Aula 05 – Trigonometria I

ITA 2021

Professor Victor So

Sumário

Introdução

Olá,

Vamos iniciar o estudo sobre trigonometria. Esse tema é muito cobrado nos concursos militares. Veremos todos os conceitos fundamentais que precisamos para resolver as questões dos concursos e vamos aprender a resolver cada tipo de questão das provas anteriores!

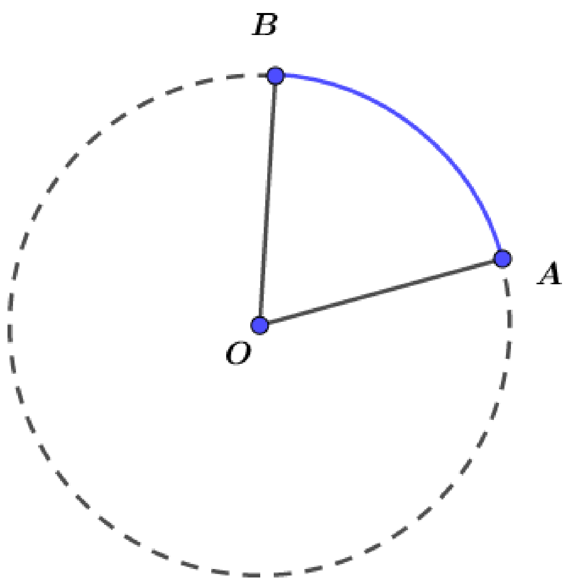
Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!

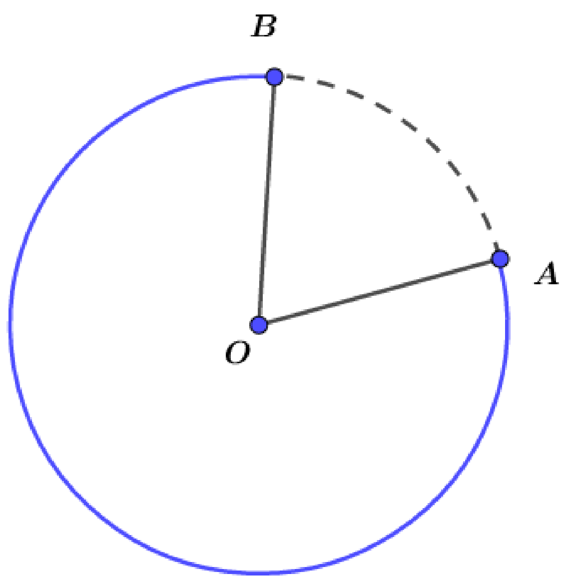
1. Elementos Básicos da Trigonometria

1.1. Conceitos Fundamentais

1.1.1. Arcos de Circunferência

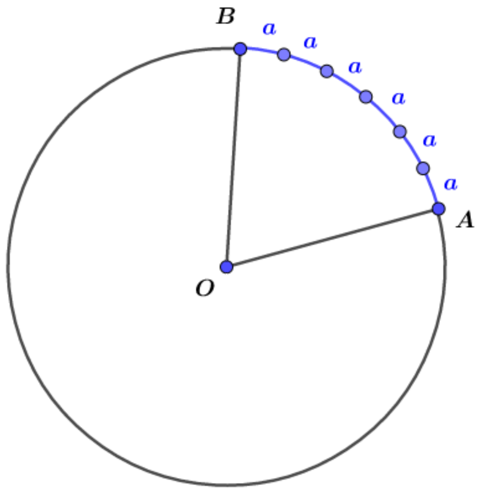
Tomando-se dois pontos A e B em uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes é um arco de circunferência. A e B são as extremidades desses arcos.





1.1.2. Medida de um arco

Para medir arcos de circunferência, precisamos estabelecer uma unidade de medida. Vamos definir a nossa unidade de medida como o arco α. Então, a medida de um arco $\widehat{AB}$ é determinada pela quantidade de arco α que cabem nela:



Nesse exemplo, o arco $\widehat{AB}$ equivale a 6 arco a:

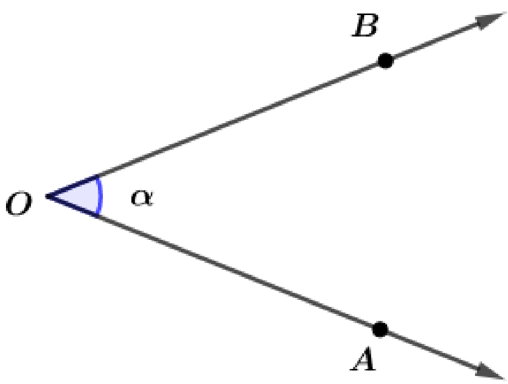
$$\widehat{AB} = 6 \cdot arco\ a$$

Usando termos mais genéricos, temos:

$$\widehat{AB} = \frac{\textbf{comprimento de } \widehat{AB}}{\textbf{comprimento da unidade}}$$

1.1.3. Ângulo

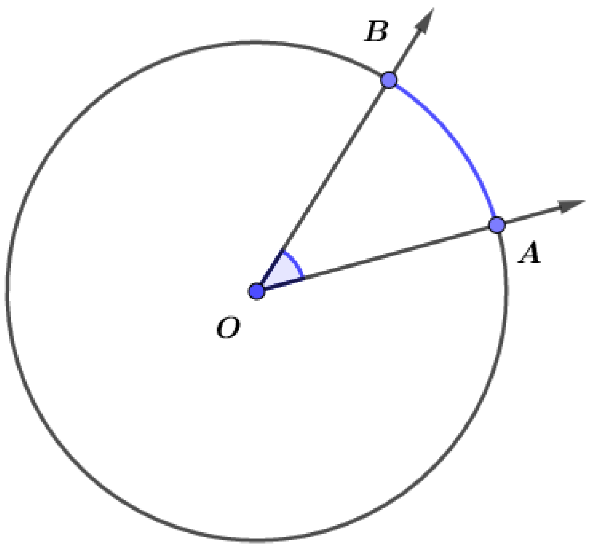
Dados duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O, a diferença de direção entre elas determina um ângulo:



α é o ângulo $A\hat{O}B$.

Geralmente, usamos o alfabeto grego para nomear os ângulos: α (alfa), β (beta), γ (gama), θ (teta).

1.1.4. Medida de um ângulo

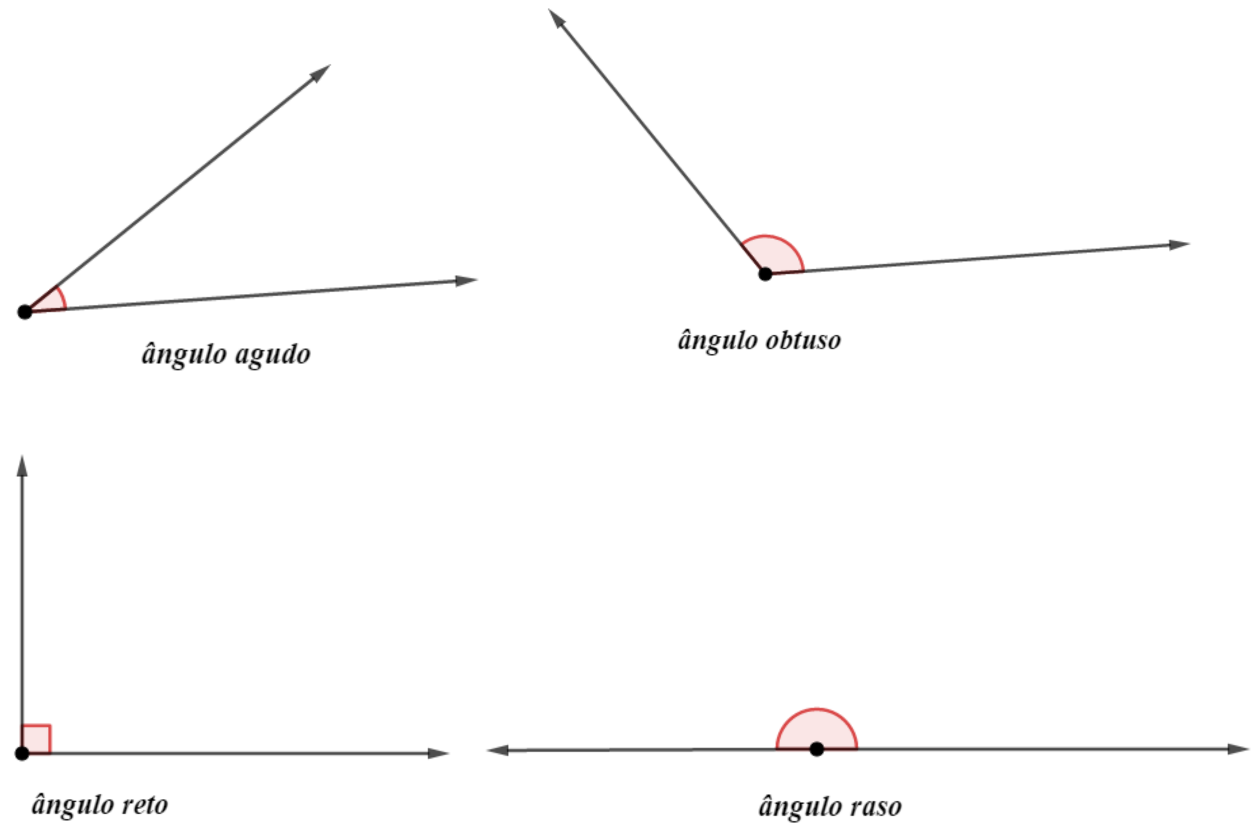


O ângulo central $A\hat{O}B$ é igual à medida do arco $\widehat{AB}$ no caso em que o raio da circunferência é unitário:

$$\boldsymbol{A\hat{O}B = \widehat{AB}}$$

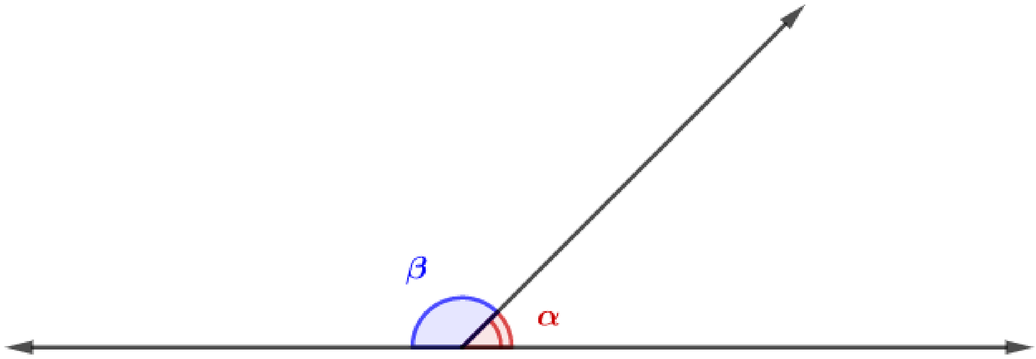
1.1.5. Classificação dos ângulos

Os ângulos podem ser classificados nos seguintes tipos:



1.1.6. Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é $180°$.

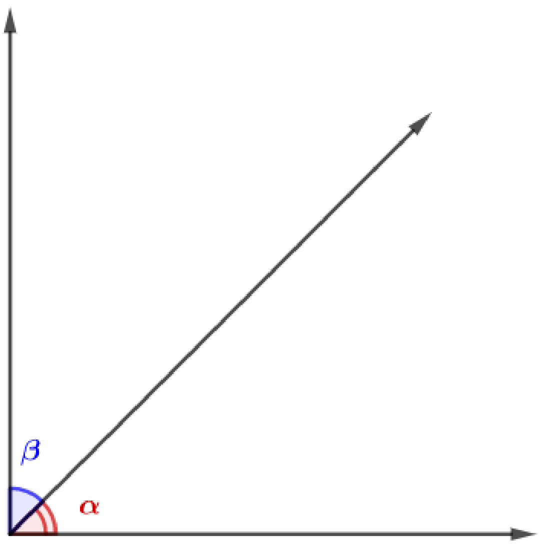


α e β são ângulos suplementares:

$$\alpha + \beta = 180°$$

1.1.7. Ângulos complementares

Dois ângulos são complementares quando sua soma é $90°$.

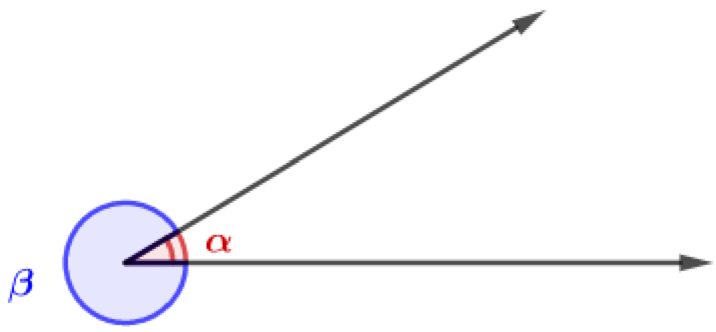


α e β são ângulos complementares:

$$\alpha + \beta = 90°$$

1.1.8. Ângulos replementares

Dois ângulos são replementares quando sua soma é $360°$.

