância do ponto ao centro for maior que o raio, o ponto é externo à circunferência; se a distância do ponto à circunferência for menor que o raio, o ponto é interior à circunferência.

Página 104

As circunferências são concêntricas. Sendo de raios diferentes, dizemos que as circunferências são disjuntas internas.

Explorando habilidades e competências

Página 109

Sugestão de encaminhamento:

Em pequenos grupos, com discusão coletiva das respostas para as questões propostas.

Respostas:

1. Circunferência central: $x^2 + y^2 = 4$

Circunferência menor que representa a bolinha: $(x - 4)^2 + (y + 10)^2 = 1$

2. $d^2 = (15 + 15)^2 + (-9 - 3)^2 = 30^2 + 12^2 = 900 + 144 =$
$= 1044$

$d = \sqrt{1044}$

3. Equação da reta AB:

$m = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -0,4$

$y + 9 = -0,4(x - 15) \Rightarrow y + 9 = -0,4x + 6 \Rightarrow$
$0,4x + y + 3 = 0$

A distância entre o centro (0, 0) e essa reta é:

$$d = \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{(0 + 4^2 + 1^2)}} = \frac{3}{\sqrt{1,16}}$$

Comparando com o tamanho do raio, temos

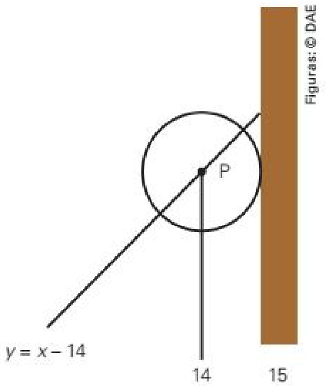
$d^2 = \frac{9}{1,16} = 7,75 > 4$. Logo, $d > 2$.

A reta é externa ao círculo.

4. A reta que passa sobre a barreira de B é dada por $x = 15$. A barreira de B protege a região entre os pontos (15, −6) e (15, −9).

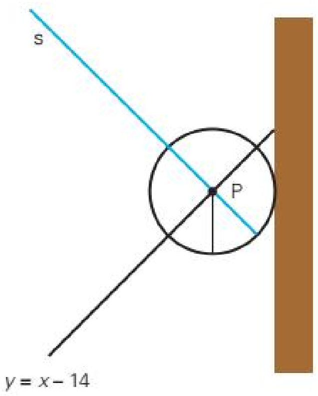
A intersecção entre as retas $y = x - 14$ e $x = 15$ é dada por $y = 15 - 14 = 1$, no ponto (1, 15).

Entretanto, considerando que a bolinha tem raio 1, ela atingirá a barreira quando seu centro estiver na ordenada $x = 14$, como vemos na figura abaixo:



Esse ponto é dado por $y = 14 - 14 = 0$, ou seja, as coordenadas de P são (14, 0). O ponto onde ele toca a barreira é o ponto (15, 0). Como a barreira de B está abaixo desse ponto, a bolinha ultrapassará a barreira.

5. Observe a figura abaixo.



Queremos encontrar a equação da reta s que passa por P = (14, 0) e tem coeficiente angular = −1 (perpendicular à reta $y = x - 14$).

Logo, a equação de s será $y = -x + 14$.

Unidade 3 – Geometria Espacial

CAPÍTULOS	PRINCIPAIS OBJETIVOS
8. Cilindros	Caracterizar cilindros e compreender relações que permitam calcular áreas (de bases, lateral e total) e calcular volumes de cilindros.
9. Cones	Caracterizar cones e compreender relações que permitam calcular áreas (de bases, lateral e total) e calcular volumes de cones.
10. Esferas	Compreender como calcular a medida da superfície (área) de uma esfera; compreender como obter a medida do volume de uma esfera.

No volume anterior desta coleção, abordamos o estudo de prismas e pirâmides na Geometria Espacial. Deixamos para esta unidade o trabalho com as formas “arredondadas”: cilindros, cones e esferas. Essa opção de deixar parte do estudo de Geometria Espacial para o Volume 3 representa uma maneira de não concentrar muitos assuntos num único momento.

A unidade poderá ser conduzida pelo professor fazendo rápidas retomadas. Por exemplo, ao falar de áreas e volumes de cilindros, retome o que fizemos para o cálculo com áreas e volumes de prismas. Analogamente, ao abordar áreas e volumes de cones, retome os procedimentos utilizados para esses cálculos com pirâmides.

CAPÍTULO 8 – Cilindros

Inicialmente caracterizamos um cilindro observando seus elementos e classificação. Embora tenhamos cilindro circular oblíquo, nosso interesse maior, até pela sua utilidade, diz respeito aos chamados cilindros retos (cilindros em que as geratrizes são perpendiculares às bases). É importante chamar a atenção para o fato de que o cilindro reto também é designado como cilindro de revolução, uma vez que pode ser obtido pela revolução de um retângulo em torno de um de seus lados, por exemplo. Também nesse início observamos que um cilindro reto é dito equilátero quando a altura tem a mesma medida do diâmetro da base (em outras palavras, a secção meridiana é um quadrado).

O capítulo está dividido em duas partes, sendo que, na primeira, além do que dissemos acima, também trabalhamos com a medida da superfície do cilindro. Uma planificação é utilizada para que os alunos possam identificar as bases (dois círculos) e a superfície lateral (um retângulo). Assim, fica muito mais evidente o procedimento para a obtenção dessas áreas, além de possibilitar a conexão com o que foi feito quando do estudo da área da superfície do prisma.

Na segunda parte do capítulo, o assunto é o volume do cilindro. Entendemos que existem duas maneiras aqui de desenvolver essa parte. Uma, como fizemos já no início, é conduzir os alunos a observarem de forma intuitiva que um cilindro reto pode ser compreendido a partir de um prisma reto em que o número de lados do polígono de sua base "aumente cada vez mais". Considerando um polígono em que o número de lados aumenta indefinidamente, a "tendência" é chegarmos a um círculo. Essa ideia permite considerar que o volume do cilindro pode ser obtido como se calculássemos o volume de um prisma reto, só que a base é um círculo (esse é um procedimento intuitivo. Também mostramos, utilizando o Princípio de Cavalieri, como obter o volume do cilindro a partir do volume de um prisma de mesma área da base e mesma altura.

Observações e sugestões

- Sugerimos a construção de planificações de cilindros. Aqui, para a compreensão a respeito do cálculo da área da superfície de um cilindro (área lateral + área das bases) podem ser mais bem compreendidas a partir de planificações. Uma alternativa seria recortar uma lata em forma de cilindro, de tal modo a evidenciar as duas bases e a superfície lateral.
- Podemos calcular a área total de um cilindro circular reto por meio da relação $A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$. É importante aqui chamar a atenção que essa relação nada mais é do que $A_t = A_L + 2 \cdot A_b$ (área total igual a área lateral mais o dobro da área da base), como foi estudado no cálculo da área do prisma.
- Sugerimos que recipientes em forma de cilindros sejam trazidos para a sala de aula. Com régua, as medidas desses recipientes podem ser determinadas (altura e raio da base). Depois, solicite que determinem a área total e também o volume. Após a determinação do volume, solicite que obtenham a capacidade do recipiente em litros.

Questões e reflexões

Página 113

1. Um retângulo.
2. Um paralelogramo.

Página 118

1. Sim. Mantendo-se constante a medida do raio, temos que, duplicando a altura, o volume duplica, triplicando a altura, o volume triplica. Essa é uma boa maneira de levar o aluno a verificar que o volume é diretamente proporcional à altura.
2. O volume fica multiplicado por 4.

Explorando

Página 117

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com discussão coletiva das respostas.

Propomos uma investigação sobre o cilindro, a ser dividida em 4 partes. As respostas esperadas para essas etapas são:

1. Resposta pessoal. Nas figuras apresentadas, uma folha de papel do tamanho A4 é girada em torno do lado de maior comprimento, resultando assim a ideia de um cilindro de revolução.
2. No formato A4, as medidas são 21 cm por 29,7 cm.
3. O volume do cilindro de revolução correspondente é:
   $V = \pi r^2 h$
   $V \cong 3{,}14 \cdot 21^2 \cdot 29{,}7 \Rightarrow V \cong 41126{,}78 \text{ cm}^3$
4. Resposta pessoal que dependerá do texto elaborado pelos alunos. Consideramos fundamental nesse item a participação do professor de Geografia para explicar os detalhes a respeito de como são utilizadas as projeções cilíndricas na elaboração dos mapas. É um trabalho interdisciplinar.

Textos na Matemática

Página 121

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, com discussão coletiva das respostas.

O texto é de História da Matemática. Aborda os procedimentos adotados para o cálculo do volume de cilindro e de esfera. Ênfase deve ser dada ao personagem Arquimedes.

Respostas:

1. Os títulos de obras de matemática de Demócrito que podemos citar foram:
   Sobre os números; *Sobre a Geometria*; *Sobre tangências*; *Sobre representações*; e *Sobre irracionais*.
2. Demócrito, no século V a.C., foi o primeiro matemático grego a determinar o volume **da pirâmide** e do **cone**. O mérito de Demócrito está em ter generalizado, bem ao estilo grego, a maneira de determinar o volume para pirâmides de base poligonal qualquer.
3. Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção referida no texto.

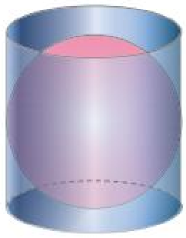


Figura: © DAE

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

CAPÍTULO 9 – Cones

No início do capítulo, mencionamos a obtenção de um cone circular e destacamos seus elementos e sua classificação. Embora tenhamos falado de cone circular oblíquo, nosso estudo foca o cone circular reto pela sua aplicabilidade. Também mencionamos o cone de revolução, obtido por meio da rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, por exemplo. Além disso, caracterizamos o cone equilátero como sendo o cone circular reto em que sua secção meridiana é um triângulo equilátero (a geratriz possui a mesma medida do diâmetro da base).

O procedimento para o cálculo da área total da superfície de um cone circular reto pode ser melhor compreendido a partir de sua planificação. A dificuldade diz respeito à área da superfície lateral, isto é, à área de um setor circular. No Livro do Aluno justificamos como chegar à relação em que *r* é a medida do raio da base do cone, e *g*, a medida da geratriz. Uma explicação a ser dada aqui é que, quando planificamos um cone, a superfície lateral será um setor circular. O comprimento do arco desse setor circular será o comprimento da circunferência da base do cone. Cabe aqui uma analogia com o procedimento utilizado neste livro ao obtermos a área lateral de uma pirâmide. Assim, intuitivamente, ao considerarmos que o número de lados do polígono da base de uma pirâmide aumenta cada vez mais, teremos então a pirâmide tendendo ao cone. Dessa forma, o apótema da pirâmide tenderá à geratriz do cone. Isso possibilita a compreensão de que o volume de um cone pode ser obtido por analogia com o volume de uma pirâmide, considerando que a base é um círculo. Outra maneira de chegar ao volume do cone, como sugerimos também no livro do aluno, é a explicação clássica do Princípio de Cavalieri.

Observações e sugestões

- Assim como sugerimos em relação ao cilindro, também consideramos interessante a planificação de um modelo de cone circular reto. Fica muito mais evidente o cálculo da área da superfície do cone a partir da visualização de suas partes (base e superfície lateral) quando da planificação.
- Um cuidado a ser tomado está no cálculo da área da superfície lateral em relação à superfície plana resultante: setor circular. Seria importante fazer uma retomada de como podemos obter a área de um setor circular conhecido não apenas o ângulo central, mas principalmente quando conhecemos o comprimento do arco.
- Em um cone equilátero a seção meridiana é um triângulo equilátero. Proponha ao aluno que expresse a altura *h* desse cone em função apenas da medida do raio *r*. Resposta: assim, como o lado do triângulo é o diâmetro da circunferência (2*r*), a altura *h* é: $h = r\sqrt{3}$.
- Outra atividade para ser conduzida para resolução individual: Qual sólido de revolução será obtido pela rotação do triângulo retângulo de lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm em torno da hipotenusa? Resposta: Dois cones de mesmo raio da base (a altura do triângulo retângulo em relação à hipotenusa): um com a geratriz correspondente ao cateto de medida 3 cm e outro com a geratriz correspondente ao cateto de medida 4 cm.

Questões e reflexões

Página 129

O volume V do cone em função do raio *r* é:

$$V = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Página 130

1. A razão entre as áreas é k^2.
2. A razão entre os volumes é k^3.
3. Resposta pessoal. Uma maneira é fazendo a diferença entre os volumes dos dois cones.

Explorando

Página 128

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com discussão coletiva das respostas para as questões propostas.

Sugerimos uma investigação sobre o cone, dividida em quatro etapas. As respostas esperadas para essas etapas são:

1. Resposta pessoal que depende do desenho feito pelos alunos.
2. Resposta pessoal que dependerá do texto elaborado por cada aluno. Novamente é fundamental a participação do professor de Geografia para esclarecer a utilização das projeções cônicas, comparando com as projeções cilíndricas.

CAPÍTULO 10 – Esferas

Tradicionalmente, no Ensino Médio, o estudo da esfera é limitado à apresentação de duas fórmulas: a primeira para o cálculo de sua superfície e a segunda para o cálculo do volume. Embora as aplicações sobre esfera geralmente sejam conduzidas para esse fim, entendemos que há necessidade de mostrar para os alunos, pelo menos, como chegar às relações matemáticas que permitem o cálculo tanto da área total quanto do volume, conhecida a medida de seu raio.

Iniciamos o capítulo observando como podemos obter uma esfera e apresentando seus elementos (polos, equador, paralelo e meridiano). Duas observações então são feitas: a primeira sobre a chamada circunferência máxima e o círculo máximo de uma esfera; a segunda sobre a distância polar.

Diferentemente do que trabalhamos anteriormente com cilindro e cone, primeiro falamos em volume para depois falarmos em área. Iniciamos aqui apresentando, a partir do princípio de Cavalieri, o volume da esfera. Sugerimos que o encaminhamento feito no Livro do Aluno seja detalhamente discutido com os estudantes, pois trata-se de uma "justificativa" matemática rara para obter uma relação matemática que nos permite calcular o volume de uma esfera, conhecendo-se a medida de seu raio.

É a partir do conhecimento do volume da esfera que obtemos a área da superfície esférica. A explicação apresentada no livro do aluno deve ser discutida, pois, intuitivamente, utilizamos o volume de pirâmides e da esfera para obter a área da superfície da esfera. A explicação dada contribui para a compreensão da utilização da intuição e de analogias para a obtenção de resultados na Matemática.

Observações e sugestões

- O procedimento para o cálculo do volume de uma cunha esférica é apresentado como observação. Aqui é necessário destacar o conceito de proporção para se obter a relação matemática que fornece o volume.
- Assim como ocorreu com a cunha esférica, também procedemos com o cálculo da área de um fuso esférico, isto é, por meio de proporção.
- As dimensões do nosso planeta, considerando-o aproximadamente como uma esfera, permitem um trabalho interessante e simples, relacionado ao volume que ocupa e à área de sua superfície. Que tal sugerir uma pesquisa nesse sentido?

Questões e reflexões

Página 133

1. Também duplica.

2. Fica multiplicada por 4.

Página 135

1. Resposta pessoal. É importante que os alunos compreendam adequadamente o texto. O princípio de Cavalieri representa uma forma de se obter o volume da esfera.

2. A área será $A_{\text{seção}} = \dfrac{3\pi R^2}{4}$.

Explorando habilidades e competências

1. Porque ele ficará estabilizado quando o peso estiver em um dos vértices. Como queremos um dado com 6 números, é preciso uma figura que tenha 6 vértices. Veja na tabela a seguir o número de vértices de cada poliedro regular.

	Faces	Vértices	Arestas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

2. No caso do cubo, o poliedro dentro da esfera teria 8 vértices, formando um dado com os números de 1 a 8. No caso do tetraedro, teríamos os números de 1 a 4, como no próprio dado tetraédrico.

3. a) Área $= 4\pi R^2 = 49{,}6 \Rightarrow R^2 = \dfrac{49{,}6}{4 \cdot 3{,}1} = \dfrac{49{,}6}{12{,}4} = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow R = 2$ cm

b) O diâmetro da esfera (4 cm) coincide com a diagonal do quadrado central do octaedro. Desse modo, temos que o lado desse quadrado mede $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Como o poliedro é regular, todas as arestas medem $4\sqrt{2}$ cm.

c) O volume da esfera será $V_1 = \dfrac{4\pi R^3}{3} = 4 \cdot 3{,}\dfrac{1 \cdot 2^3}{3} =$ $= \dfrac{99{,}2}{3}\text{cm}^3$. O volume do octaedro será dado por duas pirâmides de base quadrada com lado $2\sqrt{2}$ e altura 2 (a altura da pirâmide é o raio da esfera). Assim, temos $V_2 = 2 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{32}{3}$.

Logo, o volume buscado será $V = \dfrac{99{,}2 - 32}{3} = \dfrac{67{,}2}{3} =$ $= 22{,}4\ \text{cm}^3$.

4. O raio da esfera será metade da diagonal do cubo, ou seja, $R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{3}$.

O volume da esfera será $V = 4\pi\ \dfrac{\left(1{,}5\sqrt{3}\right)^3}{3} =$ $= 4 \cdot \pi \cdot 3{,}375 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = 13{,}5\ \pi\ \sqrt{3}\ \text{cm}^3$. O volume do cubo será $3^3 = 27\ \text{cm}^3$.

O volume buscado será $13{,}5\ \pi\ \sqrt{3}$ cm $-$ 27 cm³ ou $\dfrac{27\left(\pi\sqrt{3} - 2\right)}{2}$.

5. Sim. Para o de 1 a 12, usamos o icosaedro que tem 12 vértices. Para o de 1 a 20, usamos o dodecaedro que tem 20 vértices. Em geometria projetiva, paridade entre os sólidos é chamada de dualidade. O tetraedro é o único sólido dual com si mesmo.

6. Primeiro dado (1 a 4): A altura de um tetraedro de aresta a é $h = \frac{\left(x\sqrt{6}\right)}{3}$.

Essa altura é a soma do raio da esfera inscrita com o raio da circunscrita na proporção 1 : 4. Assim, temos que $R = \frac{3h}{4} = \frac{\left(x\sqrt{6}\right)}{4}$.

Segundo dado (1 a 6): O raio da esfera circunscrita ao octaedro é metade da diagonal do quadrado central do sólido. Assim, $R = \frac{\left(x\sqrt{2}\right)}{2}$.

Terceiro dado (1 a 8): O raio da esfera será metade da diagonal do cubo, ou seja, $R = \frac{\left(x\sqrt{3}\right)}{2}$.

Note que $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ porque $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.

Note também que $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{6}}{4}$ porque $\frac{3}{4} > \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Logo, a maior esfera que precisará caber no cilindro é a de $R = \frac{\left(x\sqrt{3}\right)}{2}$.

A altura do cilindro deverá ser igual à soma das três medidas: $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x}{2}$.

A área superficial do cilindro será

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\left(x\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x}{4}$$

$$A = \left(\frac{x^2}{4}\right)\left(6\pi + 3 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right).$$

Unidade 4 – Números Complexos

CAPÍTULOS	PRINCIPAIS OBJETIVOS
11. O conjunto dos números complexos	Compreender a ampliação do campo numérico com o conjunto dos números complexos; definir e representar números complexos por meio de pares ordenados de números reais; compreender a forma algébrica de representar um número complexo.
12. Operações na forma algébrica	Conceituar igualdade de números complexos na forma algébrica; efetuar adição, subtração, multiplicação e a divisão de números complexos na forma algébrica.
13. Forma trigonométrica	Associar a cada número complexo um ponto no plano complexo; calcular módulo e argumento de um número complexo a partir de sua forma algébrica; transformar um número complexo na sua forma trigonométrica a partir de sua forma algébrica e vice-versa.
14. Operações na forma trigonométrica	Efetuar a multiplicação e a divisão de dois números complexos na forma trigonométrica; calcular potências inteiras de um número complexo dado na sua forma trigonométrica.

O campo numérico dos números reais é aqui ampliado pelo estudo do conjunto dos números complexos. Embora as aplicações mais importantes desse campo numérico sejam destinadas ao Ensino Superior, o conhecimento dos números complexos permite estabelecer algumas conexões entre assuntos já estudados (Trigonometria, por exemplo) e assuntos que serão vistos na próxima unidade, na resolução de equações polinomiais.

Alertamos para a importância do primeiro capítulo quando apresentamos os números complexos. O contexto que utilizamos é o de resolução de equações algébricas. Optamos por apresentar apenas equações do 2º grau e a obtenção de suas raízes, reais ou não. O trabalho inicial com pares ordenados é substituído pela forma algébrica de representar um número complexo. Somente então trabalha-se com a forma trigonométrica.

Não abordamos a radiciação de números complexos, pois preferimos dar ênfase ao trabalho com as outras operações neste estágio da escolarização.

CAPÍTULO 11 – O conjunto dos Números Complexos

Iniciamos o capítulo retomando rapidamente uma ampliação do campo numérico dos números naturais para os números inteiros. No decorrer do Ensino Fundamental, nossos alunos já tiveram a oportunidade de observar a ampliação do campo numérico algumas vezes: dos naturais para os inteiros, dos inteiros para os racionais, dos racionais para os reais, considerando os números irracionais. Temos aqui uma nova ampliação.

Ao falarmos dessa ampliação do campo numérico com a criação dos números complexos, procuramos conduzir uma abordagem histórica. Comentamos uma situação existente na obra *Ars Magna*, escrita por Girolamo Cardano (1501-1576), que propõe a divisão do número 10 em duas partes, de tal modo que o produto dessas duas partes seja 40. A partir daí introduzimos os números complexos, falando da unidade imaginária e apresentando-os por meio de pares ordenados. Assim, os números reais que também são números complexos são apresentados como sendo pares ordenados, em que o segundo elemento é zero. Já os números complexos que não são reais (os imaginários) são apresentados como pares ordenados, em que o segundo elemento é diferente de zero.

Conduzimos alguns exemplos e também propomos alguns exercícios utilizando os números complexos como pares ordenados. Logo depois, introduzimos sua forma algébrica do número complexo. Iniciamos, assim, a segunda parte deste capítulo. Para chegar a essa forma, utilizamos o que foi visto na primeira parte. Um número complexo z na forma algébrica (escrito na forma de um binômio) permite uma manipulação bem mais simples do que a com pares ordenados. Além disso, não precisamos abandonar a forma de par ordenado. Assim, ao escrevermos um número complexo $z = a + bi$ (forma algébrica) ou $z = (a; b)$ (par ordenado), temos a como sendo a parte real do complexo e b como sendo a parte imaginária. Ao representarmos um número complexo tanto por par ordenado como na forma algébrica, é importante aproveitar para associar a cada complexo um ponto num plano. Esse plano é denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss.

Observações e sugestões

- Ao escrevermos um número complexo na forma algébrica, por exemplo, $z = a + bi$, devemos chamar a atenção de que tanto a parte real (representada por a) como a parte imaginária (representada por b) são números reais.
- Sugerimos perguntas que devem ser feitas aos alunos sobre a representação de um número complexo na forma algébrica: Qual a condição, a partir da forma algébrica, para que um número complexo seja real? E para que ele seja imaginário?
- Uma atividade de pesquisa pode ser encaminhada sobre a história dos números complexos. Sugerimos orientar os alunos a pesquisarem em livros de história da Matemática. Uma referência é *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves. A produção de um texto como resultado dessa pesquisa poderia compor parte da avaliação.

Questões e reflexões

Página 148

1. Sim. Por exemplo, o número 1.
2. Quando esse número for igual a zero.
3. Basta que o número real seja diferente de zero.
4. Resposta pessoal. A unidade imaginária (será visto no capítulo 11)

Página 151

1. O resultado é igual a (1, 0), isto é, o número real 1.
2. O resultado é igual a (1, 0) também, ou seja, o número real 1.

História da Matemática

Página 155

Sugestão de encaminhamento:

Leitura coletiva, com discussão das respostas para as questões propostas.

O texto refere-se à dificuldade de aceitação dos números imaginários. A leitura permite ao aluno observar que outras dificuldades de aceitação, como a dos números negativos, também ocorreram em nossa evolução.

Respostas:

1. Durante séculos, o conceito de "números negativos" foi visto como um oxímoro, uma frase contraditória, um absurdo numérico; os números contam ou medem coisas – não existe uma forma que tenha uma área negativa, uma circunferência com comprimento negativo, um livro com um número negativo de páginas. Durante anos, muitos esforços foram empregados para solucionar problemas por métodos que evitavam o uso de números negativos. Aos poucos, ficou claro que evitar seu uso era esforço desperdiçado, pois os números negativos, embora não sejam interpretáveis da mesma maneira que os números positivos, eram tão aceitáveis quanto os outros e não eram nada contraditórios.
2. Por volta do século XIX, quando os sistemas numéricos foram examinados mais de perto, tornou-se claro que "números imaginários" não eram nem mais nem menos "reais" que os "números reais" normais. Ambos são abstrações matemáticas, e os "números reais" incluem não só números negativos que tinham sido observados com muita reserva durante tanto tempo, mas também esquisitices, tais como decimais infinitos que nunca se repetem e que não satisfazem nenhuma equação algébrica.

Hoje em dia, os números imaginários são usados rotineiramente por engenheiros e físicos, e muitas aplicações da Matemática seriam impensáveis sem eles.

CAPÍTULO 12 – Operações na Forma Algébrica

Iniciamos o capítulo falando da escolha da forma algébrica para representar um número complexo. As operações com números complexos na forma algébrica permitem uma analogia com operações entre binômios. Assim, a compreensão e a manipulação são imediatas. Por isso, apresentamos inicialmente exemplos de como adicionamos, subtraímos e multiplicamos dois binômios. Em seguida, explicamos como podemos fazer tais operações com números complexos.

Há um exemplo que permite levar os alunos a verificar a facilidade de lidar com a forma algébrica, se compararmos com a forma de par ordenado. No exemplo, propomos a multiplicação na forma algébrica $(5 - 7i) \cdot (-4 + 9i)$ e, depois, a mesma multiplicação na forma de par ordenado: $(5; -7) \cdot (-4; 9)$. Apresentamos, então, a igualdade de dois números complexos na forma algébrica. Os exemplos relacionados à adição, à subtração e à multiplicação precisam ser discutidos com os alunos.

Chamamos a atenção do professor sobre a parte deste início de capítulo em que, logo após as operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos na forma algébrica, abordamos a relação entre os números complexos e vetores no plano complexo. Falamos de adição, subtração e suas representações com o auxílio de vetores.

Para abordarmos a divisão de dois números complexos na forma algébrica, é necessário inicialmente observar o conceito de conjugado de um complexo. Logo após, apresentamos três propriedades: o conjugado da soma de dois complexos, o conjugado do produto de dois complexos e o produto de um número complexo pelo seu conjugado.

A divisão de dois números complexos, sendo o segundo diferente de zero, é definida a partir do conceito de conjugado de um número complexo. Assim, o quociente de um número complexo z_1 por outro número complexo diferente de zero z_2 é obtido multiplicando-se z_1 e z_2 pelo conjugado de z_2. Há um bom número de exemplos que permitem conduzir os alunos à compreensão de como podemos dividir dois números complexos.

Observações e sugestões

Sugerimos que o professor comente com os alunos que, dados dois números complexos não reais, não podemos dizer qual é maior ou qual é menor.

- Pode-se efetuar um trabalho em conjunto com a disciplina de Física em relação à utilização de vetores, abordando as representações no plano e a adição e da subtração de vetores.
- Proponha aos alunos que verifiquem se as igualdades a seguir são verdadeiras (observação: todas são verdadeiras).

$$\left(\sqrt{-1}\right) \cdot \left(\sqrt{-1}\right) = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right) \cdot \left(\sqrt{-1}\right) = -i \cdot i = -i^2 = 1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right) \cdot \left(-\sqrt{-1}\right) = -i \cdot (-i) = i^2 = -1$$

$$(\pm 1) \cdot \left(\sqrt{-1}\right) = \mp 1 \cdot i = \pm\, i$$

$$(\pm 1) \cdot \left(-\sqrt{-1}\right) = \pm 1 \cdot (-i) = \mp\, i$$

Questões e reflexões

Página 158

1. Os vetores são simétricos em relação à origem do plano complexo.
2. Será a outra diagonal do paralelogramo.

Página 161

1. Sim. Basta que o número complexo seja real. Exemplo: $z = 10$.
2. Basta que o complexo seja imaginário puro. Exemplo: $z = 10i$.

Página 162

1. Basta fazermos $a = 5$ e $b = -3$, por exemplo.
2. (I) Fazendo $a + bi = a - bi$, temos que $b = 0$. Assim, o complexo deverá ser real. Exemplo: $z = 10$.

   (II) Fazendo $z = a$ (para a pertencente aos reais), temos que o conjugado será o próprio número $z = a$.

   (III) Fazendo $a + bi + a - bi = 2a$. Sendo a e b reais, temos que a soma será um número real correspondente ao dobro da parte real do complexo dado. Portanto, a igualdade é verdadeira.

CAPÍTULO 13 – Forma Trigonométrica

Geometria Analítica, números complexos e Trigonometria aparecem ao longo deste capítulo. São articulações importantes. Iniciamos observando que um número complexo, além da forma algébrica e da representação por par ordenado, também admite outra maneira de ser representado: é a forma trigonométrica ou polar. Aqui, a representação de um complexo no plano complexo será fundamental para a compreensão.

Definimos, então, o módulo de um número complexo escrito na forma algébrica. É importante destacar que o módulo de um número complexo é uma distância e, como tal, não será negativa. Também conceituamos o argumento de um número complexo diferente de zero. Apresentamos a seguir três propriedades relacionadas ao módulo de um número complexo. Consideramos que as justificativas dadas para essas propriedades devam ser devidamente discutidas com os alunos. Uma ideia é reproduzi-las na lousa, conforme encaminhamos no livro do aluno.

Para passar um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica, temos uma simples mas interessante conexão com a Trigonometria no triângulo retângulo. Julgamos oportuno que as justificativas dadas no livro do aluno, da forma algébrica até a forma trigonométrica, sejam discutidas. É um bom momento para observar tal conexão. Logo após, conduzimos alguns exemplos de manipulação dessas duas formas de representar um número complexo. O terceiro exemplo aborda outra conexão importante, agora com Geometria Analítica, quando falamos do lugar geométrico de todos os pontos do plano complexo cujos módulos são iguais a 5. Chegamos a uma circunferência.

Observações e sugestões

- É importante que os alunos compreendam que a mesma relação que utilizamos para calcular o módulo de um número complexo permite também obter o módulo de um número real (todo número real é complexo). Assim, ele observará, por exemplo, que para um número real x, temos: $|x| = |x + 0i| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$.
- Uma atividade lúdica interessante pode ser apresentada. A partir da figura existente no livro do aluno, formada por circunferências concêntricas de raios diferentes, outras circunferências podem ser construídas além de outros ângulos (fornecendo outras direções). Uma batalha naval pode ser elaborada a partir de coordenadas polares. Deixe a criação para os alunos.

Questões e reflexões

Página 164

1. Imaginários puros.

2. Números reais.

Página 166

O módulo de um quociente de dois números complexos é igual ao quociente dos módulos desses números complexos, ou seja:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0)$$

Página 168

1. Para números reais os argumentos serão 0° ou 180°.

2. Para números imaginários puros, os argumentos serão 90° ou 270°.

CAPÍTULO 14 – Operações na Forma Trigonométrica

Deixamos para este capítulo as operações de multiplicação, divisão e potenciação com expoentes inteiros dos números complexos escritos na forma trigonométrica. Inicialmente o capítulo permite levar os alunos a compreenderem que a forma trigonométrica apresenta uma facilidade quando da multiplicação e da divisão de dois complexos dados. Multiplicamos dois complexos (ou mais de dois) multiplicando seus módulos e adicionando seus argumentos. Dividimos dois complexos dividindo seus módulos e subtraindo seus argumentos. Julgamos essencial que as demonstrações dadas para obter as relações que permitem multiplicar e dividir dois complexos na forma trigonométrica sejam discutidas com os alunos. É a oportunidade de valorizar o conhecimento de relações trigonométricas estudadas no livro anterior.

O final deste capítulo trata da potenciação de um número complexo. Particularmente, interessa-nos aqui a potenciação de complexos em que os expoentes são números naturais. A partir da multiplicação na forma trigonométrica de dois ou mais complexos, a potenciação pode ser explicada como a multiplicação de complexos iguais. Conduzimos, no Livro do Aluno, tais explicações, que precisam ser discutidas. Assim, chegamos à fórmula de Moivre, que estabelece que a potência de ordem n de um número complexo, dado na forma trigonométrica, é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é o argumento do número dado multiplicado por n (argumento reduzido à primeira volta).

Em relação à potenciação de números complexos, encaminhamos importantes exemplos a serem discutidos coletivamente. Num deles, é apresentada uma conexão com fórmulas de duplicação de arco (Trigonometria). No outro, conduzimos explicações a respeito das potências naturais da unidade imaginária. Após esse exemplo, ainda sobre as potências naturais da unidade imaginária, novas explicações são dadas e permitirão observar que os resultados obtidos acabam sempre se repetindo (quatro são os resultados possíveis de uma potência natural da unidade imaginária).

Observações e sugestões

- Pode-se sugerir aos alunos, conforme exemplo de duplicação e arcos, que demonstrem, a partir da fórmula de Moivre sobre a potenciação, as seguintes relações trigonométricas:

$\text{sen}\,(3\theta) = 3\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^3\theta$ e $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\ \cos^3\theta$

- Embora a ênfase sobre a potenciação seja para potências naturais de números complexos, proponha aos alunos que utilizem a relação de Moivre para calcular potências de números complexos com expoentes negativos. Exemplo: dado $z = 2\,(\cos 45° + i\,\text{sen}45°)$, calcule z^{-1} e z^{-3}

Questões e reflexões

Página 174

A medida do ângulo é 90º.

Textos na Matemática

Página 181

Sugestão de encaminhamento:

Leitura em dupla, com discussão coletiva das respostas.

Elaboramos um texto para abordar a forma exponencial de um número complexo. O trabalho de Leonhard Euler é aqui valorizado. Uma das mais intrigantes igualdades numéricas envolvendo cinco importantes números para a história do desenvolvimento da matemática é apresentada aos alunos.

Respostas:

1. Sabemos que:

- Forma algébrica: $z = a + bi$
- Forma trigonométrica: $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$
- Forma exponencial: $z = |z| \cdot e^{i \cdot \theta}$

Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{i \cdot \theta}}{|z_1| \cdot e^{i \cdot \theta}} \Rightarrow \frac{\rho_1 \cdot e^{i \cdot \theta_1}}{\rho_2 \cdot e^{i \cdot \theta_2}} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{e^{i \cdot \theta_1}}{e^{i \cdot \theta_2}} = (\rho_1 - \rho_2) \cdot (e^{i(\theta_1 - \theta_2)})$$

Logo: $\frac{z_1}{z_2} = (\rho_1 - \rho_2) \cdot (e^{i(\theta_1 - \theta_1)})$

2. Temos que:

$(z)^n = (|z|) \cdot e^{i \cdot \theta})^n \Rightarrow |z|^n \cdot (e^{i \cdot \theta})^n \Rightarrow |z|^n \cdot e^{n(i \cdot \theta)}$

Portanto: $(z)^n = |z|^n \cdot e^{n(i \cdot \theta)}$

Explorando habilidades e competências

Página 186

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, com a discussão coletiva das respostas para as questões propostas.

