XXI Torneio Internacional das Cidades
Outono de 1999

Júnior− Nível 0

Sua pontuação total é baseada nos três problemas em que você obteve mais pontos; os pontos dos ítens de um problema são somados. A pontuação máxima que pode ser obtida em cada problema é mostrada entre colchetes [ ].

1

(a) Um triângulo retângulo feito de papel é dobrado ao longo de uma reta de tal forma que o vértice do ângulo reto coincide com um dos outros vértices. Em qual razão as diagonais do quadrilátero obtido dividem−se ?

[2 pontos]

(b) Um triângulo retângulo de área 1 feito de papel é dobrado ao longo de uma reta de tal forma que o vértice do ângulo reto coincide com um dos outros vértices. O quadrilátero obtido é dividido pela diagonal que passa pelo terceiro vértice do triângulo. Determine a área do menor pedaço de papel determinado por esta divisão.

[2 pontos]

2

Triplas de inteiros a, b, c para as quais $a+b+c=0$ são consideradas. Para cada tripla calculamos o inteiro $d=a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}$.

(a) Podemos ter $d=2$?

[2 pontos]

(b) Podemos ter d primo ?

[2 pontos]

3

n retas são traçadas no plano de tal forma que cada uma intersecte exatamente 1999 outras. Determine n (dê todas as respostas possíveis)

[4 pontos]

4

Na Itália, fabricantes produzem relógios nos quais o ponteiro das horas dá uma volta a cada 24 *horas*, enquanto que o ponteiro dos minutos dá 24 *voltas*; o ponteiro dos minutos é maior do que o ponteiro das horas(num relógio comum, o ponteiro das horas dá *duas* voltas a cada 24 horas enquanto que o dos minutos dá 24). Quantas posições dos dois ponteiros e da marca 0 podem ocorrer nos relógios italianos num intervalo de 24 *horas* e também nos relógios comuns ? (a marca 0 é a posição marcando 24 *horas* no relógio italiano e 12*horas* no relógio comum)

[4 pontos]

5

São dados cartões 2×1 de cartolina com uma diagonal desenhada em cada um. Assim, há dois tipos de cartões (já que as diagonais podem ser traçadas de duas formas) e dispõe−se de um suprimento ilimitado de cada tipo. É possível escolher 18 cartões e dispô−los em um quadrado 6×6 de tal forma que os extremos das diagonais nunca coincidam ?

[4 pontos]

XXI Torneio Internacional das Cidades
Outono de 1999

Sênior− Nível 0

Sua pontuação total é baseada nos três problemas em que você obteve mais pontos; os pontos dos ítens de um problema são somados. A pontuação máxima que pode ser obtida em cada problema é mostrada entre colchetes [ ].

1

O incentro de um triângulo é ligado a seus vértices. Desta forma, o triângulo fica dividido em três triângulos menores. Um destes triângulos é semelhante ao triângulo original. Determine seus ângulos.

[4 pontos]

2

Prove que existem infinitos inteiros positivos ímpares n para os quais $2^n + n$ é composto.

[4 pontos]

3

n planos são traçados no espaço de tal forma que cada uma intersecte exatamente 1999 outros. Determine n (dê todas as respostas possíveis)

[4 pontos]

4

É possível escolher 50 *intervalos* (possívelmente com superposição) na reta real satisfazendo as suas seguintes condições ?

(a) os comprimentos dos intervalos são $1, 2, 3, \ldots, 50$?
(b) os extremos dos intervalos são todos os inteiros de 1 a 100.

[4 pontos]

5

São dados cartões 2×1 de cartolina com uma diagonal desenhada em cada um. Assim, há dois tipos de cartões (já que as diagonais podem ser traçadas de duas formas) e dispõe−se de um suprimento ilimitado de cada tipo. É possível escolher 32 cartões e dispô−los em um quadrado 8×8 de tal forma que os extremos das diagonais nunca coincidam ?

[4 pontos]