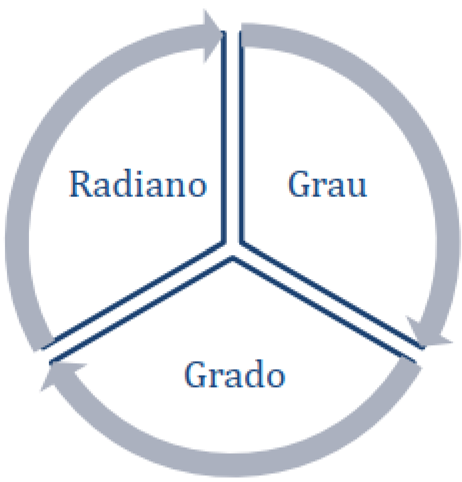


α e β são replementares:

$$\alpha + \beta = 360°$$

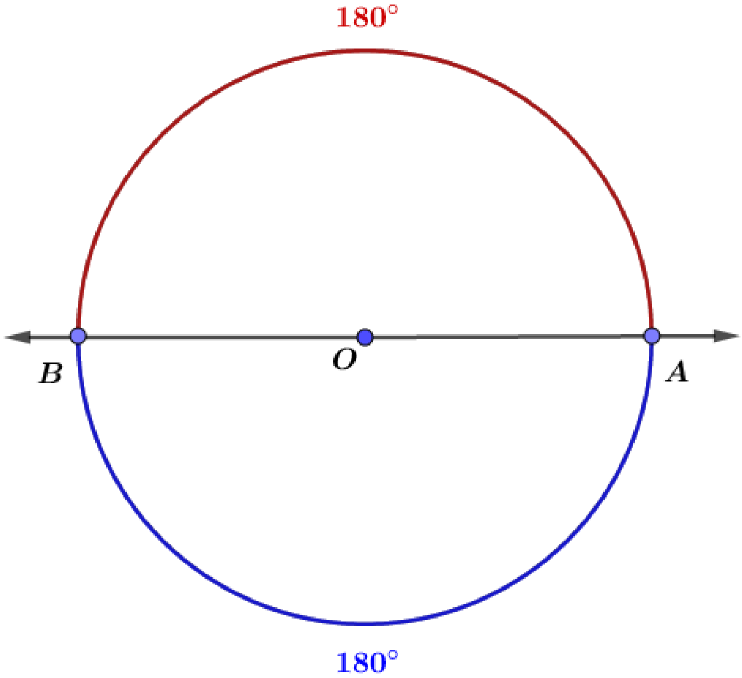
1.1.9. Unidades usuais de medidas

Vimos que para medir um arco de circunferência, precisamos estabelecer uma unidade de medida como referência. Atualmente, temos três unidades de medidas mais famosos: grau, grado e radiano. Vamos estudar cada um deles:



I) Grau:

Um grau $(1°)$ é a unidade de medida determinada pela divisão de uma circunferência em 360 partes iguais. Assim, se dividimos uma circunferência no meio, cada arco que obtemos terá a medida de 180°.



O grau pode ser subdividido em duas outras:

Definimos um minuto por $1'$ e ele equivale a $1/60$ do ângulo de um grau.

Um segundo é representado por $1''$ e equivale a 1/60 do ângulo de um minuto.

Dessa forma, temos as seguintes relações:

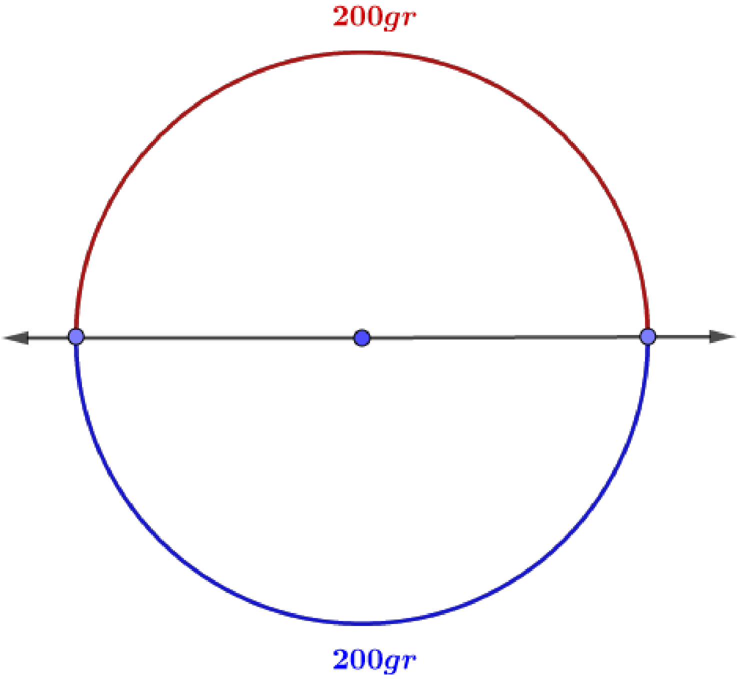
$$1' = \frac{1°}{60}\ e\ 1'' = \frac{1'}{60}$$

$$\boxed{1° = 60'\ (60\ minutos)}$$

$$\boxed{1' = 60''\ (60\ segundos)}$$

II) Grado

Um grado $(1\ gr)$ é a unidade de medida determinada pela divisão da circunferência em 400 partes iguais. Dessa forma, se dividimos a circunferência no meio, cada arco terá a medida de $200\ gr$.



III) Radiano

Um radiano $(1\ rad)$ é a unidade de medida igual ao comprimento do raio da circunferência. O comprimento total de uma circunferência é dado por:

$$C = 2\pi r$$

Onde r é o raio da circunferência e C é o seu comprimento total.

π, lê-se "pi", e seu valor numérico é aproximadamente:

$$\pi \cong 3{,}14$$

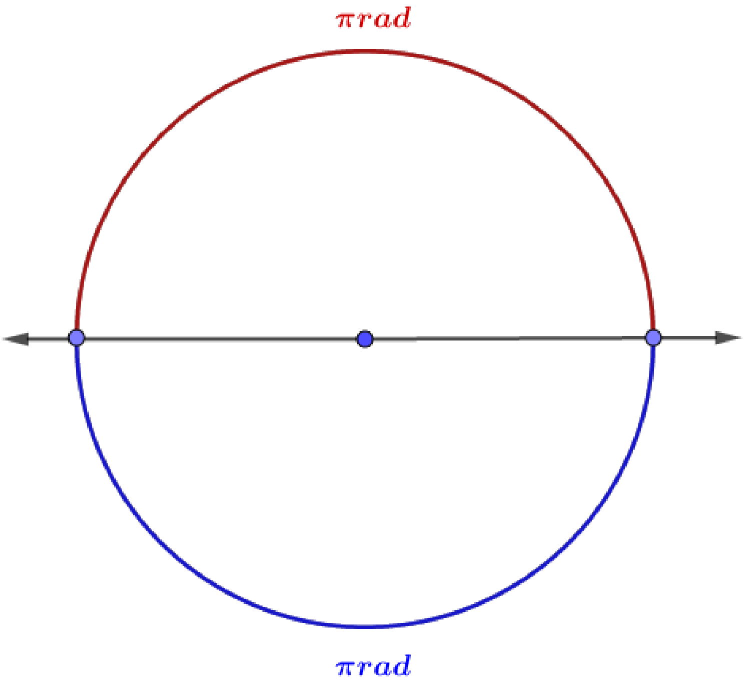
Então, usando a fórmula:

$$\boldsymbol{\widehat{AB} = \frac{comprimento\ de\ \widehat{AB}}{comprimento\ da\ unidade}}$$

E tomando $\widehat{AB}$ como o arco de uma volta completa na circunferência, temos:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

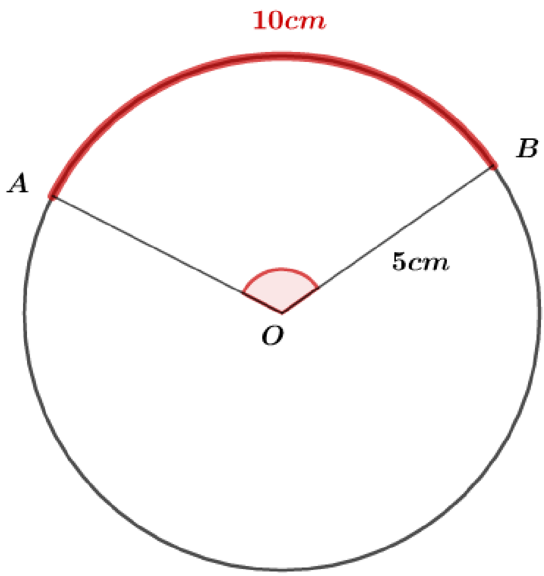
Assim, o arco de uma volta completa corresponde a $2\pi\ rad$.



Veja o exemplo:

1) Um arco de circunferência $\widehat{AB}$ mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos:

Temos a seguinte figura:



Vamos usar a fórmula da medida do arco:

$$\widehat{AB} = \frac{comprimento\ \widehat{AB}}{comprimento\ raio}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10\ cm}{5\ cm} = 2\ rad$$

Vimos os três principais tipos de medidas usadas para os ângulos. Podemos estabelecer a seguinte equivalência entre elas:

$$2\pi\ rad = 360° = 400\ gr$$

A tabela abaixo esquematiza essas relações:

Grau	Grado	Radiano
$360°$	$400gr$	$2\pi\ rad$
$180°$	$200gr$	$\pi\ rad$

1.1.10. Conversão de unidades de medida

Para converter ângulos em sistemas de medidas diferentes, podemos aplicar a regra de três. Sendo G a medida em graus e g a medida em grados, a conversão de graus em radianos é dada por:

$$360° - 400\ gr$$

$$G - g$$

Aplicando a regra de três, temos:

$$360g = 400G$$

$$g = \frac{10}{9}G$$

Para converter graus em radianos, podemos usar a mesma ideia. Sendo r a medida em radianos:

$$360° - 2\pi\ rad$$

$$G - r$$

$$360r = 2\pi G$$

$$r = \frac{\pi}{180}G$$

Vejamos um exemplo:

Vamos fazer a conversão de 240° em grado e em radianos:

Chamando de x e y os valores que queremos calcular, temos:

$$360° - 2\pi\ rad$$

$$240° - x$$

Aplicando a regra de três:

$$360x = 240 \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi\ rad$$

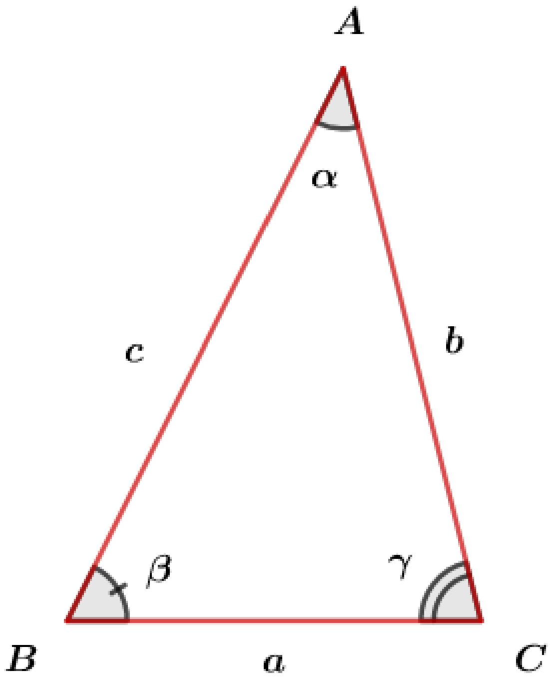
Analogamente para grados:

$$360° - 400gr$$

$$240° - y$$
$$360y = 240 \cdot 400$$
$$y = \frac{800}{3} gr$$

1.1.11. Triângulo

Um triângulo é determinado por 3 pontos não colineares (que não estão em uma mesma reta):



No triângulo temos os seguintes elementos:

a) Vértices: A, B, C

b) Medida dos lados: $\overline{AB} = b, \overline{BC} = a, \overline{AC} = c$

c) Ângulos internos: $B\hat{A}C = \hat{A} = \alpha, A\hat{B}C = \hat{B} = \beta, A\hat{C}B = \hat{C} = \gamma$

Temos também a seguinte propriedade:

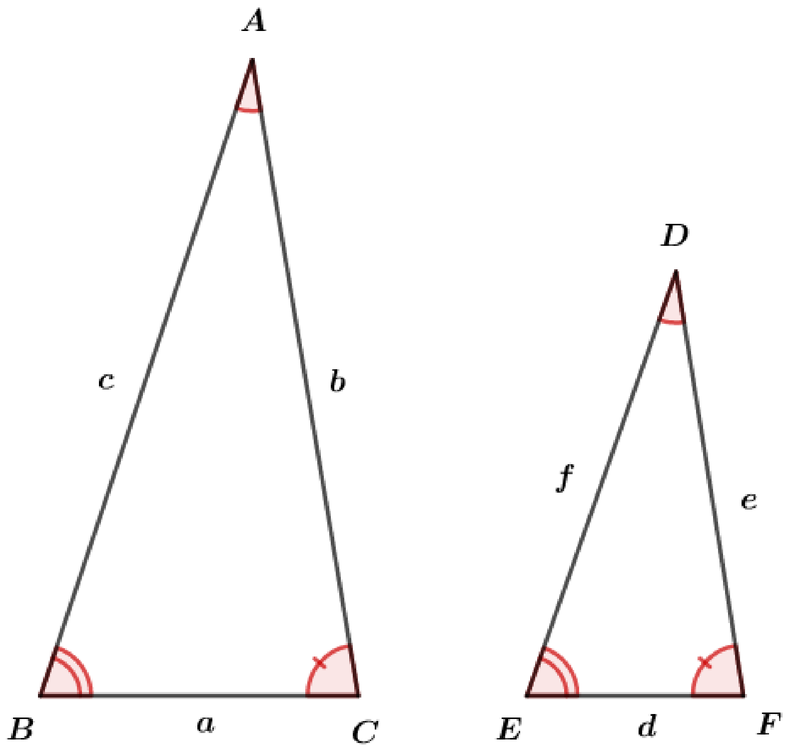
$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi}$$

Veremos a sua demonstração na aula de Geometria Plana.

1.1.12. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são ditos semelhantes quando os seus lados forem proporcionais entre si e os seus ângulos correspondentes forem congruentes.