Respostas:

I. Números complexos na Álgebra

a)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-4)^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{(-15)}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-4)^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{(-15)}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{11i}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{11i}}$$

b) $(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + i\,11i$

$(2 - i)^3 = 8 - 12i + 6i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

Logo, $x = 2 + i + 2 - i = 4$.

c) $(x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 1) = x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 16x - 4 = x^3 - 15x - 4$

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(-4 \pm \sqrt{12}\right)}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

d) $\left(-2 + \sqrt{3}\right)^3 - 15\left(-2 + \sqrt{3}\right)^3 - 4 =$

$= -8 + 12\sqrt{3} - 18 + 3\sqrt{3} + 30 - 15\sqrt{3} - 4 = 0$

$\left(-2 - \sqrt{3}\right)^3 - 15\left(-2 - \sqrt{3}\right)^3 - 4 =$

$= -8 - 12\sqrt{3} - 18 - 3\sqrt{3} + 30 + 15\sqrt{3} - 4 = 0$

$S = \left(-2 + \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; 4\right)$

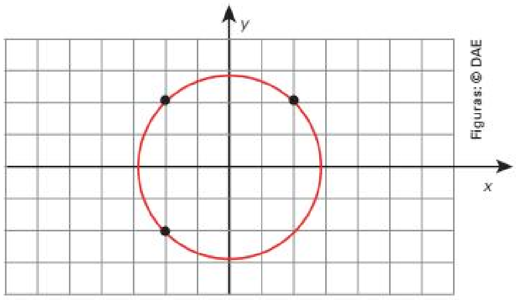
II. Números complexos na Geometria

a) $z = (0,1) = 1(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

$z_1 = (2, 2) = 2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

$z_2 = (-2, -2) = 2\sqrt{2}\,(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$

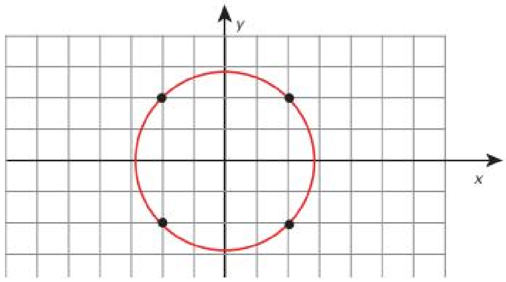
$z_1 \cdot z = 2\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$



Figuras: © DAE

b) Os resultados são iguais. Isso ocorre geometricamente porque, ao multiplicar $z_1 \cdot z$ estamos girando o afixo de z_1 em 90° no sentido anti-horário e, ao dividir $\frac{z_2}{z}$, estamos girando o afixo de z_2 em 90° no sentido horário. Como z_1 e z_2 são opostos em relação à origem, os dois giros terminam no mesmo ponto. Algebricamente isso ocorre porque $z = i$. Nesse caso, como $z_1 \cdot (-1) = z_2$, temos: $z_1 \cdot (i^2) = z_2 \Rightarrow z_1 \cdot (z^2) = z_2$. Dividindo os dois membros por z, temos: $z_1 \cdot z = \frac{z_2}{z}$.

c)



d) $z_1^4 = [2\sqrt{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)]^4 =$
$64(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°) = (-64{,}0)$

$z_2^4 = [2\sqrt{2}(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°)]^4 =$
$64(\cos 900° + i\,\text{sen}\,900°) = (-64{,}0)$

$z_3^4 = [2\sqrt{2}(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°)]^4 =$
$64(\cos 540° + i\,\text{sen}\,540°) = (-64{,}0)$

$z_4^4 = [2\sqrt{2}(\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°)]^4 =$
$64(\cos 1260° + i\,\text{sen}\,1260°) = (-64{,}0)$

Note que $900 = 5 \cdot 180$; $540 = 3 \cdot 180$ e $1260 = 7 \cdot 180$.

Os resultados são todos iguais. Espera-se que percebam que isso ocorre quando n divisões simétricas de um círculo são elevados a n. Note que todos os pontos estão no mesmo círculo, de modo que possuem o mesmo módulo. Ao elevar cada um deles a um mesmo número n, todos terão o mesmo módulo como resultado. Quanto aos argumentos, ao multiplicar todos por n, como são enésimas divisões do círculo, resultarão também no mesmo argumento.

Unidade 5 – Polinômios e Equações Algébricas

CAPÍTULOS	PRINCIPAIS OBJETIVOS
15. Polinômios	Definir polinômios; compreender e identificar grau de um polinômio; conceituar identidade de polinômios e polinômio identicamente nulo.
16. Operações com polinômios	Efetuar a adição, a subtração e a multiplicação de polinômios; compreender procedimentos para a divisão de polinômios; compreender teoremas associados à divisão de polinômios.
17. Equações algébricas	Conceituar equações algébricas, identificando soluções; a partir do teorema fundamental do cálculo e do teorema da decomposição, identificar o número de soluções de uma equação algébrica; resolver equações polinomiais por meio de fatoração e do dispositivo de Briot-Ruffini.
18. Teoremas e relações	Compreender as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica; obter as raízes racionais de uma equação algébrica; compreender e utilizar o teorema das raízes imaginárias para a resolução de uma equação algébrica com coeficientes reais.

Dedicamos os dois primeiros capítulos ao estudo de polinômios, visando à resolução de equações polinomiais (ou equações algébricas) nos dois últimos capítulos da unidade. Normalmente, nos anos finais do Ensino Fundamental, os alunos trabalham com o assunto polinômios e acabam observando como operar com polinômios (adição, subtração e multiplicação). Essas ideias são aqui retomadas. Também o assunto equações é estudado, porém fica restrito às chamadas equações do 1º e do 2º graus. Teremos aqui uma ampliação.

A importância maior dos dois primeiros capítulos está na divisão de polinômios, particularmente na divisão de um polinômio de grau maior ou igual a um por um binômio do primeiro grau. Os dois últimos capítulos da unidade, sobre equações algébricas, devem ser conduzidos mais lentamente, pelas dificuldades que apresentam. Entre elas, citamos o fato de o aluno se deparar com uma equação, por exemplo, de grau 3, e precisar encontrar as soluções sem a utilização de fórmulas. Consideramos oportuno chamar a atenção, desde o início, que, embora existam fórmulas resolutivas para equações do 3º grau e do 4º grau, elas não são aqui apresentadas pelo simples fato de não representarem um facilitador na busca das soluções das correspondentes equações. Assim, nosso estudo fica restrito à busca de procedimentos que permitam, sob certas circunstâncias, obter os resultados de tais equações.

CAPÍTULO 15 – Polinômios

A partir de um contexto geométrico, iniciamos o estudo de polinômios. Ao conceituarmos polinômios na variável complexa x, com coeficientes complexos, é importante chamar a atenção dos alunos para os exemplos que representam polinômios, para também e aqueles que não representam polinômios. Assim, fica mais evidente observar que os polinômios na variável n contêm termos da forma a_nx^n, visto que n_n é um número real e n, um número natural.

Nesse início, consideramos oportuno falar de função polinomial. Embora os coeficientes numéricos possam ser números complexos quaisquer e o mesmo ocorrendo para a variável x, as funções que os alunos já estudaram, que podem ser denominadas de funções polinomiais, são as funções afins e as funções quadráticas. Nesses dois tipos de funções ($f(x) = ax + b$ e $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, os coeficientes numéricos são números reais e a variável x assume apenas valores reais.

Conceituamos, então, polinômio identicamente nulo aquele em que todos os coeficientes são iguais a zero. Nesse caso, não se define o grau do polinômio. A partir do significado de valor numérico de um polinômio, seria oportuno comentar com os alunos que, no caso de um polinômio identicamente nulo, o valor numérico será sempre igual a zero para qualquer valor que atribuímos à variável x. Quando o valor numérico de um polinômio $p(x)$ é igual a zero, para algum número complexo a, dizemos que esse número é raiz do polinômio. Essa é uma observação importante para o estudo das chamadas equações polinomiais, abordada nos dois últimos capítulos da unidade.

Utilizamos, logo depois, exemplos para, a partir deles, falar de identidade de polinômios. Esses exemplos devem ser amplamente discutidos antes de conceituarmos essa identidade.

- Embora tenhamos conceituado polinômios com coeficientes complexos, nosso estudo aqui acaba sendo limitado para aqueles com coeficientes reais.
- Ao conceituar função polinomial, fizemos três importantes observações que devem ser discutidas com os alunos. Nelas, abordamos o caso do grau de uma função polinomial ser zero, mencionamos que quando falamos em polinômio estamos falando também de função polinomial e, finalmente, dizemos que cada um dos termos que compõem o polinômio é chamado de monômio.
- Os alunos, normalmente, confundem o fato de termos dois polinômios que podem ser iguais para determinados valores da variável x ($p(x) = x - 2$ e $q(x) = x^2 - 4x + 4$ são iguais apenas para $x = 3$ e para $x = 2$), com dois polinômios que são iguais para quaisquer valores da variável x. Nesse último caso, temos a identidadede polinômios.

Questões e reflexões

Página 190

1. A área é $ax + bx$.

2. Sim, a expressão $x(a + b)$.

3. A área é $ax + ay + bx + by$.

4. Sim, a expressão $(a + b)(x + y)$.

Página 192

Na primeira, temos um exponente negativo para a variável x, na segunda, temos um expoente fracionário (dado pela raiz) e um expoente negativo.

Página 193

1. Os zeros do polinômio são $x = 8$ e $x = 1$.

2. Infinitos zeros.

CAPÍTULO 16 – Operações com Polinômios

Embora neste capítulo o estudo seja das operações com polinômios, o destaque deve ser dado para a divisão. Iniciamos com a adição, a subtração e a multiplicação de polinômios. Os exemplos apresentados devem ser discutidos como os alunos (e, caso necessário, até ampliados). Essas operações com polinômios não representam obstáculos quanto ao entendimento.

A divisão de polinômios é a operação que necessita de maior cuidado e um pouco mais de tempo para o encaminhamento. Iniciamos o capítulo estabelecendo uma relação com a divisão de dois números naturais. A ideia é fazer com que os alunos retomem o procedimento que utilizamos para dividir, além de identificarem também as denominações dos termos relacionados (dividendo, divisor, quociente e resto). Assim, nesse início, é importante que compreendam a relação existente entre esses termos: o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente e adicionado ao resto.

Dois comentários importantes devem ser feitos quando passamos da divisão de números naturais para a divisão de polinômios. O primeiro fato é a igualdade $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, sendo $A(x)$ o dividendo, $B(x)$ o divisor, $Q(x)$ o quociente e $R(x)$ o resto da divisão. O segundo fato é que o grau de $R(x)$ não pode ser igual nem maior que o grau de $B(x)$. No caso de $R(x)$ ser igual a zero (polinômio identicamente nulo), temos que o polinômio $A(x)$ é divisível pelo polinômio $B(x)$.

Para obter o quociente e o resto da divisão de dois polinômios dados, utilizamos dois processos: o método da chave (procedimento empregado na divisão de dois números naturais ou processo longo) e o método dos coeficientes a determinar (procedimento que utiliza a identidade de polinômios). O método dos coeficientes a determinar é trabalhoso, mas consideramos importante que seja comentado com os alunos, pelo menos a partir de um ou dois exemplos, pois permite estabelecer relação com o que foi estudado no capítulo anterior.

Em seguida, abordamos a divisão de um polinômio por um binômio da forma $x - a$, em que são estudados o procedimento de Briot-Ruffini, o teorema do resto e o teorema do fator. O dispositivo para dividir um polinômio de grau maior ou igual a um por um binômio da forma $x - a$ é um processo extremamente prático para obter o resto e o quociente correspondentes. Os exemplos apresentados precisam ser discutidos com os alunos.

O teorema do resto, embora de simples compreensão e demonstração, é importante para o estudo de polinômios. Sendo assim, julgamos que a demonstração e os exemplos apresentados devem ser discutidos com a classe. É importante mencionar que a utilização do teorema do resto ocorre nas situações em que estamos interessados na obtenção apenas do resto da divisão de um polinômio por um binômio da forma. Outra observação a ser feita (será importante para o estudo de equações polinomiais nos dois próximos capítulos) é a consequência de que, se $P(a) = 0$, então o polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$.

Fechando o capítulo, temos o teorema do fator (também conhecido como teorema das divisões sucessivas, ou teorema da divisibilidade pelo produto). Esse teorema garante que um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$, com $a \neq b$ se, e somente se, $P(x)$ for divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$. No livro do aluno demonstramos parte desse teorema. Esse teorema deve ser valorizado, pois auxiliará na compreensão do teorema de decomposição, estudado no próximo capítulo, quando abordamos as equações polinomiais.

Observações e sugestões

- Ao utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir polinômios de grau maior ou igual a um por polinômios da forma $ax + b$ (sendo $a \neq 1$ e $a \neq 0$), devemos ter o cuidado com os números obtidos nesse processo. Aqueles que indicam os coeficientes do quociente da divisão devem ser divididos por a para, de fato, representar corretamente esses coeficientes. Aqui é interessante exemplificar.
- No livro do aluno, sugerimos que a recíproca do teorema do fator seja proposta para ser demonstrada.

Questões e reflexões

Página 197

1. O grau é 4.

2. O grau é 7.

Página 199

1. Quando o resto da divisão é igual a zero.

2. Quando o algarismo das unidades for zero ou cinco (critério da divisibilidade por 5).

3. São 7 restos possíveis: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Página 199

1. O quociente é $2x^2$.

2. O quociente é 31.

Página 201

1. Fazendo a divisão pelo método da chave, o aluno deverá obter o mesmo quociente e o mesmo resto.

2. Resposta pessoal. Espera-se que o aluno observe que o método da chave é mais simples.

Página 202

1. Também aqui, fazendo a divisão pelo método da chave, o aluno deverá obter o mesmo quociente e o mesmo resto.

2. Resposta pessoal. Espera-se que o aluno observe que o dispositivo prático é mais simples.

Página 203

1. Os resultados são iguais.

2. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 17 – Equações Algébricas

Iniciamos o capítulo retomando a situação da caixa de papelão utilizada no primeiro capítulo desta unidade, no estudo de polinômios. Embora seja uma situação hipotética, temos aqui um momento importante que relaciona geometria dos sólidos, polinômios e equações polinomiais. Utilizamos esse exemplo para chegar numa equação. Conceituamos, então, equações algébricas ou equações polinomiais.

Nesse início, é importante enfatizar os significados de raiz (ou solução) de uma equação e também de conjunto solução de uma equação. Para tanto, nesta primeira parte do capítulo, os exemplos apresentados devem ser discutidos amplamente pela turma, evitando assim dúvidas que podem atrapalhar o desenvolvimento do restante do capítulo.

Dois teoremas importantes são então apresentados. O teorema fundamental da Álgebra (demonstrado por Gauss: omitimos a demonstração) e o teorema da decomposição em fatores (demonstramos esse teorema no livro do aluno). Acreditamos que essa demonstração deva ser lida e discutida com a turma. Esses dois teoremas permitem concluir que uma equação algébrica de grau n admite n soluções.

Logo depois de apresentarmos esses dois teoremas, fizemos um comentário importante: "A forma fatorada de uma equação polinomial, mesmo que não contenha todos os fatores do 1º grau, auxilia na busca das soluções de uma equação". Esse comentário é seguido de um exemplo que deve ser discutido com a classe.

Deve-se ressaltar para os alunos que não teremos fórmulas resolutivas para as equações de grau maior que dois. Sendo assim, devemos valorizar o procedimento de transformar uma equação no produto de dois ou mais fatores. Se esse produto é igual a zero, necessariamente um dos fatores será igual a zero. Pelo teorema da decomposição, estudado anteriormente, sabemos que um polinômio P(x) pode ser fatorado como o produto de n fatores do 1º grau. Isso não significa que os fatores são todos diferentes. Pensando em termos de equação polinomial de grau n, podemos decompor a equação em n fatores do 1º grau. Caso existam fatores iguais, o número total de vezes que um fator se repete indica o grau de multiplicidade da raiz correspondente.

A utilização do dispositivo prático de Briot-Ruffini para o "rebaixamento" do grau de uma equação deve ser explicado observando sua relação com o teorema do resto para divisão de um polinômio por um binômio da forma $x - a$.

Observações e sugestões

- Um cuidado a ser tomado: o número de raízes de uma equação não é necessariamente igual ao número de elementos de seu conjunto solução. O número de raízes de uma equação algébrica é igual ao grau dessa equação. Questione os alunos: Quando, numa equação algébrica, o número de elementos do conjunto solução é igual ao número de raízes? (Resposta: quando todas as raízes forem distintas.)
- Proponha aos alunos que discutam e comparem as soluções de equações, tais como: $x^3 - 8 = 0$ e $(x - 2)^3 = 0$. Na primeira equação, eles encontrarão três raízes (uma real igual a 2 e duas imaginárias). Na segunda equação, encontrarão uma raiz de multiplicidade 3.
- Utilizando o Winplot, solicite aos alunos que observem os gráficos nos plano cartesiano de funções polinomiais diversas. Uma ideia, conforme observação anterior, seria que eles considerassem os gráficos das seguintes funções polinômiais: $f(x) = x^3 - 8$ e $g(x) = (x - 2)^3$.

Questões e reflexões

Página 208

As soluções são $x = 2$, $x = 3$ e $x = -3$.

Página 210

1. São 5 raízes.

2. No mínimo 1 elemento e, no máximo, 5 elementos.

3. Apresentam apenas $x = 1$ como solução comum. Os conjuntos formados pelas soluções são diferentes.

História da Matemática

Sugestão de encaminhamento:

Leitura em duplas, com discussão das correspondentes respostas para as questões propostas.

O texto aborda parte da história das equações algébricas, particularmente das equações do 1º e 2º grau e, depois, as chamadas equações cúbicas.

Respostas:

1. Segundo registro de historiadores, o primeiro povo a lidar com essas equações foram os egípcios. No Papiro de Ahmes, também conhecido como o Papiro de Rhind, adquirido pelo escocês Henry Rhind, em 1868, numa cidade às margens do Rio Nilo. Nesse papiro consta que os egípcios não se referiam a problemas com objetos concretos, mas já tratavam de incógnitas em seus problemas.

2. Aritmeticamente, essas equações foram resolvidas pelos egípcios. Euclides e seus seguidores as resolveram geometricamente e, algebricamente, elas foram solucionadas pelos hindus. O matemático e escritor árabe Al-Khwarizmi (780-850), forneceu regras aritméticas que demonstram, por meios geométricos, essas equações. Foi através desse escritor que os árabes introduziram o nome Álgebra.

3. Tartaglia direcionou seus esforços às cúbicas que não continham o termo do primeiro grau. Resolvendo esse caso, quando faltava menos de duas semanas para o debate, Tartaglia descobre a solução da cúbica em que o termo do segundo grau não existia. Assim, sabendo desses dois métodos, Tartaglia solucionou todos os problemas em menos de duas horas, derrotando seu oponente.

Explorando

Página 213

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com apresentação coletiva dos resultados.

Esta é uma atividade de exploração a ser conduzida com auxílio de ferramentas computacionais à escolha dos alunos e que já foram apresentadas: Winplot e o GeoGebra. A ideia é envolver os alunos na observação de gráficos de funções polinomiais diversas. Após apresentar os gráficos, deve-se verificar as respostas às questões apresentadas.

Respostas:

1. A equação correspondente apresenta $x = 1$ como raiz de multiplicidade 2.

2. A equação correspondente apresenta $x = 0$ como raiz de multiplicidade dois e $x = 1$ como raiz simples.

3. A equação correspondente apresenta $x = 1$ como raiz simples e $x = -1$ como raiz de multiplicidade 3.

CAPÍTULO 18 – Teoremas e Relações

este capítulo está dividido em três partes. Na primeira parte, estudamos as chamadas relações de Girard. Talvez o nome dessas relações não seja do conhecimento dos alunos, porém, as relações que envolvem as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau, provavelmente, não representam novidade. Sugerimos que essas relações sejam demonstradas e discutidas com os alunos (como apresentado no livro do aluno). Além das relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau, existem as relações correspondentes para as equações do 3º grau, do 4º grau e assim por diante. Generalizando, uma equação de grau *n* admite *n* relações entre as *n* raízes e os coeficientes correspondentes.

Por meio de exemplos, procuramos observar como utilizar as relações de Girard. É importante destacar que essas relações continuam sendo válidas, mesmo que as raízes não sejam reais e mesmo que as raízes não sejam distintas.

Iniciamos a segunda parte do capítulo falando do teorema das raízes imaginárias. É bem provável que alguns alunos já tenham observado que, numa equação algébrica de coeficientes reais, as raízes imaginárias, quando existem, são em duplas, sendo duas a duas conjugadas entre si. A demonstração desse teorema é de fácil compreensão a partir das propriedades do conjugado de um número complexo (as propriedades do conjugado podem ser constatadas por meio de exemplos: conjugado de uma soma é a soma dos conjugados, por exemplo). Logo após, mencionamos três observações importantes que precisam ser discutidas com os alunos. A primeira é sobre a validade dos teoremas apenas para as equações com coeficientes reais. A segunda observação é sobre o grau de multiplicidade das raízes imaginárias conjugadas (mesmo grau). A terceira observação é sobre a existência de raiz real para uma equação de grau ímpar. Propomos no livro do aluno alguns exemplos sobre a utilização do teorema das raízes imaginárias. Esses exemplos devem ser discutidos com a turma.

Logo a seguir, na terceira parte do capítulo, apresentamos o teorema das raízes racionais (também fizemos no livro do aluno a demonstração desse teorema). Esse teorema auxilia na pesquisa de raízes de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. O exemplo apresentado precisa ser discutido com os alunos.

Observações e sugestões

- É importante observar que somente as relações de Girard são insuficientes para a resolução de uma equação algébrica. Assim, por exemplo, diante da equação $x^2 - 3x + 5 = 0$, se as raízes são α e β, as relações de Girard indicam que $\alpha + \beta = 3$ e $\alpha \cdot \beta = 5$. Estamos diante de duas equações com duas incógnitas. É normal pensar que, ao resolvermos tal sistema, solucionaremos a equação dada. Isso não ocorre, pois recairemos na mesma equação. Caso os alunos não compreendam, solicite que experimentem resolver tal sistema.
- Uma das consequências do teorema das raízes imaginárias (fizemos tal observação no livro do aluno) é que uma equação algébrica com coeficientes reais de grau ímpar admitirá, ao menos, uma raiz real. Isso se deve ao fato de que o número de raízes imaginárias de uma equação algébrica com coeficientes reais, quando admite raízes imaginárias, é sempre par.
- É importante destacar que o teorema das raízes racionais deve ser analisado diante das equações polinomiais com coeficientes inteiros. Além disso, o teorema não garante a existência de raízes racionais, apenas permite chegar a essas raízes, caso existam (por tentativas, a partir dos divisores positivos ou negativos do termo independente de *x* e do coeficiente de maior grau).

Questões e reflexões

Página 216

1. São quatro relações entre as raízes e os coeficientes.

2. São *n* relações entre as raízes e os coeficientes.

Página 218

No item **a**, os coeficientes são reais (conforme o teorema). Já no item **b**, os coeficientes não são todos reais.

Página 221

1. São números que apresentam apenas um divisor comum natural: o número 1.

2. Resposta pessoal. Conforme o teorema das raízes racionais, os únicos números racionais que são inteiros são os divisores do termo independente. Assim, se admitir raiz racional inteira, estará entre os divisores do termo independente de *x*.

Explorando habilidades e competências

Página 226

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, com discussão coletiva das respostas para as questões propostas.

Respostas:

1. Espera-se que os alunos percebam que, com 6 pontos, é possível escrever um polinômio genérico de grau 5, com 6 coeficientes a determinar. A partir daí será preciso encontrar os 6 coeficientes que resolvam o sistema formado. Para encontrar os instantes em que a partícula passou ou passará por um ponto de ordenada zero, basta encontrar as raízes do polinômio.

2. Os possíveis graus: 1 e 4 ou 2 e 3.

3. Se $2 + i$ é raiz de $P(x)$, $2 - i$ também é.

Desse modo, $P(x)$ será divisível por $(x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i) = x^2 - 4x + 5$, de grau 2.

Dividindo $P(x)$ por $S(x) = x^2 - 4x + 5$, obtemos $Q(x) = x^3 + 6x - 2$.

4. Escolhendo o número primo 2, podemos observar que 2 é divisor de todos os coeficientes excetuando o primeiro, ou seja, 2 não é divisor de 1, mas é divisor de 6 e de 2. Além disso, $2^2 = 4$ não é divisor do último coeficiente, ou seja, 4 não é divisor de 2.

Essas condições são suficientes para garantir que o polinômio $Q(x)$ passa pelo critério de Eisenstein, ou seja, é irredutível. Isso significa que ele não pode ser decomposto em polinômios de grau menor. Como qualquer decomposição do grau 3 implicaria em um dos fatores ser um polinômio de grau 1 do tipo $ax + b$ (que tem como raiz $x = -\frac{b}{a}$ essa irredutibilidade garante que as 3 raízes de $Q(x)$ são ou irracionais ou duas complexas e uma irracional.

5. Pode-se dividir $Q(x)$ por $x - x'$, sendo x' a raiz encontrada, chegando assim em um polinômio de grau 2 que pode ser resolvido. A própria fórmula de Cardano oferece todas as soluções possíveis, que são as raízes cúbicas que aparecem na solução, extraídas na forma polar dos números complexos. Embora a radiciação de complexos não seja um conteúdo dessa fase do ensino, é possível citar esse método de resolução.

Unidade 6 – As cônicas

CAPÍTULOS	PRINCIPAIS OBJETIVOS
19. Elipse	Reconhecer a elipse como lugar geométrico, identificando seus elementos e sua equação no plano cartesiano; esboçar a elipse no plano cartesiano a partir de sua equação; compreender o significado de excentricidade de uma elipse.
20. Hipérbole	Reconhecer a hipérbole como lugar geométrico, identificando seus elementos e sua equação no plano cartesiano; esboçar a hipérbole no plano cartesiano a partir de sua equação; compreender o significado de excentricidade de uma hipérbole.
21. Parábola	Reconhecer a parábora como lugar geométrico, identificando seus elementos e sua equação no plano cartesiano; esboçar a parábola no plano cartesiano a partir de sua equação; relacionar função quandrática com parábola.

Esta é uma unidade que poderia ter sido identificada como "Geometria Analítica – 2ª parte", pois é a continuação do que foi estudado na Unidade 2 deste volume. Lamentavelmente, muitas vezes, os alunos do Ensino Médio não têm a oportunidade de conhecer as três cônicas abordadas aqui: elipse, hipérbole e parábola. Nosso interesse no estudo está no tratamento algébrico que damos as essas cônicas.

Nos três capítulos, temos uma abordagem semelhante. Iniciamos com a cônica, tendo seu centro na origem do plano cartesiano, e depois trabalhamos com a cônica, tendo seu centro em outro ponto, isto é, fazemos uma translação. No caso de parábola, iniciamos com o vértice na origem e depois com o vértice em outro ponto qualquer do plano cartesiano.

CAPÍTULO 19 – Elipse

Iniciamos o capítulo mencionando que a elipse pode ser observada não apenas na trajetória dos planetas ao redor do Sol, como também em secções transversais em cones. A partir daí, encaminhamos instruções que permitem empiricamente obter a elipse (desenhar a elipse numa folha de papel ou mesmo no chão). Mesmo que essa experiência não seja realizada, será possível, inicialmente, identificar os chamados focos da elipse apenas observando as ilustrações.

Nosso interesse é o estudo da elipse no plano cartesiano. Sendo assim, definimos a elipse como sendo um lugar geométrico. Identificamos, a seguir, os elementos da elipse e uma relação métrica entre as medidas dos semieixos (focal, maior e menor). Chamamos a atenção do significado da excentricidade, isto é, ela está relacionada com o maior ou menor "achatamento".

O capítulo divide-se em três partes. Finalizamos a primeira parte observando algumas elipses representadas no plano cartesiano. A ideia é levar os alunos a identificar os elementos dessa elipse.

A segunda parte é mais algébrica. A partir da definição de elipse, obtemos a equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. A dedução dessa equação deve ser discutida com a classe, pois valoriza a manipulação algébrica. A equação da elipse obtida tem o eixo maior no eixo das abscissas. Logo a seguir, por analogia, mencionamos a equação da elipse com o eixo maior no eixo das ordenadas. Apresentamos exemplos que precisam ser observados pelos alunos, antes que procurem resolver outros exercícios propostos.

A terceira parte do capítulo destina-se à obtenção da equação da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados, isto é, o centro da elipse não é a origem do sistema de coordenadas cartesianas. Sendo assim, consideramos uma elipse com centro no ponto $P(x_o; y_o)$ e o eixo maior paralelo ao eixo das abscissas. Para isso, consideramos que o ponto P representa a origem de outro sistema. Esse encaminhamento precisa ser discutido com os alunos, pois também faremos o mesmo com as outras duas cônicas, nos dois próximos capítulos.

Como curiosidade, apresentamos um exemplo, antes das atividades propostas, sobre como calcular a área de uma elipse conhecendo-se a medida do semieixo maior e do semieixo menor. Aqui, é interessante observar com os alunos que, se essas duas medidas forem iguais, teremos uma circunferência e poderemos calcular a área da região limitada por ela, isto é, a área do círculo.

Observações e sugestões

- Já que abordamos as trajetórias dos planetas, solicite aos alunos que procurem respostas para as seguintes questões:

1. O que significa afélio? Resposta: Afélio significa mais afastado do Sol.
2. O que signfica periélio? Resposta: Periélio significa mais próximo do Sol.

- Uma atividade de investigação pode ser proposta, como parte da avaliação, para um trabalho em grupo. Cada grupo fica encarregado de fazer uma pesquisa a respeito de aplicações em que aparecem elipses. Ao final, cada equipe apresenta o resultado para a classe.
- Além das atividades de exploração da ferramenta Geogebra, conforme sugerido no livro do aluno, pode-se motivar os alunos a elaborarem outros exemplos de construções de elipses a partir de suas equações.

Questões e reflexões

Página 234

1. Excentricidade, quanto mais próximo de 1, mais achatada a elipse. Quanto mais próximo de zero, mais arredondada.
2. A curva tenderia a uma circunferência. A excentricidade seria zero.

Página 240

A área de um círculo.

Explorando

Página 236

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com apresentação coletiva dos resultados apresentados.

Com o Geogebra (ou Winplot), os alunos deverão explorar o estudo de elipse elaborando gráficos e equações diversas de elipses. Sugerimos que parte da avaliação seja resultado dessa atividade de investigação.

CAPÍTULO 20 – Hipérbole

iniciamos o capítulo mencionando que a hipérbole pode ser observada em secções em dois cones invertidos. A partir daí, encaminhamos instruções que permitem empiricamente obter a hipérbole (desenhar a hipérbole numa cartolina). A ideia dessa experiência de construção da hipérbole é que os alunos identifiquem alguns elementos como focos, eixo principal.

Nosso interesse é o estudo da hipérbole no plano cartesiano. Sendo assim, definimos a hipérbole como sendo um lugar geométrico. Identificamos a seguir seus elementos e obtemos uma relação métrica entre as medidas dos semieixos (focal, real e imaginário). Chamamos a atenção do retângulo referência, que pode ser obtido a partir da hipérbole. Nele, identificamos as assíntotas da hipérbole, além de compreendermos que a excentricidade está ligada à abertura das assíntotas.

O capítulo pode ser dividido em três partes, sendo que a primeira é a introdução apresentada, terminando com a observação de hipérboles representadas no plano cartesiano. A ideia é permitir que os alunos identifiquem os elementos de uma hipérbole.

A segunda parte, assim como ocorreu no capítulo anterior, é mais algébrica. Aqui, a partir da definição de hipérbole, obtemos a equação reduzida da hipérbole com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. A dedução dessa equação deve ser discutida, pois valoriza a manipulação algébrica. A equação da hipérbole obtida tem os focos no eixo das abscissas. Logo a seguir, por analogia, mencionamos a equação da hipérbole com os focos no eixo das ordenadas. Apresentamos exemplos que precisam ser discutidos com os alunos.

A terceira parte do capítulo é destinada à obtenção da equação da hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, isto é, o centro da hipérbole não é a origem do sistema de coordenadas cartesianas. Sendo assim, consideramos uma hipérbole com centro no ponto $P(x_0; x_0)$ e o eixo real paralelo ao eixo das abscissas. Para isso, consideramos que o ponto P representa a origem de outro sistema. Esse encaminhamento precisa ser discutido com os alunos, como no capítulo anterior, quando procedemos de maneira análoga com a elipse.

Observações e sugestões

- Uma atividade de investigação pode ser proposta, como parte da avaliação, para um trabalho em grupo. Cada grupo fica encarregado de fazer uma pesquisa a respeito de aplicações em que aparecem hipérboles. Ao final, cada equipe apresenta o resultado à classe.
- Além das atividades de exploração da ferramenta Geogebra, conforme sugerido no livro do aluno, pode-se motivar os alunos a elaborarem outros exemplos de construções de hipérboles a partir de suas equações.

Questões e reflexões

Página 244

Os comprimentos são iguais.

Página 247

1. Sendo 2α o ângulo de abertura, temos que $\sec\alpha = \dfrac{c}{a} = e$ (*e* é a excentricidade).

2. Utilizando uma calculadora, podemos determinar o arco α tal. que $\sec\alpha = 1{,}25$. A partir daí, determinamos o valor de 2α.

Explorando

Página 247

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com apresentação coletiva dos resultados.

Com o Geogebra (ou Winplot), os alunos deverão explorar o estudo de hipérbole elaborando gráficos e equações diversas desse tipo de cônica. Sugerimos que parte da avaliação seja resultado dessa atividade de investigação.

História da Matemática

Página 252

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, com discussão coletiva das questões propostas ao final.

O texto aborda um dos personagens mais importantes sobre o estudo das cônicas: Apolônio. Aqui temos provavelmente a origem do estudo das cônicas.

Respostas:

1. Durante cerca de um século e meio as curvas não tinham tido designações além de descrições banais do modo pelo qual tinham sido descobertas – secções de cones acutângulo (*oxytome*), secções de cone retângulo (*orthotome*) e secções de cone obtusângulo (*amblytome*).

2. As palavras "elipse", "parábola" e "hipérbole" não foram inventadas expressamente; foram adotadas de uso anterior, provavelmente pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. *Ellipsis* (significando "falta") tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada), *hyperbola* (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra *parábola* (indicando "colocar ao lado" ou "comparação") não indicava nem excesso nem deficiência.

CAPÍTULO 21 – Parábola

Ao contrário das duas cônicas estudadas nos dois capítulos anteriores, a parábola não é novidade para os alunos. No 1º ano, no estudo das funções quadráticas, eles já tiveram a oportunidade de observar a representação de uma parábola no plano cartesiano. Aqui essas ideias serão ampliadas.

Iniciamos o capítulo observando a ilustração de uma antena que capta sinais do espaço e também uma construção belíssima de uma ponte. São exemplos em que podemos observar a presença de uma curva denominada parábola. A partir daí, encaminhamos instruções que permitem empiricamente obter a parábola (desenhar a parábola numa cartolina). A ideia dessa experiência é que os alunos identifiquem alguns elementos como foco, vértice, eixo de simetria e também reta diretriz.

Nosso interesse é o estudo da parábola no plano cartesiano. Sendo assim, a definimos como sendo um lugar geométrico. Identificamos a seguir seus elementos e chamamos a atenção para a reta diretriz, pois representa um elemento novo quando comparado com as outras duas cônicas já estudadas.