Veja:



Os triângulos ABC e DEF são semelhantes:

$$\hat{A} \equiv \hat{D}$$

$$\hat{B} \equiv \hat{E}$$

$$\hat{C} \equiv \hat{F}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = \frac{b}{e}$$

1. Transforme para radianos os seguintes ângulos dados em graus:

a) $120°$

b) $135°$

c) $150°$

d) $210°$

e) $225°$

f) $240°$

g) $300°$

h) 315°

i) 330°

j) 360°

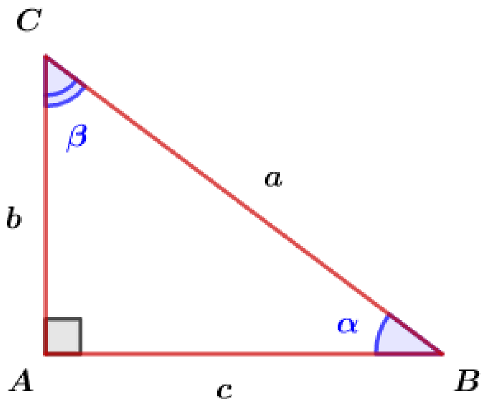
Resolução:

Arco em graus	Arco em radianos
120°	$120° = 120° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{2}\cancel{120°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{2\pi}{3} rad$
135°	$135° = 135° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{3}\cancel{135°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{3\pi}{4} rad$
150°	$150° = 150° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{150°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{6} rad$
210°	$210° = 210° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{7}\cancel{210°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{7\pi}{6} rad$
225°	$225° = 225° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{225°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{4} rad$
240°	$240° = 240° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{4}\cancel{240°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{4\pi}{3} rad$
300°	$300° = 300° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{300°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{3} rad$
315°	$315° = 315° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{7}\cancel{315°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{7\pi}{4} rad$
330°	$330° = 330° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{11}\cancel{330°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{11\pi}{6} rad$
360°	$360° = 360° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{2}\cancel{360°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{1}\cancel{180°}} = 2\pi\, rad$

Gabarito: a) $\frac{2\pi}{3} rad$ b) $\frac{3\pi}{4} rad$ c) $\frac{5\pi}{6} rad$ d) $\frac{7\pi}{6} rad$ e) $\frac{5\pi}{4} rad$ f) $\frac{4\pi}{3} rad$ g) $\frac{5\pi}{3} rad$ h) $\frac{7\pi}{4} rad$ i) $\frac{11\pi}{6} rad$ j) $2\pi\, rad$

2. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Um triângulo é classificado como triângulo retângulo quando um de seus ângulos for igual a 90°:



No triângulo retângulo, chamamos de hipotenusa o lado BC e de catetos os lados AB e AC.

Na trigonometria temos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Além dessas, temos as razões secante, cossecante e cotangente. Elas são dadas por:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} = \frac{a}{c}$$

$$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{c}{b}$$

Perceba que também podemos escrever tangente como:

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

Para a cotangente, temos:

$$cotg\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\boxed{cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$$

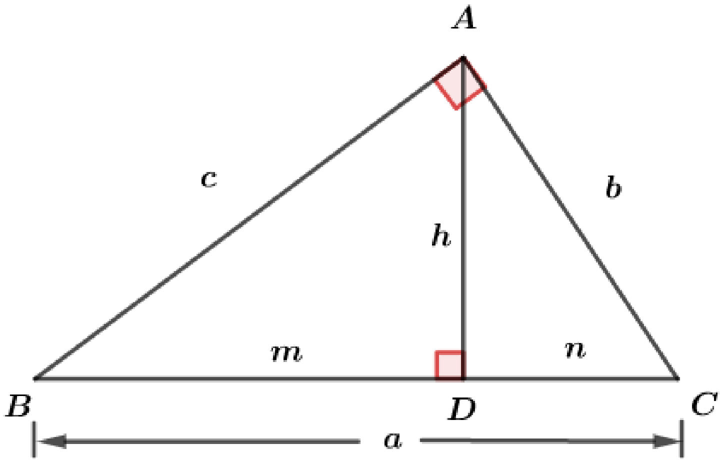
Ainda, das relações do triângulo retângulo, temos o **Teorema de Pitágoras**:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

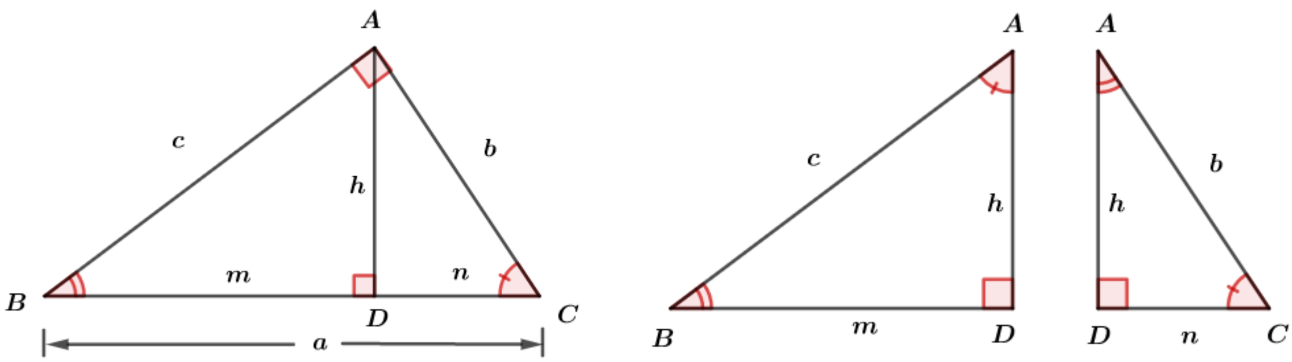
O Teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração:

Considere o seguinte triângulo ABC:



Note que os triângulos ABC, ABD, CAD são semelhantes:



Assim, podemos escrever a seguinte razão de proporção entre os triângulos semelhantes:

$$ABC \sim ADC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an$$

$$ABC \sim ABD \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am$$

Somando essas duas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am$$

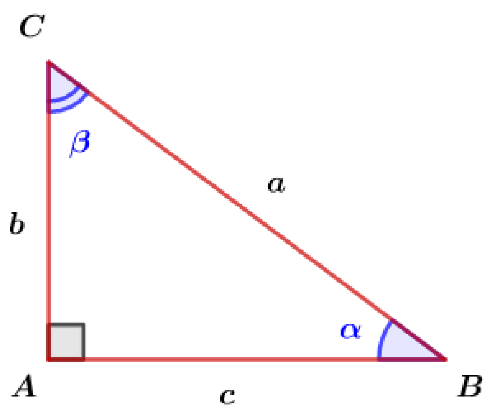
$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $m + n = a$, substituindo na equação, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

2.1. Relação Fundamental

Dado o seguinte triângulo retângulo, temos:



$$sen\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\, sen\alpha$$
$$cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\, cos\alpha$$

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a relação fundamental entre seno e cosseno:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = (asen\alpha)^2 + (acos\alpha)^2$$
$$a^2 = a^2 sen^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$$
$$\boxed{\boldsymbol{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}}$$

Podemos, então dizer que a soma dos quadrados do seno e cosseno de um ângulo vale 1.

Se dividirmos a equação da relação fundamental por $\cos^2\alpha$, obtemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\boxed{\boldsymbol{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}}$$

Se dividirmos por $sen^2\alpha$, obtemos:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$$
$$\boxed{\boldsymbol{1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha}}$$

Essas relações são muito úteis para resolver as questões do militares. Então, decore!

Além dessas apresentadas, temos mais duas que podem ajudar a resolver a questões da prova:

$$\boxed{\boldsymbol{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}$$

Demonstração:

Sabemos que $sec\alpha = 1/cos\alpha$, assim, temos:

$$\cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{\sec^2\alpha}$$

Usando a relação fundamental $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$, obtemos:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$

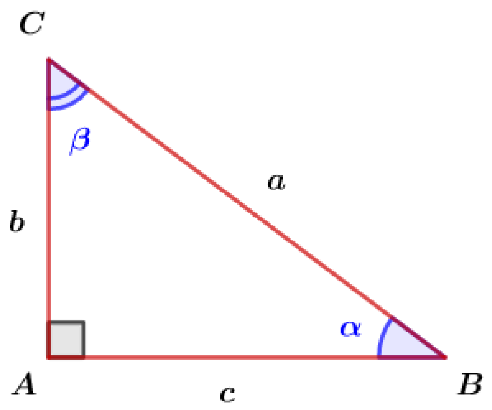
Para $cossec\alpha$:

$$sen\alpha = \frac{1}{cossec\alpha} \Rightarrow sen^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow sen^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

2.2. Ângulos Complementares

Das relações do triângulo, temos:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

Na figura, $\hat{A} = \pi/2$. Substituindo na equação acima:

$$\frac{\pi}{2} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares

Dessa relação, temos as seguintes consequências:

$$sen\alpha = \frac{b}{a} \text{ e } cos\beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = cos\beta$$

$$sen\beta = \frac{c}{a} \; e \; cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow sen\beta = cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{b}{c} \; e \; cotg\beta = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = cotg\beta = \frac{1}{tg\beta}$$

$$tg\beta = \frac{c}{b} \; e \; cotg\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow tg\beta = cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

ESQUEMATIZANDO

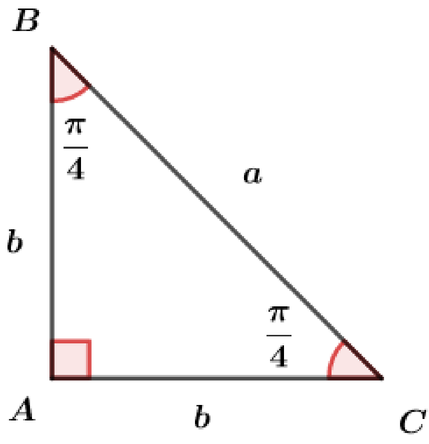
$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
$sen\alpha = cos\beta$
$sen\beta = cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$
$tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

2.3. Ângulos Notáveis

Os ângulos $\pi/6, \pi/4$ e $\pi/3$ são considerados ângulos notáveis. Vamos calcular o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

1) $\pi/4$:

Considere o seguinte triângulo isósceles:



Através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

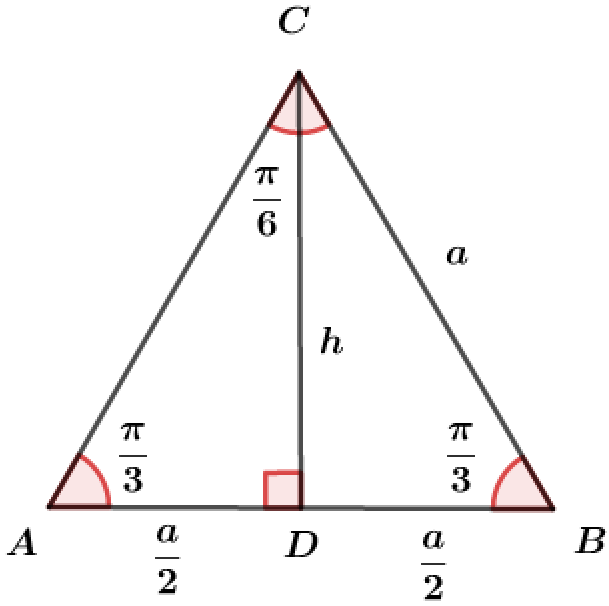
$$a^2 = b^2 + b^2$$
$$a^2 = 2b^2$$
$$a = \sqrt{2}b$$

Usando a definição de seno, cosseno e tangente, obtemos:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

2) $\pi/6$ e $\pi/3$:

Agora, considere o triângulo equilátero:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Calculando o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

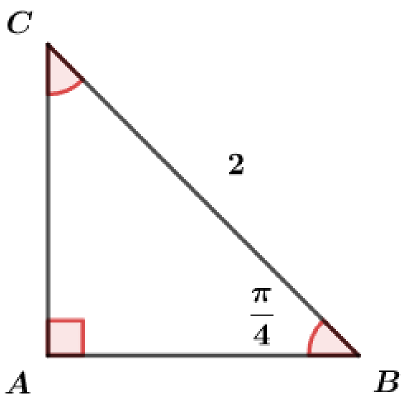
Podemos construir a tabela dos ângulos notáveis:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

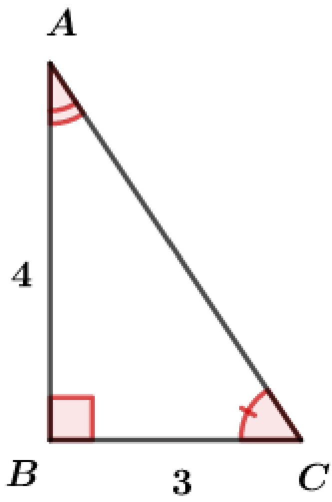
Exercícios de Fixação

2. Dados os triângulos abaixo, calcule o valor dos lados que faltam:

a)



b)



Resolução:

a) Conhecemos o valor do $sen(\pi/4)$, podemos calcular o valor dos catetos usando a seguinte razão:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) Basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

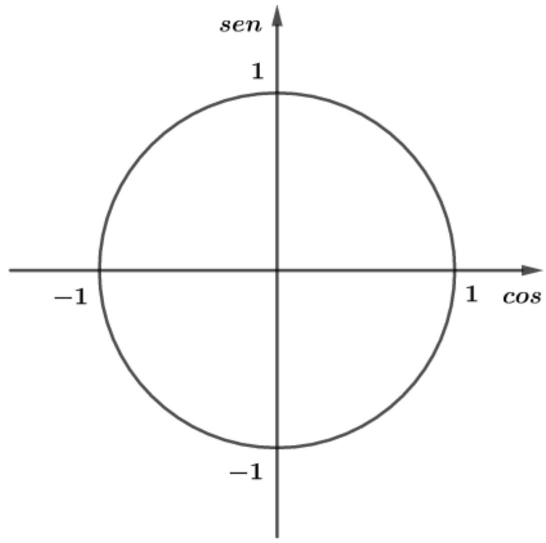
$$AC = \sqrt{25} = 5$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{AB = \sqrt{2}}$ b) $\boldsymbol{AC = 5}$

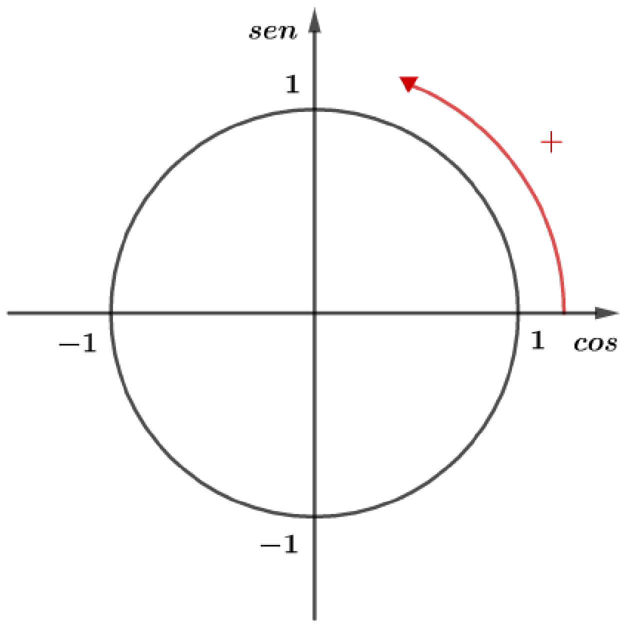
3. Ciclo Trigonométrico

3.1. Definição

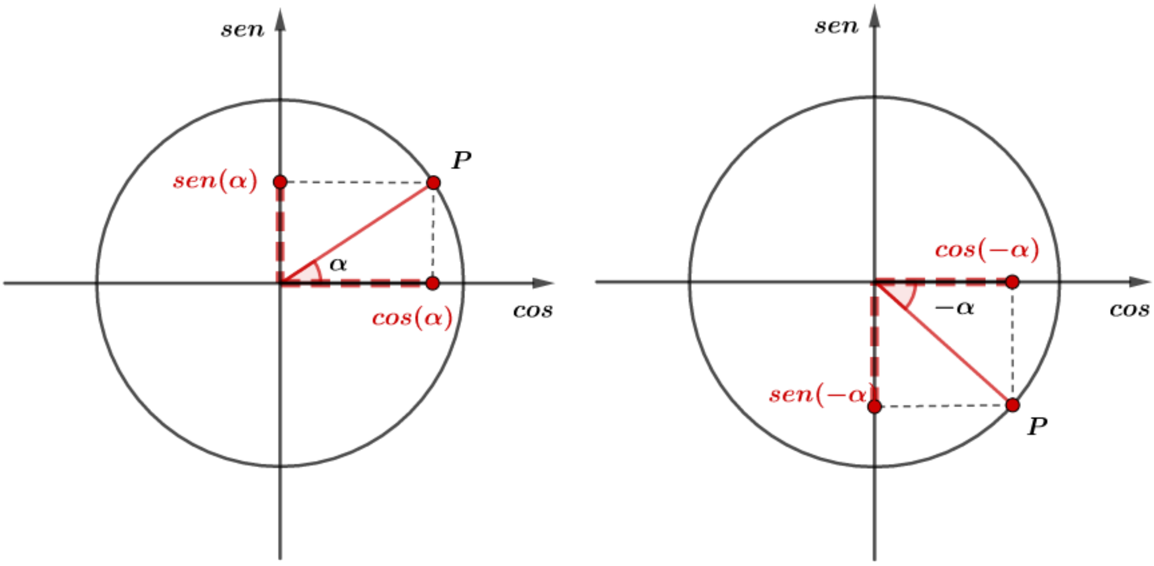
O ciclo trigonométrico ou círculo trigonométrico é a representação de uma circunferência de raio 1 em um plano cartesiano ortogonal, onde o eixo horizontal é o cosseno e o eixo vertical é o seno:



No ciclo trigonométrico, o sentido de rotação positivo é o anti-horário e a origem se dá no extremo à direita:

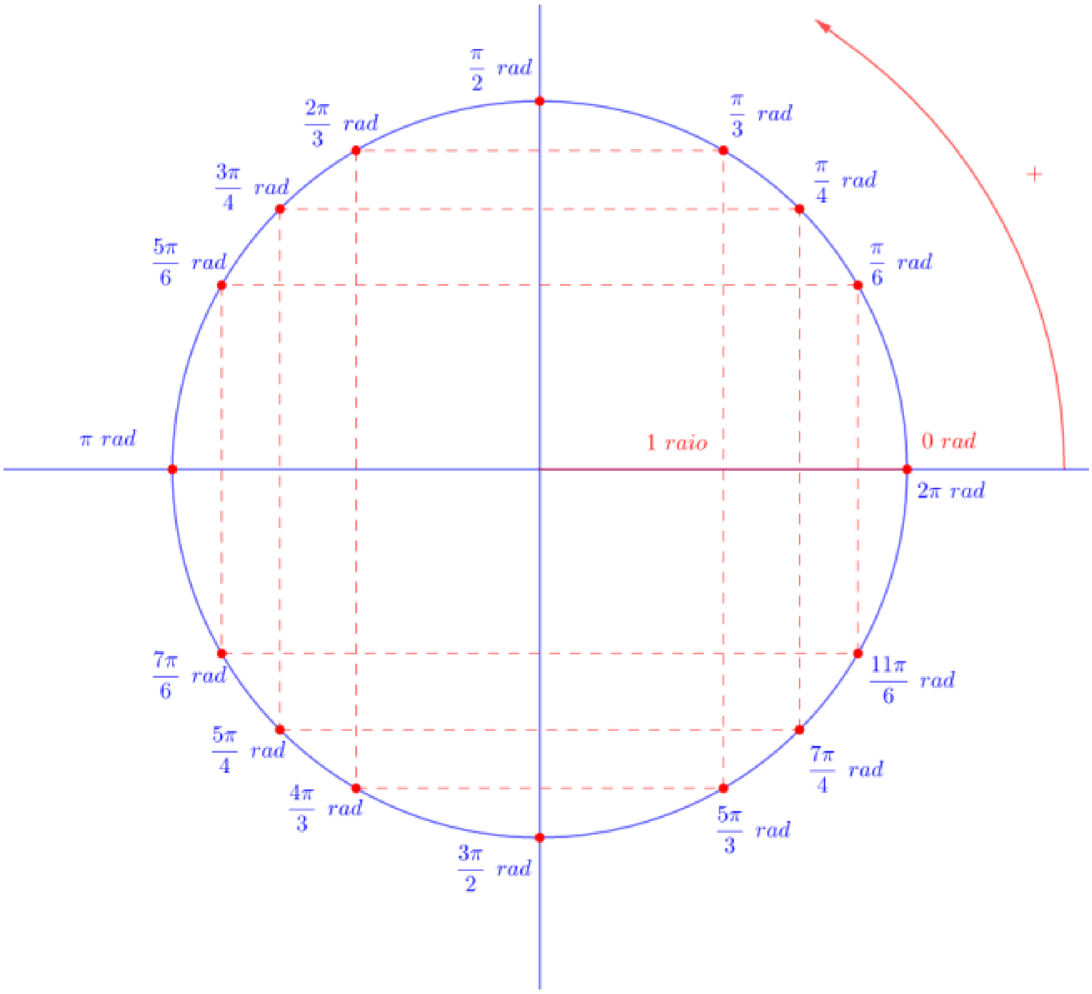


Tomando-se um ponto qualquer na circunferência, a projeção horizontal desse ponto é o cosseno do ângulo entre o ponto e a reta horizontal. A projeção vertical desse ponto resulta no seno do ângulo. Veja:



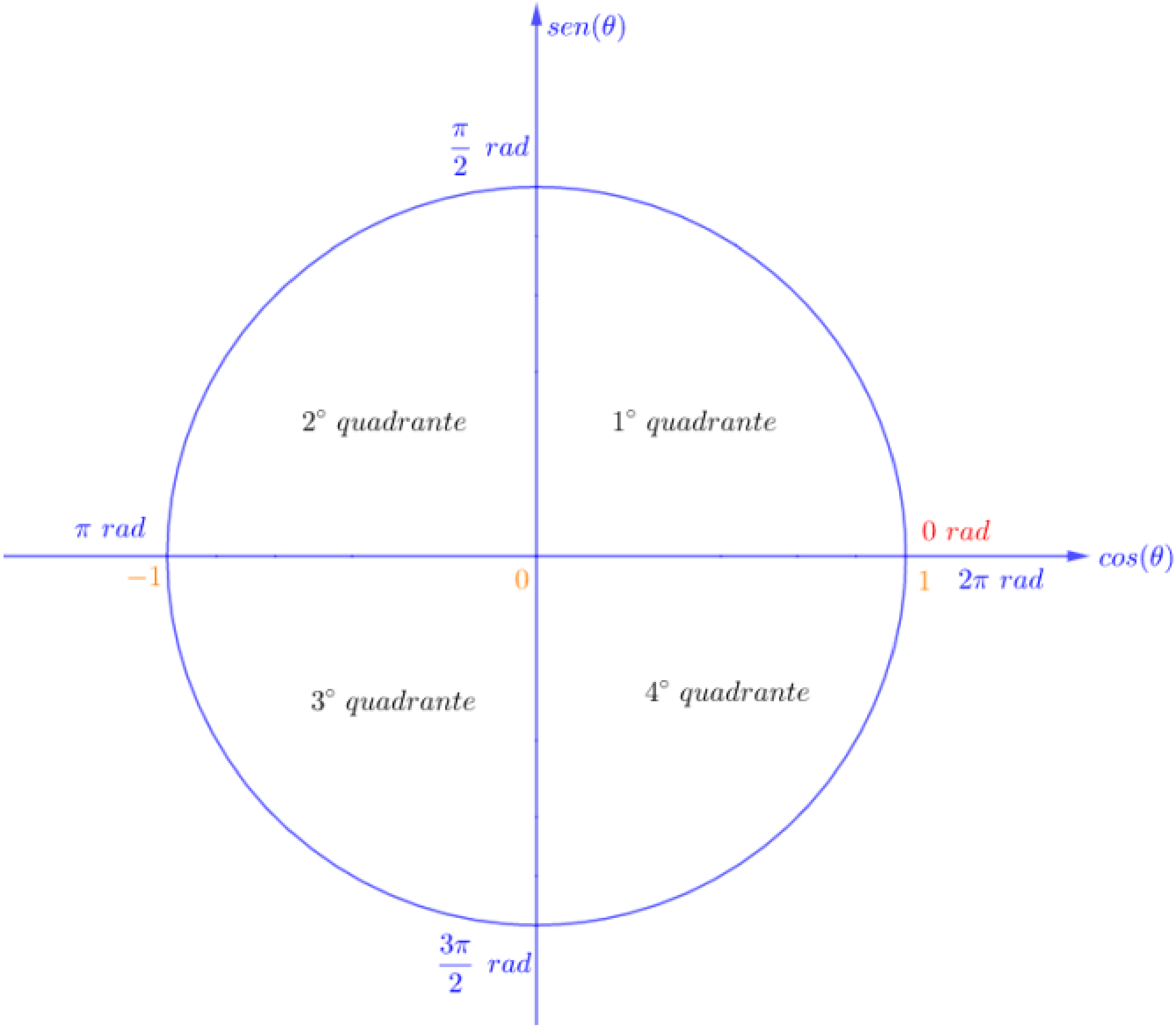
3.2. Ângulos Notáveis

A seguinte figura ilustra os principais ângulos do círculo trigonométrico:



3.3. Quadrantes

Dividindo o ciclo trigonométrico em 4 partes iguais, obtemos 4 quadrantes. Elas recebem a seguinte denominação:



Cada quadrante possui os seguintes intervalos de valores:

1° Quadrante: $]0, \frac{\pi}{2}[$

2° Quadrante: $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

3° Quadrante: $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

4° Quadrante: $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

3.4. Ângulos Congruentes

O que acontece quando consideramos um arco maior do que 2π?

Sabemos que no círculo trigonométrico, os arcos variam de 0 a 2π. Para calcular os valores do seno e cosseno de ângulos maiores do que 2π, devemos encontrar o seu ângulo congruente no intervalo de 0 a 2π.

Vamos ver a definição de ângulos congruentes:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}}$$

α e β são congruentes se, e somente se, satisfazem a relação acima.

Essa relação é importante para encontrar todas as raízes de uma equação.

Vejamos um exemplo:

Determine os arcos positivos, menores do que 6π, congruentes a $\pi/3$.

Podemos aplicar diretamente a fórmula dos ângulos de congruência e variar os valores de $k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow \alpha_1 = \frac{7\pi}{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 4\pi \Rightarrow \alpha_2 = \frac{13\pi}{3}$$

$$k = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 6\pi \Rightarrow \alpha_3 = \frac{19\pi}{3}$$

$$k = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 8\pi \Rightarrow \alpha_4 = \frac{25\pi}{3}$$

De acordo com o que acabamos de calcular, $\frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}$ e $\frac{25\pi}{3}$ são arcos côngruos a $\pi/3$.