O capítulo pode ser dividido em três partes, sendo que a primeira é a introdução comentada anteriormente, finalizada com a observação de algumas parábolas representadas no plano cartesiano. A ideia é permitir que os alunos identifiquem os elementos de uma parábola.

A segunda parte, assim como ocorreu nos dois capítulos anteriores, é mais algébrica. Aqui, com base na definição de parábola, obtemos a equação reduzida da parábola com vértice na origem do sistema de coordenadas cartesianas. A dedução dessa equação deve ser discutida. A equação obtida é de uma parábola com a concavidade voltada para cima e o vértice na origem. Logo a seguir, por analogia, mencionamos as equações das parábolas com o vértice também na origem, mas a concavidade voltada ou para baixo, ou para a direita ou para a esquerda. Apresentamos, então, exemplos que precisam ser discutidos com os alunos.

A terceira parte do capítulo é destinada à obtenção da equação da parábola com eixos de simetrias paralelos aos eixos coordenados, isto é, o vértice da parábola não é a origem do sistema de coordenadas cartesianas. Sendo assim, consideramos uma parábola com o vértice no ponto $V(x_o; y_o)$, o eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas e a concavidade voltada para cima. Para isso, consideramos que o ponto P representa a origem de outro sistema. Esse encaminhamento precisa ser discutido com os alunos. Finalizamos essa parte mencionando a relação entre parábola e função quadrática. É uma oportunidade importante para que os alunos observem essa conexão entre funções e cônicas. As atividades, ao final desse capítulo, podem ser resolvidas individualmente.

Observações e sugestões

- Uma atividade de investigação poderia ser proposta, como parte da avaliação, para um trabalho em grupo. Cada grupo fica encarregado de fazer uma pesquisa a respeito de aplicações em que aparecem parábolas (podem ser construções). Ao final, cada equipe apresenta para a turma o resultado.
- Além das atividades de exploração da ferramenta Geogebra, conforme sugerido no livro do aluno, pode-se motivar os alunos a elaborarem outros exemplos de construções de parábolas a partir de suas equações.
- Ao final do capítulo, é importante que os alunos organizem as ideias estudadas. Assim, considerando os quatro casos apresentados e analisando as equações das parábolas, eles devem pensar em como determinar as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz. Sugira que façam um resumo.

Questões e reflexões

Página 256

Pelo sinal do coeficiente de x^2: sendo positivo, concavidade para cima, sendo negativo, concavidade para baixo.

Explorando habilidades e competências

Página 270

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com a discussão coletiva das respostas para as questões propostas.

Respostas:

1. Faróis de carro são parabólicos para poder direcionar toda a luz que parte do foco para a frente do veículo. Salas do sussurro são elípticas para que o som sussurrado em um foco se direcione ao outro foco.

Alguns telescópios refletores utilizam espelhos hiperbólicos para permitir que as imagens refletidas pelo interior do telescópio possam vir de qualquer direção, a qualquer distância sendo sempre refletidos para o foco F_2, não precisando de um grande tubo para garantir que a imagem formada pelos espelhos seja visível pelo usuário.

2. Respostas pessoais.

3. A distância vertical entre o foco (–1, 4) e a reta diretriz $y = -2$ é de 6 cm. Logo, $y = 3$ cm. Como a parábola é vertical com concavidade para cima, sua equação será:

$$y - 4 = \frac{(x+1)^2}{12}$$

4. a) Encontrando a equação reduzida da elipse do canto inferior direito, temos:

$$\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} - \frac{400}{400} = 0$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Pela equação, vemos que o eixo maior mede 10 e o eixo menor mede 8. Além disso, a elipse dada tem centro no ponto (0, 0). Logo, a elipse buscada está 10 u à direita e 8 u acima. Como possui o mesmo tamanho da outra, sua equação será:

$$\left(\frac{x-10}{25}\right)^2 + \left(\frac{y-8}{16}\right)^2 = 1$$

b) A área da região cinza é a área do retângulo menos a área das regiões limitadas pelas elipses.

5. Como PF_1F_2 é retângulo de hipotenusa 20 cm e cateto maior 16 cm, temos que o cateto menor medirá 12 cm. Isso implica $PF_1 - PF_2 = 16 - 12 = 4$ cm, que é o eixo real. Logo, temos o eixo imaginário medindo b, tal que:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84.$$

Desse modo, a equação da hipérbole será

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1.$$

UNIDADE 1 – ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

CAPÍTULO 1 – Medidas de tendência central

Página 20

1. Sendo S_i e S_f as somas inicial e final das idades dos alunos, temos:

$\frac{S_i}{80} = 18{,}6\ S_i = \therefore S_i = 1488$ anos

$\frac{S_f}{78} = 18{,}5\ \therefore S_f = 1443$ anos

a) $Si = 1\,488$ anos

b) A soma das idades dos dois alunos que desistiram do curso é igual a $1488 - 1443 = = 45$ anos.

Média $\frac{45}{2} = 22{,}5\ \therefore 22{,}5$ anos

2. a) O número de alunos da turma é igual a $2 + 3 + 1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 6 + 4 + 2 = 40$

b) $M = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{40} = \frac{249}{40} = 6{,}225$

3. a) O número de gols marcados nos primeiros cinco jogos é igual a $2{,}2 \cdot 5 = 11$. Se a equipe marcar mais 14 gols nos próximos cinco jogos, a média de gols nos primeiros 10 jogos do campeonato será igual a $\frac{11+14}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5$.

b) Sendo x a média de gols que a equipe deverá manter nos próximos 10 jogos, temos:

$\frac{11 + 10 \cdot x}{15} = 2{,}8\ \therefore x = 3{,}1$

4. Sendo x a nota que o aluno deverá obter na terceira prova, temos:

$\frac{4{,}0 \cdot 1 + 6{,}0 \cdot 3 - x \cdot 2}{1 + 3 + 2} = 7{,}0$

$4{,}0 - 18{,}0 + 2x = 42{,}0 \therefore x = 10.$

5. a) O número de funcionários é igual a $10 + 8 + 5 + + 3 + 2 = 28$

b) $M = \frac{10 \cdot 500 + 8 \cdot 1500 + 5 \cdot 2500 + 3 \cdot 3500 + 2 \cdot 4500}{28}$

$M = \frac{5\,000 - 12\,000 + 12\,500 + 10\,500 - 9\,000}{28}$

$M = \frac{49\,000}{28} = 1750$

Assim, o salário médio é igual a R$ 1 750,00.

6. Sendo x e y, respectivamente, os números de homens e mulheres, temos:

$$\begin{cases} y + y = 200 \\ \frac{50 \cdot x + 35 \cdot y}{200} = 41 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 200 \\ 50 \cdot x + 35 \cdot y = 8\,200 \end{cases}$$

$\therefore x = 80$ e $y = 120$

7. a) O custo total para revestir o piso da sala é

$63 \cdot 15{,}00 + 63 \cdot 10{,}00 = 1.575{,}00$ reais.

b) $M = \frac{1.575{,}00}{63 + 63} = 12{,}50$ reais

8. a) (9% + 7% + 5% + 2%) de 25 000 = 0,23 · 25 000 = 5 750 alunos.

b) $M = \dfrac{5\% \cdot 0 + 5\% \cdot 1 + 10\% \cdot 2 + 8\% \cdot 3 + 12\% \cdot 4 + 20\% \cdot 5 + 17\% \cdot 6 + 9\% \cdot 7 + 7\% \cdot 8 + 5\% \cdot 9 + 2\% \cdot 10}{100\%}$

$$M = \frac{5\% + 20\% + 24\% + 48\% + 100\% + 102\% + 63\% + 56\% + 45\% + 20\%}{100\%} = \frac{483\%}{100\%} = 4{,}83$$

9. a) Não, pois, por exemplo, se os valores forem 1, 2, 3 e 102, a média será 27, que não representa bem o conjunto de valores. A média é sensível a valores extremos.

b) Não, somente para dados numéricos.

c) Nem sempre a moda existe.

d) Não existe, pois, dependendo do conjunto analisado, uma ou outra medida de tendência central pode ser mais adequada que outra.

10. a) Escrevendo os valores em ordem crescente, temos:

$$15, 16, 17, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22, \underbrace{22, 23}_{\text{valores centrais}}, 23, 23, 23, 23, 23, 23, 24, 24, 25, 25, 25, 26, 28, 28$$

Assim, a mediana é $\dfrac{22 + 23}{2} = 22{,}5\ °C$

b) A temperatura modal foi 23 °C.

11. a) $M_a = \dfrac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 10}{40}$

$$M_a = \frac{249}{40} = 6{,}225$$

b) A nota mediana é igual a $\dfrac{7 + 7}{2} = 7$.

c) A nota modal é igual a 7.

12. Sendo *x* e *y* os valores rasurados, temos:

$$\frac{5 + 6 + 3 + 8 + 10 + 5 + 3 + 2 + 4 + x + 5 + 3 + 4 + 2 + y + 7 + 3 + 5 + 4 + 4}{20} = 5$$

$x + y + 83 = 100 \Rightarrow x + y = 17$

se $x = 12$, então $y = 5$

se $y = 12$, então $x = 5$

Assim, os valores rasurados são iguais a 5 e 12, em qualquer ordem.

13. I. Falso.

$$\frac{15 \cdot 1000 + 10 \cdot 1\,800 + 14 \cdot 2\,200 + 6 \cdot 2\,500 + 4 \cdot 3\,000 + 1 \cdot 5000}{15 + 10 + 14 + 6 + 4 + 1} = \frac{95\,800}{50} = 1\,916$$

II. Verdadeiro.

$$M_e = \frac{1800 + 2\,200}{2} = 2\,000$$

III. Verdadeiro.

IV. Verdadeiro.

A nova mediana será igual a R$ 1.800,00.

14. Alternativa: B.

Organizando as temperaturas em ordem crescente, temos:

13,5 °C; 13,5 °C; 13,5 °C; 13,5 °C; 14 °C; 15,5 °C; 16 °C; 18 °C; 18 °C; 18;5 °C; 19,5 °C; 20 °C; 20 °C; 20 °C; 21,5 °C (um total de 15 termos)

A mediana é o termo central: 18 °C.

A média é a soma dos termos, dividida pelo total de termos:

$$x = \frac{13{,}5 + 13{,}5 + 13{,}5 + 13{,}5 + 14 + 15{,}5 + 16 + 18 + 18 + 18{,}5 + 19{,}5 + 20 + 20 + 20 + 21{,}5}{15}$$

$$x = \frac{255}{15} = 17\ ^\circ\text{C}$$

A moda é o termo que mais aparece: 13,5 °C.

15. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – Medidas de dispersão

Página 28

1. I. Falsa. A amplitude pode ser igual a zero.

II. Falsa. O desvio padrão que é na mesma unidade da variável.

III. Falsa. O desvio padrão é igual a zero se todos elementos do conjunto forem iguais.

2. a) $M_a = \dfrac{2+4+6+8}{4} = 5$

b) $V = \dfrac{(5-2)^2 + (5-4)^2 + (5-6)^2 + (5-8)^2}{4} = 5$

c) $D_p = \sqrt{5}$

3. a) $M_a = \dfrac{4+6+8+10}{4} = 7$

b) $V = \dfrac{(7-4)^2 + (7-6)^2 + (7-8)^2 + (7-10)^2}{4} = 5$

c) $D_p = \sqrt{5}$

d) A média aritmética aumentou duas unidades. A variância e o desvio padrão não foram alterados.

4. a) $M_a = \dfrac{4+8+12+16}{4} = 10$

b) $V = \dfrac{(10-4)^2 + (10-8)^2 + (10-12)^2 + (10-16)^2}{4} = 20$

c) $D_p = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

d) A média aritmética foi multiplicada por dois. A variância foi multiplicada por 2^2 e o desvio padrão foi multiplicado por 2.

5. a) $M_a = \dfrac{700 \cdot 10 + 900 \cdot 5 + 1500 \cdot 3 + 2\,000 \cdot 2}{10 + 5 + 3 + 2} = 1000$

Assim, o salário médio da empresa é R$ 1.000.

b) $M_e = \dfrac{700 + 900}{2} = 800{,}00$ reais e $M_0 = 700{,}00$ reais

c) $D_m = \dfrac{|1\,000 \cdot 700| \cdot 10 + |1\,000 - 900| 5 + |1\,000 - 1\,500| \cdot 3 + |1\,000 - 2\,000| \cdot 2}{10 + 5 + 3 + 2} = 350{,}00$ reais

$$D_P = \frac{\sqrt{(1000 - 700)^2 \cdot 10 + (1000 - 900)^2 \cdot 5 + (1000 - 1500)^2 \cdot 3 - (1000 - 2\,000)^2 \cdot 2}}{10 + 5 + 3 + 2}$$

$$D_P = \sqrt{\frac{90\,000 + 50\,000 + 750\,000 + 2\,000\,000}{20}}$$

$$D_P = \sqrt{185\,000} \cong 430 \text{ reais}$$

6. A média aritmética inicial é igual a $\dfrac{18 \cdot 6 + 20 \cdot 9 + 24 \cdot 3}{6 + 9 + 3} = 20$ anos e o desvio padrão é igual a

$$\sqrt{\frac{(20 - 18)^2 \cdot 6 + (20 - 20)^2 \cdot 9 + (20 - 24)^2 \cdot 3}{18}} = 2 \text{ anos.}$$

Assim, se forem contratados N jogadores com 20 anos, temos:

$$\sqrt{\frac{(20 - 18)^2 \cdot 6 + (20 - 20)^2 \cdot (9 + N) + (20 - 24)^2 \cdot 3}{28 + N}} = \frac{3}{4} \cdot 2$$

$$\sqrt{\frac{24 + 48}{18 + N}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{72}{18 + N} = \frac{9}{4} \quad \therefore N = 14$$

7. Como $6 - 2\sqrt{2} \cong 3{,}18$ e $6 + 2\sqrt{2} \cong 8{,}82$, podemos classificar o desempenho de cada um dos quatro alunos como:

3: raro

5: comum

7,5: comum

9: raro

8. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 3 – Probabilidade e estatística

Página 37

1. a) $\dfrac{45}{200} = 22{,}5\%$ **b)** $\dfrac{15 + 26 + 63}{200} = 52\%$

2. a) 65,4% **b)** 14,8% + 47,3% = 62,1%

3. a) $\dfrac{20}{20 + 15} \cong 57{,}14\%$ **b)** $\dfrac{15{,}3}{20{,}5 + 15{,}3} \cong 42{,}74\%$

4. a) $\dfrac{15}{100} \cdot 300 = 45$ **b)** 100% − 35% = 65% **c)** 8% + 24% = 32%

Vestibulares e Enem – Unidade 1 – Estatística e Probabilidade

1. Alternativa b.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)	Lucro médio anual (em milhões de reais)
F	24	3,0	$\frac{24}{3}=8$
G	24	2,0	$\frac{24}{2}=12$
H	25	2,5	$\frac{25}{2,5}=10$
M	15	1,5	$\frac{15}{1,5}=10$
P	9	1,5	$\frac{9}{1,5}=6$

Logo, a empresa **G** apresentou o maior lucro médio anual.

2. Alternativa c. No segundo semestre de 2012 a média foi igual a $\frac{5+6+14+35+35+25}{6}=20$. Logo, a quantidade mínima de carros que deveriam ser vendidos em janeiro de 2013 é igual a $1,2 \cdot 20 = 24$.

3. Alternativa d.

$$\text{Média} = \frac{2\cdot 5+2\cdot 6+2\cdot 8+4\cdot 10+2\cdot 12}{12}=8,5$$

Organizando os dados em ordem crescente, temos: 5, 5, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 12, 12

$$\text{Mediana} = \frac{8+10}{2}=9$$

Moda = 10 (valor mais frequente)

4. Alternativa d.

$$\text{Média} = \frac{300+400+400+450+500}{5}=410$$

5. Alternativa e. A porcentagem de aprovados é

$$\frac{15+9+6+3}{3+4+4+6+15+9+6+3}\cdot 100\% = 66\%.$$

6. Alternativa d. Colocando os dados em ordem crescente, temos: 1,73; 1,78; 1,81; 1,82; 1,83; 1,85. Logo, a mediana é igual a $\frac{181+182}{2}=181,5$ cm e a diferença pedida é dada por

$$181,5-\frac{173+178+181+182+183+185}{6}=$$

$$\frac{1\,089-1\,082}{6}=\frac{7}{6}\cong 1,17.$$

7. Alternativa c.

$$\frac{4+5}{4+5+3+1+2+5}\cdot 100\% = 45\%$$

8. $60,52 - 3,57 = 56,95\%$

9. Alternativa c.

De acordo com o enunciado e com o gráfico, temos:

Preço da diária (R$)	Quantidade de hotéis
200	50
300	50
400	80
600	20
Total	200

Logo, a mediana é dada por $\frac{300+400}{2}=350$ reais.

10. a) Alternativa b. A média anterior é igual

$$\frac{18+16+17+13+14+1+19+14+16+12}{10}=14.$$

Descartando-se a maior e a menor das notas, a média fica igual a

$\frac{18+16+17+13+14+14+16+12}{8}=15.$ A nova média é $15 - 14 = 1,0$ ponto maior.

11. Alternativa b. Primeiro trimestre:
$980 \cdot 31 + 1\,000 \cdot 28 + 960 \cdot 31 = 88\,140$ bolas.
Segundo trimestre:
$940 \cdot 30 + 900 \cdot 1 + 880 \cdot 30 = 82\,500$ bolas.
Terceiro trimestre:
$860 \cdot 31 + 880 \cdot 31 + 880 \cdot 30 = 80\,340$ bolas.
Quarto trimestre:
$960 \cdot 31 + 1\,000 \cdot 30 + 980 \cdot 31 = 90\,140$ bolas.
Logo, o gráfico da alternativa B é o que melhor representa a situação descrita.

12. Alternativa b. Organizando os dados em ordem crescente, temos: 181 419, 181 796, 204 804, 209 425, 212 952, 246 875, 255 415, 290 415, 298 041, 305 088. Logo, a mediana é igual a $\frac{212\,952+246\,875}{2}=229\,913,5.$

13. Alternativa c. O atleta número III é o mais regular, pois seu desvio padrão é menor.

14. Alternativa d. Organizando os dados em ordem crescente, temos: 4, 9; 6, 2; 6, 4; 6, 8; 7, 0; 7, 0; 7, 2. Logo, a mediana é igual a 6, 8.

15. a) $\dfrac{[100-(7+20+30+20+15)]}{100}\cdot 1\,200=96$

b) $\dfrac{15\cdot 4+20\cdot 3+2\cdot 30+1\cdot 20+7\cdot 0+8\cdot 5}{100}=2{,}4$

c) 20% + 15% + 8 % = 43%.

16. Alternativa b. No Brasil, de 2000 a 2010, o ritmo do desmatamento é dado pela média, em milhões de hectares por ano. Logo, a alternativa B é a correta.

17. Alternativa d. Analisando as afirmações podemos observar que quantidade de chuvas, na região sul, em outubro de 2011, superou a média histórica dessa região em $\dfrac{126-100}{100}\cdot 100\%=26\%$.

Desafio

Seja x a mediana do conjunto, temos:

$$\frac{5+6+10+11+n}{5}=x\Rightarrow n=5x-32$$

Como n é um número natural, devemos ter:
$5x - 32 \geq 0 \therefore x \geq 7$
Para $x = 7$, temos $n = 3$, mas a mediana para $n = 3$ é 6 (errado).
Para $x = 8$, temos $n = 8$, e a mediana para $n = 8$ é 8 (correto).
Para $x = 9$, temos $n = 13$, mas a mediana para $n = 13$ é 10 (errado).
Para $x = 10$, temos $n = 18$, e a mediana para $n = 18$ é 10 (correto).
Logo, os únicos valores possíveis para n são 8 e 18. Portanto, o resultado pedido é 8 + 18 = 26.

UNIDADE 2 – GEOMETRIA ANALÍTICA

CAPÍTULO 4 – Coordenadas Cartesianas

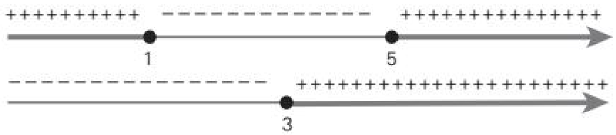
Página 54

1. I. Falsa, pois o ponto C pertence ao quarto quadrante.
II. Verdadeira.
III. Verdadeira.
IV. Verdadeira.
V. Verdadeira, pois a área do triângulo é igual a $\dfrac{7\cdot 4}{2}=14$ unidades de área.

2. $x^2 - 5x + 6 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = 3$
Para $x = 2 \Rightarrow$ P(0; 3)
Para $x = 3 \Rightarrow$ P(0; 2)

3. a) $a > 0$ e $b < 0 \rightarrow A(a; b) \in$ 4º quadrante
b) $-a < 0$ e $b < 0 \rightarrow A(-a; b) \in$ 3º quadrante
c) $a > 0$ e $-b > 0 \rightarrow A(a; -b) \in$ 1º quadrante
d) $-a < 0$ e $-b > 0 \rightarrow A(-a; -b) \in$ 2º quadrante

4.



a) $k > 5$
b) $3 < k < 5$
c) $1 < k < 3$
d) $k < 1$
e) $k = 3$
f) $k = 1$ ou $k = 5$

5. a) Q(3; –5)
b) M(–3; 5)
c) R(–3; –5)
d) S(–3; –5)

6. a) A ordenada do ponto P é igual a zero.
b) P(x; 0)

$d_{AP}=d_{BP}\rightarrow\sqrt{(x+2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(0-6)^2}$
$x^2 + 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 36$
$8x = 32 \therefore x = 4$
Assim, as coordenadas do ponto P são (4; 0).

7. $(-3;1)=\left(\dfrac{1+(-7)}{2};\dfrac{m+(-2)}{2}\right)$

$(-3;1)=\left(-3;\dfrac{m-2}{2}\right)\rightarrow\ 1=\dfrac{m-2}{2}\therefore m=4$

8. a) $\left(\dfrac{1+5}{2};\dfrac{5+1}{2}\right)=(3;3)$

b) $\left(\dfrac{0+1+5}{3};\dfrac{0+5+1}{3}\right)=(2;2)$

9. Sendo C o ponto simétrico do ponto A em relação ao ponto B, temos:

$3=\dfrac{-1+x_c}{2}\therefore x_c=7$

$1=\dfrac{3+y_c}{2}\therefore y_c=-1$

C (7; –1)

10. a) $AB=\sqrt{(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$ u.c.

$AC=\sqrt{(-4-3)^2+(6-5)^2}=\sqrt{50}$ u.c.

$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(6-3)^2}=\sqrt{45}$ u.c.

$AB=\sqrt{5}$ u.c., $AC=5\sqrt{2}$ u.c. e $BC=3\sqrt{5}$ u.c.

b) $(2P)_{ABC} = \sqrt{5} + \sqrt{50} + \sqrt{45} =$
$= \sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = \left(4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)$u.c.

c) $(AB)^2 + (BC)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + (\sqrt{45})^2 = 50 = (AC)^2$

Assim, o triângulo é retângulo no vértice B.

11. $d_{A,\,B} = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (2-4)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$ u.c.

$d_{A,C} = \sqrt{[0-(-3)]^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ u.c.

$d_{B,C} = \sqrt{(0-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ u.c.

$(2P)_{ABC} = \left(2\sqrt{10} + 3\sqrt{5} + 5\right)$u.c.

O triângulo é escaleno.

12. a) $\left(\dfrac{-3+5}{2}; \dfrac{-4+8}{2}\right) = (1;2)$

b) A variação total entre as abscissas dos pontos A e B é igual a 5 – (–3) = 8 e a variação total entre as ordenadas dos pontos A e B é igual a 8 – (–4) = 12. Assim, as coordenadas dos pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro segmentos congruentes são C(–3 + 2; –4 1+ 3) = (–1; –1), D(–1 + 2; –1 + 3) = (1; 2) e E(1 + 2; 2 + 3) = (3; 5).

13. a) $d_{A,\,B} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = 5$ u.c.

b) $d_{A,C} = \sqrt{(x+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ u.c.

c) $d_{B,C} = \sqrt{(x-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$ u.c.

d) $(d_{A,C})^2 = (d_{A,B})^2 + (d_{B,C})^2$

$x^2 + 2x + 2 = 25 + x^2 - 4x + 13$
$6x = 36$
$x = 6$

14. a) A abscissa também é igual a 5.

b) As coordenadas do ponto são $\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$

c) Sendo P(x; x), temos:

$\sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (x-3)^2}$
$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 6x + 9$
$-6x + 5 = -2x + 13$
$-4x = 8$
$x = -2$
Assim, as coordenadas do ponto P são (2; –2).

15. a) A ordenada é igual a –3.

b) A soma das coordenadas é igual a zero.

c) Sendo P(x; – x), temos:

$\sqrt{(x-1)^2 + (-x-4)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (-x+3)^2}$
$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 8x + 16 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 6x + 9$
$6x + 17 = 2x + 25$
$4x = 8$
$x = 2$
Assim, as coordenadas do ponto P são (2; –2).

CAPÍTULO 5 – A reta no plano cartesiano

Página 63

1.

a) $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$40 + 3x + 8x - 18 = 0 \therefore x = -2$
P(–2; 0)

b) $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$40 + 6y - 18 + 5y = 0 \therefore x = -2$
Q(0; –2)

c) A área do triângulo é igual a $\dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$ unidades de área.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$

$0 + 0 + 2k + 6 + 0 + 0 = 0$
$2k = -6$
$k = -3$

3. Para que $\overline{AC} + \overline{CB}$ tenha o menor comprimento possível, os pontos A, B e C devem estar alinhados.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$5 - 3x - 5x + 12 = 0$

$x = \dfrac{17}{8}$

Assim, as coordenadas do ponto C são $\left(\dfrac{17}{8}; 0\right)$.

4. a) $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 7 = 1 \neq 0$

O ponto não pertence à reta.

b) $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 7 = 0$

O ponto pertence à reta.

c) $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 7 = -7 \neq 0$

O ponto não pertence à reta.

d) $2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 7 = -3 \neq 0$

O ponto não pertence à reta.

e) $2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 2 - 7 = 0$

O ponto pertence à reta.

5. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \therefore 7x - y = 0$

b) ponto médio do lado BC: (3; 5)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \therefore 5x - 3y = 0$$

c) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \therefore 7x + 5y + 3 - 35 - y - 3x = 0$

$x + y - 8 = 0$

$4 + 4 - 8 = 0$

Assim, a reta que contém o lado BC passa pelo ponto (4; 4).

6. I. Verdadeira $\rightarrow y - 3 = 0 \therefore y = 3$

II. Verdadeira $\rightarrow 2x + 3 = 0 \therefore x = -\frac{3}{2}$

III. Verdadeira $\rightarrow 3 \cdot 0 - 0 = 0$

IV. Verdadeira $\rightarrow 0 - (-1) - 1 = 0$

V. Falsa $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = -4$

$y = 0 \rightarrow x = 2$

$S_{\text{Triângulo}} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ unidades de área.

7. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$4x + 3y - 4 - 12 - y + 4x = 0 \therefore 4x - y - 8 = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 4y - 2 - 4 + 2y - x = 0 \therefore y - 1 = 0$

b) As medidas dos lados do trapézio são:

$\sqrt{(4-1)^2 - (1-4)^2} = 3\sqrt{2}$ u.c.

$\sqrt{(3-4)^2 - (-4-1)^2} = \sqrt{26}$ u.c.

$\sqrt{(-2-3)^2 + (1-4)^2} = 5\sqrt{2}$ u.c.

$\sqrt{(1+2)^2 - (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$ u.c.

$(2l)_{\text{Trapézio}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{26} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \left(11\sqrt{2} + \sqrt{26}\right)$ u.c.

8. Sendo P(*x*; 0) e Q(0; *y*), respectivamente, os pontos onde a reta intersecta o eixo das abscissas e das ordenadas, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$3x + 4y - 1 - 12 - y + x = 0 \therefore 4x - 3y - 13 = 0$

$y = 0 \rightarrow x = \frac{13}{4} \therefore P\left(\frac{13}{4}; 0\right)$

$x = 0 \rightarrow y = \frac{13}{3} \therefore Q\left(0; \frac{13}{3}\right)$

9. a) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \therefore x = 3 \text{ e } y = -2$

Assim, o ponto de intersecção das retas é (3; –2).

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ 3x \pm 2y - 1 = 0 \end{cases} \therefore x = -3 \text{ e } y = 5$

Assim, o ponto de intersecção das retas é (–3; 5).

c) $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \therefore x = 2 \text{ e } y = 3$

Assim, o ponto de intersecção das retas é (2; 3).

10. As esquações do quadrilátero são:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 5y - 1 - 10 + y - x = 0$

$x + 6y - 11 = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$4x - 15 - 3y + 5x = 0$

$9x - 3y - 15 = 0$

$3x - y - 5 = 0$

$$\begin{cases} x + 6y - 11 = 0 \\ 3x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

Assim, o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero é $\left(\frac{41}{19}; \frac{28}{19}\right)$.

11. a) $2p = 4 \cdot AB = 4 \cdot 5 \rightarrow 2p = 20$ u.c.

b) Diagonal AC

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$5y - 5x = 0 \rightarrow x - y = 0$

Diagonal BD

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$5x + 5y - 25 = 0 \rightarrow x + y - 5 = 0$

Página 71

1. a) $m = \dfrac{4-(-4)}{1-(-3)} = \dfrac{8}{4} = 2$

b) $m = \dfrac{4-(-4)}{3-3} = \dfrac{8}{0}$

Logo, a reta não tem coeficiente angular.

c) $m = \dfrac{4-(-2)}{-4-4} = \dfrac{6}{-8} = -\dfrac{3}{4}$

2. a) $m = \text{tg}(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $m = \text{tg}(135°) = -1$

3. a) A inclinação da reta *r* é 0° e da reta *s* é 90°.

b) A declividade da reta *r* é 0 e não existe a declividade da reta *s*.

4. a) $m = \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \therefore \alpha = 30°$

b) $m = \text{tg}\,\alpha = -1 \therefore \alpha = 135°$

c) $m = \text{tg}\,\alpha = 0 \therefore \alpha = 0°$

d) $m = \text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \therefore \alpha = 120°$

e) $m = \text{tg}\,\alpha = 1 \therefore \alpha = 45°$

5. $4^2 = (2{,}4)^2 + x^2 \therefore x = 3{,}2$

$m = \text{tg}\,\alpha = \dfrac{3{,}2}{2{,}4} = \dfrac{32}{24} = \dfrac{4}{3}$

6. a) $y - 3 = 2 \cdot (x - 1) \therefore 2x - y + 1 = 0$

b) $y - 5 = -3 \cdot (x + 2) \therefore 3x + y + 1 = 0$

c) $y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \therefore x - y = 0$

7. a) $m = \text{tg}\,(135°) = -1$

b) $y - 4 = -1 \cdot (x - 3) \therefore x + y - 7 = 0$

8. a) $5^2 = 3^2 - y^2 \therefore y = 4$

Equação da reta *r*: $\therefore x = \dfrac{41}{19}$ e $y = \dfrac{28}{19}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$4x - 3y = 0$

b) $S_{\text{Triângulo}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9. a) $2x + 3y - 6 = 0 \therefore y = -\dfrac{2}{3} \cdot x + 2$

b) Coeficiente angular: $-\dfrac{2}{3}$ coeficiente linear: 2

10. a) $m_s = \sqrt{3}$

b) 60°

c) $y = 0 \rightarrow \sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3} = 0 \therefore x = 2$

Logo, (2; 0)

11.a) $\begin{cases} x + 2y - 18 = 0 \\ 5x - y - 2 = 0 \end{cases} \therefore x = 2$ e $y = 8$

$m_t = \dfrac{8-5}{2-1} = 3$

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$5x + 2y + 8 - 10 - y - 8x = 0 \therefore 3x - y + 2 = 0$

12. a) $f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8$

$f(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 11$

$f(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$

$f(4) = 3 \cdot 4 + 5 = 17$

$f(5) = 3 \cdot 5 + 5 = 20$

b) A razão da progressão aritmética é igual a 3.

c) O coeficiente angular é igual a 3.

d) O coeficiente angular da reta e a razão da progressão aritmética são iguais.

13. a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 2 \end{cases} \therefore x = -1 \text{ e } y = 2$

$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 7 \end{cases} \therefore x = 4 \text{ e } y = 7$

$\begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases} \therefore x = 2 \text{ e } y = 2$

$\begin{cases} y = x \\ y = 7 \end{cases} \therefore x = 7 \text{ e } y = 7$

Assim, os vértices do paralelogramo são (–1; 2), (4; 7), (2; 2) e (7; 7).

b) As equações das diagonais do paralelogramo são:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 7y - 7 - 14 + y - 7x = 0 \therefore 5x - 8y - 21 = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 4y + 14 - 8 - 2y - 7x = 0 \therefore 5x - 2y - 6 = 0$

Assim, as equações reduzidas das diagonais são

$y = \dfrac{5x + 21}{8}$ e $y = \dfrac{5x - 6}{2}$.

c) A área do paralelogramo é igual a $3 \cdot 5 = 15$ u.a.

14. a) $f(0) = -0 + 6 = 6$; $f(5) = -5 + 6 = 1$

b) O coeficiente angular é igual a –1.

c) A área do trapézio é igual a $\left(\dfrac{6+1}{2}\right) \cdot 5 = \dfrac{35}{2} = 17{,}5$ u.a.

15. a) Podemosinicialmente obter o coeficiente angular da reta

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \dfrac{4 - (-3)}{-1 - 2} \Rightarrow m = -\dfrac{7}{3}$

Determinamos agora o coeficiente linear

$y = -\dfrac{7}{3}x + n$

$(2, -3)$

$-3 = -\dfrac{7}{3} \cdot 2 + n$

$-3 + \dfrac{14}{3} = n \Rightarrow n = \dfrac{5}{3}$

$y = f(x) = -\dfrac{7}{3}x + \dfrac{5}{3}$

b) A equação geral da reta pode ser obtida a partir da equação reduzida anterior, isto é

$y = -\dfrac{7}{3}x + \dfrac{5}{3}$

$3y = -7x + 5$

$7x + 3y - 5 = 0$

Página 76

1. a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$. As retas são concorrentes.

b) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{-1}{-2}$ e $3x - 6y - 6 = -3(-x + 2y + 2)$. As retas são coincidentes.

c) $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{4}{2}$ são valores opostos e inversos. As retas são perpendiculares.

d) $\dfrac{3}{2} = \dfrac{-3}{-2}$ e não existe k tal que $3x - 2y + 5 = k(-3x + 2y + 3)$. As retas são paralelas.

e) As retas $x + 1 = 0$ e $y - 2 = 0$ são paralelas aos eixos das ordenadas e das abscissas, respectivamente. As retas são perpendiculares.

2. a) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \therefore x = 3 \text{ e } y = 2$

$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - 3y - 15 = 0 \end{cases} \therefore x = 6 \text{ e } y = -1$

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - 3y - 15 = 0 \end{cases} \therefore x = -12 \text{ e } y = -13$

Assim, os vértices do triângulo são os pontos (3; 2), (6; −1) e (−12; −13).

b) As medidas dos lados do triângulo são:

$$\sqrt{(6-3)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}\ \text{u.c.}$$

$$\sqrt{(-12-6)^2+(-13-1)^2}=\sqrt{468}=2\sqrt{117}\ \text{u.c.}$$

$$\sqrt{(-12-3)^2+(-13-2)^2}=15\sqrt{2}\ \text{u.c.}$$

$$(2P)_{\text{Triângulo}}=\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{117}+15\sqrt{2}\right)\ \text{u.c.}$$

$$(2P)_{\text{Triângulo}}=\left(2\sqrt{117}+18\sqrt{2}\right)\ \text{u.c. ou}$$

$$(2P)_{\text{Triângulo}}=\left(6\sqrt{13}+18\sqrt{2}\right)\ \text{u.c.}$$

c) $x + y - 5 = 0 \rightarrow y = -x + 5$

$x - y - 1 = 0 \rightarrow y = x - 1$

Como o coeficiente angular das retas $x + y - 5 = 0$ e $x - y - 1 = 0$ são opostos e inversos, o triângulo é retângulo.