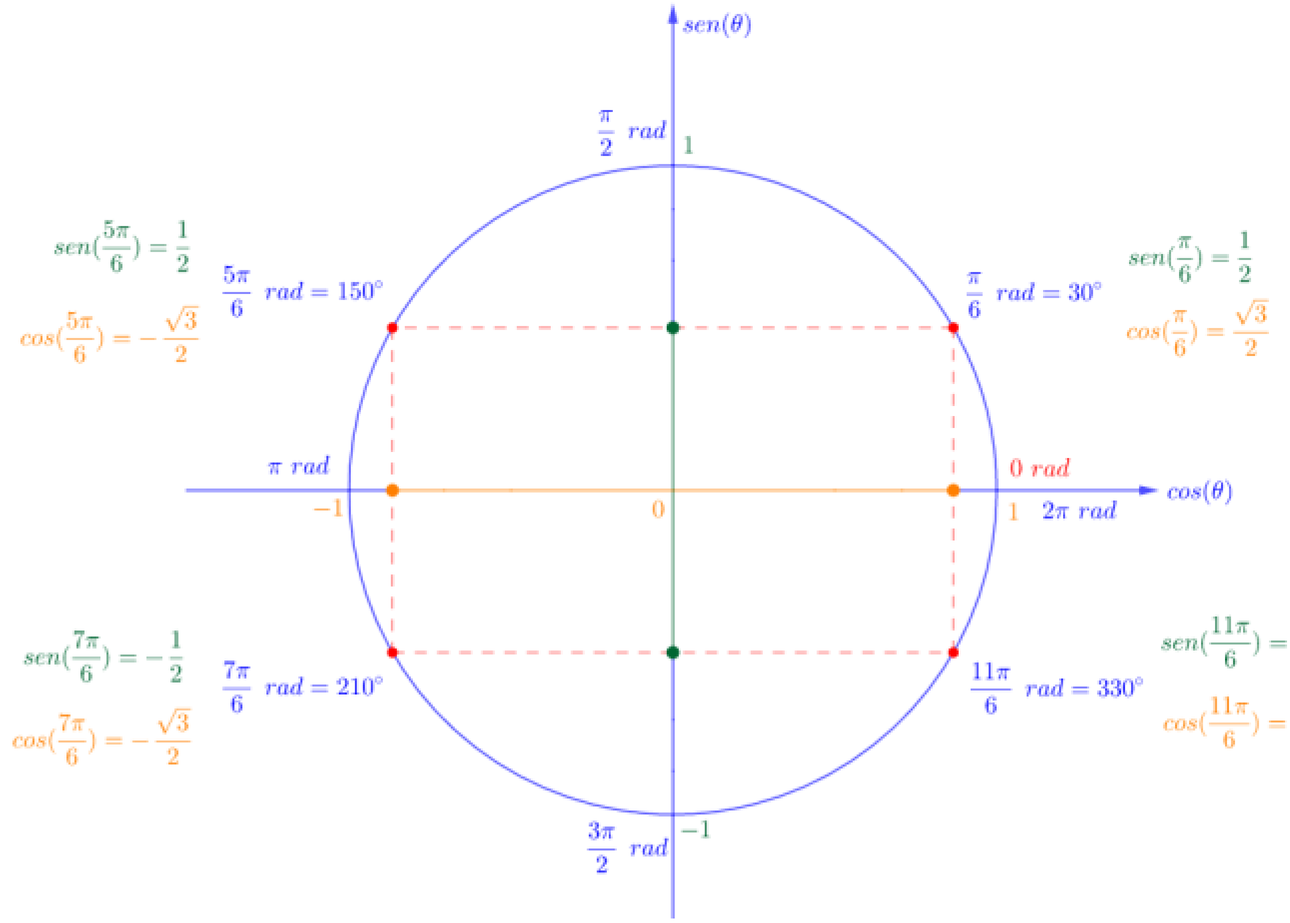
Assim, podemos afirmar:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{13\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{19\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

3.5. Redução ao Primeiro Quadrante

Conhecendo apenas as razões trigonométricas do primeiro quadrante, podemos encontrar o valor do seno e cosseno dos outros quadrantes. Essa técnica é conhecida como redução ao primeiro quadrante. Vejamos para o caso do arco de 30°:



4. Funções Trigonométricas

4.1. Funções Periódicas

Vimos que as funções seno e cosseno repetem seus valores a cada volta completo no ciclo trigonométrico. Antes de estudar as funções circulares, vamos ver o que é uma função periódica.

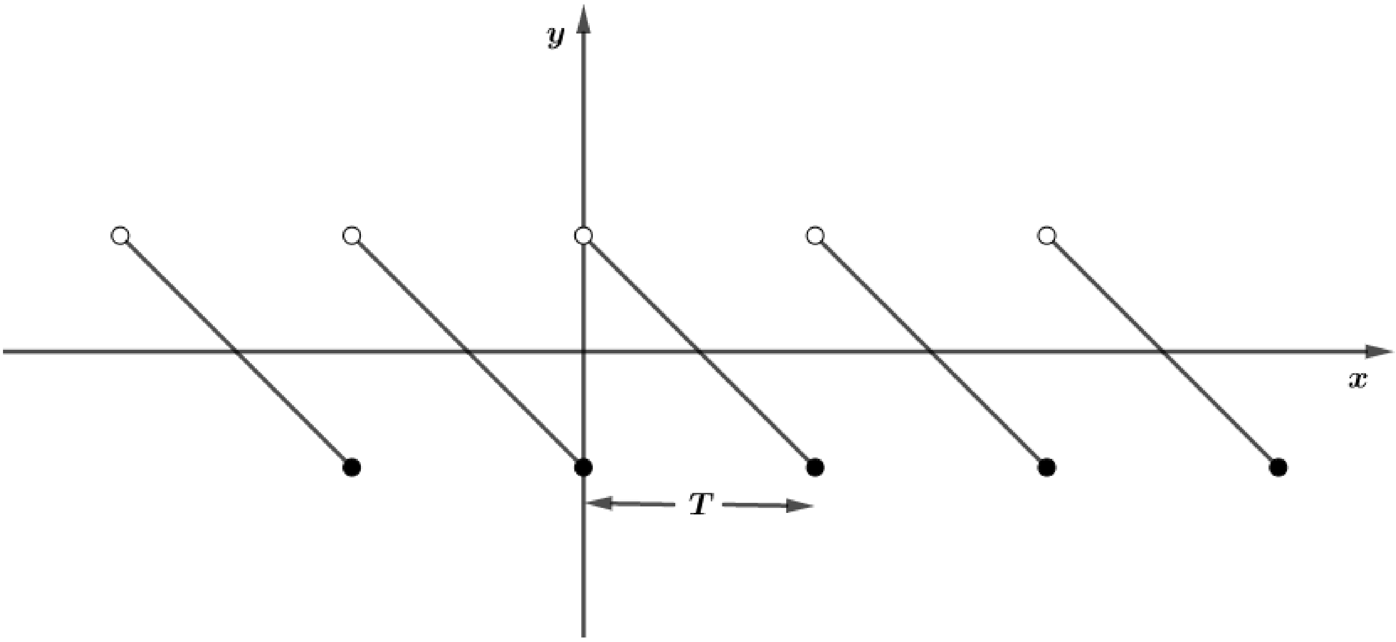
Definição:

Uma função $f: A \to B$ é periódica se vale a relação:

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in A$$

Onde $T > 0$, o menor valor de T que satisfaz essa relação é chamado de período fundamental da função f.

Exemplo gráfico:



Note que a função se repete a cada período T.

4.1. Função Seno

4.1.1. Definição

Seja $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a função seno é dada por:

$$f(x) = senx$$

O domínio da função é o conjunto dos reais e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

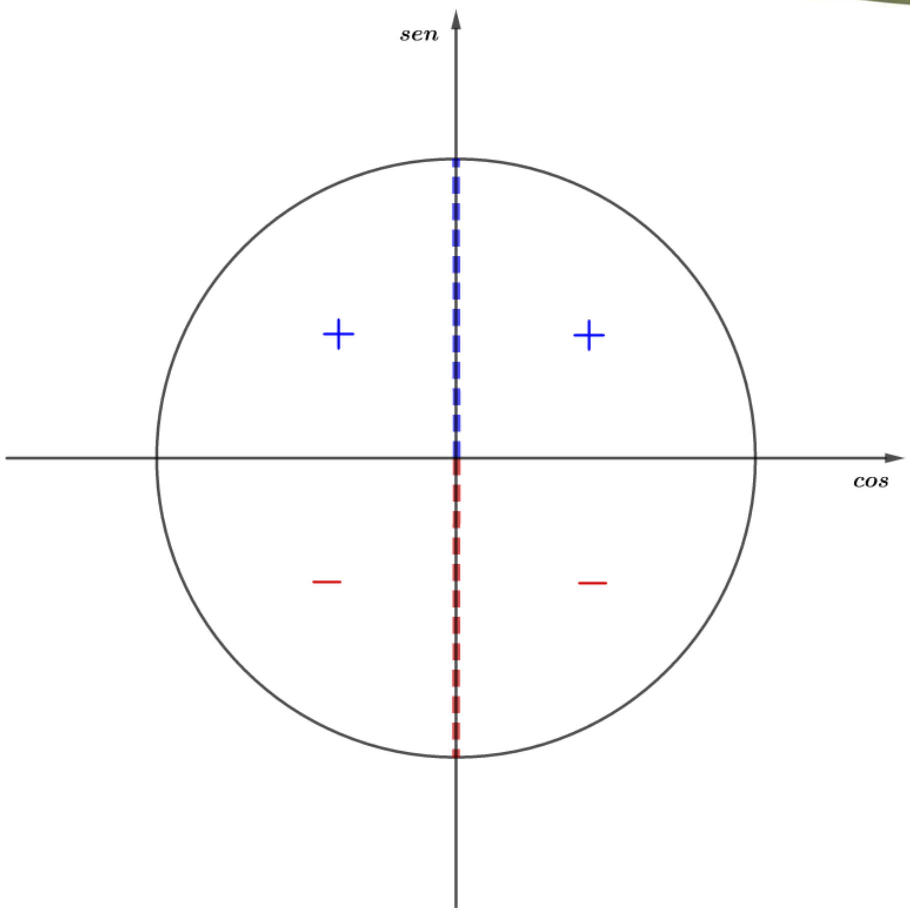
A função seno é periódica e seu período vale 2π. A cada volta completa no ciclo trigonométrico os valores do seno se repetem.

Para uma função do tipo $g(x) = sen(ax)$, o período fundamental é definido por:

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

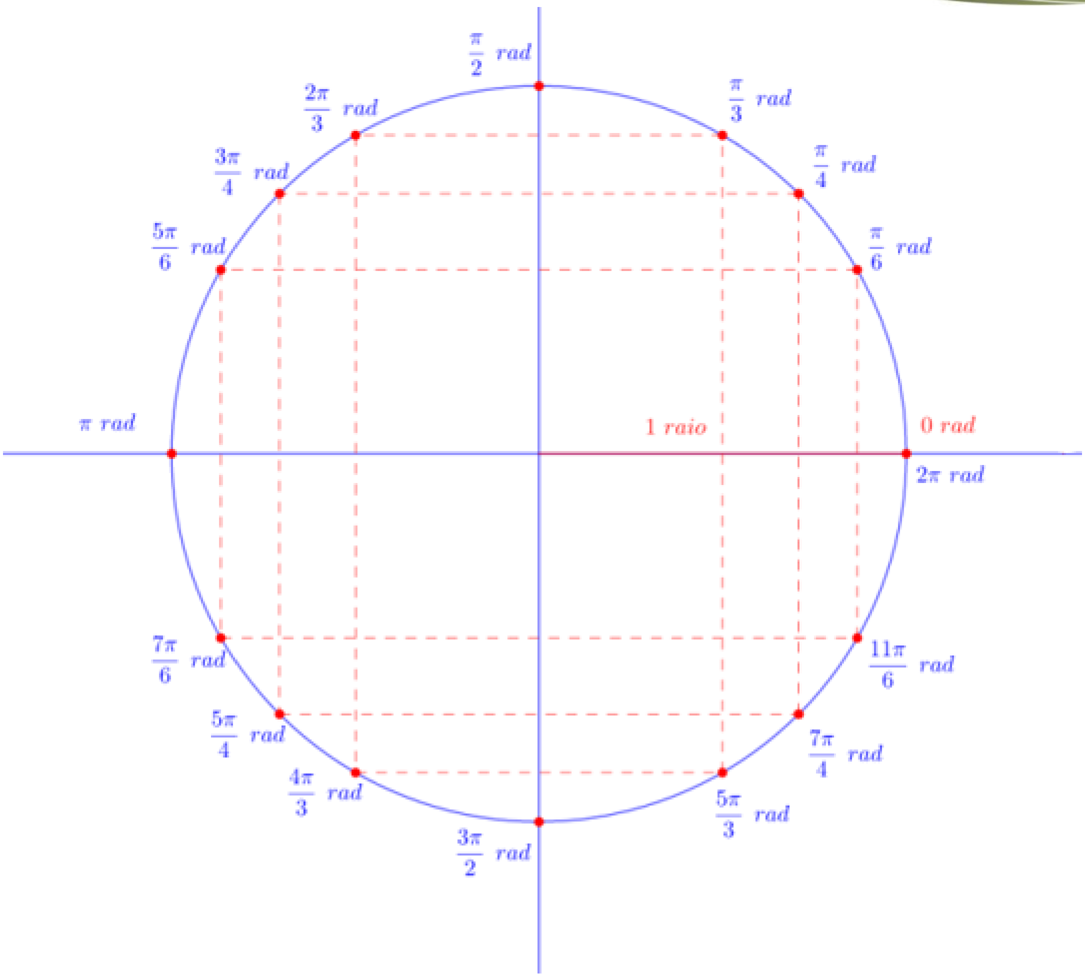
4.1.2. Estudo do sinal

Como o seno é o eixo vertical do ciclo trigonométrico, todos os pontos que estiverem no intervalo $[0, \pi]$ resultam em um seno positivo e no intervalo $[\pi, 2\pi]$ temos seno negativo.