3. I. Verdadeira.

II. Verdadeira.

III. Falsa.

IV. Falsa. O produto é igual a −1.

V. Falsa. Podem ser concorrentes e não perpendiculares.

4. a) $2x + 3y - 1 = 0$

$3y = 2x - 1 \therefore y = \dfrac{2}{3}\cdot x-\dfrac{1}{3}$

Assim, o coeficiente angular da reta r é igual a $-\dfrac{2}{3}$.

b) $y - 1 = -\dfrac{2}{3}\cdot(x - 1) \therefore 2x + 3y - 5 = 0$

c) $2x + 3y - 5 = 0 \therefore y = -\dfrac{2}{3}\cdot x+\dfrac{5}{3}$

5. $2x + 3y + 1 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{2}{3}\cdot x-\dfrac{1}{3}$

$x + k\cdot y - 1 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{1}{k}\cdot x+\dfrac{1}{k}$

a) $-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{k}=0 \therefore k=\dfrac{3}{2}$

b) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{k}\right)=-1 \therefore k=-\dfrac{2}{3}$

6. $\begin{cases}2x-y-7=0\\3x+5y-17=0\end{cases} \therefore x = 4 \text{ e } y = 1$

$x + 2y = 5 \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{5}{2}$

$y - 1 = 2\cdot x(x - 4) \rightarrow 2x - y - 7 = 0$

7. a) $m_{AB} = \dfrac{4-1}{7-1}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

b) -2

c) $y = -2\cdot(x - 2) \rightarrow 2x - y - 10 = 0$

d) $m_{AC} = \dfrac{6-1}{2-1} \rightarrow m_{AC} = 5$

e) $m_{1AC}=-\dfrac{1}{m_{AC}} \Rightarrow m_{1AC}=-\dfrac{1}{5}$

f) $m_{BC} = \dfrac{4-6}{7-2}=-\dfrac{2}{5}$

g) $m_{1BC}=-\dfrac{1}{m_{BC}} \Rightarrow m_{1BC}=\dfrac{5}{2}$

8. Ponto médio de AB

$\left(\dfrac{1+5}{2};\dfrac{1+9}{2}\right)=(3;5)$

$m_{AB} = \dfrac{9-1}{5-1}=\dfrac{8}{4}=2$

$y - 5 = -\dfrac{1}{2}\cdot(x - 3) \rightarrow x + 2y - 13 = 0$

(equação da mediatriz de AB)

9. A equação da reta equidistante das retas r e s é

$3x - y + c = 0$

$c = \dfrac{-7+5}{2}=-1$

Assim, a equação da reta equidistante é $3x - y - 1 = 0$.

10. a) $m_{AC} = \dfrac{7-1}{8-1}=\dfrac{6}{7}$

b) $\left(\dfrac{1+8}{2};\dfrac{1+7}{2}\right)=\left(\dfrac{9}{2};4\right)$

c) $m_{BD} = -\dfrac{7}{6}$

$y-4=-\dfrac{7}{6}\cdot\left(x-\dfrac{9}{2}\right)\rightarrow 14x+12y-111=0$

11. $x + y - 3 = 0$

$y = -x + 3 \therefore m_r = -1 \rightarrow m_{PO} = 1$

$y - 4 = 1\cdot(x - 5)$

$y - 4 = x - 5$

$x - y - 1 = 0$

(equação de PO)

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \therefore x = 2 \text{ e } y = 1$$

O (2; 1)

12. $x + y - 4 = 0$

$y = -x + 4 \therefore m_r = -1 \rightarrow m_{PQ} = 1$

$y - 2 = 1 \cdot (x - 4)$

$y - 2 = x - 4$

$x - y - 2 = 0$

(equação de PQ)

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \therefore x = 3 \text{ e } y = 1$$

$$(3;1) = \frac{4+x_Q}{2} = \frac{2+y_Q}{2}$$

$$3 = \frac{4+x_Q}{2} \therefore x_Q = 2$$

$$1 = \frac{2+x_Q}{2} \therefore y_Q = 0$$

Q(2; 0)

13. Respostas pessoais.

Página 80

1. a) $2x + 4y - 16 = 0$

$4y = -2x + 6$

$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$

b) $2x + 4y = 16$

$$\frac{2x}{16} + \frac{4y}{16} = \frac{16}{16} \therefore \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$

2. a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

b) $4x + 3y - 12 = 0$

3. I) Verdadeira.

$t = 2 \rightarrow (2 + 1 ; 4 - 2) = (3; 2)$

II) Falsa.

$t = 3 \rightarrow (3 \cdot 3 - 4; 2 \cdot 3 - 1) = (5; 5)$

III) Verdadeira.

A partícula A passa pelo ponto (2; 3) no instante $t = 1$ e a partícula B passa pelo ponto (2; 3) no instante $t = 2$.

IV) Falsa.

As partículas não se chocam, pois passam pelo ponto (2; 3) em instantes diferentes.

V) Verdadeira.

$t = 5$

A: (6; −1)

B: (11; 9)

$$d_{AB} = \sqrt{(11-6)^2 + (9+1)^2} = 5\sqrt{5} \text{ u}$$

4. As trajetórias das partículas x e y são dadas pelas equações:

$$x = 3t + 1 \therefore t = \frac{x-1}{3}$$

$y = 2t - 3$

$$y = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{3}\right) - 3$$

$$y = \frac{2x-11}{3}$$

$$x = 2t + 2 \therefore t = \frac{x-2}{2}$$

$y = t - 1$

$$y = \frac{x-2}{2} - 1$$

$$y = \frac{x-4}{2}$$

a) $\frac{2x-11}{3} = \frac{x-4}{2}$

$4x - 22 = 3x - 12$

$x = 10$

$$y = \frac{10-4}{2}$$

$y = 3$

Assim, as trajetórias se intersectam no ponto (10; 3).

b) A partícula x passa pelo ponto (10; 3) no instante $t = 3$ e a partícula y no instante $t = 4$. Assim, as partículas não se chocam ao longo de suas trajetórias.

5. a) $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

$$\frac{x}{-10} + \frac{y}{5} = 1$$

b) $\frac{x}{-10} + \frac{y}{5} = 1$

$$10 \cdot \left(\frac{x}{-10} + \frac{y}{3}\right) = 10 \cdot 1$$

$$-x - 2y = 10 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$$

c) $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$S = \dfrac{10 \cdot 5}{2} \rightarrow S = 25$ u.a.

6. a) bissetriz dos quadrantes ímpares: $y = x$.

bissetriz dos quadrantes pares: $y = -x$.

b) as duas bissetrizes formam um ângulo reto.

7. a) $y - 0 = \text{tg}\,(60°) \cdot (x + 3)$

$y = \sqrt{3} \cdot (x+3) \therefore y = \sqrt{3} \cdot x + 3\sqrt{3}$

b) $y - 0 = \text{tg}\,(30°) \cdot (x + 3)$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x+3)\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \sqrt{3}$

8. $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5$

$(x - 4)^2 + (3x + 4 - 3)^2 = 25$

$x^2 - 8x + 16 - 9x^2 + 6x - 1 = 25$

$5x^2 - x - 4 = 0$

$x = 1 \rightarrow y = 7$

$x = -\dfrac{4}{3} \rightarrow y = \dfrac{8}{5}$

Assim, os pontos são (1; 7) e $-\dfrac{4}{5}; \dfrac{8}{5}$.

9. Os vértices das parábolas são os pontos (3; 24) e (1; 4).

a) $m = \dfrac{4-(-4)}{1-3} = \dfrac{8}{-2} = -4$

b) $y - 4 = -4 \cdot (x - 1) \therefore 4x - y - 8 = 0$

c) $4x + y - 8 = 0 \therefore y = -4x + 8$

10. Seja x a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, temos:

$\cos\ 30° = \dfrac{6}{x}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6}{x}$

$x = 4\sqrt{3}$

O coeficiente angular da reta r é igual a tg (120°) = $\sqrt{-3}$.

$y - 0 = -\sqrt{3} \cdot \left(x - 4\sqrt{3}\right)$

$y = -\sqrt{3} \cdot x - 12$

11. a) $m_r = \dfrac{0-6}{2-0} = -3$

$y - 0 = -3 \cdot (x - 2) \therefore y = -3x + 6$

$m_s = \dfrac{0-4}{4-0} = \dfrac{3}{4}$

$y - 0 = -\dfrac{3}{4} \cdot (x-4) \therefore y = -\dfrac{3x}{4} + 3$

b) $\begin{cases} y = -3x + 6 \\ y = -\dfrac{3x}{4} + 3 \end{cases}$

$-3x + 6 = -\dfrac{3x}{4} + 3 - 9x = -12$

$x = \dfrac{4}{3} \rightarrow y = -3 \cdot \dfrac{4}{3} + 6 = 2$

Assim, o ponto de intersecção das retas r e s é $\left(\dfrac{4}{3}; 2\right)$.

12. a) Isolando t nas duas equações paramétricas e comparando os resultados:

$\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \rightarrow y = \dfrac{2}{3}x$

b) Isolando k nas duas equações paramétricas e comparando os resultados:

$3 - x = y - 2 \rightarrow y = -x + 5$

c) Resolvendo o sistema formado pelas duas equações reduzidas, temos:

$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x \\ y = -x + 5 \end{cases}$

$\dfrac{2}{3}x = -x + 5$

$2x = -3x + 15$

$5x = 15$

$x = 3 \rightarrow y = 2$

Portanto o ponto em comum é (3; 2).

13. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 6 – DISTÂNCIA, ÁREA E ÂNGULO

Página 86

1. I. Falsa, pois a distância pode ser igual a zero.

II. Verdadeira.

III. Falsa.

$d = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4^2)}} = \dfrac{1}{5}$

IV. Verdadeira.

$$d=\frac{|3\cdot 2+(-5)-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=0$$

V. Falsa.

2. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

$2x + 3y - 1 - 6 - y - x = 0$

$x + 2y - 5 = 0$

b) $d=\frac{|0+2\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

3) a) $x = 4$

$2 \cdot 4 - y - 1 = 0 \rightarrow y = 7$

A(4; 7)

b) $d=\frac{|2\cdot 4-1\cdot 7-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$

4. a) $m_{AB}=\frac{3-(-5)}{4-(-4)}=\frac{8}{8}=1$

b) $y - 3 = 1 \cdot (x - 4) \rightarrow x - y - 1 = 0$

c) $h=\frac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

5. a) Seja D a diagonal do quadrado. Temos:

$$D=2\cdot\frac{|5\cdot 1-12\cdot 3-11|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{2\cdot 52}{13}=8$$

b) Seja x a medida dos lados do quadrado. Temos:

$$x\sqrt{2}=8\rightarrow x=4\sqrt{2}\rightarrow x^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2\rightarrow x^2=32\,u^2$$

6. $3x + 4y - 8 = 0$

$x = 0 \rightarrow y = 2$

$$d=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{7}{5}$$

7. $|3 \cdot k + 2| = 20$

$3k + 2 = 20 \therefore k = 6$

$3k + 2 = -20 \therefore k = -\frac{22}{3}$

$$\frac{|3\cdot k+4\cdot 1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

Assim, a soma dos valores de k é igual a:

$$6+\left(-\frac{22}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

8. Seja (x; 3) um ponto pertencente à reta de equação $y = 3$, temos:

$$\frac{|12\cdot x-5\cdot 3-4|}{\sqrt{12^2+(5)^2}}=5$$

$|12x - 19| = 65$

$12x - 19 = 65 \therefore x = 7$

$12x - 19 = -65 \therefore x = -\frac{23}{6}$

Assim, os pontos são (7; 3) e $\left(-\frac{23}{6};3\right)$.

9. a) $y - 1 = m \cdot (x - 0) \rightarrow y = mx + 1$

b) $y = mx + 1 \rightarrow mx - y + 1 = 0$

$$\frac{|m\cdot 5-1+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}\ \frac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$25\,m^2 = 5\,m^2 + 5 \rightarrow 20\,m^2 = 5 \rightarrow m^2 = \frac{1}{4}$

$m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 \rightarrow 2y = x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow x - 2y + 2 = 0$

ou

$m = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2y = -x + 2 \rightarrow x + 2y - 2 = 0$

10. a) • $x = 0 \rightarrow 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2$

Vertices (0; 2)

• $y = 0 \rightarrow x + 3 \cdot 0 - 6 = 0 \rightarrow x = 6$

Vértice (6; 0)

Assim, os vértices são (0; 0), (0; 2) e (6; 0)

b) $h=\frac{|0+3\cdot 0-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

$$=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

11. a) $AB=\sqrt{(4+4)^2+(2+4)^2}=10$

b) $m_{AB}=\frac{2-(-4)}{4-(-4)}=\frac{3}{4}$

c) A equação da reta que contém o lado AB é:

$$y-2=\frac{3}{4}\cdot(x-4)\rightarrow 3x-4y-4=0$$

Assim, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado AB é igual a

$$\frac{|3\cdot(-3)-4\cdot 6-4|}{3^2+(-4)^2}=\frac{37}{5}$$

d) $S_{\text{TriânguloABC}} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{37}{5}=37\ u^2$

12. Respostas pessoais.

Página 90

1. a) $AB = \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$

$AC = \sqrt{(6-0)^2+(-8-0)^2}=10$

$BC = \sqrt{(6-3)^2+(-8-4)^2}=3\sqrt{17}$

$(2p)_{ABC} = 15+3\sqrt{17}\ u^2$

b) O triângulo é escaleno.

c) $\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 6 & -8 & 1\end{vmatrix}$

$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot|-24-24|=24$ u.c.

2. $\text{Área} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 4 & 1\\ 0 & 5 & 1\\ -2 & -5 & 1\end{vmatrix}}_{\text{área ABD}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 1\\ -2 & -5 & 1\end{vmatrix}}_{\text{área CBD}}$

$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot|-20-8+10-20|+\frac{1}{2}\cdot|20+10+20|$

Área = 19 + 25 = 44 u.a.

3.

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & k & 1\end{vmatrix}=15$$

$|4k-2| = 30$

$4k-2=30 \therefore k=8$ ou $4k-2=-30 \therefore k=-7$

4. $\text{Área} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ -2 & 6 & 1\\ -1 & -5 & 1\end{vmatrix}}_{\text{área ABE}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 6 & 1\\ 4 & 6 & 1\\ -1 & -5 & 1\end{vmatrix}}_{\text{área BCE}} +$

$+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 4 & 6 & 1\\ -1 & -5 & 1\end{vmatrix}}_{\text{área DCE}}$

$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot|-24+10+6-20|+\frac{1}{2}\cdot$
$\cdot|-12-6-20+6-24-10|+$
$+\frac{1}{2}\cdot|30+2-20+6+8-25|$

Área = 14 + 33 + 25,5 = 72,5 u.a.

5.

a) $\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 6 & 1\\ 0 & -4 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{vmatrix}$

$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|16+24+16+16|=36$ u.a.

b) $\text{Área}_{MNP} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$\text{Área}_{MNP} = \frac{1}{2}\cdot|-10+2-10|=9$ u.a.

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\text{Área}_{MNP}}{\text{Área}_{ABC}}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

6. $\begin{cases}y=x+4\\ y=-x+6\end{cases}\Rightarrow x=1$ e $y=5$

$\begin{cases}y=x+4\\ y=\frac{x}{2}\end{cases}\Rightarrow x=-8$ e $y=-4$

$\begin{cases}y=\frac{x}{2}\\ y=-x+6\end{cases}\Rightarrow x=4$ e $y=2$

Logo,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ -8 & -4 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|-4+20-16+16-2+40\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 54=27\text{ u.a.}$$

7. $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 1\\ -5 & -1 & 1\end{vmatrix}}_{S_{ABC}}-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ -5 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}}_{S_{ACD}}=\frac{1}{2}\cdot$

$\cdot\left|-18\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|-25\right|=\frac{43}{2}\text{ u.a.}$

8. a) $A=\frac{1}{2}\cdot|D|$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 7 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$D=1+9+35-3-21-5$

$D=16$

$A=\frac{1}{2}\cdot|16|\Rightarrow A=8\text{ u.a.}$

b) Equação da reta que contém AB

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 7 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$3x+7y+1-21-y-x=0$

$2x+6y-2=0\Rightarrow x+3y-10=0$

A altura será a distância do vértice C à reta que contém AB

$$h=d=\frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$h=\frac{|1\cdot 3+3\cdot 5-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$h=\frac{8}{\sqrt{10}}\Rightarrow h=\frac{4\sqrt{10}}{5}\text{ u.c.}$$

Página 93

1. $x-y-2=0$

$y=x-2\therefore m=1$

Sendo θ o ângulo agudo formado pelas retas, temos:

$$\text{tg}\theta=\left|\frac{1}{1}\right|=1\therefore\theta=45°$$

2. $m_{AB}=\frac{-3-(-3)}{7-(-1)}=0$

$m_{AC}=\frac{5-(-3)}{5-(-1)}=\frac{4}{3}$

$m_{BC}=\frac{5-(-3)}{5-7}=-4$

$$\text{tg}\left(A\hat{B}C\right)=\left|\frac{0-(-4)}{1+0\cdot(-4)}\right|=4$$

$$\text{tg}\left(A\hat{C}B\right)=\left|\frac{\frac{4}{3}-(-4)}{1+\frac{4}{3}\cdot(-4)}\right|=\frac{16}{13}$$

$$\text{tg}\left(B\hat{A}C\right)=\left|\frac{\frac{4}{3}-0}{1+\frac{4}{3}\cdot 0}\right|=\frac{4}{3}$$

3. $4x-2y-1=0\therefore m_r=2$

$3x+y-5=0\therefore m_s=-3$

$\text{tg}\theta=\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}=1\therefore 0=45°$

4. Os pontos que pertencem à reta t são equidistantes das retas r e s. Assim, sendo P(a; b) um ponto genérico pertencente à reta t, temos:

$d_{P,r}=d_{P,s}$

$$\frac{|2a-b+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+b+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|2a-b-1|=|2a+b-5|$

$2a-b-1=2a+b+5\rightarrow -2b=4\therefore b=-2$

ou

$2a-b+1=-2a-b-5\rightarrow 4a=-6\therefore a=-\frac{3}{2}.$

As possíveis equações da reta t.

$y=-2$ ou $x=-\frac{1}{2}$

5. O coeficiente angular da reta r é igual a $\frac{1-0}{1-0}=1.$

Assim, sendo m_s o coeficiente angular da reta s, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{1 - m_s}{1 + 1 \cdot m_s}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1 - m_s}{1 + 1 \cdot m_s} \therefore = m_s = \frac{1}{5}$$

$$y - 1 = \frac{1}{5} \cdot (x - 1) \rightarrow s_1 : x - 5y + 4 = 0 \text{ ou}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{1 - m_s}{1 + 1 \cdot m_s} \therefore = 5$$

$y - 1 = 5 \cdot (x - 1) \rightarrow s_2 : 5x - y - 4 = 0$

6. r: $2x + y + 3 = 0$

$y = -2x - 3$ $m_r = -2$

$$\text{tg}45° = \left| \frac{-2 - m_s}{1 + (-2) \cdot m_s} \right|$$

$$1 = \frac{-2 - m_s}{1 - 2m_s}$$

$$\frac{-2 - m_s}{1 - 2m_s} = 1 \therefore m_s = 3$$

$y - 5 = 3 \cdot (x - 1) \rightarrow s_1 : 3x - y + 2 = 0$

ou

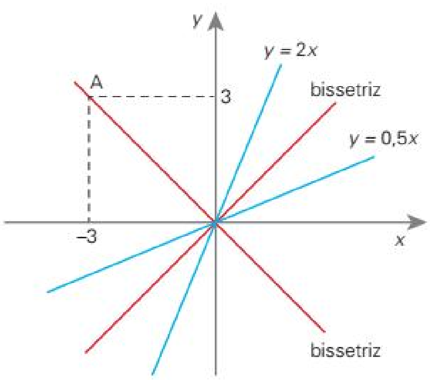
$$\frac{-2 - m_s}{1 - 2m_s} = -1 \therefore m_s = -\frac{1}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 1) \rightarrow S_2 : x + 3y - 16 = 0$$

7. Resposta pessoal.

8. Um esboço do que se pede na atividade é:

Figuras: ©DAE



CAPÍTULO 7 – A CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO CARTESIANO

Página 96

1. a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

c) $(x + 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 = 1$

d) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$

$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

e) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$

2. a) centro: $(1, -2)$ e raio $= 1$

b) centro: $(0, 3)$ e raio $= 5$

c) centro: $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ e raio $= \sqrt{6}$

3. a) Sendo C o centro da circunferência, temos:

$$A\left(\frac{1+5}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = A(3; 5)$$

b) $R = d_{A,C}$

$$R = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2} \rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 8$

4. a) $R = \sqrt{(3+1)^2 + (6-3)^2} = 5$

b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

5. a) A medida do raio é 4.

b) Seja x a medida dos lados do quadrado, temos:

$$x\sqrt{2} = 8 \therefore x = 4\sqrt{2}$$

c) $S_{\text{Quadrado}} = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$ u.a.

d) Área $= S_{\text{Círculo}} - S_{\text{Quadrado}}$

Área $= \pi \cdot 4^2 - 32$

Área $= 16\pi - 32$ u.a.

6. $$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ (x-3)^2 - (y-1)^2 = 50 \end{cases}$$

$x - y - 2 = 0 \therefore y = x - 2$

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 50$

$(x - 3)^2 + (x - 2 - 1)^2 = 50$

$2 \cdot (x - 3)^2 = 50$

$(x - 3)^2 = 25$

$x - 3 = 5 \therefore x = 8$

ou

$x - 3 = -5 \therefore x = -2$

$x = 8 \rightarrow y = 6$

$x = -2 \rightarrow y = -4$

7. a) As duas circunferências têm raios $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Assim os comprimentos serão $C = 2\pi r_1 = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

$C = 2\pi r_2 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$.

b) Sim, pois têm o mesmo centro no ponto (1; 1).

c) A área da coroa circular é a diferença entre as duas áreas, isto é:

$S_{coroa} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$

$S_{coroa} = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2$

$S_{coroa} = 5\pi$ u.a.

8. a) Raio = 3 u.a.

b) $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares)

c) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$

$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

d) $\begin{cases} y = x \\ (x+3)^2 - (y+3)^2 = 9 \end{cases}$

$(x - 3)^2 + (x - 3)^2 = 9$

$2 \cdot (x + 3)^2 = 9$

$(x+3)^2 = \frac{9}{2}$

- $x + 3 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{3}{\sqrt{2}} - 3$ (não é abscissa de P)

ou

- $x + 3 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

$x = -\frac{3}{\sqrt{2}} - 3$

O ponto é $P\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 3; -\frac{3}{\sqrt{2}} - 3\right)$

9. Resposta pessoal.

Página 99

1. a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 6y + 3^2 = 3 + 2^2 + 3^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

Centro (2; 3)

Raio = 4

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 2y + 1^2 = -3 + 1^2 + 1^2$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = -1$

não é uma circunferência

c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

$x^2 - 6x + 3^2 + y^2 - 4y + 2^2 = -13 + 3^2 + 2^2$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$

não é circunferência e sim o ponto (3; 2)

2. $x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 2y + 1^2 = 8 + 1^2 + 1^2$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

Como $R^2 = 10$, a área limitada pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ é igual a 10π u.a.

3. a) centro: $(-4; -4)$

b) raio = 4

c) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 4^2$

$x^2 + 8x + 16 - y^2 + 8y + 16 = 16$

$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

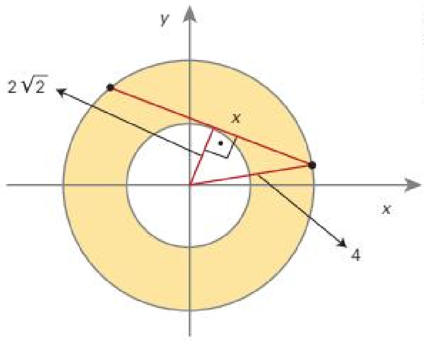
4. $x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 4 - 2^2 + 2^2$

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 12$

Centro: $(2; -2)$ e raio $= 2\sqrt{3}$

Assim, o ponto de abscissa mínima é $\left(2 - 2\sqrt{3}; -2\right)$ e o ponto de ordenada máxima é $\left(2; -2 + 2\sqrt{3}\right)$:

5. a) Os raios das circunferências medem $2\sqrt{2}$ e 4. Assim, a área da coroa circular limitada pelas circunferências é igual a $\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)2 = 8\pi$ u.a.



Figuras: ©DAE

Seja $2x$ o comprimento do segmento de reta tangente à circunferência menor cujas extremidades pertencem à circunferência maior; temos: $4^2 = x^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$ $\therefore$

$\therefore x = 2\sqrt{2}$

Assim, o segmento de reta mede $4\sqrt{2}$ u.c.

6. a) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$

b) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

c) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

d) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

7. a) Sejam (x; x) as coordenadas do centro da circunferência; temos:

$$\sqrt{(x-1)^2+(x-0)^2}=5$$

$x^2 - 2x + 1 + x^2 = 25$

$x^2 - x - 12 = 0 \therefore x = 4$ ou $x = -3$

Assim, as coordenadas do centro podem ser (4; 4) ou (−3; −3).

b) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ou $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ ou $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0$

8. $3x^2 + 3y^2 + 3x - 9y - 6 = 0$

$x^2 + y^2 + x - 3y - 2 = 0$

$$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2=2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\text{ centro: }\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$3x-5y+1=0\rightarrow\ y=\frac{3}{5}\cdot x+\frac{1}{5}\ \therefore m=\frac{3}{5}$$

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{5}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\rightarrow 5x+3y-7=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\text{ centro: }\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$3x-5y+1=0\rightarrow\ y=\frac{3}{5}\cdot x+\frac{1}{5}\ \therefore m=\frac{3}{5}$$

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{5}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\rightarrow 5x+3y-2=0$$

9. A medida da diagonal do quadrado é igual a $\sqrt{(5-1)^2-(3+1)^2}=4\sqrt{2}$. Assim, os lados do quadrado medem 4. Além disso, o centro da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita é o ponto médio do segmento AB, ou seja, $\frac{1+5}{2};\frac{-1+3}{2}=(3;1)$.

a) $(x-3)^2+(y-1)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

10. a) O raio da circunferência mede 5.

b) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

11. $2x^2 + 2y^2 + 8x - 6y = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$

$$x^2+4x+2^2+y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2=2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\text{ centro: }\left(-2;\frac{3}{2}\right)\text{ e raio: }\frac{5}{2}$$

Sendo r a medida do raio da circunferência λ, temos:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2=2^2-r^2\qquad\therefore r=\frac{3}{2}$$

Assim, a equação da circunferência λ é:

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2\therefore x^2+y^2+4x-3y+4=0$$

12. a) Como as circunferências são de raio 2 e tangentes aos eixos coordenados, temos que as coordenadas dos centros são (iniciando no primeiro quadrante e no sentido anti-horário): (2; 2), (−2; 2), (−2; −2) e (2; −2).

b) As equações dessas circunferências são (iniciando no primeiro quadrante e no sentido anti-horário):

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \therefore x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \therefore x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4 \therefore x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4 \therefore x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

Página 105

1. a) $x^2 + y^2 = 25$

centro: (0; 0)

raio = 5

$$d_{\text{Centro, F}}=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3<5$$

Assim, a reta é secante à circunferência.

b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

centro: (2; −3)

raio = 2

$$d_{\text{Centro, F}}=\frac{|12\cdot 2+5\cdot(-3)+17|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{26}{13}=2$$

Assim, a reta é tangente à circunferência.

c) $x^2 - 6x + 3^2 + y^2 - 10y + 5^2 = 2 - 3^2 + 5^2$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$

centro: (3; 5)

raio = 6

$$d_{\text{Centro, F}}=\frac{|1\cdot 3+1\cdot 5+2|}{\sqrt{1^2-1^2}}=5\sqrt{2}>6$$

Assim, a reta é externa à circunferência.

2.

a) raio $= \dfrac{\left|1\cdot(-1)+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-3\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

raio $= \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

b) $(x-1)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$x^2+2x+1+y^2+y+\dfrac{1}{4}=5$

$4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$

3. $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$

$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 + 2y + 1^2 = 2^2 - 1^2$

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

centro: $(-2; -1)$ e raio: $\sqrt{5}$

a) $\dfrac{|2\cdot(-2)-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$

$|-3 + k| = 5$

$-3 + k = 5 \therefore k\ 8$ ou $-3 + k = -5 \therefore k = -2$

b) $\dfrac{|2\cdot(-2)-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} < \sqrt{5}$

$|-3 + k < 5$

$-5 < -3 + k < 5 \rightarrow -2 < k < 8$

c) $\dfrac{|2\cdot(-2)-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} > \sqrt{5}$

$|-3 + k| > 5$

$-3 + k < -5 \therefore k < -2$ ou $- 3 + k > 5 \therefore k > 8$

4. $x^2 + y^2 = 16$

centro: $(0; 0)$ e raio $= 4$

Toda reta perpendicular à reta de equação $6x + 8y - 1 = 0$ tem equação da forma $8x - 6y + c = 0$

$\dfrac{|8\cdot0-6\cdot0-c|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = 4$

$|c| = 40 \rightarrow c = 40$ ou $c = -40$

Assim, as equações das retas tangentes são

$4x - 3y + 20 = 0$ e $4x - 3y - 20 = 0$.

5. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

centro: $(3; 4)$

raio $= 5$

a) Toda reta paralela à reta de equação $5x + 12y - 1 = 0$ tem equação da forma $5x + 12y + c = 0$.

$\dfrac{|5\cdot3+12\cdot4+c|}{\sqrt{5^2+12^2}} = 5$

$|63 + c| = 65$

$63 + c = 65 \therefore c = 2$

$63 + c = -65 \therefore -128$

Assim, as equações das retas tangentes são

$5x + 12y + 2 = 0$ e $5x + 12y - 128 = 0$

b) O coeficiente angular da reta que passa pelo centro da circunferência e pelo ponto $(6; 8)$ é igual a $\dfrac{8-4}{6-3} = \dfrac{4}{3}$. Assim, o coeficiente angular da reta tangente à circunferência no ponto $(6; 8)$ é igual a $-\dfrac{3}{4}$.

Logo, a equação da reta tangente é:

$y-8=-\dfrac{3}{4}\cdot(x-6) \rightarrow 3x+4y-50=0$

6. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

centro: $(2; -1)$ e raio $= 5$

a) $d_{\text{centro, s}} = \dfrac{|3\cdot2-4\cdot(-1)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$

b) O raio da circunferência mede 5.

c) Seja x o comprimento da corda determinada pela reta na circunferência, temos:

$5^2 = 3^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \therefore = 8$

7. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2 \rightarrow$ raio: 4 e centro: $(3; 2)$

$d_{\text{centro, s}} = \dfrac{|-4\cdot3+1\cdot2-4|}{\sqrt{(-4)^2+1^2}} = \dfrac{14\sqrt{17}}{17} \cong 3{,}39 < 4$

Logo, a reta é secante à circunferência.

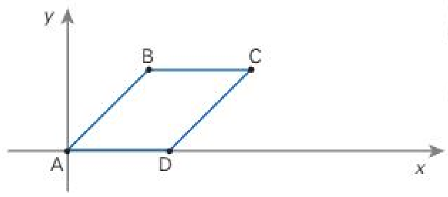
8. $x^2 + (y + 3)^2 = 2^2 \rightarrow$ raio: 2 e centro: $(0; -3)$

$d_{\text{centro, r}} = \dfrac{|(-2)\cdot0+5\cdot5+4|}{\sqrt{(-2)^2+5^2}} = \sqrt{29} \cong 5{,}38 > 2$

Logo, a reta é externa à circunferência.

Vestibulares e ENEM – UNIDADE 2 – GEOMETRIA ANALÍTICA

1. a)



Figuras: ©DAE

b) Seja m o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e C, temos:

$$m = \frac{4-0}{9-0} = \frac{4}{9} \text{ Logo, } y - 0 = \frac{4}{9}(x-0) \therefore y = \frac{4}{9}x$$

2. Seja P(x; y) os pontos que são equidistantes de A e B, ou seja, a mediatriz do segmento AB; temos:

$$d_{P,A} = d_{P,B} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-7)^2 + (y-14)^2} \therefore x + 2y - 20 = 0$$

3. Alternativa e.

O ponto A é da forma (0; k) e, como os pontos A, B e C estão alinhados, temos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k + 3 - 4 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

4. Alternativa e.

O ponto procurado corresponde ao circuncentro (encontro das mediatrizes) do triângulo ABC. É fácil ver que a mediatriz do segmento AB é $x = 50$.

Seja P(x; y) os pontos que são equidistantes de A e C, ou seja, a mediatriz do segmento AC; temos que:

$$d_{P,A} = d_{P,C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-60)^2 + (y-50)^2} \therefore$$

$$\therefore x + y - 80 = 0$$

Logo, o ponto procurado satisfaz o sistema:

$$\sqrt{(x-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-60)^2 + (y-50)^2}$$

$$\begin{cases} x = 50 \\ x + y - 80 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 50 \text{ e } y = 30.$$

O ponto procurado é (50; 30)

5. a) $d_{P,O} = \sqrt{16^2 + (-3)^2} = \sqrt{265}$

b) Como a reta que passa pelos pontos P e Q é tangente à circunferência em Q, então o triângulo OPQ é retângulo em Q. Logo:

$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2 \Rightarrow 265 = (OQ)^2 + 144 \Rightarrow$
$\Rightarrow OQ = 11$ u.c.

Portanto, $r = OQ = 11$ u.c.

6. Alternativa e.

Do ponto P até o ponto Q o ônibus percorre $(550 - 30) + (320 - 20) = 820$ unidades. Como T deve estar à mesma distância de P e Q, então T deve estar a $\frac{820}{2} = 410$ unidades de distância de um para outro.

Como $410 + 30$ é menor do que 550, segue que T(440; 20).

7. Alternativa d.

Temos que:

$$|x - y| = |x + y| \Rightarrow \begin{cases} x - y = x + y \\ ou \\ x - y = -x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ou \\ x = 0 \end{cases}$$

Logo, a equação $|x - y| = |x + y|$ representa um par de retas concorrentes.

8. Alternativa b.

Como $m \cdot n > 0$, então m e n têm sinais iguais. Substituindo o ponto E(100; 0) em $y = mx + n$, temos:

$0 = 100m + n \Rightarrow n = -100\ m$, o que contraria $m \cdot n \Rightarrow 0$. Logo, o ponto E não pertence à reta $y = mx + n$.

9. Alternativa e.

Dentre os pontos apresentados nas alternativas B(−3; 1), D(0; 4) e E(2; 6) são os únicos que pertencem à reta $y = x + 4$. Calculando a distância de P a cada um deles, temos que:

$$d_{P,B} = \sqrt{(-5-(3))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

$$d_{P,D} = \sqrt{(-5-0)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26} > 5$$

$$d_{P,E} = \sqrt{(-5-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{50} > 5$$

Portanto, o ponto (−3; 1) é o que atende às condições do problema.