4.1.3. Ângulos Notáveis

Usando a seguinte figura, podemos ver o valor do seno dos ângulos notáveis:



Note que:

$$sen(0) = sen(\pi) = sen(2\pi) = 0$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

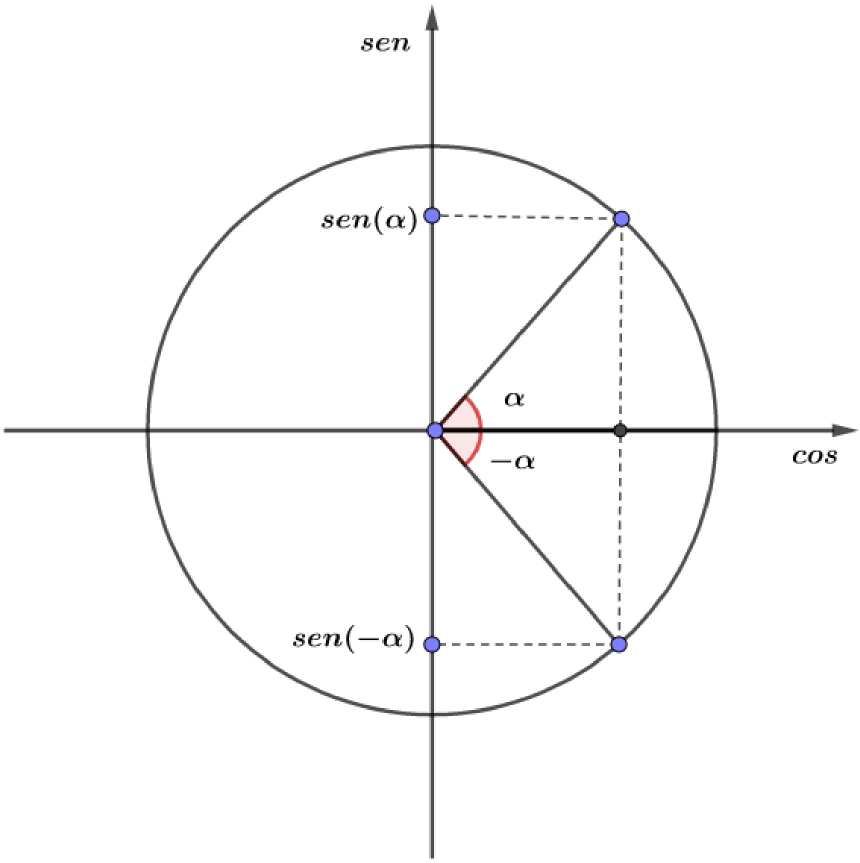
$$sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.1.4. Paridade

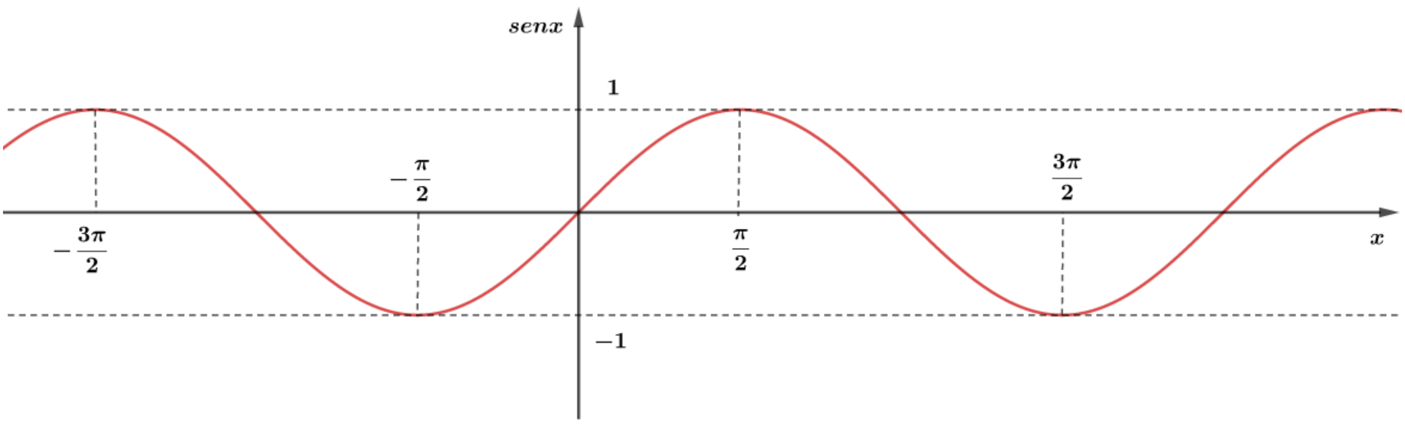
A função seno possui paridade ímpar, veja:



Pela figura, podemos ver que $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$. Isso caracteriza uma função ímpar.

4.1.5. Gráfico

A função seno possui o seguinte gráfico:



4.2. Função Cosseno

4.2.1. Definição

Seja $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a função cosseno é dada por:

$$f(x) = cosx$$

O domínio da função é o conjunto dos reais e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

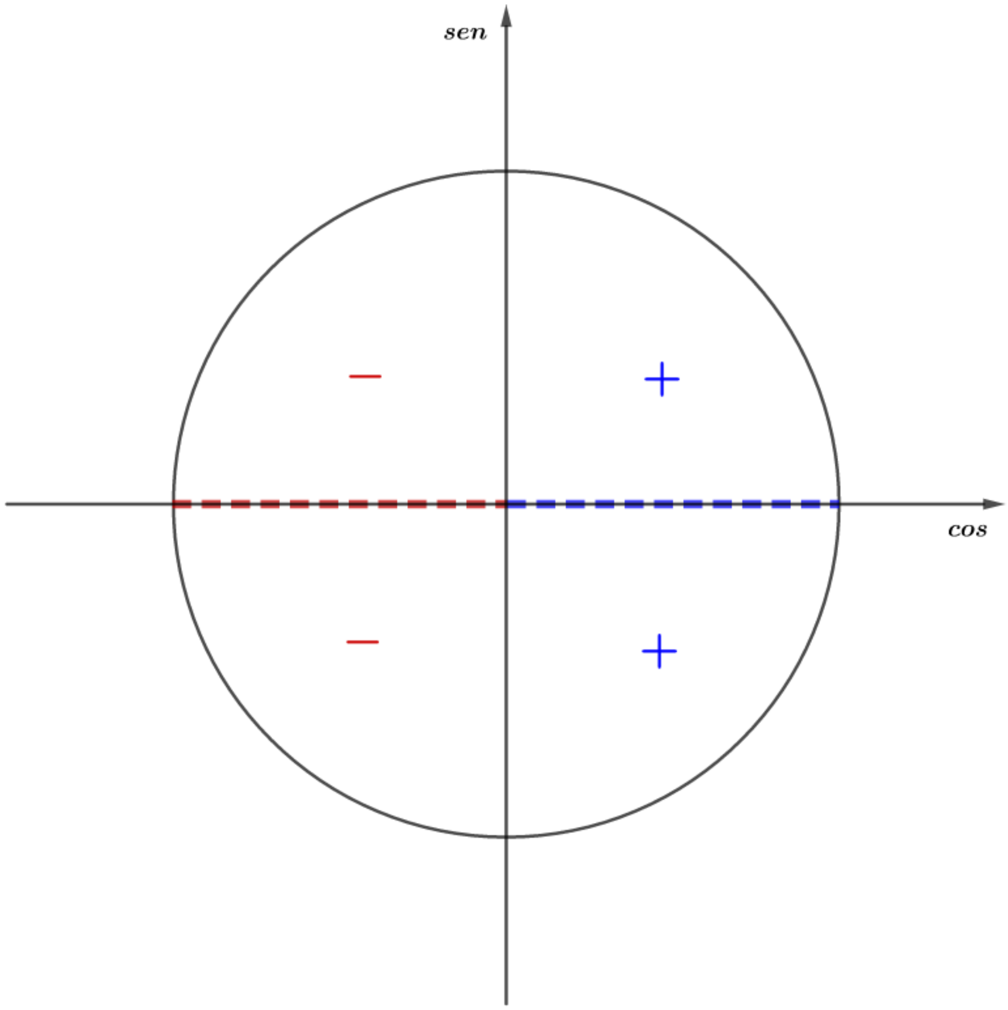
A função cosseno é periódica e seu período vale 2π. A cada volta completa no ciclo trigonométrico os valores do cosseno se repetem.

Para uma função do tipo $g(x) = cos(ax)$, o período fundamental é definido por:

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

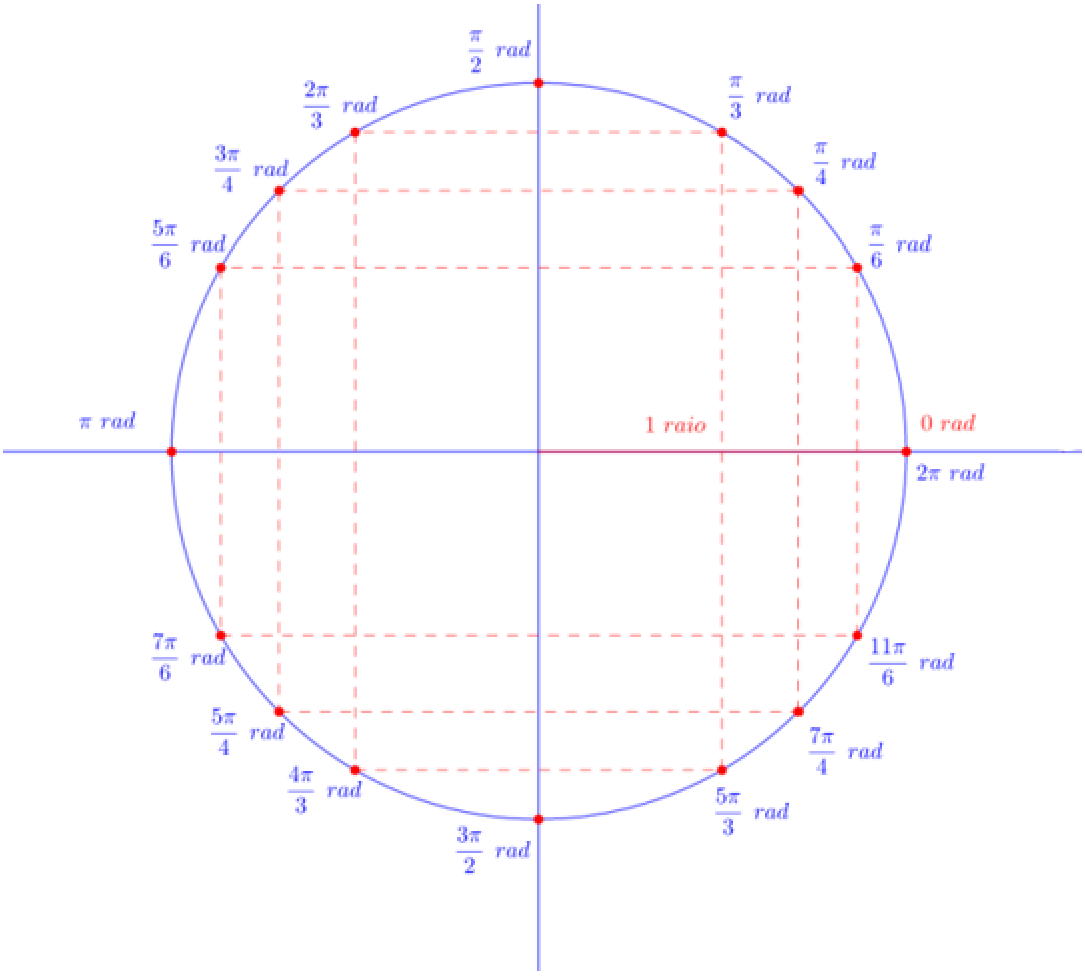
4.2.2. Estudo do sinal

Como o cosseno é o eixo horizontal do ciclo trigonométrico, todos os pontos que estiverem no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ resultam em um cosseno positivo e no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ temos cosseno negativo.



4.2.3. Ângulos Notáveis

Usando a seguinte figura, podemos ver o valor do cosseno dos ângulos notáveis:



Note que:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$cos(0) = \cos(2\pi) = 1$$

$$cos(\pi) = -1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

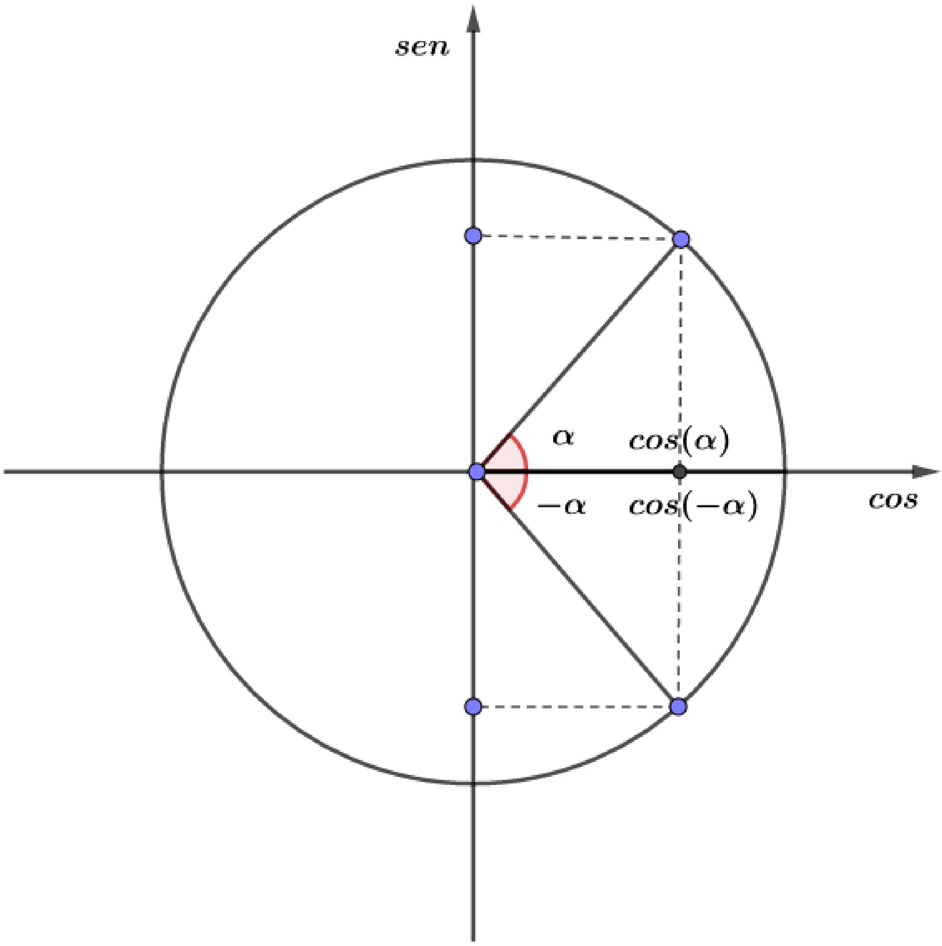
$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.2.4. Paridade

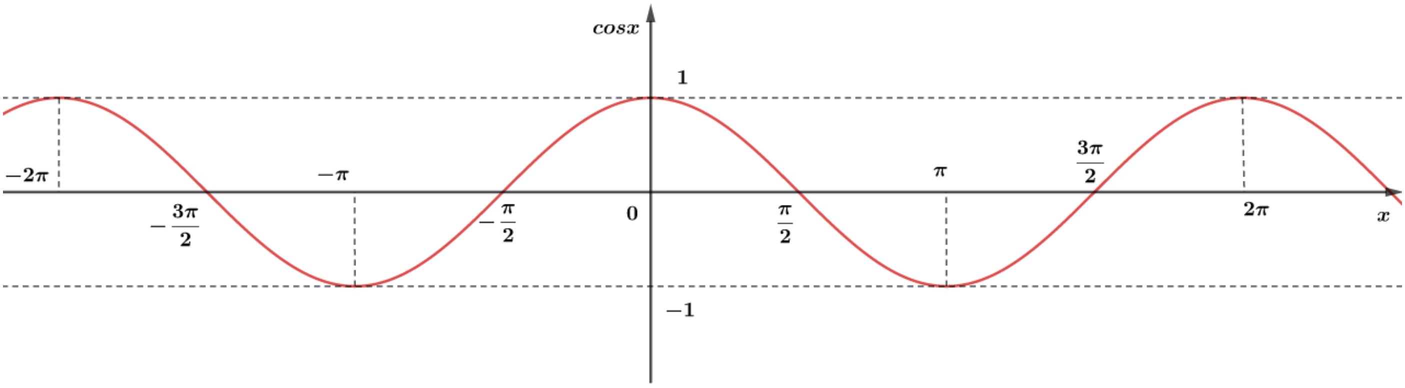
A função cosseno possui paridade par, veja:



Podemos ver que $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$. Isso caracteriza uma função par.

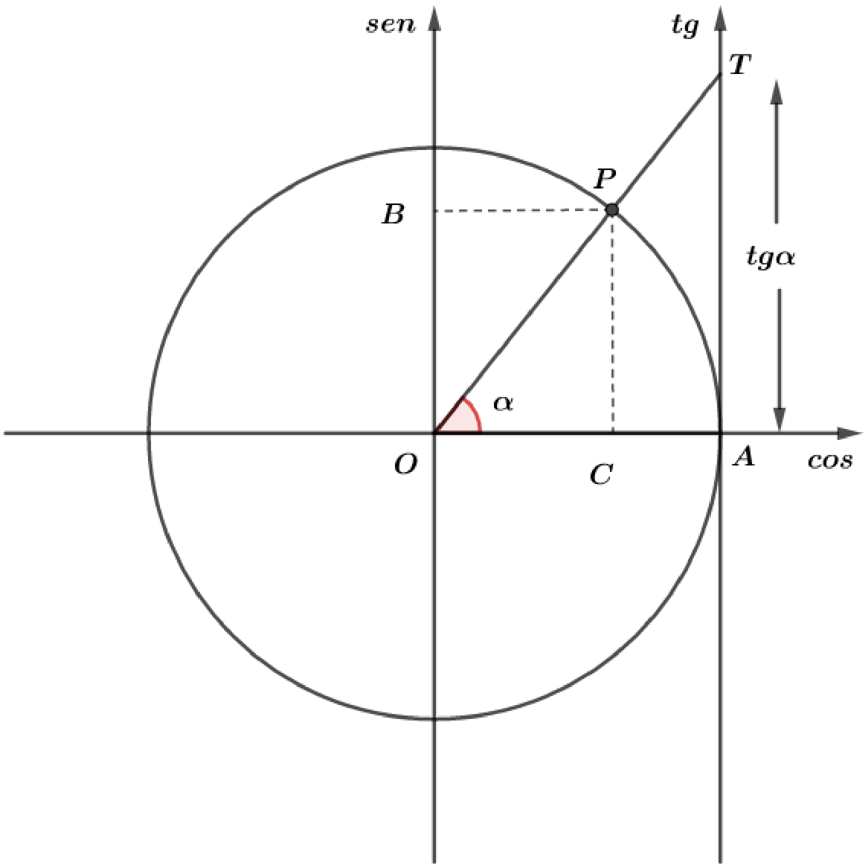
4.2.5. Gráfico

A função cosseno possui o seguinte gráfico:



4.3. Função Tangente

Podemos representar a reta tangente no ciclo. Essa reta é paralela ao eixo do seno e é chamada de eixo das tangentes. Veja a figura:



Tomando-se um ponto P na circunferência, a reta que passa pela origem e por P resulta na projeção da sua tangente no eixo das tangentes.

Perceba que os triângulos POC e TOA são semelhantes. Pela figura, podemos escrever:

$$\frac{BC}{OC} = \frac{TA}{OA}$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{1}$$

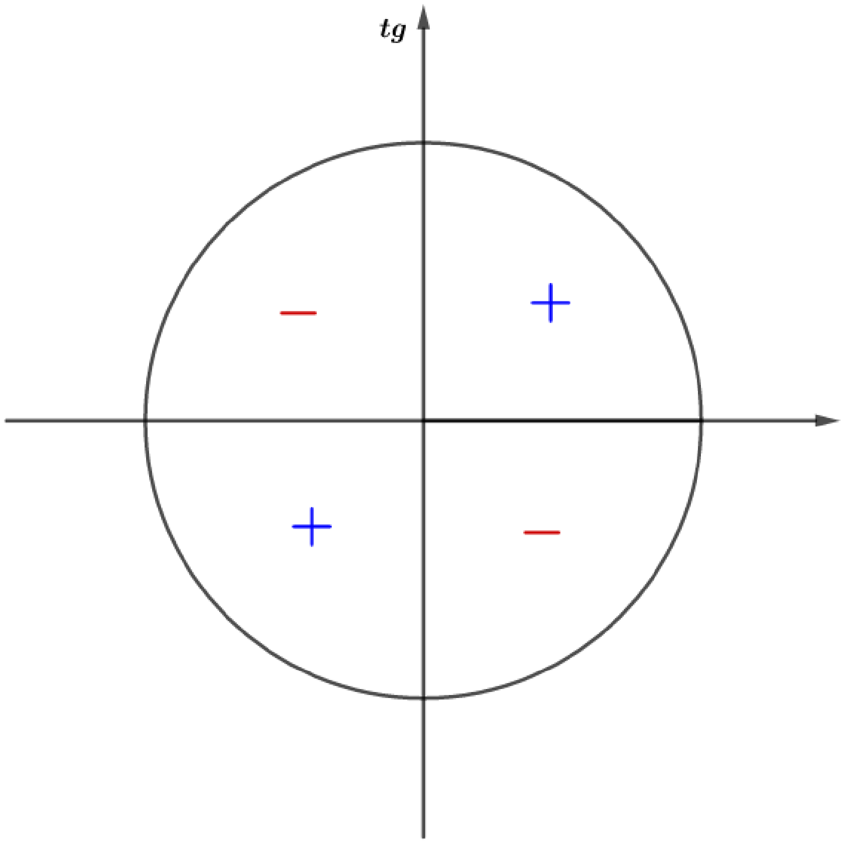
$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Assim, verificamos a relação fundamental da tangente.

4.3.1. Estudo do sinal

Como a tangente é a razão entre o seno e cosseno, o sinal resultante será o produto dos sinais do numerador e denominador dessa razão.

Assim, temos a seguinte ilustração:



4.3.2. Intervalo de valores

Um fato a se notar é que quando P percorre a circunferência, passando em cada quadrante, a tangente vai aumentando seu valor indefinidamente. Assim, podemos ver que ela assume qualquer valor real, diferentemente do seno e cosseno. Ainda, como a tangente é a razão entre seno e cosseno, sabemos que o denominador não pode ser nulo, caso contrário, o valor da tangente fica indefinido. Assim, todos os ângulos que resultam em cosseno nulo não pertencem ao domínio da tangente:

$$\boldsymbol{tg\alpha \in \left]-\infty, +\infty\right[, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

A função tangente também é periódica e seu período vale π.

Para uma função do tipo $g(x) = tg(ax)$, o período fundamental é definido por:

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

4.3.3. Paridade

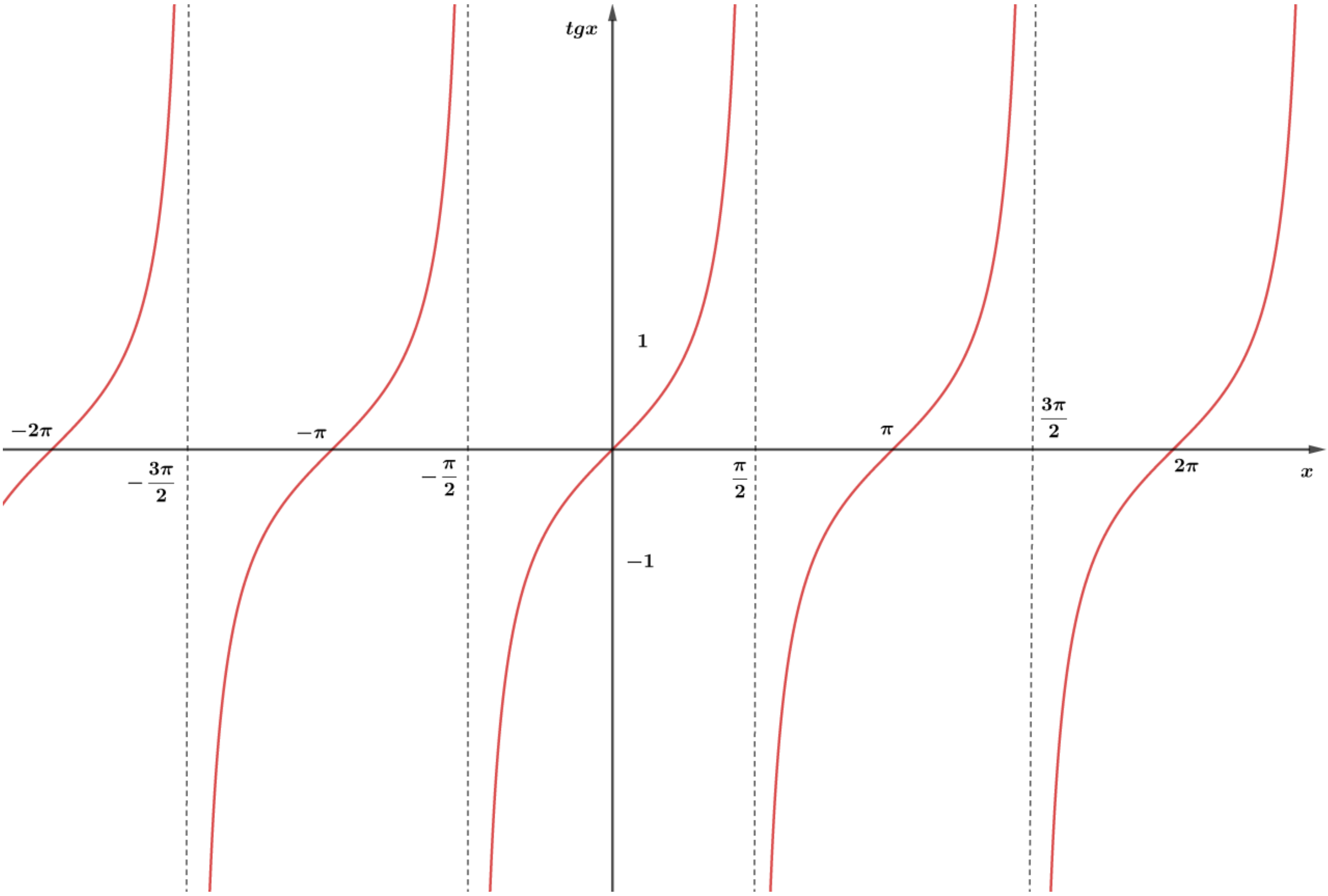
Vamos verificar a paridade da função tangente:

$$tg(-\alpha) = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -tg(\alpha)$$

Podemos concluir que a função tangente é ímpar.