10. Alternativa b.

Como o ponto T pertence à reta $y = \frac{3}{4}x - 5$ e a distância das novas torres à torre T é de 200 m, temos:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 5 \\ (x-160)^2 + (y-115)^2 = 200^2 \Rightarrow \\ (x-160)^2 + \left(\frac{3}{4}x - 5 - 115\right)^2 = 200^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 320x = 0 \therefore x = 0 \text{ m ou } x = 320 \text{ m.} \end{cases}$$

Logo, os pontos são (0; −5) e (320; 235).

11. Alternativa b.

A reta r cruza o eixo das abscissas no ponto B(2; 0).

A reta s cruza o eixo das abscissas no ponto C(5; 0).

Para determinar o ponto A, temos:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow A(3; 1)$$

Logo,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1{,}5 \text{ u.a.}$$

12. Alternativa a.

Completando os quadrados na equação da circunferência, temos:

$$x^2 + 2x + y^2 + my = n \quad (x+1)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = $$
$$= \frac{m^2}{4} + n + 1$$

Como o centro $C\left(-1; -\frac{m}{2}\right)$ pertence à reta $y = -x + 1$, temos que:

$$-\frac{m}{2} = -(-1) + 1 \Leftrightarrow m = -4$$

Como a reta intersecta a circunferência no ponto (−3, 4), temos:

$n = x^2 + 2x + y^2 + my \rightarrow n = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4^2 +$
$+ (-4) \cdot 4 = 3.$

13. Alternativa e.

Sejam A e B as extremidades de um diâmetro da circunferência que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1$$

Assim, A(−2; 4) e B(1; 1).

Seja C o centro da circunferência, temos:

$$C\left(\frac{-2+1}{2}; \frac{4+1}{2}\right) \rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Seja r o raio da circunferência, temos:

$$r = \left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{18}{4}}$$

Portanto, a equação da circunferência é igual a:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{18}{4}}\right)^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{18}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0$$

14. Alternativa b.

Seja d a medida do segmento PQ; temos:

$d = (4-1)^2 + (2-6)^2 = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \rightarrow d = 5$ u.c.

Seja r a reta suporte do segmento PQ, temos:

$$m_r = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

Assim,

$$y - 6 = \frac{4}{3} \cdot (x - 4) \therefore r: 4x - 3y + 2 = 0$$

Como o vértice M do triângulo PQM está sobre uma reta paralela à reta r, então a altura do triângulo relativa ao lado PQ é igual à distância entre M e a reta r. Assim:

$$d_{M,r} = \frac{|4 \cdot 8 - 3 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{16}{5} \text{ u.}$$

Logo,

$$S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{16}{5} = 8 \text{ u.a.}$$

15. Alternativa b.

Os pontos de intersecção da reta $y = -2x + 1$ com os eixos cartesianos são $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ e B(0; 1). Os triângulos POQ e AOB são semelhantes por AA. Seja k a razão de semelhança; temos:

$$\frac{S_{POQ}}{S_{AOB}} = k^2 \Rightarrow \frac{9}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} = k^2 \therefore k = 6.$$

Como $d_{A,B} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + (0-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,m$, temos que:

$$\frac{d_{P,Q}}{d_{A,B}} = k \Rightarrow \frac{d_{P,Q}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 6 \therefore d_{P,Q} = 3\sqrt{5}\ m.$$

16. Alternativa b.

Temos que:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = -3 \text{ ou } x = -3 \text{ e } y = 4$$

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ e } y = 3 \text{ ou } x = 3 \text{ e } y = -4$$

Sejam A(4; −3), B(3; −4), C(−4; 3) e D(−3; 4) os vértices do quadrilátero. Assim:

$$S_{ABCD} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{S_{ABC}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{S_{ABC}} = 7+7 = 14\,(\text{u.c})^2$$

17. Alternativa b.

Seja r a medida do raio circunferência que é tangente aos eixos coordenados no 1º quadrante e tangente à reta t: $12x + 5y - 60 = 0$. Assim, o centro da circunferência é dado por $C(r; r)$ e a distância de C à reta t: $12x + 5y - 60 = 0$ também é igual a r. Assim,

$$r = \frac{|12\cdot r + 5\cdot r - 60|}{\sqrt{12^2+5^2}} \Rightarrow 13r = |17r - 60|$$

$13r = 17r - 60 \therefore r = 15$ u.c. (Não convém, pois os lados do triângulo medem 12, 5 e 13.)

ou $13r = -17r + 60 \therefore r = 2$ u.c.

Assim, o raio mede 2 u.c.

18. Altenativa a.

A reta t passa pelos pontos (0,6) e (6, 0). Logo, sua equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x + 6y - 36 = 0 \therefore y = -x + 6$$

Como A é o ponto de intersecção das retas r e t, então:

$y_A = -4 + 6 = 2.$

Como a reta r passa pelos pontos (0; 0) e (4; 2), temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y - 2x = 0 \therefore y = \frac{x}{2}$$

Assim, os pontos A, B e C podem ser representados como A(4; 2), B(x; $-x + 6$) e $C\left(x;\frac{x}{2}\right)$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ x & -x+6 & 1 \\ x & \frac{x}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left|\frac{3}{4}x^2 - 6x + 12\right|$$

Como $\frac{3x^2}{4} - 6x + 12 \geqslant 0$ para todo x real, segue-se que $f(x) = \frac{3x^2}{4} - 6x + 12$, para $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Desafio

Alternativa d.

Seja r a reta referente à bateria B_1; temos que:

$$m_r = \frac{100-0}{0-t} = -\frac{100}{t} \text{ e, assim,}$$

$$r\colon\ y - 100 = -\frac{100}{t}\cdot(x-0) \therefore r\colon y = -\frac{100}{t}x + 100$$

Seja s reta referente à bateria B_2, temos que:

$$m_s = \frac{90-0}{0-(t+2)} = -\frac{90}{t+2} \text{ e, assim,}$$

$$s\colon\ y - 90 = -\frac{90}{t+2}\cdot(x-0) \therefore s\colon y = -\frac{90}{t+2}x + 90.$$

Como as retas *r* e *s* se cruzam no ponto (z; 75), temos:

r: $75 = -\frac{100}{t}z + 100 \therefore z = \frac{t}{4}$ (I)

e

s: $75 = -\frac{90}{t+2}z + 90 \therefore z = \frac{t+2}{6}$ (II)

Igualando (I) e (II), temos que:

$\frac{t}{4} = \frac{t+2}{6} \therefore t = 4\ h.$

UNIDADE 3 – GEOMETRIA ESPACIAL

CAPÍTULO 8 – CILINDROS

Página 115

1. $S_{Lateral} = S_{Base}$

$2 \cdot \pi \cdot R \cdot H = \pi \cdot R^2$

$2 \cdot H = R$

$2H = 50 \therefore H = 25$ cm

$S_{Total} = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 25 + 2 \cdot \pi \cdot 50^2 = 7\,500\pi\ cm^2$

2. Seja R a medida dos raios das bases, temos:

$2 \cdot \pi \cdot R = 40 \therefore R = \frac{20}{\pi}$ cm

3. Sejam *R* a medida dos raios das bases e *H* a medida da altura; temos:

$2 \cdot R \cdot H = 80$

$2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2 = 130r \rightarrow 2 \cdot R \cdot H + 2 \cdot R^2 =$

$= 130 \rightarrow 80 + 2 \cdot R^2 = 130 \therefore R = 5$ dm

$R = 5$ dm $\rightarrow 2 \cdot 5 \cdot H = 80 \therefore H = 8$ dm

4. $\frac{S_{Total\ de\ C_1}}{S_{Total\ de\ C_2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot 2R \cdot \frac{H}{2} + 2 \cdot \pi \cdot (2R)^2} =$

$= \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot 2R + 2 \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot 2R \cdot \frac{2R}{2} + 2 \cdot \pi \cdot (2R)^2} = \frac{6 \cdot \pi \cdot R^2}{12 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{1}{2}$

5. $2 \cdot \pi \cdot (R + 8) \cdot 50 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot 50 + 2 \cdot \pi \cdot R^2$

$50R + 400 = 50R + R^2$

$R = 20$ cm

6. $2 \cdot \pi \cdot R \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot R^2 = 30 \cdot \pi$

$2R + R^2 = 15$

$R^2 + 2R - 15 = 0$

$R = 3$ ou $R = 25$ (não convém)

Assim, a medida dos raios das bases do cilindro é 3 m.

7. $S_{Colorida} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 -$
$- 2 \cdot \pi \cdot 1^2$

$S_{Colorida} = 120\pi + 30\pi + 32\pi - 2\pi$

$S_{colorida} = 180\pi\ cm^2$

8. Sejam R a medida dos raios das bases e H a medida da altura do cilindro; temos:

$(\pi \cdot R^2, 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H, 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2)$PA

$2 \cdot \pi \cdot R \cdot H - \pi \cdot R^2 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2 -$
$- 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

$2 \cdot \pi \cdot R \cdot H = 3 \cdot \pi \cdot R^2$

$2 \cdot H = 3 \cdot R$

$\frac{H}{R} = \frac{3}{2}$

9. Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$6 \cdot x^2 = 384 \therefore x = 8$ cm

$S_{Total\ do\ cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 96\pi\ cm^2$

10. A razão entre as áreas totais dos cilindros obtidos pelas rotações do retângulo em torno dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ é igual a:

$\frac{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot 10^2}{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 20^2} = \frac{400\pi + 200\pi}{400\pi + 800\pi} = \frac{1}{2}$

11. $S_{TOTAL\ SEMICILINDRO} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + \underbrace{20 \cdot 20}_{\text{Área da seção meridana}}$

$S_{TOTAL\ SEMICILINDRO} = 200\pi + 100\pi + 400$

$S_{TOTAL\ SEMICLINDRO} = (300\pi + 400)\ cm^2$

12. a) $S_{lateral\ I} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 5 = 40\ cm^2$

$S_{lateral\ II} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10 = 40\pi\ cm^2$

Assim, as áreas laterais são iguais.

b) $S_{total\ I} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 72\pi\ cm^2$

$S_{totalII} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 48\pi\ cm^2$

Assim, o cilindro I tem maior área total.

Página 119

1. a) $V_2 = \pi \cdot (2R)^2 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 4 \cdot V$

O volume ficará multiplicado por 4.

b) $V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot H = 2 \cdot H = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 2 \cdot V$

O volume ficará multiplicado por 2.

c) $V_2 = \pi \cdot (2R)^2 \cdot 2 \cdot H = 8 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 8 \cdot V$

O volume ficará multiplicado por 8.

2. $S_{ROLO} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 - \pi \cdot (2,25)^2 \cdot 10$

$S_{ROLO} = 250\pi - 50,625\pi$

$S_{ROLO} = 199,37\pi \text{ cm}^3$

$V_{ROLO} \cong 199,375 \cdot 3,14 \cong 626,04 \text{ cm}^3$

Logo, o volume aproximado de papel contido em dois rolos é 1252,08 cm^3

3. Sejam R e H, respectivamente, as medidas dos raios das bases e da altura do cilindro; temos:

$V_1 = V_2$

$\pi \cdot (R + 50)^2 \cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot 4H$

$(R + 50)^2 = (2R)^2 \rightarrow R + 50 = 2R \therefore R = 50 \text{ cm}$

$S_{BASE} = \pi \cdot 50^2 = 2\,500\pi \text{ cm}^2$

4. Seja R a medida dos raios das bases do cilindro; temos:

$S_{TOTAL\ DO\ CILINDRO} = S_{TOTAL\ DO\ CUBO}$

$2 \cdot \pi \cdot R \cdot 2R + 2 \cdot \pi \cdot R^2 = 6 \cdot \left(2\sqrt{\pi}\right)^2$

$6 \cdot \pi \cdot R^2 = 6 \cdot 4\pi$

$R^2 = 4 \therefore R = 2 \text{ m}$

$V_{CILINDRO} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ m}^3$

5. Os volumes das duas embalagens são, respectivamente, iguais a $\pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi \text{ cm}^3$ e $\pi \cdot 4^2 \cdot 15 = 240\pi \text{ cm}^3$. Assim, como as duas embalagens são vendidas pelo mesmo preço, a primeira é mais vantajosa do ponto de vista econômico.

6. O volume de combustível transportado por cada caminhão é igual a $\pi \cdot (0,75)^2 \cdot 8 \cong 14,13 \text{ m}^3 \cong 14\,130$ litros. Assim, como $\dfrac{700\,000}{14\,130} \cong 49,5$, o número mínimo de caminhões necessários é 50.

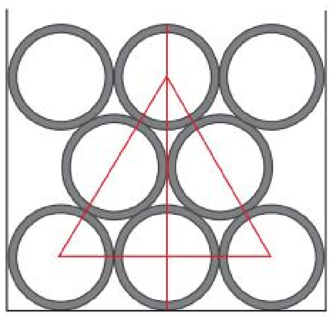
7. $V_{PEDRAS} = \pi \cdot 20^2 \cdot 2 = 800\pi \text{ cm}^3$

8. $V_{CALHA} = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 20 \cong 3,14 \cdot 1 \cdot 10 \cong 31,4 \text{ dm}^3 \therefore$

$\therefore 31,4$ litros

9. a) $V_{CONCRETO} = 8 \cdot [\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot (4,5)^2] \cdot 10 \cong 80 \cdot 4,75 \cdot 3,14 \cong$
$\cong 1\,193,2 \text{ dm}^3$

b)



A altura da pilha é igual:

$$\frac{200\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 50 \cong 100 \cdot 1,73 + 100 \cong 273 \text{ cm}.$$

10. Seja x a medida da base do retângulo (intersecção do plano com o cilindro); temos:

$13^2 = 5^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \therefore x = 24 \text{ cm}$

$V_{CILINDRO} = 3\,380\pi$

$\pi \cdot 13^2 \cdot H = 3\,380\pi \therefore H = 20 \text{ cm}$

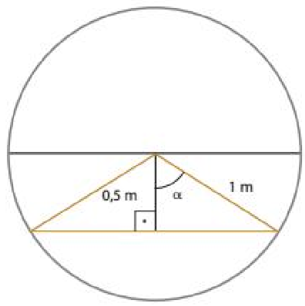
$S_{secção} = 24 \cdot 20 = 480 \text{ cm}^2$

11. $\cos \alpha = \dfrac{0,5}{1} = \dfrac{1}{2} \therefore \alpha = 60°$

$V_{TANQUE} = \left(\dfrac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 1^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\,120°\right) \cdot 6$

$V_{TANQUE} = 2\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cong 2 \cdot 3,14 - \dfrac{3 \cdot 1,73}{2} \cong 3,685 \text{ m}^3 \rightarrow$

$\rightarrow 3\,685$ litros



Figuras: ©DAE

12. Resposta pessoal.

13. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 9 – Cones

Página 127

1. Seja g a medida da geratriz do cone; temos:

$g^2 = 15^2 + 20^2 \therefore g = 25 \text{ cm}$

2. Seja g a medida da geratriz do cone; temos:

$g^2 = 3^2 + 4^2 \therefore g = 5 \text{ m}$

$S_{Lateral} = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \text{ m}^2$

3. Seja R a medida do raio da base; temos:

$\pi \cdot R \cdot 9 + \pi \cdot R^2 = 70\pi$

$9R + R^2 = 70$

$R^2 + 9R - 70 = 0$

$R = 5$ ou $R = -14$ (não convém)

Assim, o diâmetro da base do cone é igual a 10 cm.

4. Seja R a medida do raio da base do cone; temos:

$(2R)^2 = R^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow 3R^2 = 16 \cdot 3 \therefore R = 4$ m

$S_{LATERAL} = \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi$ m²

5. Sejam R e g, respectivamente, as medidas do raio da base e da geratriz do cone; temos:

$\pi \cdot R \cdot g = 65\pi \therefore R \cdot g = 65$

$R + g = 18$

$\begin{cases} R \cdot g = 65 \\ R \cdot g = 18 \end{cases} \rightarrow R = 5 \text{ e } g = 13$

$g^2 = R^2 + H^2 \rightarrow 13^2 = 5^2 + H^2 \therefore H = 12$ dm

6. $V_{CILINDRO} = 432\pi \rightarrow \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 432\pi \rightarrow R^3 = 216 \therefore$
$\therefore R = 6$ cm

$V_{TOTAL\ DO\ CONE} = V_{TOTAL\ DO\ CILINDRO}$

$\pi = r \cdot g + \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 12 + 2 \cdot \pi \cdot 6^2 \rightarrow$
$\rightarrow r \cdot 2r + r^2 = 144 + 72 \rightarrow r^2 = 72 \therefore r = 6\sqrt{2}$ cm

$g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow \left(12\sqrt{2}\right)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 216 \therefore$
$\therefore h = 6\sqrt{6}$ cm

7. Seja R a medida do raio da base do cone; temos:

a) 360° $2 \cdot \pi \cdot 20$

180° $2 \cdot \pi \cdot R$

R = 10 cm

Assim, a medida do raio da base do cone é igual à metade da medida do raio do setor circular.

b) 360° $2 \cdot \pi \cdot 20$

144° $2 \cdot \pi \cdot R$

$\frac{360°}{144°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{2 \cdot \pi \cdot R} \rightarrow \frac{5}{2} = \frac{20}{R} \therefore R = 8$ cm

8. **a)** Sejam $x - R$, x e $x + R$, respectivamente, as medidas do raio, da altura e da geratriz do cone; temos:

$(x + R)^2 = x^2 + (x - R)^2$

$x^2 + 2xR + R^2 = x^2 + x^2 - 2xR + R^2$

$x^2 - 4xR = 0 \rightarrow x \cdot (x - 4R) = 0$

$\therefore x = 0$ (não convém) ou $x = 4R$.

Assim, as medidas do raio da base e da geratriz são respectivamente iguais a $3R$ e $5R$.

b) Seja r a medida do raio da base; temos:

$\pi \cdot r^2 = 36\pi \therefore r = 6 \text{ m} \rightarrow 3R = 6 \therefore R = 2 \text{ m} \rightarrow$
$\rightarrow g = 5R = 10 \text{ m} \rightarrow S_{TOTAL} = \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 =$
$= 96\pi$ m²

9. Sejam R e g, respectivamente, as medidas do raio da base e da geratriz do cone; temos:

$\frac{R}{g} = \frac{3}{5} \rightarrow g = \frac{5R}{3}$

$g^2 = R^2 + 20^2 \rightarrow \left(\frac{5R}{3}\right)^2 = R^2 + 400 \rightarrow \frac{25R^2}{9} - R^2 =$

$= 400 \rightarrow R_2 = \frac{400 \cdot 9}{16} \therefore R = 15$ cm

$g = \frac{5 \cdot 15}{3} = 25$ cm

a) $S_{BASE} = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ cm²

b) $S_{LATERAL} = \pi \cdot 15 \cdot 25 = 375\pi$ cm²

10. Seja g a medida da geratriz do cone; temos:

$g^2 = 5^2 + 12^2 \therefore g = 13$ cm

$S_{TOTAL\ SEM\ CONE} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 + \underbrace{\frac{10 \cdot 12}{2}}_{\text{área da seção meridiana}} =$
$= (45\pi + 60)$ cm²

11. Seja g a medida da geratriz do cone; temos:

$g^2 = 6^2 + 8^2 \therefore g = 10$ cm

$S_{TOTAL\ CORRETA} = \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 96\pi$ cm²

$S_{TOTAL\ INCORRETA} = \pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 144\pi$ cm²

Assim, como $\frac{144\,\pi}{96\,\pi} = 1{,}5$, a resposta do aluno foi 50% maior que a resposta esperada pelo professor, ou seja, $x = 50$.

12. Seja g a medida da geratriz do cone; temos:

$g^2 = 3^2 + 21^2 \rightarrow g^2 = 450 \therefore g = 15\sqrt{2}$ cm

$S_{TOTAL} = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 21}_{\text{área lateral do cilindro}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 8^2}_{\text{áreas das bases do cilindro}} - \underbrace{\pi \cdot 3^2}_{\text{área da base do cone}} + \underbrace{\pi\, 3 \cdot 15\sqrt{2}}_{\text{área lateral do cone}}$

$S_{TOTAL} \cong 455\pi + 45 \cdot 1{,}41 \cdot \pi \cong 518{,}45\pi$ cm²

Obs.: considerando $\pi \cong 3{,}14$ a área é aproximadamente 1 628 cm².

Página 131

1. $V_{CONE} = \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 25 = 300\pi$ cm³

2. **a)** Sejam R, g e h, respectivamente, a medida do raio da base, da geratriz e da altura do cone; temos:

$2R + 2g = 30 \rightarrow 2R + 2 \cdot 2R = 30 \therefore R = 5$ cm

$g^2 = R^2 + h^2 \rightarrow 10^2 = 5^2 + h^2 \therefore h = 5\sqrt{3}$ cm

b) $V_{CONE} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\,\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³

3. $V_{Casquinha} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 45\pi \cong 45 \cdot 3{,}14 \cong 141{,}3\ cm^3$

4. Sejam R e h, respectivamente, a medida do raio da base e da altura do cone, temos:

$g^2 = R^2 + h^2 \rightarrow (2R)^2 = R^2 + h^2 \therefore h = R\sqrt{3}$

$V_{CONE} = V_{CILINDRO}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R\sqrt{3} = \pi \cdot 6^2 \cdot 16\sqrt{3}$

$R^3 = 1\,728 \therefore R = 12\ cm$

$S_{LATERAL} = \pi \cdot 12 \cdot 24 = 288\pi\ cm^2$

5. $V_{SILO} = V_{CILINDRO} + V_{CONE}$

$V_{SILO} = \pi \cdot 6^2 \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 4$

$V_{SILO} = 624\pi\ m^3$

6. Sejam R e g, respectivamente, o raio da base e a geratriz do cone, temos:

$S_{BASE} = \frac{1}{3} \cdot S_{LATERAL}$

$\pi \cdot R^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R = g$

$g = 3R$

$g^2 = R^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow (3R)^2 = R^2 + 100 \cdot 2 \therefore$

$\therefore R = 5\ cm \rightarrow g = 3 \cdot 5 = 15\ cm$

7. Seja x a medida das arestas do cubo; temos:

$x^3 = 729 \therefore x = 9\ cm$

$V_{CONE} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot 9 = \frac{243\pi}{4}\ cm^3$

8. $\frac{V_{RECIPIENTE}}{V_{COPO}} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 30}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 8} = 125$

Assim, o número máximo de crianças que poderão receber um copo de suco totalmente cheio é 125.

9. Seja h a medida da altura do cone; temos:

$S_{BASE} = S_{SEÇÃO\ MERIDINA}$

$\pi \cdot 8^2 = \frac{2 \cdot 8 \cdot h}{2} \therefore h = 8\pi\ cm$

a) A altura do cone mede 8π cm.

b) $V_{CONE} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 8\pi = \frac{512\pi}{3}\ cm^3$

10. Seja R a medida dos raios das bases do cilindro; temos:

$V_{CONE} = V_{CILINDRO}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2R)^2 \cdot h_{CONE} = \pi \cdot R^2 \cdot h_{CILINDRO}$

$\frac{h_{CONE}}{h_{CILINDRO}} = \frac{3}{4}$

11. O sólido gerado pela rotação do triângulo retângulo em torno da hipotenusa é formado por dois cones em que a base comum tem raio cuja medida é igual à medida da altura relativa à hipotenusa (h) e cujas alturas são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa (m e n). Seja x a medida da hipotenusa do triângulo retângulo; temos:

$x^2 = 15^2 + 20^2 \therefore x = 25\ cm$

$15 \cdot 20 = 25 \cdot h \therefore h = 12\ cm$

$V_{SÓLIDO} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot m + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot n$

$V_{SÓLIDO} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (m + n)$

$V_{SÓLIDO} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 25 = 1\,200\pi\ cm^3$

12. Sejam R e r, respectivamente, as medidas do raio da base do cone maior e do raio da base do cone menor, e h a medida da altura comum; temos:

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{500}{100} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$R^2 = 5 \cdot r^2$

$\frac{R^2}{r^2} = 5 \therefore \frac{R}{r} = \sqrt{5}$

13.

$\pi \cdot r^2 = 100\pi$

$r^2 = 100$

$r = 10\ cm$

$g^2 = r^2 + h^2$

$15^2 = 10^2 + h^2 \rightarrow h = 5\sqrt{5}\ cm$

$V_{cone\ menor} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{cone\ menor} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{5} \rightarrow$

$\rightarrow V_{cone\ menor} = \frac{500\sqrt{5}}{3}\ cm^3$

$V_{\text{cone maior}} = 500\%$ de $V_{\text{cone menor}}$

$$V_{\text{cone maior}} = \frac{500}{100} \cdot \frac{500\sqrt{5}}{3}$$

$$V_{\text{cone maior}} = \frac{2\,500\sqrt{5}}{3}\ \text{cm}^3$$

14. Resposta pessoal.

15. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 10 – ESFERAS

Página 137

1. $V_{\text{GOMO}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \cong 3 \cdot 3{,}14 \cong 9{,}42\ \text{cm}^3$

2. Como $\frac{V_{\text{PANELA}}}{V_{\text{DOCES}}} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 18}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{100 \cdot 18}{\frac{9}{2}} = 400$, a quantidade máxima de doces que poderão ser feitos é 400.

3. Seja R a medida do raio da esfera, temos:

$V_{\text{ESFERA}} = V_{\text{CONE}} + V_{\text{CILINDRO}}$

$V_{\text{ESFERA}} = 2 \cdot V_{\text{CONE}}$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 24$$

$R^3 = 1\,728 \therefore R = 12$ cm

4. $V_{\text{BALÃO}} \therefore \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 + \pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 10 \cong 288\pi + 22{,}5 \cong$

$\cong 310{,}5 \cdot 3{,}14 \cong 975\ \text{cm}^3 \rightarrow 975$ mL

5. Seja R a medida do raio da esfera, temos:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 8^3 + 16^3 \therefore R = 12 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\ \text{cm}$$

6. Sejam as medidas do raio da esfera e do raio da base do cilindro iguais a R. Assim, a diferença entre os volumes do cilindro e da esfera é igual a

$$\pi \cdot R^2 \cdot 2R - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot V.$$

7. Seja R a medida dos raios das esferas, temos:

$$3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{5}{8}$$

$$R^3 = \frac{125}{8} \therefore R = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{cm}$$

8. O volume da semiesfera oca é igual a $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 258\pi\ \text{cm}^3$. Seja m a massa da semiesfera oca, temos:

$$2{,}32 = \frac{m}{258\pi} \rightarrow m \cong 2{,}32 \cdot 258 \cdot 3{,}14 \cong$$

$\cong 1\,880$ g $\cong 1{,}88$ kg

9. Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$6 \cdot x^2 = 600 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 100 \therefore x = 10$ cm

Assim, o volume do interior do cubo não ocupado pela esfera é igual a $10^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \cong$

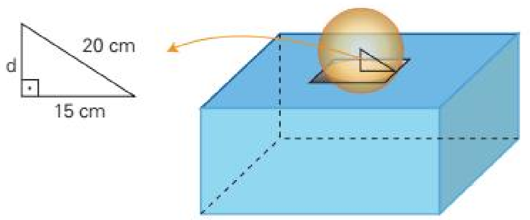
$$\cong 1\,000 - \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 125}{3} \cong 4\,477\ \text{cm}^3$$

10. Seja R a medida do raio da esfera, temos:

$2R = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \therefore R = 12$ dm

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 2\,304\pi\ \text{dm}^3$$

11.



Figuras: ©DAE

$20^2 = 15^2 + d^2 \rightarrow d = 175 \therefore d = 5\sqrt{7}$ cm

Página 141

1. $S_{\text{ESFERA}} = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi\ \text{cm}^2$

2. Seja R a medida do raio da esfera, temos:

$4 \cdot \pi \cdot R^2 = 144\pi \therefore R = 6$ cm

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi\ \text{cm}^3$$

3. Seja r a medida do raio da secção e R a medida do raio da esfera, temos:

$\pi \cdot r^2 = 64\pi \therefore r = 8$ cm

$R^2 = 6^2 + 8^2 \therefore R = 10$ cm

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4\,000\,\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$S_{ESFERA} = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2$$

4.

a) $\frac{V}{S} = 4 \rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \therefore R = 12$ cm

b) Seja r a medida do raio da esfera cuja superfície tem área igual a 144π cm², temos:

$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 144\pi \therefore r = 6$ cm

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3} = 8$$

5.

a) $V_{SÓLIDO} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \pi \cdot 3^3 = 27\pi$ m³

b) $S_{SÓLIDO} = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 3^2 + \underbrace{\pi \cdot 3^2}_{\text{área de um círculo}} = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$ m²

c) A área da superfície do sólido resultante é igual à área da superfície da esfera original.

6. Seja R a medida do raio da esfera, temos:

$$\frac{S_{Esfera}}{S_{Cubo}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{6 \cdot (2R)^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{24 \cdot R^2} = \frac{\pi}{6}$$

7. $S_{Laranja} \cong 4 \cdot 3{,}14 \cdot (3{,}5)^2 \cong 153{,}86$ cm²

8. $S_{Total} = 8 \cdot S_{Esfera}$

$S_{Total} = 8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 1\,152\pi$ cm²

Vestibulares e ENEM

Página 142

1. Alternativa c. Seja r o raio das bases da nova cisterna, temos:

$81 = \pi \cdot r^2 \cdot 3\ r \cong 3$ m

Logo, o aumento será de 2 metros em relação ao raio da cisterna antiga.

2. Alternativa e

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi$ cm³

3. Alternativa a.

$$V_{\text{Reservatório cônico}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 82 \cdot 9 \cong 575 \text{ m}^3$$

Seja h a altura atingida no reservatório cúbico, temos:

$10^2 \cdot h = 576 \therefore h = 5{,}76$ m.

4. Alternativa d.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{3} \text{ cm}^3$$

5. Alternativa b.

Como 1 litro = 1 000 cm³, temos que o número de laranjas necessárias é: $\frac{1\,000}{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^3} \cong 13{,}27$, ou seja, são necessárias 14 laranjas no mínimo.

6. Alternativa b.

Seja r o raio da esfera, temos:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 2\,304\pi \rightarrow r = 12 \text{ cm}$$

Logo, a área da superfície de cada faixa é igual a:

$$\frac{1}{24} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 12^2 = 24\pi \text{ cm}^2$$

7. Alternativa b.

$$S_{\text{Metade de laranja}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cong 56{,}52 \text{ cm}^2$$

8. Alternativa d. Seja r o raio da esfera, temos:

$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot R + 2 \cdot \pi \cdot R^2 \therefore r = R$

9. Alternativa b.

$$V_{Túnel} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 400 = 7\,200\pi \text{ m}^3$$

10. Alternativa a. Seja m a massa da esfera, temos:

$$11{,}3 = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3} \rightarrow m = \frac{36}{1000} \cdot 11{,}3 \cdot \pi \therefore$$

$\therefore m = 0{,}4068\pi\ g$

11. Alternativa a.

$V_{Peça} = V_{Cilindro} - V_{cone}$

$V_{Peça} \cong 3 \cdot 3^2 \cdot 10 - \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 6 \cong$

$\cong 216\ cm^3 = 2{,}16 \cdot 10^5\ mm^3$

12. Alternativa c. O volume da grafite é dado por:

$V_{Grafite} \cong 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 \cdot 15 \cong 0{,}47\ cm^3$

Seja *m* a massa da grafite, temos:

$2{,}2 = \dfrac{m}{0{,}47} \rightarrow m \cong 1{,}03\ g.$

Seja *n* o número de átomos de carbono presentes nessa grafite, temos:

$n \cdot \dfrac{12}{6 \cdot 10^{23}} = 1{,}03 \Rightarrow n = 5 \cdot 10^{22}$

13. Alternativa d.

Seja *x* a medida dos lados da folha quadrada, temos:

$x = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{d}{2} = 5\pi d\ cm$

14. Alternativa d. Seja *R* o raio das bases cisterna. Como os pontos A e B estão diametralmente opostos, o triângulo ABX é retângulo em X por causa do teorema do ângulo inscrito. Assim:

$(2R)^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow R = 5\ m$

$(2R)^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow R = 5\ m.$

Logo,

$V_{Cisterna} = \pi \cdot 5^2 \cdot 2 \cong 3 \cdot 25 \cdot 2 \cong 150\ m^3 = 150000$ litro

15.

$\dfrac{V_{\text{Metade da altura do cone}}}{V_{cone}} = \left(\dfrac{\frac{H}{2}}{H}\right)^3 \therefore V_{\text{Metade da altura do cone}} = \dfrac{V_{cone}}{8}$

Assim, o volume que está no cilindro é de $\dfrac{7}{8} \cdot V_{cone}$.

Como o volume do cone e do cilindro são iguais, então o volume que está no cilindro é de $\dfrac{7}{8} \cdot V_{cilindro} =$

$= 0{,}875 \cdot V_{Cilindro}$. Logo, a alternativa A é mais adequada.

16. Alternativa a. Área total do cilindro:

$2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 10 = 48\pi = 48 \cdot 3$

$= 144\ cm^2 = 0{,}0144\ m^2$

Valor da embalagem em forma de cilindro: $0{,}0144 \cdot 25 =$ R\$ 0,36.

Área total do paralelepípedo: $2 \cdot (4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6) =$ $= 148\ cm^2 = 0{,}0148\ m^2$

Valor da embalagem em forma de paralelepípedo: $0{,}0148 \cdot 25 =$ R\$ 0,37.

Logo, o valor da embalagem que terá o menor custo será: R\$ 0,36.

17. Alterantiva d. Sejam *r* e *h* respectivamente, o raio das bases e a altura do cilindro, temos:

$\pi \cdot r^2 \cdot (h - 3) = 2 \cdot \dfrac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h \rightarrow h - \dfrac{2h}{3} = 3 \therefore h = 9$

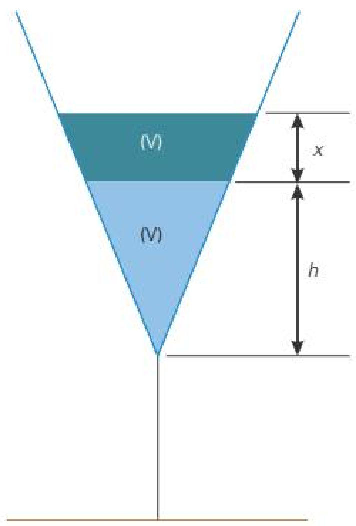
18. Alternativa e.

$V_{\text{Pílula Inicial}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 + \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \cong 1\,250\ mm^3$

$V_{\text{Pílula Final}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 + \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 \cong 736\ mm^3$

Logo, a redução será de $1\,250 = 736 = 514\ mm^3$

Desafio



Figuras: ©DAE

Sejam *x* e V, respectivamente, a altura a que subiu o volume da taça e o volume inicial de líquido, temos:

$$\left(\dfrac{x+h}{h}\right)^3 = \dfrac{2v}{v} \Rightarrow \dfrac{x+h}{h} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = h \cdot (\sqrt[3]{2} - 1).$$

UNIDADE 4 – NÚMEROS COMPLEXOS

CAPÍTULO 11 – O conjunto dos números complexos

Página 154

1. a) $x^2 - 5x + 6 = 0 \therefore x_1 = 2$ e $x^2 = 3$

As soluções são números reais.

b) $x^2 - 10x + 25 = 0 \therefore x_1 = 5$ e $x_2 = 5$

As soluções são números reais.

c) $x^2 - 4x + 13 = 0 \therefore x_1 = 2 + 3i$ e $x_2 = 2 - 3i$

As soluções são números complexos não reais.

d) $x^2 + 4 = 0 \therefore x_1 = 2i$ e $x_2 = -2$

As soluções são números complexos não reais.

e) $-x^2 + 4 = 0 \therefore x_1 = 2i$ e $x_2 = -2i$

As soluções são números reais.

2. I. Verdadeira.

II. Falsa.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira, pois $(2; -3) + (1; 3) = (3; 0)$

V. Verdadeira, pois $(-1; 2) \cdot (5; -2) = (-1 \cdot 5 - 2 \cdot (-2); -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 5) = (-1; 12)$

3. a) $(2; 4) + (3; 1) = (5; 5)$

b) $(-1; 0) + (4; 2) + (0; 3) = (3; 5)$

c) $(-1; 1) \cdot (3; -2) = (-1; 5)$

d) $(2; 1) \cdot (1; 2) + (3; -5) = (0; 5) + (3; -5) = (3; 0)$

e) $[(7; -1) + (-5; 4)] \cdot (2; -3) = (2; 3) \cdot (2; -3) = (13; 0)$

4. a) $(a + b; 3) = (5; a - b) \rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases} \therefore \alpha = 4$ e $b = 1$

5. a) $(x - 2; 7) = (8; 7) \rightarrow x - 2 = 8 \therefore x = 10$

b) $(3; 4) + (-1; 1) = (2; x) \rightarrow (2; 5) = (2; x) \therefore x = 5$

c) $(x - 1; 2) \cdot (x; 1) = (0; 5)$

$(x^2 - x - 2; x - 1 + 2x) = (0; 5)$

$(x^2 - x - 2; 3x - 1) = (0; 5)$

$x^2 - x - 2 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = -1$

$3x - 1 = 5 \therefore x = 2$

Assim, $x = 2$.

6. a) $Z_2 + Z_3 = (c + e; d + f)$

b) $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = (a; b) \cdot (c + e; d + f) = (ac + ae - bd - bf; ad + af + bc + be)$

c) $Z_1 \cdot Z_2 = (ac - bd; ad + bc)$

d) $Z_1 \cdot Z_3 = (ae - bf; af + be)$

e) $Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3 = (ac - bd; ad + bc) + (ae - bf; af + be) = (ac + ae - bd - bf; ad + bc + af + be)$

7. Os resultados são iguais.

8. a) $\text{Re}(z) = -3$ e $\text{Im}(z) = 4$

b) $\text{Re}(z) = \sqrt{(2)}$ e $\text{Im}(z) = -\sqrt{3}$

c) $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = 5$

d) $\text{Re}(z) = -7$ e $\text{Im}(z) = 0$

9.

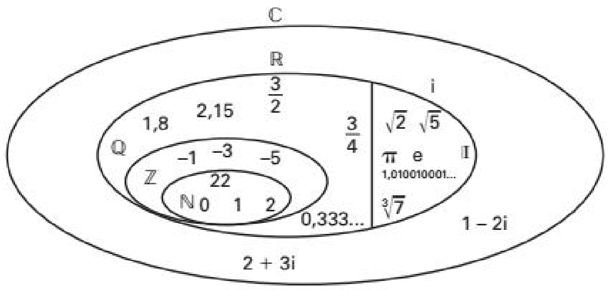


Figura: © DAE

10. I. Verdadeira.

II. Verdadeira.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira.

V. Verdadeira.

VI. Verdadeira.

VII. Falsa.

VIII. Verdadeira.

11. $w = (x^2 - 4) + (x + 2) \cdot i$

$x^2 - 4 = 0$ e $x + 2 \neq 0$

$x = 2$ ou $x = -2$ e $x \neq -2$

$x = 2$ (w é imaginário puro)

I. Falsa, pois existe somente um valor de x.

II. Verdadeira.

$x = -2 \rightarrow w = 0$ (real)

III. Verdadeira.

$x = 2 \rightarrow w = 4i$ (imaginário puro)

CAPÍTULO 12 – Operações na forma algébrica

Página 159

1. a) $z + w = 3 - 2i + 1 + 3i = 4 + i$

b) $z - w = 3 - 2i - (1 + 3i) = 2 - 5i$

c) $z \cdot w = (3 - 2i) \cdot (1 + 3i) = 3 + 9i - 2i - 6i^2 = 9 + 7i$

d) $z^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$

e) $2z + 3w = 2 \cdot (3 - 2i) + 3 \cdot (1 + 3i) = 6 - 4i + 3 + 9i = 9 + 5i$

2. I. Verdadeira.

II. Verdadeira.

III. Falsa.

IV. Verdadeira.

V. Verdadeira.

3.

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2-i & 2+i \end{bmatrix}$

b) $\det(A) = (1+i) \cdot (2+i) - (1-i) \cdot (2-i) =$
$= 2 + i + 2i + i^2 - 2 + i + 2i - i^2 = 6i$

4. a) $z = 2m - 4mi + 4i - 8i^2 = 2m + 8 + i \cdot (-4m + 4)$

Assim, para que o número z seja real devemos ter:

$-4m + 4 = 0 \therefore m = 1.$

b) $2m + 8 = 0 \therefore m = -4$

5.

$$\begin{cases} x + 2y = 2 + 3y \\ 3x + y = x - y + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \therefore x = 3 \text{ e } y = 1$$

6. a) $z_1 = 1 + i$

$z_2 = (1-i) \cdot (1+i) = 2$

$z_3 = (1-i) \cdot 2 = 2 - 2i$

$z_4 = (1-i) \cdot (2-2i) = -4i$

$z_5 = (1-i) \cdot (-4i) = -4 - 4i$

$z_6 = (1-i) \cdot (-4-4i) = -8$

b) Dos seis números, dois são reais e um é imaginário puro.

7. a) $z^2 = (1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$

b) $\dfrac{(1+i)^8 - (1+i)^{12}}{(1+i)^4} = \dfrac{[(1+i)^2]^4 - [(1+i)^2]^6}{[(1+i)^2]^2} = \dfrac{[2i]^4 - [2i]^6}{[2i]^2}$

$= \dfrac{16i^4 - 64i^6}{4i^2} = \dfrac{16 + 64}{-4} = -20$

8. a) $z = a + bi \rightarrow (a + bi) \cdot (1 + i) = -7 + i \rightarrow$

$\rightarrow a + ai + bi + bi^2 = -7 + i \rightarrow$

$\rightarrow a - b + (a + b) \cdot i = -7 + i \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} a - b = -7 \\ a + b = 1 \end{cases} \therefore a = -3 \text{ e } b = 4 \rightarrow z = -3 + 4i$

b) $z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2 = (-3 + 4i + 1)^2 = (-2 + 4i)^2 =$
$= 4 - 16i + 16i^2 = -12 - 16i$

9. a) $z = a + bi \rightarrow i \cdot (a + bi) + 2 \cdot (a + bi) = 1 + 13i$

$\rightarrow ai + bi^2 + 2a + 2bi = 1 + 13i \rightarrow$

$\rightarrow -b + 2a + (a + 2b) \cdot i = 1 + 13i \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} -b + 2a = 1 \\ a + 2b = 13 \end{cases} \therefore a = 3 \text{ e } b = 5 \Rightarrow z = 3 + 5i$

b) $w = z^2 = (3 + 5i)^2 = 9 + 30i + 25i^2 = -16 + 30i$

10. a) $(1 - i)^4 = [(1 - i)^2]^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$

b) $(1 - i)^{10} = [(1 - i)^2]^5 = (-2i)^5 = -32i^5 = -32i$

11. a) Não, pois o quadrado de todo número real é um número real.

b) Sim, basta considerarmos um número imaginário puro.

c) Resulta o próprio número real.

d) Resulta o próprio número imaginário.

12. Resposta pessoal.

13. Resposta pessoal.

Página 163

1. I. Verdadeira, pois $a + bi + a - bi = 2a \in \mathbb{R}$.

II. Verdadeira, pois $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

III. Falsa, pois $\bar{z} = 2 - 3i$.

IV. Verdadeira.

V. Falsa, pois o conjugado de um número complexo real é igual ao próprio número.

2. a) $z = -3 + 2i$

b) $\bar{z} = -3 - 2i$.

c) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-3 + 2i} = \dfrac{1}{(-3 + 2i)} \cdot \dfrac{(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)} = \dfrac{-3 - 2i}{(-3)^2 - (2i)^2} =$

$= \dfrac{-3 - 2i}{13} = -\dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13} \cdot i$

3. a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 + 1}{1 + i} = \dfrac{(3 + i)}{(1 + i)} \cdot \dfrac{(1 - i)}{(1 - i)} = \dfrac{4 - 2i}{2} = 2 - i$

b) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1 + i}{3 - i} = \dfrac{(1 + i)}{(3 - i)} \cdot \dfrac{(3 + i)}{(3 + i)} = \dfrac{2 + 4i}{10} =$

$= \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} \cdot i$

c) $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{3 - 1}{1 - i} = \dfrac{(3 - i)}{(1 - i)} \cdot \dfrac{(1 + i)}{(1 + i)} = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$

4. Sim, pois $\overline{\left(\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right)} = \overline{(2 - i)} = 2 + i = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

5. a) $m = 1 \rightarrow z = \dfrac{1 + i}{1 - 2i} = \dfrac{(1 + i)}{(1 - 2i)} \cdot \dfrac{(1 + 2i)}{(1 + 2i)} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} \cdot i$

b) $z = \dfrac{1 + i}{m - 2i} = \dfrac{(1 + i)}{(m - 2i)} \cdot \dfrac{(m + 2i)}{(m + 2i)} = \dfrac{m - 2 + (m + 2) \cdot i}{m^2 + 4}$

$= m + 2 = 0 \therefore m = -2$ (z é real)

c) $m - 2 = 0 \therefore m = 2$ (z é imaginário puro)

6. a) $z = a + bi \rightarrow a + bi + 2 \cdot (a - bi) = 12 + 2i$

$\rightarrow a + bi + 2a - 2bi = 12 + 2i$

$\rightarrow 3a = 12 \therefore a = 4$ e $-b = 2 \therefore b = -2$

$z = 4 - 2i$

b) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4 - 2i} = \dfrac{1}{(4 - 2i)} \cdot \dfrac{(4 + 2i)}{(4 + 2i)} = \dfrac{4 + 2i}{16 + 4} = \dfrac{4}{20} + \dfrac{2}{20} \cdot i =$

$= \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} \cdot i$

7. $z = a + bi$

$a + bi + a - bi = 10 \therefore a = 5$

$(a + bi) \cdot (a - bi) = 169 \rightarrow a^2 + b^2 = 169 \rightarrow 5^2 + b^2 = 169$

$\therefore b = 12$ ou $b = -12$

Logo, $z = 5 + 12i$ ou $z = 5 - 12i$

8. a) $\begin{cases} z + i \cdot w = 4 + 6i \text{ (I)} \\ w + i \cdot z = 4 \text{ (II)} \end{cases}$

(II) $w = 4 - i \cdot z$

(I) $z + i \cdot w = 4 + 6i \rightarrow z + i \cdot (4 - i \cdot z) = 4 + 6i \rightarrow$

$\rightarrow z + 4i^2 z = 4 + 6i \rightarrow 2z = 4 + 2i \therefore z = 2 + i$

$w = 4 - i \cdot z \rightarrow w = 4 - i \cdot (2 + i) \rightarrow$

$\rightarrow w = 4 - 2i - i^2 \rightarrow w = 5 - 2i$

b) $\frac{z}{w} = \frac{2+i}{5-2i} = \frac{2+i}{5-2i} \cdot \frac{(5+2i)}{(5+2i)} = \frac{8}{29} + \frac{9}{29} \cdot i$

9. a) Sim.

b) $\bar{z} + \bar{w} = 1 - i \rightarrow z + w = 1 + i$

c) $z^2 - w^2 = -10 \rightarrow (z + w) \cdot (z - w) = -10 \rightarrow$

$\rightarrow (1 + i) \cdot (z - w) = -10 \rightarrow$

$\rightarrow z - w = \frac{-10}{(1+i)} = -5 + 5i$

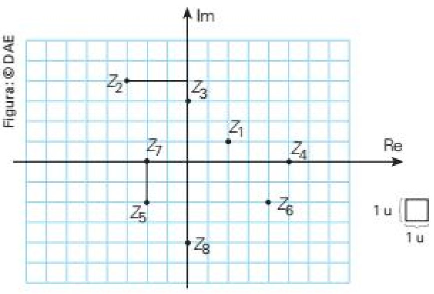
d) $\begin{cases} z + w = 1 + i \\ z - w = -5 + 5i \end{cases} \therefore z = -2 + 3i$ e $w = 3 - 2i$

e) $\frac{z}{w} = \frac{-2+3i}{3-2i} = \frac{-2+3i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = -\frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot i$

CAPÍTULO 13 – Forma trigonométrica

Página 170

1.



2. A $\rightarrow -6 + 5i$ (imaginário)

B $\rightarrow 3 + 2i$ (imaginário)

C $\rightarrow 5$ (real)

D $\rightarrow -3 - 3i$ (imaginário)

E $\rightarrow -5i$ (imaginário puro)

F $\rightarrow 2 - 6i$ (imaginário)

3. a) Verdadeira, pois todo número real tem seu afixo situado no eixo horizontal do plano complexo;

b) Verdadeira, pois todo número imaginário puro tem seu afixo situado no eixo vertical do plano complexo.

4. a) $z = 6 + 7i$, $w = 3 + 2i$, $v = 11 + 4i$

b) $S_{\text{RETÂNGULO}} = 8 \cdot 5 = 40$ unidades de área.

c) $S_{\text{TRIÂNGULO}} = 40 - \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{5 \cdot 3}{2} - \frac{8 \cdot 2}{2} =$

$= 40 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2} - 8 = 17$ unidades de área.

5. O ponto do 2º quadrante: $(-3; 2) \rightarrow -3 + 2i$

O ponto do 3º quadrante: $(-3; -2) \rightarrow -3 - 2i$

O ponto do 4º quadrante: $(3; -2) \rightarrow 3 - 2i$

6. Resposta pessoal.

7. a) Ao representar os afixos dos quatro números complexos no plano, eles indicarão vértices de um quadrado.

b) Como o lado desse quadrado é igual a 4 unidades de comprimento, seu perímetro é igual a 16 unidades de comprimento.

c) A área do quadrado é igual 16 unidades de área.

8. Respostas pessoais.

9. a) $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $|z| = \sqrt{2^2 + (3^2)} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$

c) $|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

d) $|z| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$

e) $|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$

10. a) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \theta = 45°$

b) $|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e

$\cos\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = 300°$

c) $|z| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{0}{5} = 0$ e

$\cos\theta = \frac{5}{5} = 1 \therefore \theta = 0°$

d) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{0}{2} = 0$ e

$\cos\theta = \frac{-2}{2} = -1 \therefore \theta = 180°$

e) $|z| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{4}{4} = 1$ e

$\cos\theta = \frac{0}{4} = 0 \therefore \theta = 90°$

f) $|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{-3}{3} = -1$

e $\cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \therefore \theta = 270°$

g) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{sen}\,\theta =$

$= \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta = 225°$

h) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3} \rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$

e $\cos\theta = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ \therefore\ \theta = 150°$

11. a) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\cos\theta = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}\ \therefore\ \theta = 120°$

$Z = 2 \cdot (\cos 120° + i\,\text{sen}\ 120°$

b) $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{1} = 1$ e $\cos\theta = \dfrac{0}{1} = 0$

$\therefore\ \theta = 90°\quad z = 1 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen}\ 90°)$

c) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{0}{3} = 0$ e

$\cos\theta = \dfrac{-3}{3} = -1\ \therefore\ \theta = 180°$

$z = 3 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen}\ 180°)$

12.

a) $\left|\dfrac{3+\sqrt{3}\cdot i}{\sqrt{2}+i}\right| = \dfrac{\left|3+\sqrt{3}\cdot i\right|}{\left|\sqrt{2}+i\right|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$

b) $\left|\dfrac{k+2i}{3-i}\right| = 2 \rightarrow \dfrac{\sqrt{k^2+2^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt{k^2+4}}{\sqrt{10}} = 2 \rightarrow \sqrt{k^2+4} = 2\sqrt{10} \rightarrow$

$\rightarrow k^2 + 4 = 40 \rightarrow$

$\rightarrow k^2 = 36 \therefore k = 6$ ou $k = -6$

13. a) $|z| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

$|w| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$

b) $|z| + |w| = 5 + 13 = 18$

c) $z + w = 4 + 3i + 5 + 12i = 9 + 15i$

d) $|z+w| = \sqrt{9^2+15^2} = \sqrt{306}$

e) Não.

14. a) $z = 4 + 4i \rightarrow |z| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

b) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \therefore\ \theta =$

$= 45°$

$Z = 4\sqrt{2} \cdot (\cos 45° + \text{i} + \text{sen}\ 45°)$

c) $z = 4 + 4i,\ w = -4 + 4i,\ v = 4 - 4i$

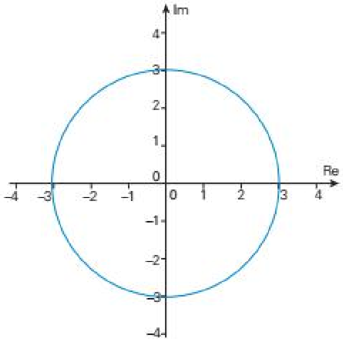
d) $z \cdot i = (4 + 4i) \cdot i = -4i - 4i^2 = -4 + 4i = w$

e) $w \cdot i = (-4 + 4i) \cdot i = -4i + 4i^2 = -4 - 4i.$

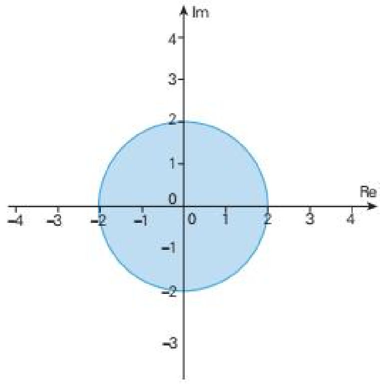
Obtemos outro número complexo diferente de z, w e v.

15.

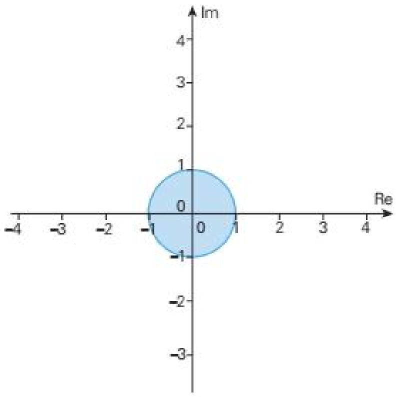
a)



b)



c)



Figuras: © DAE

16. a) $|z| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ e $|w| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

b) $d = \sqrt{(8-6)^2+(6-8)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ u.c.

c) $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 10^2 + 10^2 - 2\cdot 10\cdot 10\cdot \cos\left(A\hat{O}B\right)$

$\cos\left(A\hat{O}B\right) = 0{,}96$

CAPÍTULO 14 – Operações na forma trigonométrica

Página 175

1. I. V

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 2 \cdot 3 = 6$

II. V

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = 40° + 25° = 65° = \arg(z_3)$

III. F

$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot (\cos 65° + i \cdot \text{sen } 65°) + z_3$

IV. V

$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \arg(z_3) =$

$= 40° + 25° + 65° = 130°$

V. V

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{5 \cdot (\cos 65° + i \cdot \text{sen } 65°)}{2 \cdot (\cos 40° + i \cdot \text{sen } 40°)} = 2{,}5 \cdot (\cos 25° + i \cdot \text{sen } 25°)$$

2. **a)** $z \cdot w = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 2\sqrt{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

b) $\frac{z}{w} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= \sqrt{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

c) $z \cdot w = 2\sqrt{3} \cdot (0 + i \cdot 1) = 2\sqrt{3} \cdot i$

d) $\frac{z}{w} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

3.

a) $z = i = 1 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°)$

b) $w = -1 = 1 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen} 180°)$

c) $i^2 = i \cdot i = 1 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°) \cdot 1 \cdot (\cos 90° +$
$+ i \cdot \text{sen} 90°) = 1 \cdot 1 (\cos(90° + 90°) +$
$+ i \cdot \text{sen}(90° + 90°)) = 1 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen} 180°) = -1$

4.

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot [\cos(0° + 60° + 240°)] + i \cdot \text{sen}(0° + 60° + 240°)] = 1 \cdot (\cos 300° + i \cdot \text{sen} 300°) = z_6$

5. Resposta pessoal.

6. $w = \frac{1}{z} = \frac{1 \cdot (\cos 0° + i \cdot \text{sen} 0°)}{5 \cdot (\cos 100° + i \cdot \text{sen} 100°)} =$

$= \frac{1}{5} \cdot [\cos(-100°) + i \cdot \text{sen}(-100°)] =$

$= 0{,}2 \cdot (\cos 260° + i \cdot \text{sen} 260°)$

$v = \frac{z}{i} = \frac{5 \cdot (\cos 100° + i \cdot \text{sen} 100°)}{1 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°)} =$

7. Como conhecemos o argumento e o módulo desses dois números complexos, temos:

a)

$$z \cdot w = |z \cdot w| \cdot \left[\cos\left(\frac{13\pi}{36} + \frac{11\pi}{36}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{13\pi}{36} + \frac{11\pi}{36}\right)\right]$$

$$z \cdot w = 2\sqrt{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

b) $z \cdot w = 2\sqrt{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$z \cdot w = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z \cdot w = -\sqrt{3} + 3i$

8. a) $|z| = \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = \sqrt{1} = 1$

b) $z_{\theta_1} \cdot z_{\theta_2} = [\cos(\theta_1) + i \cdot \text{sen}(\theta_1)] \cdot [\cos(\theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_2)]$

$z_{\theta_1} \cdot z_{\theta_2} = \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \text{i} \cdot \text{sen}(\theta_2) +$
$+ i \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + i \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot i \cdot \text{sen}(\theta_2)$

$z_{\theta_1} \cdot z_{\theta_2} = \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2) +$
$+ i \cdot [\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2)]$

$z_{\theta_1} \cdot z_{\theta_2} = \cos(\theta_1 + \theta 2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

c) Sim, pois $z_{(\theta_1 + \theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

Página 179

1. I. V $\rightarrow |z|^4 = |z|^4 = 3^4 = 81$

II. V $\rightarrow \arg(z^6) = 6 \cdot \arg(z) = 6 \cdot 30° = 180°$

III. F $\rightarrow z^3 = (2i)^5 = 8i^3 = 8 \cdot (2i) = -8i$ (imaginário puro)

IV. V $\rightarrow z^5 = (2i)^5 = 32i^5 = 32i$ (imaginário puro)

V. V $\rightarrow z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

2.

$$z^3 + z^6 + z^9 = 2^3 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{6}\right) +$$
$$+ 2^6 \cdot \left(\cos\frac{6\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{6\pi}{6}\right) + 2^9 \cdot \left(\cos\frac{9\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{9\pi}{6}\right)$$

$z^3 + z^6 + z^9 = 8 \cdot (0 + i \cdot 1) + 64 \cdot (-1 + i \cdot 0) +$
$+ 512 \cdot [0 + i \cdot (-1)] = 8i - 64 - 512i = -64 - 504i$

3.

a) $(1 - i)^6 = [(1 - i)^2]^3 = (-2i)^3 = -8i^3 =$
$= -8 \cdot (-i) = 8i$

b) $\left[\left(\sqrt{2} + 2 \cdot i\right)^2\right]^2 = (4i)^2 = 16i^2 = 16 ? (21) = 216$

c) $(1 - i)^9 = (1 + i) \cdot [(1 + i)^2]^4 = (1 + i) \cdot (2i)^4 =$
$= (1 + i) \cdot 16i^4 = (1 + i) \cdot 16 = 16 + 16i$

d) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)^{10}=\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)^{2}\right]^{5}=$

$=\left(\frac{1}{2}\cdot i\right)^{5}=\frac{1}{32}\cdot i^{5}=\frac{1}{32}\cdot i=\frac{i}{32}$

e) $(-1-i)^3=(-1-i)\cdot(-1-i)^2=$
$=(-1-i)\cdot 2i=2-2i$

4.

$a_1=i^1=i$	$a_6=i^6=i\cdot i^5=-1$
$a_2=i^2=-1$	$a_7=i^7=i\cdot i^6=-i$
$a_3=i^3=i\cdot i^2=-i$	$a_8=i^8=i\cdot i^7=-i^2=1$
$a_4=i^4\cdot i\cdot i^3=-i^2=1$	$a_9=i^9=i\cdot i^8=i$
$a_5=i^5=i\cdot i^4=i$	$a_{10}=i^{10}=i\cdot i^9=-1$

a) $i^{17}+i^{18}+i^{19}=i^1+i^2+i^3=i-1-i=-1$

b) $i^{123456789}=i^1=i$

c) $\frac{i^{12}-i^{15}}{i^{20}+i^{7}}=\frac{i^{0}-i^{3}}{i^{0}+i^{3}}=\frac{1-(-i)}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=$

$=\frac{(1+i)}{(1-i)}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

5. **a)**

$z=\frac{16+8+4+2}{16-1}\cdot\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=$

$=2\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

b) $z=2\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i$

c)

$z^5=2^5\cdot\left[\cos\left(5\cdot\frac{5\pi}{4}\right)+i\cdot\text{sen}\left(5\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right]=$

$=32\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=32\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=$

$=16\sqrt{2}+16\sqrt{2}\cdot i$

d) $z^4=2^4\cdot\left[\cos\left(4\cdot\frac{5\pi}{4}\right)+i\cdot\text{sen}\left(4\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right]=$

$=16\cdot[\cos(\pi)+i\cdot\text{sen}(\pi)=-16$

6. $z=1\cdot(\cos 30°+i\cdot\text{sen}30°)$

$z^9=1^9\cdot\cos 9\cdot 30°+i\cdot\text{sen}9\cdot 30°=$

$=1\cdot(\cos 270°+i\cdot\text{sen}270°)\rightarrow$ vértice J

$z^{67}=1^{67}\cdot(\cos 67\cdot 30°+i\cdot\text{sen}67\cdot 30°)=$

$=1\cdot(\cos 210°\ 1\ i\cdot\text{sen}210°)\rightarrow$ vértice H

$z^{100}=1^{100}\cdot(\cos 100\cdot 30°)+i\cdot\text{sen}100\cdot 30°)=$

$=1\cdot(\cos 120°+i\cdot\text{sen}120°)\ \rightarrow$ vértice E

7. a)

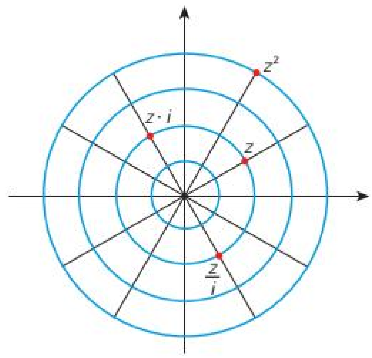


Figura: © DAE

b) $z^2=2^2\cdot[\cos(2\cdot 30°)+i\cdot\text{sen}(2\cdot 30)]=$
$=4\cdot[\cos 60°+i\cdot\text{sen}60°]=2+i\cdot\ 2\sqrt{3}$

c) $z\cdot i=2\cdot(\cos 30°+i\cdot\text{sen}30°)\cdot 1\cdot(\cos 90°+$
$+i\cdot\text{sen}90°)=2\cdot(\cos 120°+i\cdot\text{sen}120°)=$
$-1+i\cdot\sqrt{3}$

$\frac{z}{i}=\frac{2\cdot(\cos 30°+i\cdot\text{sen}30°)}{1\cdot(\cos 90°+i\cdot\text{sen}90°)}=$

$=2\cdot[\cos(-60°)+i\cdot\text{sen}(-60°)]=$

$=2\cdot(\cos 300°+i\cdot\text{sen}\ 300°)=1-\ i\cdot\sqrt{3}$

8. **a)** A partir da observação direta da figura são os pontos A e G (pontos situados no eixo real ou eixo x);

b) A partir da observação direta da figura são os pontos D e J (pontos situados no eixo imaginário ou eixo y);

c) O ponto K, simétrico em relação ao eixo x;

d) O ponto E, simétrico em relação ao eixo x.

9. **a)** $z=2\cdot(\cos 60°+i\cdot\text{sen}60°)$

b) $z^n=2^n\cdot[\cos(60°\cdot n)+i\cdot\text{sen}(60°\cdot n)]$

c) $(\text{sen}60°\cdot n)=0$

$60°\cdot n=180°\therefore n=3$ (menor n não nulo)

10. **a)** $i^{6n}=(i^6)^n=(-1)^n=1$, pois n é par.

b) $i^{6n}\ 5\ (i^6)^n=(-1)^n=-1$, pois n é impar.

c) $i^{12n+3}=i^{12n}\cdot i^3=(i^{12})^n\cdot(-i)=1^n\cdot(-i)=$
$=1\cdot(-i)=-i$

11. **a)** Como $2011=502\cdot 4+3$ então:

$S=\underbrace{i+i_2+i_3+i_4}_{\text{zero}}+\ ...\ +\ :$

$\underbrace{i^{2005}+i^{2006}+i^{2007}+i^{2008}}_{\text{zero}}+i^{2009}+i^{2010}+i^{2011}$

$S=i^{2009}+i^{2010}+i^{2011}=i^1+i^2+i^3=i-1-i=-1$

b) $S=\frac{i^{2011}\cdot i-i}{i-1}=\frac{i^{2012}-i}{i-1}=\frac{1-i}{i-1}=\frac{1-i}{-(1-i)}=-1$

Vestibulares e Enem

Página 184

1. alternativa a.

$2z - i = z + 1$

Seja $z = a + bi$, temos:

$2(a + bi) - i = (a - bi) + 1 \rightarrow 2a + 2bi - i =$
$= a - bi + 1$

$a + 3bi = 1 + i \therefore a = 1$ e $b = \frac{1}{3}$

Logo, $z = 1 + \frac{i}{3}$.

2. alternativa a.

$z + wi = i \rightarrow 1 - \frac{1}{i} + wi = i$

$i - 1 + wi^2 = i^2$

$i - 1 - w = -1$

$w = i$

3. alternativa a.

$z = i^{2014} - i^{1987}$

$z = i^2 - i$

$z = -1 - i$

Logo,

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

4. Para $p(x) = 0$, temos: $x^2 + 18 = 0 \therefore x = 3i\sqrt{2}$ ou $x = -3i\sqrt{2}$

Para $q(x) = 0$, temos: $x^2 - 2x + 5 = 0 \therefore x = 1 + 2i$ ou $x = 1 - 2i$

Para $r(x) = 0$, temos: $-x^2 - 9 = 0 \therefore x = 3i$ ou $x = -3i$

01) Falsa

02) Falsa

04) Falsa, o produto das raízes de $q(x)$ é: $\frac{5}{1} = 5$

08) Verdadeira, pois $|1 \pm 2i| = \sqrt{1^2 + (\pm 2)^2} = \sqrt{5}$

16) Verdadeira, pois $3i = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e $-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

5. Alternativa d.

$k_1z_1 + k_2z_2 = z_3 \rightarrow k_1(2 + 2 \cdot i) + k_2(5 - 6 \cdot i) = = -4 + 18 \cdot i \rightarrow (2k_1 + 5k_2) + (2k_1 - 6k_2) \cdot i = -4 + 18 \cdot i$

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_2 = -4 \\ 2k_1 - 6k_2 = 18 \end{cases} \quad \therefore k_1 = 3 \text{ e } k_2 = -2$$

Logo, $k_1^{k_2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

6. Alternativa d. Seja $z = x + yi$, temos:

$|z| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$

Portanto, a área pedida corresponde a área de um círculo de raio 1 centrado na origem. Logo,
$A = \pi \cdot 1^2 = \pi$ unidades de área.

7. Seja $z = a + bi$ temos:

$f(z) = \bar{z} \rightarrow iz = \bar{z} \rightarrow i \cdot (a + bi) = a - bi \rightarrow -b + ai =$
$= a - bi \therefore a = -b.$

Como

$|z| = 4 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \rightarrow a^2 + b^2 = 16$, temos:

$(-b)^2 + b^2 = 16 \rightarrow b^2 = 8 \therefore b = \pm 2\sqrt{2}$.

Portanto, os complexos que satisfazem as condições são $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ e $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.

8. Alternativa a.

O argumento do número complexo u é $180° - 60° = = 120°$. Assim, $u = 4 \cdot (\cos 120° + i \cdot sen\, 120°) \rightarrow$

$\rightarrow u = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow u = -2 + 2\sqrt{3}i$

$v = \frac{u}{i} \rightarrow v = \frac{-2 + 2\sqrt{3} \cdot i}{i} \rightarrow$

$\rightarrow v = \frac{-2 + 2\sqrt{3} \cdot i}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} \rightarrow v = 2\sqrt{3} + 2i$

Como

$u + v = -2 + 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3} + 2i = (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i$

$|u + v| = \sqrt{\left(2\sqrt{3} - 2\right)^2 + \left(2\sqrt{3} + 2\right)^2} =$

$= \sqrt{12 - 8\sqrt{3} + 4 + 12 + 8\sqrt{3} + 4} =$

$= \sqrt{32} \rightarrow |u + v| = 4\sqrt{2}$

9. Alternativa d.

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos:

$(x + yi)^2 = (\sqrt{3 + 4i})^2 \rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 + 4i$

Pela igualdade, $2xy = 4 \therefore xy = 2.$

10. Alternativa d.

$z \cdot w = (-3 + 4i) \cdot (2 - 3i) = -6 + 9i + 8i - 12i^2 = 6 + 17i.$

11. Alternativa a.

Sejam $z = x + yi$ e $z_0 = 10 + 5i$, temos:

$|z - z_0| = 30 \Rightarrow |(x - 10) + (y - 5)i| = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 10)^2 + (y - 5)^2} = 30 \Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 - 900 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$

12. alternativa a.

$$|z|=\frac{|x-yi|}{|x+yi|}=\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$$

13. alternativa d.

$$(3-i)(x+2yi)=3x+6yi-ix-2yi^2=$$
$$=(3x+2y)+(6y-x)i$$

Logo, para o complexo $(3x+2y)+(6y-x)i$ ser real, devemos ter:

$6y-x=0$ (equação da reta pedida)

14. 01) Verdadeira, pois $\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)}=$ $=\sqrt{a^2+b^2}=|z|=|\bar{z}|$

02) Falsa. $\bar{z}$ é o simétrico de z em relação ao eixo real.

04) Falsa, pois $(\bar{z})^2=\bar{z}\cdot\bar{z}=(\overline{z^2})=-i.$

08) Verdadeira, pois w está sobre o eixo real.

16) Falsa.

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{a+bi}{a-bi}\cdot\frac{a+bi}{a+bi}=$$
$$=\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

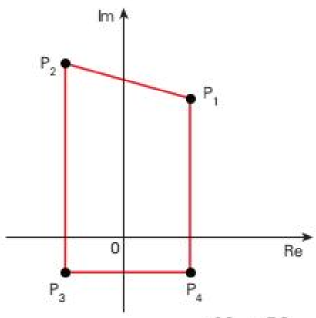
(pode ser um imaginário).

15. alternativa d.

Temos $z_1=20+40i=(20,40)$, $z_2=-15+50i=$ $=(-15,50)$ e $z_3=-15-10i=(-15,-10)$ e

$$z_4=\frac{1}{16}z_1-\frac{5}{4}z_3=\frac{1}{16}(20+40i)-\frac{5}{4}(-15+10i)=20-10i$$

Os pontos que delimitam o terreno são $P_1(20;40)$, $P_2(-15;50)$, $P_3(-15;-10)$ e $P_4(20;-10)$. Logo, o terreno tem a forma de um trapézio retângulo, conforme a figura.



Gráficos: ©DAE

A área do terreno é dada por $\frac{60+50}{2}\cdot 35=1\,925\text{ m}^2$.

16. O centro da circunferência é o ponto $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Sendo $Z_0=-1+i$ e seja z o número procurado, temos:

$$(-1+i)\cdot z=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot i\rightarrow z=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot i}{-1+i}=$$
$$=\frac{3}{2}i=1{,}5i=z_2$$

Desafio

alternativa b.

Seja $z-5+3i=w$, temos:

$(z-5+3i)^4=1\rightarrow w^4=1$

Seja $m=w^2$, temos:

$w^4=1\rightarrow m^2=1\ \therefore\ m=1$ ou $m=-1$

Como $m=w^2$, temos:

$w^2=1\ \therefore\ w=1$ ou $w=-1$

ou

$w^2=-1\ \therefore\ w=i$ ou $w=-i$

Assim,

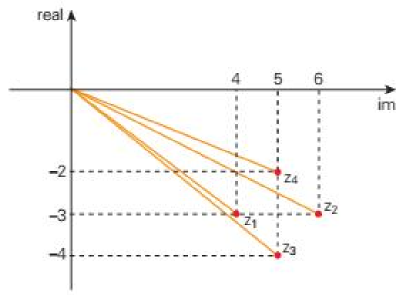
$z-5+3i=-1\ \rightarrow\ z_1=4-3i$

$z-5+3i=-1\ \rightarrow\ z_2=6-3i$

$z-5+3i=-i\ \rightarrow\ z_3=5-4i$

$z-5+3i=\text{i}\ \rightarrow\ z_4=5-2i$

Representando as soluções no plano,



observamos que o número complexo que tem o menor argumento é z_3. Logo, $|z_3|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$.

UNIDADE 5 – POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

CAPÍTULO 15 – Polinômios

Página 195

1. a) É um polinômio.

b) Não é um polinômio.

c) É um polinômio.

d) É um polinômio.

e) Não é um polinômio.

2. $a+5=7\ \therefore\ a=2$

$b-1=4\ \therefore\ b=5$

$2c-5=1\ \therefore\ c=3$

3. a) O grau do polinômio é 3.

b) $f(1) = 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$

$f(0) = 4 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -10$

c) $f(i) = 4 \cdot i^3 - 3 \cdot i^2 + 2 \cdot i - 1 = 2 - 2i$

$f(-i) = 4 \cdot (-i)^3 - 3 \cdot (-i)^2 + 2 \cdot (-i) - 1 = 2 + 2i$

4. $(m - 2) \cdot x^2 + (n + 5) \cdot x + 3p - 12 = 0$

$m - 2 = 0 \therefore m = 2$

$n + 5 = 0 \therefore n = -5$

$3p - 12 = 0 \therefore p = 4$

5. $P(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = 0$

-1 é a raiz

$P(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 + 6 = 6$

0 não é raiz

$P(1)=1^3 - 4 \cdot 1^3 + 1 + 6 = 4$

1 não é raiz

$P(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 + 6 = 0$

3 é raiz

$P(-3) = (-3)^3 - 4 \cdot (-3)^2 + (-3) + 6 = -60$

-3 não é raiz

6. a) $p(0) = 0^{2n+3} + 2 \cdot 0^{2n+1} + 5 = 5$

b) $p(-1) = (-1)^{2n+3} + 2 \cdot (-1)^{2n+1} + 5 = 5$

$p(-1) = -1 + 2 \cdot (-1) + 5 = 2$

7. $\begin{cases} f(1) = 13 \\ f(-1) = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 1^3 + m \cdot 1^2 + n \cdot 1 + 7 = 13 \\ (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + n \cdot (-1) + 7 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} m + n = 5 \\ m - n = -1 \end{cases} \therefore m = 2 \text{ e } n = 3$

8. a) $m = 2 \rightarrow f(x) = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3 \rightarrow f(x) = 3$

Assim, o grau da função f é igual a zero.

b) $m^2 - 4 = 0$ e $m - 2 \neq 0$

$m = 2$ ou $m = -2$ e $m \neq 0$

Assim, $m = -2$

c) $m^2 - 4 = 0$, $m - 2 = 0$ e $m^2 - 5m + 6 \neq 0$

$m = 2$ ou $m = -2$

$m = 2$

$m \neq 2$ e $m \neq 3$

Assim, não existe nenhum valor de m de modo que o grau da função f seja igual a 1.

9. a) $V(x) = \pi \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 2)$

$V(x) = \pi \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot (x - 2)$

$V(x) = \pi \cdot (x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2)$

$V(x) = \pi \cdot (x^3 - 3x - 2)$

b) O grau é igual a 3.

c) $v(4) = \pi \cdot (4^3 - 3 \cdot 4 - 2)$

$v(4) = \pi \cdot (64 - 12 - 2)$

$v(4) = 50\pi$ unidades de volume

CAPÍTULO 16 – Operações com Polinômios

Página 198

1. a) $f(x) + h(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3 + (-x^3 + 5x^2 - x + 1) =$

$= 3x^2 + 4x - 2$

b) $g(x) - h(x) = 2x^2 + 3 - (-x^3 + 5x^2 - x + 1) =$

$= x^3 - 3x^2 + x + 2$

c) $f(x) \cdot g(x) =$

$= (x^3 - 2x^2 + 5x - 3) \cdot (2x^2 + 3) =$

$= 2x^5 + 3x^3 - 4x^4 - 6x^2 + 10x^3 + 15x - 6x^2 - 9 =$

$= 2x^5 - 4x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 15x - 9$

d) $[f(x) + h(x) \cdot g(x)] =$

$= (3x^2 + 4x - 2) \cdot (2x^2 + 3) =$

$= 6x^4 + 9x^2 + 8x^3 + 12x - 4x^2 - 6 =$

$= 6x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 12x - 6$

2. I. F, por exemplo: $(x^3 + 2x) + (-x^3 + x) = 3x$

II. V III. V IV. V V. V

3. Seja $gr(P)$ o grau do polinômio P, temos:

a) $gr(f^2) = 2.g(f) = 2.2 = 4$

b) $gr(f.g) = gr(f) + gr(g) = 2 + 3 = 5$

c) $gr[(f+g) \cdot h] = gr\,(f+g) + gr(h) = 3 + 4 = 7$

d) $gr(h - g) = 4$

e) $gr(f^4 \cdot g^3 \cdot h^2) = 4 \cdot gr(f) + 3 \cdot gr(g) + 2 \cdot gr(h) =$

$= 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 25$

4. $\dfrac{5x - 4}{x^2 - x - 2} = \dfrac{\alpha}{x - 2} + \dfrac{\beta}{x + 1}$

$\dfrac{5x - 4}{x^2 - x - 2} = \dfrac{\alpha \cdot (x + 1) + \beta \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x + 1)}$

$5x - 4 = \alpha \cdot x + \alpha + \beta \cdot x - 2\beta$

$5x - 4 = (\alpha + \beta) \cdot x + \alpha - 2\beta$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - 2\beta = -4 \end{cases} \therefore \alpha = 2 \text{ e } \beta = 3$

5. $x^2 - 8x + 21 =$
$= a \cdot (x-1) \cdot (x-2) + b \cdot (x-1) \cdot (x+1) + c \cdot (x-2) \cdot (x+1)$

$x = 1 \rightarrow 1^2 - 8 \cdot 1 + 21 = c \cdot (1-2) \cdot (1+1) \therefore c = -7$

$x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 21 =$

$= a \cdot (-1-1) \cdot (-1-2) \therefore a = 5$

$x = 2 \rightarrow 2^2 - 8 \cdot 2 + 21 = b \cdot (2-1) \cdot (2+1) \therefore b = 3$

6. $12x^2 + 24x + 28 = (x+\alpha)^3 - (x+\beta)^3$
$12x^2 + 24x + 28 =$

$= x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 - x^3 - 3x^2\beta - 3x\beta^2 - \beta^3$

$12x^2 + 24x + 28 =$

$= (3\alpha - 3\beta)\, x^2 + (3\alpha^2 - 3\beta^2)\, x + \alpha^3 - \beta^3$

$$\begin{cases} 12 = 3\alpha - 3\beta \\ 24 = 3\alpha^2 - 3\beta^2 \\ 28 = \alpha^3 - \beta^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 4 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \therefore \alpha = 3 \text{ e } \beta = -1 \\ \alpha^3 - \beta^3 = 28 \end{cases}$$

7. $\dfrac{3x^2 + 4x + 2}{x \cdot (x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x+1)} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

$\dfrac{3x^2 + 4x + 2}{x \cdot (x+1)^2} = \dfrac{A \cdot (x+1)^2 + Bx \cdot (x+1) + C \cdot x}{x \cdot (x+1)^2}$

$3x^2 + 4x + 2 = A \cdot (x^2 + 2x + 1) + Bx \cdot (x+1) + C \cdot x$

$3x^2 + 4x + 2 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$

$3x^2 + 4x + 2 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A$

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ 4 = 2A + B + C \\ 2 = A \end{cases}$$

Portanto: $A = 2$, $B = 1$ e $C = -1$

8. $(x^2 + 2x + 1)^2 = x^4 + (\alpha + 1) \cdot x^3 + 2\alpha \cdot x^2 + 4x + 1$
$x^4 + (2x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2x + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2x \cdot 1$

$= x^4 + (\alpha + 1) \cdot x^3 + 2\alpha \cdot x^2 + 4x + 1$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = x^4 + (\alpha + 1) \cdot x^3 + 2\alpha \cdot x^2 + 4x + 1$

$$\begin{cases} 4 = \alpha + 1 \\ 6 = 2\alpha \end{cases} \therefore \alpha = 3$$

9. a) $F(x) = -F(-x)$

$2x^3 + mx^2 + nx + p = -2 \cdot (-x)^3 + m \cdot (-x)^2 + n \cdot (-x) + p$

$2x^3 + mx^2 + nx + p = 2x^3 - mx^2 + nx - p$

$2mx^2 - 2p = 0$

$$\left\{\begin{matrix} 2m = 0 \\ -2p = 0 \end{matrix} \quad \therefore m = 0 \text{ e } p = 0 \right\}$$

$F(2) = 18$

$2 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 + n \cdot 2 + p = 18$

$16 + 4m + 2n + p = 18$

$16 + 2n = 18$

$n = 1$

b) $F(x) = 2x^3 + x$

$F(1) = 2 \cdot 1^3 + 1 \rightarrow F(1) = 3$

10. a) $\dfrac{7x^2 + 3x + 2}{p \cdot x^2 - 6x + q} = k$

$7x^2 + 3x + 2 = k \cdot (p \cdot x^2 - 6x + q)$

$7x^2 + 3x + 2 = kpx^2 - 6kx + kq$

$$\begin{cases} 7 = kp \\ 3 = -6k \therefore k = -\dfrac{1}{2}, p = -14 \text{ e } q = -4 \\ 2 = kp \end{cases}$$

b) $\dfrac{7x^2 + 3x + 2}{-14x^2 - 6x - 4} = \dfrac{7x^2 + 3x + 2}{-2(7x^2 + 3x + 2)} = -\dfrac{1}{2}$

11. Resposta pessoal.

Página 205

1. $12^x + 41x - 30 \,\underline{|\, x^2 - 7x + 6}$

$$\begin{array}{l|l} \underline{-x^3 + 7x^2 - 6x} & x - 5 \\ \underline{-5^2 + 35x - 30} & \\ \underline{5^2 - 35x + 30} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$q(x) = x - 5$

$q(2) = 2 - 5$

$q(2) = -3$

O resto da divisão é igual a 0(zero), isto é, o polinômio é nulo.

2. a) $f(x) \,\underline{|\, x^2 + 1}$

$x+1 \quad x^2 - 1$

$f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) + x + 1$

$f(x) = x^4 - 1 + x + 1$

$f(x) = x^4 + x$

b) $f(2) = 2^4 + 2 = 16 + 2 = 18$

c) Sim, pois $f(-1) = (-1)^4 + (-1) = 0$

3. a) O grau de q é igual a $5 - 2 = 3$.

b) O grau de r pode ser 2, 1, 0 ou ainda não estar definido se o polinômio resto for identicamente nulo.

c) Não está definido.

4. a)

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^2+4 & f(x) \\ \hline 3 & x^2+x+1 \end{array}$$

$$x^4 + x^2 + 4 = f(x) \cdot (x^2 + x + 1) + 3$$

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^2+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} -x^4-x^3-x^2 & x^2-x+1 \\ \hline -x^3+1 & \\ x^3+x^2+x & \\ \hline x^2+x+1 & \\ -x^2-x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Assim, $f(x) = x^2 - x + 1$.

b) $f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$

Assim, o resto é igual a 3.

5. a)

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+x+6 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} -x^3+5x^2-6x & x+1 \\ \hline x^2-5x+6 & \\ -x^2+5x-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Assim, o polinômio $x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível pelo polinômio $x^2 - 5x + 6$.

b)

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+m\cdot x-3 & x^2-x+3 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2-3x & x-1 \\ \hline -x^2+(m-3)\cdot x-3 & \\ x^2-x+3 & \\ \hline (m-4)\cdot x & \end{array}$$

$m - 4 = 0 \therefore m = 4$

6) a) O grau de Q é igual a $10 - 4 = 6$.

b)

$$\begin{array}{l|l} P & D \\ \cline{2-2} R & Q \end{array}$$

$$P = D \cdot Q + R$$

$$\begin{array}{l|l} P & 2D \\ \cline{2-2} R' & Q' \end{array}$$

$$P = 2D \cdot Q' + R'$$

$$D \cdot Q + R = 2D \cdot Q' + R'$$

$$Q = 2Q' \therefore Q' = \frac{Q}{2} \rightarrow R = R'$$

Assim, o quociente da divisão do polinômio P pelo polinômio 2D é igual a $\frac{Q}{2}$.

c) O resto da divisão do polinômio P pelo polinômio 2D é igual a R.

7. a) $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 3x \\ 1 & 2 & x^3 \end{vmatrix}$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x^2 - 2x^2 - x^4 - 6x$$

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x$$

b) $f(2) = -2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 0$

c) Sim, pois $f(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$

d) Não, pois $f(1) = -1^4 + 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -2 \neq 0$

e)

$$\begin{array}{l|l} -x^4-2x^3+3x^2-6x & x^2-1 \\ \cline{2-2} x^4-x & -x^2+2x+2 \\ \hline 2x^3+2x^2-6x & \\ -2x^3+2x & \\ \hline 2x^2-4x & \\ -2x^2+2 & \\ \hline -4x+2 & \end{array}$$

O resto da divisão é o polinômio $-4x + 2$.

8.

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -3 & 5 & -1 & 7 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 5 & 17 \end{array}$$

Assim, o quociente é $x^3 - x^2 + 3x + 5$ e o resto é 17.

9. a)

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 3 & m & 1 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & n \end{array}$$

$$3 \cdot 6 + m = 13 \therefore m = -5$$

$$3 \cdot 13 + 1 = n \therefore n = 40$$

b) $x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

c) $x - 3$

10. $2x + 3 = 0 \therefore x = -\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{3}{2} & 2 & 5 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Para obtermos o quociente, devemos dividir cada um dos coeficientes obtidos por 2, ou seja, o quociente é igual a $x^2 + x - 1$ e o resto é igual a zero.

11. a) $\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & m & -3 \\ \hline & 1 & -6 & 6+m & -9-m \end{array}$

$-9 - m = 0 \therefore m = -9$

b) $\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & -9 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & -13 & -16 \end{array}$

O polinômio não é divisível por x − 1.

12. $\begin{array}{r|c|c|c|c|c} 1 & 3 & m & 5 & n & -1 \\ \hline & 3 & 3+m & 8+m & 8+m+n & 7+m+n \end{array}$

$7 + m + n = 0 \therefore n = -7$

13. a) $x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + b = 0$

$x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + b = 0$

$\begin{cases} a + b = 9 \\ 4a + b = 6 \end{cases} \therefore a = -1 \text{ e } b = 10$

b) $p(x) = a \cdot x + b$

$p(x) = -x + 10$

$p(4) = -4 + 10 \rightarrow p(4) = 6$

14. a) $\begin{array}{l|l} f(x) & x^2 - 2x + 3 \\ \hline x - 2 & x + 3 \end{array}$

$f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x + 3) + x - 2$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + 3x + 9 + x - 2$

$f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 7$

b) $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) + 7 = 9$

O resto da divisão do polinômio *f* pelo binômio $x + 1$ é igual a 9.

15. I. V

$n \cdot 1^{2n} + (n + 1) \cdot 1^{(2n+1)} + 1 = n + n + 1 + 1 = 2n + 2 =$
$= 2 \cdot (n+1)$

II. V

$n \cdot (-1)^{2n} + (n + 1) \cdot (-1)^{(2n+1)} + 1 = n - n - 1 + 1 = 0$

III. F

$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

Como o polinômio não é divisível por $x - 1$, então não é divisível por $x^2 - 1$.

IV. F

$n = 2 \rightarrow 2x^4 + 3x^5 + 1$

$2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^5 + 1 \neq 0$

(não é divisível)

V. V

$n = 3 \rightarrow 3x^6 + 4x^7 + 1$

$3 \cdot (-1)^6 + 4 \cdot (-1)^7 + 1 = 0$

(é divisível)

16. $3 \cdot 6 + 7 = r \therefore r = 25$

17. a) $\begin{array}{l|l} f(x) & x - 2 \\ \hline 3 & \end{array}$

$f(2) = 3$

b) $\begin{array}{l|l} f(x) & x - 4 \\ \hline 5 & \end{array}$

$f(4) = 5$

c) $\begin{array}{l|l} f(x) & x^2 - 6x + 8 \\ \hline R & q \end{array}$

$f(x) = (x^2 - 6x + 8) \cdot q + R$

$f(x) = (x^2 - 6x + 8) \cdot q + ax + b$

$f(2) = a \cdot 2 + b = 3$

$f(4) = a \cdot 4 + b = 5$

$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a + b = 5 \end{cases} \therefore a = 1 \text{ e } b = 1$

$R = x + 1$

18. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 17 – Equações Polinominais

Página 211

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 2$ ou $x = 3$

$(x - 2) \cdot (x = 3) = 0$

$S = \{2; 3\}$

2. a) $(2)^2 + a \cdot 2 - 10 = 0 \therefore a = 3$

b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$S = \{-5; 2\}$ $\therefore x = 2$ ou $x = -5$

c) $(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

3. $x = \dfrac{5i \pm \sqrt{(-5i)2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{5i \pm \sqrt{49(-1)}}{2}$

$x = \dfrac{5i \pm 7i}{2}$

$x = 6i$ ou $x = -i$

4. $2^3 - (m + 2) \cdot 2^2 + m \cdot 2 + m + 3 = 0$

$8 - 4m - 8 + 2m + m + 3 = 0 \therefore m = 3$

5. I. F → O grau da equação é igual a $2 + 5 + 1 + 3 = 11$.

II. V

III. F → O número −2 é uma raiz de multiplicidade 5.

IV. F → O número 1 não é primo.

V. V → As raízes são 1, −2, 3 e −7.

6. $x^2 - 5x + 6 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = 3$

ou

$x^2 - 6x + 8 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = 4$

$S = \{2; 3; 4\}$

a) 4 **b)** 3 **c)** Não

7. As duas equações têm as mesmas raízes: $x = 2i$ e $x = -2i$.

Na equação *I* essas raízes são de multiplicidade 2, enquanto que na equação *II* são raízes simples.

a) Não, pois a equação *I* é de grau 4, enquanto que a equação *II* é de grau 2.

b) Não, pois a equação *I* possui 4 raízes, enquanto que a equação *II* apresenta apenas 2 raízes.

c) Sim, pois nas duas equações o conjunto solução é $S = \{-2i; 2i\}$, isto é, têm dois elementos.

8. a) O resto é igual a zero.

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 6 & 7 & -14 & -15 \\ \hline & 6 & 1 & -15 & 0 \end{array}$$

$6x^2 + x - 15 = 0$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{-1; -\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right\}$$

9. a) $S = \{1; 2; 3\}$

b) $P(1) = 0 \rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 6 = 0$

$P(2) = 0 \rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 6 = 0$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \therefore a = -6 \text{ e } b = 11$$

c) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$P(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 6$

$P(4) = 64 - 96 + 44 - 6$

$P(4) = 6$

10. a) $f(2) = 0$

b) $g(-1) = 0$

c) $f(2) = g(2) + 2^2 + 3 \cdot 2 + 2$

$0 = g(2) + 4 + 6 + 2$

$0 = g(2) + 12 \therefore g(2) = -12$

$f(-1) = g(-1) + (-1^2) + 3 \cdot (-1) + 2$

$f(-1) = 0 + 1 - 3 + 2 \therefore f(-1) = 0$

$g(2) + f(-1) = -12 + 0 = -12$

11.
$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & -7 & 16 & -8 & -16 & 16 \\ \hline 2 & 1 & -5 & 6 & 4 & -8 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \\ \hline 2 & 1 & -1 & -2 & 0 & & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & & & \\ \hline & 1 & 3 & \neq 0 & & & \end{array}$$

$x + 1 = 0 \therefore x = -1$

Assim, o número 2 é uma raiz de multiplicidade 4 e o conjunto solução da equação é $S = \{-1; 2\}$.

12.
$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{array}$$

a) O valor de p é 3, pois $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = (x-1)^3 \cdot (x^2 + x + 1)$.

b) $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.

c) O número de raízes reais da equação é 3, pois a equação $x^2 + x + 1 = 0$ não possui solução real.

13. $P(x) = x^3 + x^2 - 6 + 3x - 2x^2 - x^2$

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

a) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 3 = 0 \therefore x = i\sqrt{3}$ ou $x = -i\sqrt{3}$

$S = \{2; i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$

14. Equação I:

$(x - 2)^3 = 0$

$(x - 2)(x - 2)(x - 2) = 0 \rightarrow S = \{2\}$. O número 2 é raiz de multiplicidade 3;

Equação II:

$x^3 - 8 = 0$

Observando que $x = 2$ é solução, podemos pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini "abaixar" o grau da equação recaindo em $x^2 + 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -1 + \sqrt{3}\,i$ ou $x = -1 - \sqrt{3}\,i$. Portanto, $S = \{2; -1 + \sqrt{3}\,i; -1 - \sqrt{3}\,i\}$

Assim, temos:

a) Verdadeiro, pois as duas equações são do 3º grau, logo têm três soluções cada uma;

b) Verdadeiro;

c) Verdadeiro;

d) Verdadeiro.

CAPÍTULO 18 – Teoremas e relações entre raízes

Página 217

1. a) $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2}$

b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{5}{2}$ **c)** $\alpha\beta\gamma = -\frac{2}{2} = -1$

2. A soma das raízes é igual a $-\frac{-2}{2} = 2$ e o produto é igual a $\frac{5}{1} = 5$

3. a) $\frac{1}{m+n}$ **c)** $(m+n)^2$ **e)** $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$

b) $m^2 + n^2$ **d)** $\frac{1}{m^2+n^2}$

4. a) $\alpha + \beta = -\frac{2}{1} = -2$

b) $\alpha\beta = \frac{5}{1} = 5$

c) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

d) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\alpha^2 + \beta^2 = (-2)^2 - 2 \cdot 5 = -6$

5. a) Sejam α e β as raízes da equação, temos:

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{5}{24}$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{24}$

$\frac{-\frac{(-m)}{1}}{\frac{96}{1}} = \frac{5}{24}$

$24m = 96 \cdot 5 \therefore m = 20$

b) $x^2 - 20x + 96 = 0$

$x = 12$ ou $x = 8$

6. $E = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\beta+\beta\gamma)}{\left(\frac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)}$

$E = \frac{-\frac{(-7)}{1}+\frac{5}{1}}{\left(\frac{\frac{5}{1}}{-\frac{(-1)}{1}}\right)+\left(\frac{-\frac{(-7)}{1}}{-\frac{(-1)}{1}}\right)}$

$E = \frac{12}{5+7} = \frac{12}{12} = 1$

7. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.

a) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-2}{1}$

$-3i + 3i + x_3 = 2 \rightarrow x_3 = 2$

b) Sim, basta considerar que:

$x_1\, x_2\, x_3 = -\frac{-18}{1}$

$-3i \cdot (3i) \cdot x_3 = 18$

$-9i^2\, x_3 = 18$

$9i \cdot x_3 = 18 \rightarrow x_3 = 2$

8. $2 + 3 + 5 = -\frac{a}{1} \therefore a = -10$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = -\frac{b}{1} \therefore b = 31$

$2 \cdot 3 \cdot 5 = -\frac{c}{1} \therefore c = -30$

9. Sejam $x - r$, x e $x + r$ (r é a razão da PA) as raízes da equação, temos:

$-176 + 4k = 0 \therefore k = 44$

$x^2 - 8x + 12 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = 6$

$x - r + x + x + r = -\frac{-12}{1}$

$3x = 12$

$x = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -12 & k & -48 \\ \hline & 1 & -8 & -32+k & -176+4k \end{array}$$

a) $S = \{2; 4; 6\}$

b) $k = 44$

10. Sejam α, β e γ as raízes da equação, temos:

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-6}{1}$

$\alpha + \alpha = 6 \therefore \alpha = 3$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -6 & m & 30 \\ \hline & 1 & -3 & -9+m & 3+3m \end{array}$$

$3 + 3m = 0 \therefore m = -1$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \therefore x = -2$ ou $x = 5$

a) $m = -1$

b) $S = \{-2; 3; 5\}$

11. Sejam $\frac{x}{q}$, x e xq (q é a razão da PG) as raízes da equação, temos:

$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = -\frac{27}{1} \therefore x = 3$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -13 & 39 & 27 \\ \hline & 1 & -10 & 9 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 10x + 9 = 0 \therefore x = 1$ ou $x = 9$

a) $S = \{1; 3; 9\}$

b) A razão da progressão geométrica crescente é igual a 3.

12. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\alpha$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \beta$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\gamma$

$x_1x_2x_3x_4 = \lambda$

Se x_1 e x_2 são pares e x_3 e x_4 são ímpares, temos que: α é par; β é ímpar; γ é par; λ é par. Assim, a equação apresenta 2 coeficientes ímpares e 3 coeficientes pares.

Página 222

1. a) $d(3) = \{\pm1; \pm3\}$

b) $d(2) = \{\pm1; \pm2\}$

c) $\left\{\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm3; \pm\frac{3}{2}\right\}$

2. a) Sim.

b) Não.

c) O grau mínimo é 5, pois a equação apresenta pelo menos os números 5, $1 + 2i$, $3 - i$, $1 - 2i$ e $3 + i$ como raízes.

3. a) $(x - 1) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i) = 0$

b) $(x - 1) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i) = 0$

$(x - 1) \cdot (x^2 - 4i) = 0$

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

4. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-6)}{1}$

$2 - 3i + 2 + 3i + x_3 = 6 \therefore x_3 = 2$

$S = \{2 - 3i; 2 + 3i; 2\}$

5. a) As outras raízes são $1 - i$ e $-i$.

b) $[x - (1 + i)] \cdot [x - (1 - i)] \cdot (x - i) \cdot (x + i) = 0$

$[x^2 - (1 - i)x - (1 + i) + (1 + i)(1 - i)] \cdot (x^2 - i^2) = 0$

$(x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 1) = 0$

$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$

6. $3 + 4i + 3 - 4i = -m \therefore m = -6$

$(3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = -n \therefore n = 25$

7. a) $P(i) = i^5 + 2 \cdot i^4 - 3 \cdot i^3 + 4 \cdot i^2 + \alpha . i + \beta$

$P(i) = i + 2 \cdot i - 3 \cdot (-i) + 4 \cdot (-1) + \alpha . i + \beta$

$P(i) = -2 + \beta + (\alpha + 4) \cdot i$

b) $P(i) = 0$

$-2 + \beta + (\alpha + 4) \cdot i = 0$

$-2 + \beta = 0 \therefore \beta = 2$

$\alpha + 4 = 0 \therefore \alpha = -4$

8. a) $d(10) = \{\pm1; \pm2; \pm5; \pm10\}$

$d(4) = \{\pm1; \pm2; \pm4\}$

$\left\{\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; 2; \pm5; \pm\frac{5}{2}; \pm\frac{5}{4}; \pm10\right\}$

b)

1	4	0	-23	9	10
2	4	4	-19	-10	0
	4	12	5	0	

$4x^2 + 12x + 5 = 0 \therefore x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$

$S = \left\{1; 2; -\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$

9. a) Duas.

b) Como $2 - i$ e $1 + i$ também são raízes de multiplicidades 3 e 5, respectivamente, o menor número de raízes complexas é $2 + 3 + 3 + 5 + 5 = 18$.

c) 18

d) São iguais.

10) a) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-1)}{1}$

$2 + i + 2 - i + x_3 = 1 \therefore x_3 = -3$

As outras raízes da equação são $2 - i$ e -3.

b) $(2 + i) \cdot (2 - 1) + (2 + i) \cdot (-3) + (2 - i) \cdot (-3) = m$

$5 - 6 - 3i - 6 + 3i = m \therefore m = -7$

c) $(2 + i) \cdot (2 - 1) \cdot (-3) = -n$

$5 \cdot (-3) = -n \therefore n = 15$

11. a) $(2+\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (2 + \sqrt{3}) + 1 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$

O número $2 + \sqrt{3}$ é raiz da equação.

b) $(2 - \sqrt{3})^2 - 4 \cdot (2 - \sqrt{3}) + 1 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 8 + 4\sqrt{3} + 1 = 0$

O número $2 - \sqrt{3}$ é raiz da equação.

c) $\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (1 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} =$

$= \sqrt{3} \cdot (1 + 2\sqrt{3} + 3) - 6 - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 6 - 6 - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$

O número $1 + \sqrt{3}$ é a raiz da equação.

d) $\sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (1 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} =$

$= \sqrt{3} \cdot (1 - 2\sqrt{3} + 3) - 6 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$

$= 4\sqrt{3} - 6 - 6 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \neq 0$

O número $1 - \sqrt{3}$ não é raiz da equação.

Observe que na equação $\sqrt{3}x^2 - 6x + 2\sqrt{3} = 0$, os coeficientes não são inteiros.

12.

As demais raízes da equação são $-\sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{2}$.

$(x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot [x - (1 + \sqrt{2})] \cdot [x - (1 - \sqrt{2})] = 0$

$(x^2 - 5) \cdot [x^2 - (1 - \sqrt{2})x - (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})] = 0$

$(x^2 - 5) \cdot (x^2 - 2x - 1) = 0$

$x^4 - 5x^2 - 2x^3 + 10x - x^2 + 5 = 0$

$x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x + 5 = 0$

Vestibulares e Enem

Página 224

1. Alternativa d. Como 3 é raiz da equação $f(x) = 0$, então $f(x)$ é divisível por $x - 3$.

2. Alternativa e. Como $(x - 2)$ é um fator do polinômio dado, então 2 é raiz desse polinômio. Logo:
$2^3 + k \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0 \rightarrow 4k = -24 \rightarrow k = -6$

3. Alternativa b. Como 1 é raiz de $p(x) = 0$, temos:
$2 \cdot 1^3 - a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0 \therefore a = 0$. Logo,
$p(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$.

4. Alternativa b. Como a função f intercepta o eixo x no ponto (2; 0), concluímos que $f(2) = 0$. Assim, a divisão de $f(x)$ por $x - 2$ é exata, ou seja, o resto é zero.

5. Alternativa d. $p(x) = q(x) \rightarrow x^3 = x^2 + x \rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \therefore$
$x = 0,\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Portanto, o número de soluções reais da equação $p(x) = q(x)$ é 3.

6. Alternativa a. Determinando o polinômio $q(x)$:

−2	1	3	−2	−2	12
	1	1	−4	6	0

Logo, $q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$.

A soma das raízes de $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$ é dada por

$-\dfrac{1}{1} = -1$

7. Alternativa a. Seja D o dividendo, temos:
$D = (8x^2 - 8x + 12) \cdot (x^2 + x) + (1 - 7x)$
$D = 8x^4 + 8x^3 - 8x^3 - 8x^2 + 12x^2 + 12x + 1 - 7x$
$D = 8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$

8. Alternativa d. Temos que:
$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$
Para que $x^2 + 9$ seja idêntico a $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, devemos ter:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 9 \end{cases} \quad \therefore a = 1, b = -2 \text{ e } c = 10$$

Logo, $a - b + c = 1 - (-2) + 10 = 13$

9. Alternativa b. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ e considere que $x_1 = x_2 + x_3$. Temos que:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{4}{1}$

$x_1 + x_1 = -4$

$x_1 = -2$

Como −2 é uma raiz, temos que:

−2	1	4	1	−6
	1	2	−3	0

$x^2 + 2x - 3 = 0 \therefore x = -3$ ou $x = 1$.

$S = \{-3; -2; 1\}$.

10. $P(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + 5) + 3 = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

01) Incorreto. $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 7 = -18$

02) Correto.

04) Correto. $P(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 7 = -7$

08) Incorreto. O termo independente de x vale 7.

11. Alternativa d. Seja k a outra raiz de $p(x) = 0$, temos:

$r + k + (-r) = -\dfrac{1}{1} \therefore k = -1$.

Assim, $p(-1) = 0 \rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 - a \cdot (-1) - 3 = 0 \therefore a = 3$

Logo, $p(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

Portanto, $p(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = -4$.

12. Alternativa b. Temos que:

$$\begin{array}{l|l} mx^3 + nx^2 + 1 & x^2 - x - 1 \\ \hline \underline{-mx^3 + mx^2 + mx} & \\ (n + m)x^2 + mx + 1 & \\ \underline{-(n + m)x^2 + nx + mx + n + m} & \\ nx + 2mx + m + n + 1 & \end{array}$$

Temos que $(n + 2m)x + (n + m + 1) \equiv 0 \rightarrow n + m + 1 = 0$
$\therefore n + m = -1$.

13. Alternativa c. Temos que: $p(-1) = 16$, $p(1) = 12$ e $p(0) = -1$. Podemos reescrever $p(x)$ como:
$p(x) = (x + 1)(x - 1)x \cdot q(x) + ax^2 + bx + c$, sendo $q(x)$ o quociente da divisão de $p(x)$ por $(x + 1)(x - 1)x$. Logo,

$p(-1) = a - b + c = 16$

$p(1) = a + b + c = 12$

$p(0) = c = -1$

Assim,

$$\begin{cases} a - b + c = 16 \\ a + b + c = 12 \therefore a = 15, b = -2 \text{ e } c = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Logo, $ax^2 + bx + c = 15x^2 - 2x - 1$ e, assim, o resultado pedido é $-\dfrac{-2}{15} = \dfrac{2}{15}$.

14. 01) Falsa. O grau de $p(x)$ será 3 se $a \neq 3$

02) Falsa, pois sendo b um número real, $b^2 + 1$ é sempre diferente de zero.

04) Verdadeira, pois $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0$ e $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$.

08) Verdadeira, pois $a - 3 = -5$ para $a = -2$, $b^2 + 1 = b + 1$ para $b = 1$, $c^2 + 2 \cdot c - 3 = c^2 + 3$ para $c = 3$ e $d = 2 \cdot d$ para $d = 0$

16) Falsa, pois $-6 \cdot x^3 \cdot 2x = -12x^4$.

15. Alternativa e.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^2 + mx + p & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 - x^2} & x^2 - 3 \\ -3x^2 + mx + p & \\ \underline{3x^2 + 3} & \\ mx + p + 3 & \end{array}$$

Como P(x) é divisível por D(x), temos que $m = 0$ e $p = -3$. Portanto, a resposta é $m - p = 0 - (-3) = 3$.

16. a) $r + (-r) + s = -\dfrac{-2}{1} \therefore s = 2$

$r \cdot (-r) \cdot 2 = -\dfrac{18}{1} \rightarrow r^2 = 9 \therefore r = 3$ ou $r = -3$

b) $p(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 2)$

$p(1 + i) = (1 + i - 3)(1 + i + 3)(1 + i - 2)$

$p(1 + i) = (-2 + i)(4 + i)(-1 + i)$

$p(1 + i) = (-8 - 2i + 4i + i^2)(-1 + i)$

$p(1 + i) = (-9 + 2i)(-1 + i)$

$p(1 + i) = 9 - 9i - 2i + 2i^2$

$p(1 + i) = 7 - 11i$

17. Pelo gráfico o número 2 é raiz de $p(x) = 0$. Assim:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -6 & +3 & +2 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$2x^2 + 2x + 1 = 0 \therefore x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Pelo gráfico, os valores de x que tornam $p(x) > 0$ são

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$

18. Alternativa e. P(2) = 0 e P(−3) = − 45. Assim:

$$\begin{cases} 8a + 4 + b = 0 \\ -27a - 6 + b = -45 \end{cases} \therefore a = 1 \text{ e } b = -12$$

Desafio

Alternativa a.

Sejam $\dfrac{r}{q}$, r e rq (com q sendo a razão da PG), as raízes de $f(x) = 0$, temos:

$$\frac{r}{q} \cdot r \cdot rq = -\frac{1}{8} \Rightarrow r^3 = -\frac{1}{8} \therefore r = -\frac{1}{2}$$

Assim,

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -6 & -3 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 8 & -10 & 2 & 0 \end{array}$$

$8x^2 - 10x + 2 = 0 \therefore x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{4}$.

Como 1 é a maior raiz de $f(x) = 0$, a progressão geométrica é dada por $(1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots)$. Seja S a soma dos infinitos termos da progressão geométrica. Temos que:

$S = \dfrac{1}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$. Assim, $g(x) = x - \dfrac{2}{3}$. O resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é igual a $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Logo:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{64}{27} - 2 + 1 = -\frac{35}{27}$$

UNIDADE 6 – AS CÔNICAS

CAPÍTULO 19 – Elipse

Página 237

1. $2a = 10 \therefore a = 5$

$2b = 8 \therefore b = 4$

$a^2 = b^2 + c^2$

$5^2 = 4^2 + c^2 \therefore c = 3$

Assim, as coordenadas dos focos são (3; 0) e (−3; 0).

2. $2b = 12 \therefore b = 6$

$2c = 16 \therefore c = 8$

$a^2 = b^2 + c^2$

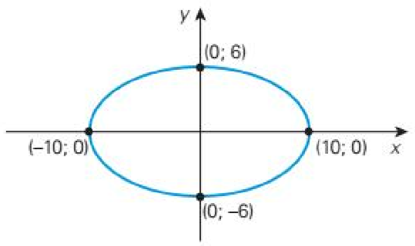
$a^2 = 6^2 + 8^2 \therefore a = 10$

a) $2a = 2 \cdot 10 = 20$

b) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

c)

Figura: © DAE



3. $a=3b$

$a^2=b^2+c^2$

$(3b)^2=b^2+c^2$

$c^2=8b^2$

$c=2b\sqrt{2}$

$$c=\frac{c}{a}=\frac{2b\sqrt{2}}{3b}\cong\frac{2\cdot 1{,}141}{3}\cong 0{,}94$$

4. I. Verdadeira.

II. Falsa.

III. Verdadeira.

IV. Falsa.

V. Verdadeira.

5. Como $A_1(0; 4)$ e $A_2(0; –4)$ são as extremidades do eixo maior da elipse, temos que o eixo focal está localizado no eixo das ordenadas.

6. Como conhecemos as medidas do eixo maior e também do eixo menor, temos:

$2a = 50 \Rightarrow a = 25$

$2b = 40 \Rightarrow b = 20$

Utilizando a relação entre os semieixos focal, maior e menor, temos:

$a^2=b^2+c^2$

$25^2=20^2+c^2 \;\rightarrow c=15 (c>0)$

Portanto, temos:

a) $A_1(0;25); A_2(0;-25)$ e $B_2(20;0)$

b) $e=\frac{c}{a}=\frac{15}{25}\rightarrow e=0{,}6$

7. I. F

$a^2=144 \therefore a=12$

$2a=24$

II. V

III. F

$16x^2+9y^2=144$

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=4$$

$b^2=9 \therefore b=3$ e $a^2=16 \therefore a=4$

$a^2=b^2+c^2$

$4^4=3^2+c^2 \therefore c=\sqrt{7}$

Assim, as coordenadas dos focos da elipse são os pontos $(\sqrt{7};0)$ e $(-\sqrt{7};0)$

8. Sendo P(2a; a) um ponto pertencente à elipse, temos:

$$\frac{(2a)^2}{4}+\frac{a^2}{9}=1$$

$$a^2+\frac{a^2}{9}=1$$

$$a^2=\frac{9}{10} \therefore a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Assim, existem dois pontos pertencentes à elipse cuja abscissa é igual ao dobro da ordenada. As coordenadas desses pontos são:

$$\frac{3\sqrt{10}}{5};\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ e } -\frac{3\sqrt{10}}{5};\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

9. a) $b^2=64 \therefore b=8$

$a^2=100 \therefore a=10$

Assim, o eixo maior está contido no eixo das ordenadas.

b) $a^2=b^2+c^2$

$10^2=8^2+c^2 \therefore c=6$

$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{10}=0{,}6$

10. $3x-4y=12$

$x=0 \rightarrow y=-3$

$y=0 \rightarrow x=4$

Como a elipse passa pelos pontos (0; -3) e (4; 0), temos que $a = 4$ e $b = 3$. Assim, $C=\sqrt{7}$, a excentricidade é igual a $\frac{\sqrt{7}}{4}$ e a equação é $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

11.

$$e=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \therefore a=c\sqrt{2}$$

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow (c\sqrt{2})^2=b^2+c^2 \therefore b=c$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(4;\sqrt{2})\rightarrow\frac{4^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{16}{(c\sqrt{2})^2}+\frac{2}{c^2}=1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16+4}{2c^2}=1 \rightarrow c^2=10 \therefore c=\sqrt{10}$$

a) $c=\sqrt{10} \rightarrow a=\sqrt{20}$ e $b=\sqrt{10}$

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$$

b) $2c=2\sqrt{10}$

12. a) $x=0 \rightarrow \frac{y^2}{8}=1 \therefore y=2\sqrt{2}$ ou $y=-2\sqrt{2}$

$y=0 \rightarrow \frac{x^2}{18}=1 \therefore x=3\sqrt{2}$ ou $x=-3\sqrt{2}$

Assim, a elipse intersecta o eixo das abscissas nos pontos $(3\sqrt{2};0)$ e $(-3\sqrt{2};0)$ e o eixo das ordenadas nos pontos $(0;2\sqrt{2})$ e $(0;-2\sqrt{2})$.

b) A área do quadrilátero é igual a $\frac{6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2}=24$ unidades de área.

13. Respostas pessoais.

Página 241

1. a) As coordenadas do centro são (1; -2).

b) $a^2 = 81 \therefore a = 9$. Assim, as coordenadas dos vértices da elipse são $(1+9;-2)=(10;-2)$ e $(1-9;-2)=$ $=(-8;-2)$.

2. $$\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

$a^2=9$ e $b^2=4$

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 9=4+c^2 \therefore c=\sqrt{5}$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

3. $c = 5 - 1 = 4$

a) As coordenadas do outro foco são $(-3;1-4)=$ $=(-3;-3)$

b) $2b=16 \therefore b=8$

$a^2=8^2+4^2 \rightarrow a^2=80 \rightarrow a=4\sqrt{5} \therefore 2a=8\sqrt{5}$

c) $$\frac{(x+3)^2}{8^2}+\frac{(y-1)^2}{(4\sqrt{5})^2}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{80}=1$$

4. $2c=7-1 \rightarrow 2c=6 \therefore c=3$

$e=\frac{c}{a} \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{a} \therefore a=6$

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 6^2=b^2+3^2 \therefore b=3\sqrt{3}$

$$\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{27}=1$$

5. a) $2a = 10$ **b)** $2b = 6$

c) As coordenadas dos vértices são: (0; 3) e (10; 3)

d) $a^2= b^2+ c^2$

$5^2= 3^2+ c^2$

$c = 4 \rightarrow$ Focos: (1; 3) e (9; 3)

e) $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$

f) $$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

6. a) $9(x^2-4x)+4(y^2+6y)+36=0$

$9\cdot[(x^2-4x+4)-4]+4\cdot[(y^2+6y+9)-9]+36=0$

$9\cdot(x-2)^2-36+4\cdot(y+3)^2-36+36=0$

$$9(x-2)^2+4\cdot(y+3)^2=36 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$$

b) Centro: (2; –3)

Vértices: (2; 0) e (2; –6); $3^2 = 2^2+ c^2$

$c=\sqrt{5} \rightarrow$ Focos: $(2;-3+\sqrt{5})$ e $(2;-3-\sqrt{5})$

c) $e=\frac{c}{a}$

$$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

7. $a^2 = 144 \therefore a = 12 \therefore$ e $b^2 = 81 \therefore b = 9$

Assim, as dimensões do retângulo são 24 e 18 unidades de comprimento.

b) $S_{elipse} = \pi \cdot 12 \cdot 9 \cong 3{,}14 \cdot 12 \cdot 9 \cong 339{,}12$ unidades de área.

c) A área exterior à elipse e interior ao retângulo é igual a $24.18 - 339{,}12 \cong 92{,}88$ unidades de área.

8. $x^2+y^2-6x+8y-200=0$

$x^2-6x+3^2+y^2+8y+4^2=200+3^2+4^2$

$(x-3)^2+(y+4)^2=225$

centro: (3; -4)

raio = 15

$2a=30 \therefore a=15$

$e=\frac{4}{5} \rightarrow \frac{c}{15}=\frac{4}{5} \therefore c=12$

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 15^2=b^2+12^2 \therefore b^2=81$

$$\frac{(x-3)^2}{225}+\frac{(y+4)^2}{81}=1$$

9. $2a=12 \therefore a=6$ e $b=4$

Supondo que a elipse esteja centrada na origem de um sistema de eixos cartesianos, a equação da elipse é $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. Assim, se $x = 3$, temos que $\frac{3^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow y^2=12 \therefore y=\pm 2\sqrt{3}$, ou seja, a altura do túnel é igual a $2\sqrt{3}$ metros.

CAPÍTULO 20 – Hipérbole

Página 248

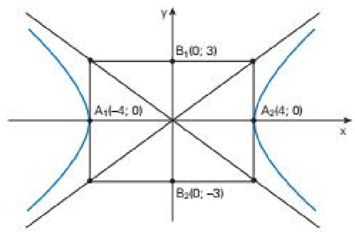
1. $a=4$ e $b=3$

$c^2=4^2+3^2 \therefore c=5$

a) As coordenadas dos focos da hipérbole são (5; 0) e (–5; 0).

b) $2c = 10$ **c)** $2a = 8$ **d)** $2b = 6$

2.



Figuras: © DAE

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}=1{,}25$

3. a) $c^2=3^2+4^2 \therefore c=5$

As coordenadas dos focos da hipérbole são (0; 5) e (0; –5).

b) Na elipse, temos:

$a=5$ e $b=4$

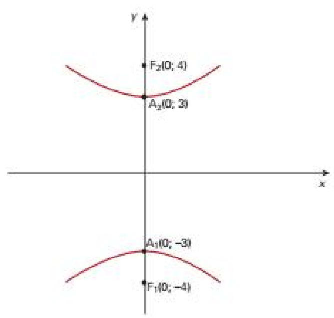
$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

4. $c=5$ e $b=4$

$5^2=a^2+4^2 \therefore a=3$

Assim, a medida do eixo real é 6 u.c. e a medida do eixo imaginário é 8 u.c.

5.



6. $a^2=100 \therefore a=10$

$b^2=21$

$c^2=100+21 \therefore c=11$

Assim, o eixo real da hipérbole mede 20 u.c. e as coordenadas dos focos são (–11; 0) e (11; 0).

7. $a^2=64 \therefore a=8$ e $b^2=36 \therefore b=6$

I. Falsa.
II. Verdadeira.
III. Verdadeira.
IV. Falsa.
V. Verdadeira.
VI. Verdadeira.

8. $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \therefore a=\frac{c\sqrt{3}}{2}$

$c^2=a^2+b^2$

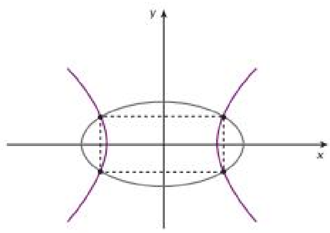
$c^2=\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2+b^2$

$c^2=\frac{3c^2}{4}+b^2$

$\frac{c^2}{4}=b^2 \therefore b=\frac{c}{2}$

$tg\frac{\theta}{2}=\frac{b}{a}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \therefore \theta=60°$

9.



$$\begin{cases} x^2+4y^2=9 \text{ (I)} \\ x^2-y^2=4 \text{ (II)} \end{cases}$$

(I) – (II)

$5y^2=5 \therefore y=\pm 1$

$y=\pm 1 \rightarrow x^2=5 \therefore x=\pm\sqrt{5}$

Assim, os pontos A, B, C e D são $\left(\sqrt{5};1\right)$, $\left(\sqrt{5};-1\right)$ e $\left(-\sqrt{5};-1\right)$, e a área do retângulo ABCD é igual a $2\sqrt{5}\cdot 2=4\sqrt{5}$ unidades de área.

Página 251

1. $2a=4 \therefore a=2$ e $2c=6 \therefore c=3$

$3^2=2^2+b^2 \therefore b^2=5$

$\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{5}=1$

2. $2c=10 \therefore c=5$

$a=5-2=3$

$c^2=a^2+b^2 \rightarrow 5^2=3^2+b^2 \therefore b=4$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

3. a) As coordenadas do centro são (–9; 7).

b) $a^2=16 \therefore a=4$ e $b^2=20 \therefore b=2\sqrt{5}$

$c^2=16+20 \rightarrow c=6$

Assim, as coordenadas dos focos da hipérbole são (–9 –6; 7) = (–15; 7) e (–9 + 6; 7) = (–3; 7)

c) $2c = 12$

d) $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

4. $a^2 = 16$ e $b^2 = 48$

$c^2 = 16 + 48 \therefore c = 8$

Assim, as coordenadas dos focos da hipérbole são (–5; 3 + 8) = (–5; 11) e (–5; 3 –8) = (–5; –5).

5. Na elipse, temos:

$a^2=100 \therefore a=10$ e $b^2=64 \therefore b=8$

$10^2=8^2+c^2 \therefore c=\pm 6$

Assim, o foco de abscissa positiva da elipse tem coordenadas (6; 0) e o vértice de abscissa positiva da elipse tem coordenadas (10; 0) .

a) O centro da hipérbole é o ponto de coordenadas (6; 0).

$$\frac{(x-6)^2}{4^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\downarrow (0,5)$

$$\frac{(0-6)^2}{16}-\frac{5^2}{b^2}=1$$

$$\frac{36}{16}-1=\frac{25}{b^2}$$

$$\frac{20}{16}=\frac{25}{b^2} \Rightarrow b^2=20$$

b) Equação da hipérbole: $\frac{(x-6)^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

c)

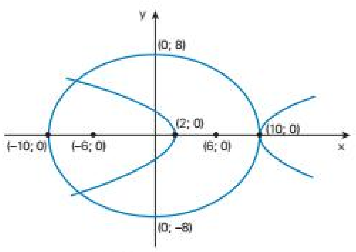


Figura: © DAE

6. a) centro: (3; 2)

vértices: (3; 6) e (3; –2)

$a^2=16 \therefore a=4$ e $b^2=64 \therefore b=8$

$c^2=16+64 \therefore c=4\sqrt{5}$

focos: $\left(3;2+4\sqrt{5}\right)$ e $\left(3;2-4\sqrt{5}\right)$

b) Uma das assíntotas passa pelos pontos (3; 2) , (3+ 8; 6) = (11; 6) e (3–8; –2) = (–5; –2) . Assim, escolhendo dois pontos quaisquer podemos determinar sua equação.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 11 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$2x+11y+18-22-3y-6x=0$

$-4x+8y-4=0 \rightarrow y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

A outra assíntota passa pelos pontos (3; 2), (3 + 8; –2) = = (11; –2) e (3 – 8; 6) = (–5; 6). Novamente escolhendo dois pontos quaisquer determinamos sua equação.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 11 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$2x+11y-6-22-3y+2x=0$

$4x+8y-28=0 \rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$

7. a) $9x^2-25y^2=225$

$$\frac{9x^2}{225}-\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$$

b) $y^2-x^2=4$

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=\frac{4}{4} \rightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$$

c) $2x^2-3y^2=-6$

$$\frac{2x^2}{-6}-\frac{3y^2}{-6}=\frac{-6}{-6} \rightarrow \frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{3}=1$$

8. $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=x \end{cases} \therefore x=1 \text{ e } y=1$

$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=-3x+8 \end{cases} \therefore x=3 \text{ e } y=-1$

$\begin{cases} y=x \\ y=-3x+8 \end{cases} \therefore x=2 \text{ e } y=2$

Assim, os vértices do triângulo são os pontos (1; 1), (3; –1) e (2; 2) e sua área é igual a

$\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|4|=2$ unidades de área.

9) Resposta pessoal.

CAPÍTULO 21 – Parábola

Página 259

1.a) vértice: (0; 0)
foco: (0;1)
reta diretriz: y=–1

b) vértice: (0; 0)
foco: (0; -0,5)
reta diretriz: y=–0,5

c) vértice: (0; 0)
foco: (2;0)
reta diretriz: x=–1

d) vértice: (0; 0)
foco: (–1,5; 0)
reta diretriz: x= – 1,5

2. a) Para cima. **b)** Para baixo.
c) Para a direita. **d)** Para a esquerda.

3. a) O vértice é o ponto (0; 0) e a concavidade da parábola está voltada para cima.

b) A equação da reta diretriz é x = –2 e a concavidade está voltada para a direita.

c) O foco é o ponto (–3; 2) e a concavidade está voltada para a esquerda.

d) O vértice é o ponto (–4; 2) e a concavidade está voltada para baixo.

4. a) V; **b)** F; **c)** V; **d)** F; **e)** V; f) V.

5. a) A equação da reta diretriz é $x = -2$ ou $x + 2 = 0$.

b) $2p=4 \therefore p=2$

$y=\frac{1}{4.2} \therefore x^2=y=\frac{1}{8}\cdot x^2$

6. $x^2=2my \therefore y=\frac{1}{2m}\cdot x^2$

$\frac{1}{4p}=\frac{1}{2m} \therefore p=\frac{m}{2}$

$\frac{m}{2}=4 \therefore m=8$

7. a) O foco da parábola está localizado no eixo das abscissas.

b) $y^2=-20x$

$x=-\frac{1}{20}\cdot y^2$

$4p=20 \therefore p=5$

A equação da reta diretriz é $x = 5$ ou $x - 5 = 0$.

8. $\begin{cases} x^2=4y \\ 4x-4y-3=0 \end{cases}$

$4x-4y-3=0$

$4x-x^2-3=0$
$x^2-4x+3=0$
$x=1$ ou $x=3$

$x=1 \rightarrow 1^2=4y \therefore y=\frac{1}{4}$

$x=3 \rightarrow 3^2=4y \therefore y=\frac{9}{4}$

Assim, os pontos de intersecção da reta e da parábola são $\left(1;\frac{1}{4}\right)$ e $\left(3;\frac{9}{4}\right)$.

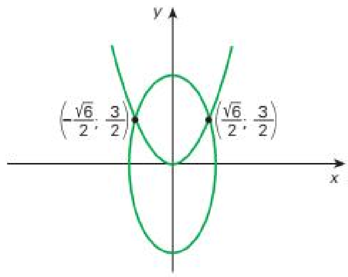
9. $\begin{cases} y=x^2 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$

$\frac{y}{2}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow 2y^2+9y-18=0$

$y=-6 \rightarrow -6=x^2 \therefore x\notin \mathbb{R}$

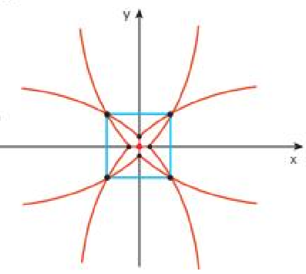
$y=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}=x^2 \therefore x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Assim, os pontos de interseção da parábola e da elipse são $\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$.



10.

Figuras: © DAE



A área do quadrilátero (quadrado) é igual a $2^2 = 4$ unidades de área.

Página 264

1. a) A equação da reta diretriz da parábola é $x = -1$ ou $x + 1 = 0$

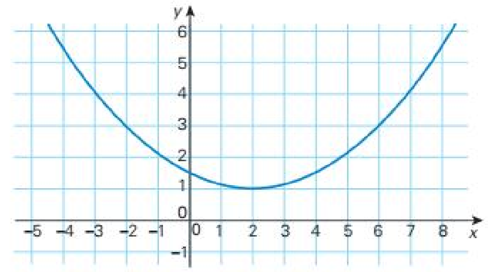
b) $2p = 8 \therefore p = 4$

$$x - 3 = \frac{1}{4 \cdot 4} \cdot (y-4)^2$$

$$x = \frac{1}{16} \cdot (y-4)^2 + 3$$

2.

Figuras: © DAE



vértice : (2; 1)

$$(x-2)^2 = 8 \cdot (y-1)$$

$$\frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 = y - 1$$

$$\frac{1}{4p} = \frac{1}{8} \therefore p = 2$$

foco: (2;1 + 2) = (2; 3)

equação da reta diretriz : $y = -1$ ou $y + 1 = 0$

3. $2p = 3 - (-1) = 4 \therefore p = 2$

a) As coordenadas do vértice da parábola são (1; 5) .

b) $x - 1 = -\frac{1}{4 \cdot 2} \cdot (y-5)^2$

$$x = -\frac{1}{8} \cdot (y-5)^2 + 1$$

4. a)

$$x^2 + 4x - 6y + 22 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2^2 = 6y - 18$$
$$(x+2)^2 = 6 \cdot (y-3)$$

$$\frac{1}{6} \cdot (x+2)^2 = y - 3$$

vértice: (–2; 3)

$$\frac{1}{4p} = \frac{1}{6} \therefore p = \frac{3}{2}$$

$$\text{foco: } \left(-2; 3 + \frac{3}{2}\right) = \left(-2; \frac{9}{2}\right)$$

equação da reta diretriz: $y = 3 - \frac{3}{2} \therefore y = \frac{3}{2}$

b) $y^2 - 2y + 4x + 13 = 0$

$$y^2 - 2y + 1^2 = -4x - 12$$
$$(y-1)^2 = -4 \cdot (x+3)$$

$$-\frac{1}{4} \cdot (y-1)^2 = x + 3$$

vértice: (−3; 1)

$$-\frac{1}{4p} = -\frac{1}{4} \therefore p = 1$$

foco: (−3−1; 1) = (−4; 1)

equação da reta diretriz: $x = -3 + 1 \therefore x = -2$

5. a) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -x^2 + 12x + 28 \end{cases}$

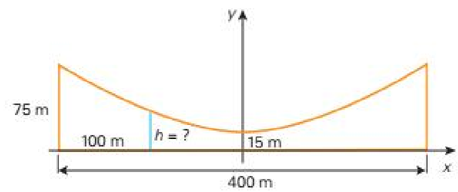
$$x^2 - 4 = -x^2 + 12x + 28$$
$$x^2 - 6x - 16 = 0$$
$$x = 8 \rightarrow y = 8^2 - 4 = 60$$
$$x = -2 \rightarrow y = (-2)^2 - 4 = 0$$

Assim, as parábolas se intersectam nos pontos (8; 60) e (–2; 0) .

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & 60 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$60x - 2y + 120 - 8y = 0$$
$$60x - 10y + 120 = 0$$
$$6x - y + 12 = 0 \text{ ou } y = 6x + 12$$

6. Fixando um sistema de coordenadas como mostra a figura, temos:



Como o vértice da parábola é o ponto (0; 15), temos:

$$y - 15 = \frac{1}{4p} \cdot x^2$$

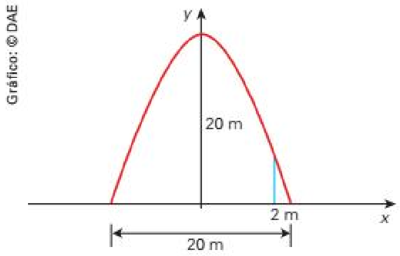
se $x = 200, y = 75$

$$75 - 15 = \frac{1}{4p} \cdot 200^2 \therefore p = \frac{500}{3} \rightarrow y - 15 = \frac{3}{2\,000} \cdot x^2$$

Observe que a altura *h* do cabo está a 100 metros de qualquer uma das extremidades da ponte ou do vértice da parábola. Logo,

se $x = 100 \rightarrow y - 15 = \frac{3}{2\,000} \cdot 100^2 \therefore y = 30$ *metros*

7. Fixando um sistema de coordenadas como mostra a figura, temos:



Como o vértice da parábola é o ponto (0; 20), temos:

$y-20=-\frac{1}{4p}\cdot x^2$

se $x=10, y=0$

$0-20=-\frac{1}{4p}\cdot 10^2 \therefore p=\frac{5}{4} \rightarrow y-20=-\frac{1}{5}\cdot x^2$

se $x=8 \rightarrow y-20=-\frac{1}{5}.8^2 \therefore y=7{,}2$ metros

8. Resposta pessoal.

Vestibulares e Enem

Página 266

1. Centro da elipse: (2; 3)

$2a=6 \therefore a=3$

$2b=4 \therefore b=2$

Logo,

$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

2. Alternativa e. A circunferência de equação $x^2+y^2=9$ possui centro em (0; 0) e raio igual a 3.

A parábola de equação $y=-x^2-1$, com x variando de -1 a 1, possui concavidade voltada para baixo e ordenada do vértice igual a $-\frac{0^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)}{4\cdot(-1)}=-1$.

Portanto, a única alternativa possível é a alternativa E.

3. Alternativa d.

$2a=100 \therefore a=50$

$2b=60 \therefore b=30$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 50^2=30^2+c^2 \therefore c=40$

Logo, a distância pedida é dada por $2\cdot 40=80$ m.

4. Alternativa a. Considerando o foco como sendo o ponto (3; 2), temos:

Diretriz da parábola: $x=-4$

$2p=3-(-4) \therefore p=\frac{7}{2}$

Vértice: $\left(\frac{-4+3}{2};2\right)=\left(-\frac{1}{2};2\right)$

Logo,

$x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4\cdot\frac{7}{2}}(y-2)^2 \Rightarrow 14\left(x+\frac{1}{2}\right)=(y-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7(2x+1)=(y-2)^2$

5. Alternativa c.

$2a=20 \therefore a=10$

$2b=16 \therefore b=8$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 10^2=8^2+c^2 \therefore c=6$

A distância do vértice ao foco é igual a $10-6=4$ m. Como há 1 metro entre as extremidades da elipse e a parede, o resultado pedido é 5 m.

6. Alternativa c.

$(x-2)^2+4(y+5)^2=36 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{6^2}+\frac{(y+5)^2}{3^2}=1$

Esta equação representa uma elipse com as seguintes características:

Eixo maior paralelo ao eixo das abscissas;

Centro: (2; – 5);

Semieixo maior: $a=6$

Semieixo menor: $b=3$

Assim, $m=2+6=8$

e $n=-5+3=-2$

Logo, $m+n=6$.

7. $x^2+4y^2=9 \rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$

01) Correto. A equação, representa uma elipse centrada na origem, com $a=3$ e $b=\frac{3}{2}$.

02) Correto. $y=0 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{0^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1 \therefore x=\pm 3$.

04) Correto. Pela definição de elipse, temos AD + AE = = BD + BE. Como $\overline{DE}$ é lado comum, segue que os triângulos têm o mesmo perímetro.

08) Incorreto. As extremidades da elipse são os pontos: (-3;0), (3;0), $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ e $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

16) Correto. $\left(2\sqrt{2};\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=8+1=9\cdot$

8. Alternativa c. $16x^2+25y^2=400 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

e

$16x^2+9y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$

A área pedida é dada por

$\pi\cdot(5\cdot 4-4\cdot 3)=8\pi$ u.a.

9. Alternativa d. Seja r a reta que passa por A(0; 3) e B(4; 0), temos que:

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0 \therefore y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Os pontos R e S satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{4}x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - 3 = 0$$

Como as soluções da equação $x^2 + \frac{3}{4}x - 3 = 0$ correspondem às abscissas dos pontos R e S, a soma das mesmas é dada por $-\dfrac{\frac{3}{4}}{1} = -0{,}75$.

10. a) $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = 2x \end{cases}$

$x^2 - 3x + 4 = 2x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \therefore x = 1$ ou $x = 4$

$x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$

$x = 4 \rightarrow y = 2 \cdot 4 = 8$

Logo, os pontos de intersecção são (1; 2) e (4; 8).

b) $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = mx \end{cases}$

$x^2 - 3x + 4 = mx \qquad x^2 - (3 + m) \cdot x + 4 = 0$

Para que a equação tenha apenas uma solução real, temos que ter $\Delta = 0$. Assim,

$[-(3 + m)] - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$9 + 6m + m^2 - 16 = 0$

$m^2 + 6m - 7 = 0 \therefore m = -7$ ou $m = 1$

11. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 - 2x + 2y = 0 \therefore y = x + 2$

b) Seja a o coeficiente dominante da parábola, temos: $y = a(x - 2) \cdot (x - 4)$

Como o ponto (0; 8) pertence a essa parábola, temos:

$8 = a(0 - 2) \cdot (0 - 4) \rightarrow 8 = 8a \therefore a = 1$

Logo,

$y = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) \rightarrow y = x^2 - 6x + 8$

c) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$

$x + 2 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \therefore x = 1$ *ou* $x = 6$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 2 = 3$

$x = 6 \Rightarrow y = 6 + 2 = 8$

Logo, os pontos de intersecção da reta com a parábola são (1; 3) e (6; 8).

12. Elipse:

$\dfrac{12}{a} = 0{,}8 \therefore a = 15$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 15^2 = b^2 + 12^2 \therefore b = 9$

Equação da elipse: $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

Hipérbole:

$\dfrac{12}{a} = 2{,}4 \therefore a = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 12^2 = 5^2 + b^2 \therefore b = \sqrt{119}$

Equação da hipérbole: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{119} = 1$

01) Falsa. A excentricidade de qualquer hipérbole é maior do que 1.

02) Verdadeira. O centro é (0;0) e o valor do semieixo real da hipérbole é 5.

04) Verdadeira. Como os focos são os mesmos para a elipse e a hipérbole, elas sempre terão 4 pontos em comum.

08) Verdadeira.

16) Verdadeira.

$x = 0 \rightarrow \dfrac{0^2}{225} + \dfrac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow y^2 = 81 \therefore y = \pm 9.$

13. $x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + a(y - 1)^2 = a + 1.$

$a = 1 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ (equação de circunferência)

$a = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$ (equação de duas retas)

$a = 3 \Rightarrow (x + 1)^2 + 3(y - 1)^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{\frac{4}{3}} = 1$

(equação de elipse)

$a = -2 \Rightarrow (x + 1)^2 - 2(y - 1)^2 = -1 \Rightarrow \dfrac{(y - 1)^2}{\frac{1}{2}} - (x + 1)^2 = 1$

(equação de hipérbole)

$a = -1 \Rightarrow (x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -x$ ou $y = x + 2$

(equação de duas retas)

14. Alternativa c.

$\begin{cases} 2(x + y) = 300 \\ xy = 5000 \end{cases} \therefore x = 100$ e $y = 50$ ou $x = 50$ e $y = 100$

Como $x > y$, segue que $x = 100$ e $y = 100$

Seja $2c$ a distância focal, temos:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2+c^2 \Rightarrow 50^2=25^2+c^2 \therefore c=25\sqrt{3}\ m$$

Logo, $2c=2\cdot 25\sqrt{3}=50\sqrt{3}\ m$

15. Para o raio de luz refletido no ponto (1; 1), a direção da reta é dada por $4y-3x=1$. Para o raio de luz refletido no ponto (2; 4), a direção da reta é dada por $8y-15x=2$.

Assim, o ponto procurado é dado por:

$$\begin{cases} 4y-3x=1 \\ 8y-15x=2 \end{cases} \therefore \left(0; \frac{1}{4}\right)$$

16. Alternativa a.

$$\begin{cases} y=x+b \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \therefore 5x^2+8bx+4b^2-4=0$$

Para que haja apenas um ponto em comum, temos que ter $\Delta = 0$. Assim,

$$(8b)^2-4\cdot 5\cdot\left(4b^2-4\right)=0 \therefore b=\pm\sqrt{5}$$

Logo, a soma será igual a zero.

17. a)

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y-2=x+2 \Rightarrow y=x+4 \end{cases}$$

$$x+4=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2+4x-1=0 \therefore x=-2+\sqrt{5} \text{ ou } x=-2-\sqrt{5}$$

$$x=-2+\sqrt{5} \Rightarrow y=\frac{1}{-2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$$

$$x=-2-\sqrt{5} \Rightarrow y=\frac{1}{-2-\sqrt{5}}=-\sqrt{5}+2$$

Logo, os pontos de intersecção são:

$$\left(-2+\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\right) \text{ e } \left(-2-\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}\right)$$

b) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y-2=-x-2 \Rightarrow y=-x \end{cases}$

$$\frac{1}{x}=-x \Rightarrow x^2=-1\ (x \notin \mathbb{R})$$

Logo, não há intersecção entre a hipérbole e a reta.

c) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y-2=m\cdot(x+2) \Rightarrow y=m\cdot(x+2)+2 \end{cases}$

Para que a equação tenha solução única o temos que ter $\Delta = 0$. Assim,

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2m+2)^2-4m\cdot(-1)=0=m^2+3m+1$$

$$=0 \therefore m=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{x}=m\cdot(x+2)+2 \Rightarrow mx^2+2mx+2x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mx^2+(2m+2)\cdot x-1=0$$

Além disso, observe que, se $m = 0$, temos a reta $y = 2$, que intercepta a hipérbole em um único ponto: $\frac{1}{2}; 2$.

Desafio

Vamos supor que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são perpendiculares ao eixo das abscissas. Seja x a medida dos lados do losango FHCG, temos:

$$S_{FHCG}=\frac{1}{2}S_{ABHFG} \quad 2\cdot\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{m^2\sqrt{3}}{4}\right)-2\cdot\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

$$6x^2 = m^2 \therefore x=\frac{m}{\sqrt{6}}$$

Como o triângulo GCH é equilátero, temos:

$GO=\dfrac{\frac{m}{\sqrt{6}}}{2}=\dfrac{m}{2\sqrt{6}}$, que corresponde ao semieixo menor da elipse, e $OC=\dfrac{\frac{m}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3}}{2}=\dfrac{m}{2\sqrt{2}}$, que corresponde ao semieixo maior da elipse.

Logo,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{6}}\right)^2}=1 \Rightarrow 8x^2+24y^2-m^2=0$$