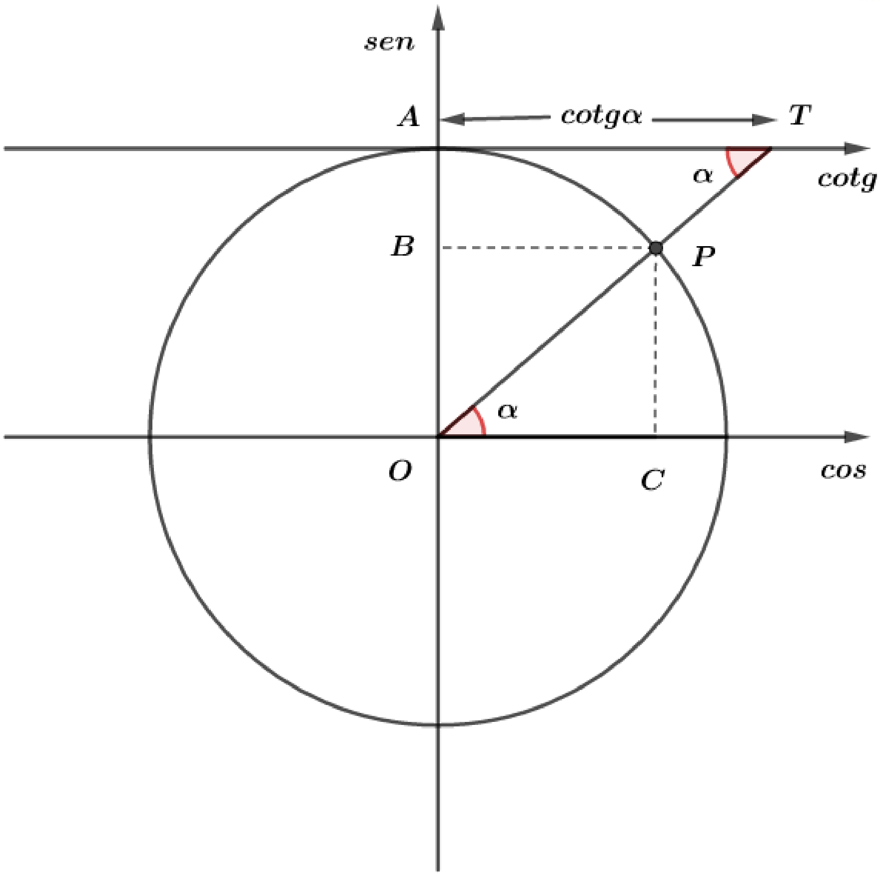
4.3.4. Gráfico

A função tangente possui o seguinte gráfico:



4.4. Função Cotangente

O eixo da cotangente também pode ser representado no ciclo trigonométrico. Veja a figura:



Os triângulos POC e OTA são semelhantes, assim, podemos escrever as seguintes razões:

$$\frac{AT}{AO} = \frac{OC}{BC}$$

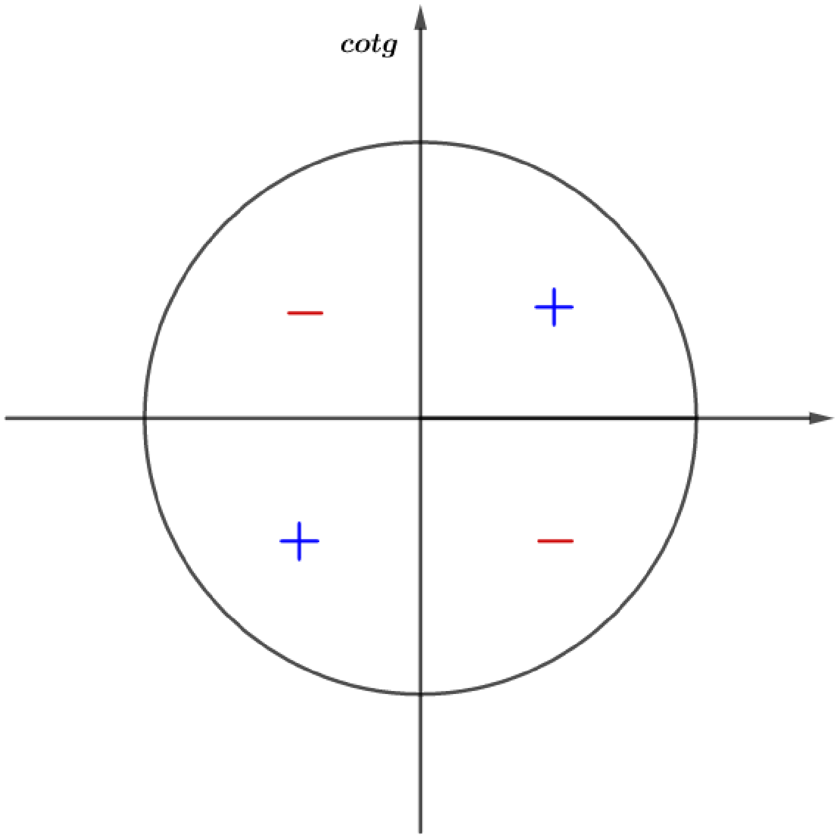
$$\frac{cotg\alpha}{1} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\Rightarrow cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

O que nos mostra que a relação fundamental é satisfeita.

4.4.1. Estudo do sinal

Como a cotangente é o inverso da tangente, o seu sinal seguirá o mesmo padrão:



4.4.2. Intervalo de valores

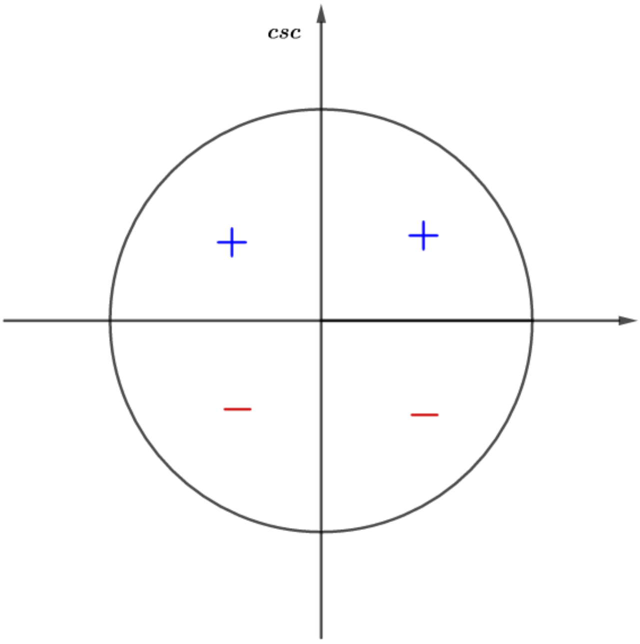
A cotangente também assume valores no conjunto dos reais, a sua única limitação é quando o seno é nulo. Assim, temos:

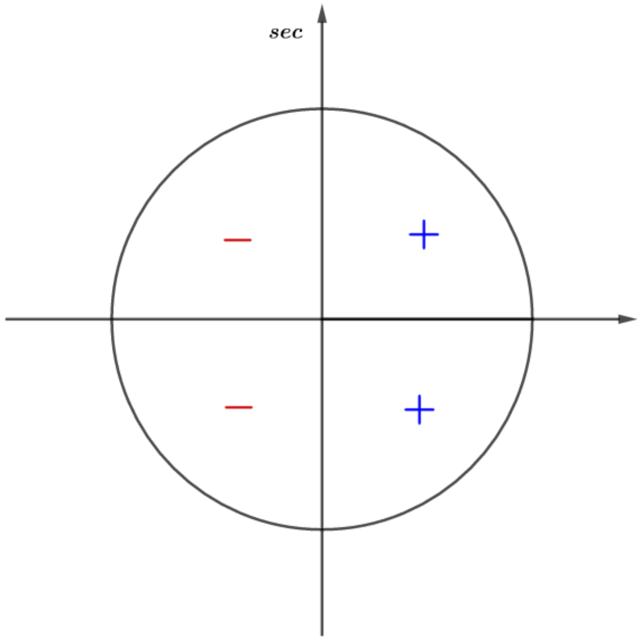
$$\boldsymbol{cotg\alpha} \in]-\infty, +\infty[, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

4.5. Funções Secante e Cossecante

4.5.1. Estudo do sinal

As funções secante e cossecante são o inverso do cosseno e seno, respectivamente. Desse modo, o sinal dessas funções seguirá o mesmo padrão das funções a elas relacionadas:





4.5.2. Intervalo de valores

As funções seno e cosseno variam entre os valores -1 e 1. Então, as funções secante e cossecante, sendo inversas, assumirão os seguintes intervalos de valores:

$$-1 \leq sen\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{sen\alpha} \geq 1 \; ou \; \frac{1}{sen\alpha} \leq -1$$

$$-1 \leq cos\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{cos\alpha} \geq 1 \; ou \; \frac{1}{cos\alpha} \leq -1$$

$$\boldsymbol{sec\alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}$$

$$\boldsymbol{csc\alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}$$

Temos que observar a condição de existência da secante e cossecante. Para cada um dos casos, temos:

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow sen\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

5. Funções Inversas

Iniciemos o estudo das funções inversas. Devemos lembrar que uma função possui inversa se, e somente se, for bijetora. Assim, temos que restringir o domínio das funções circulares de modo que elas sejam bijetoras.

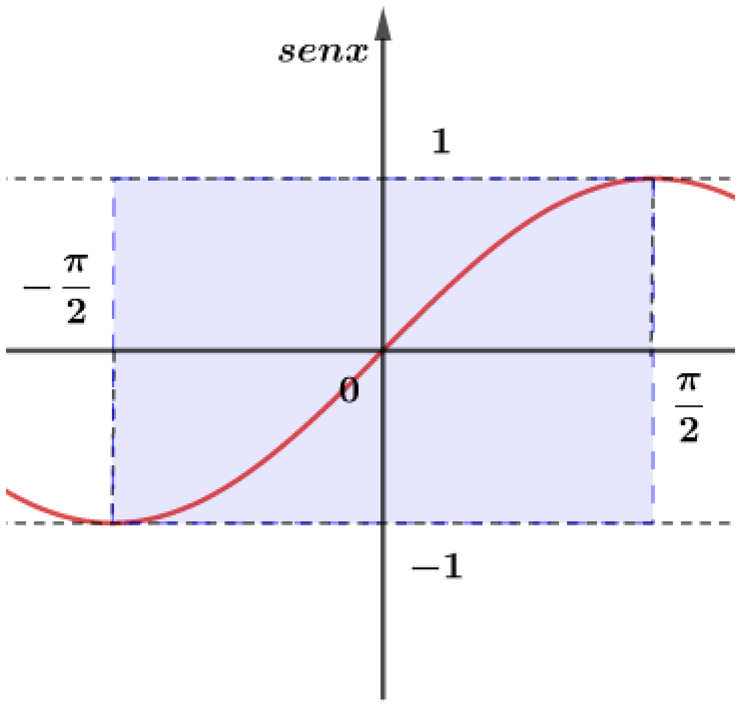
5.1. Função Arco-Seno

Seja $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, se $f(x) = senx$ a função arco-seno é dada por:

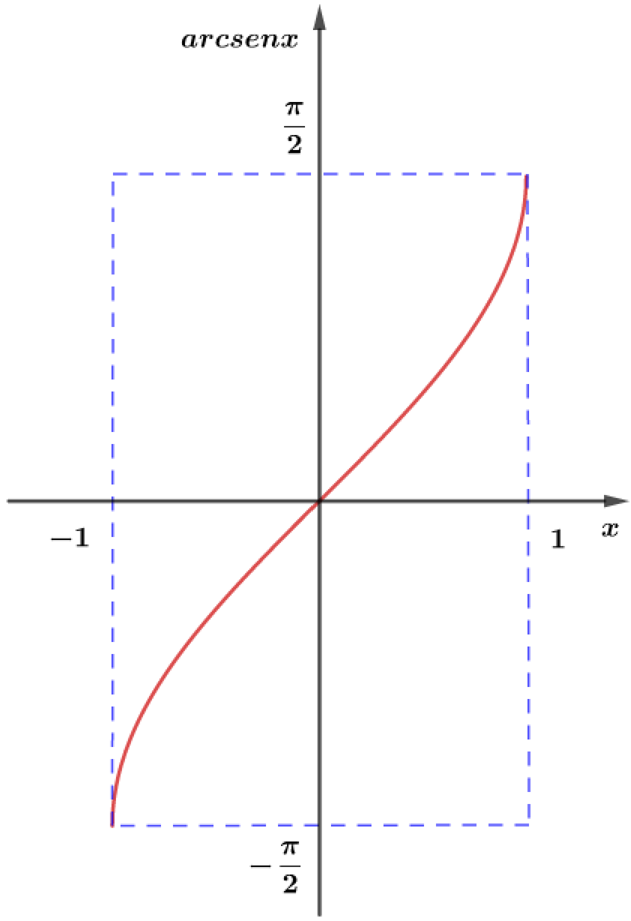
$$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = arcsenx$$

Note que no domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a função seno é bijetora:



O gráfico da função arco-seno é dado por:



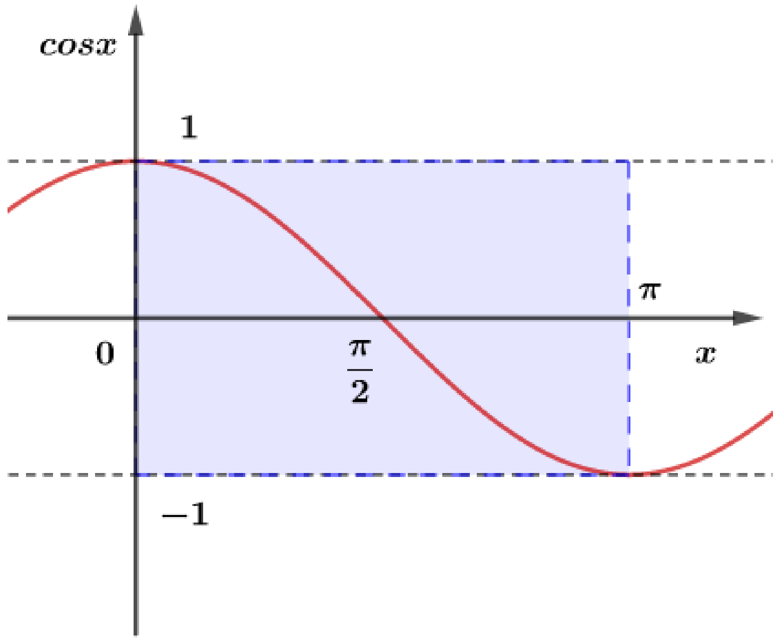
5.2. Função Arco-Cosseno

Seja $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$, se $f(x) = cosx$ a função arco-cosseno é dada por:

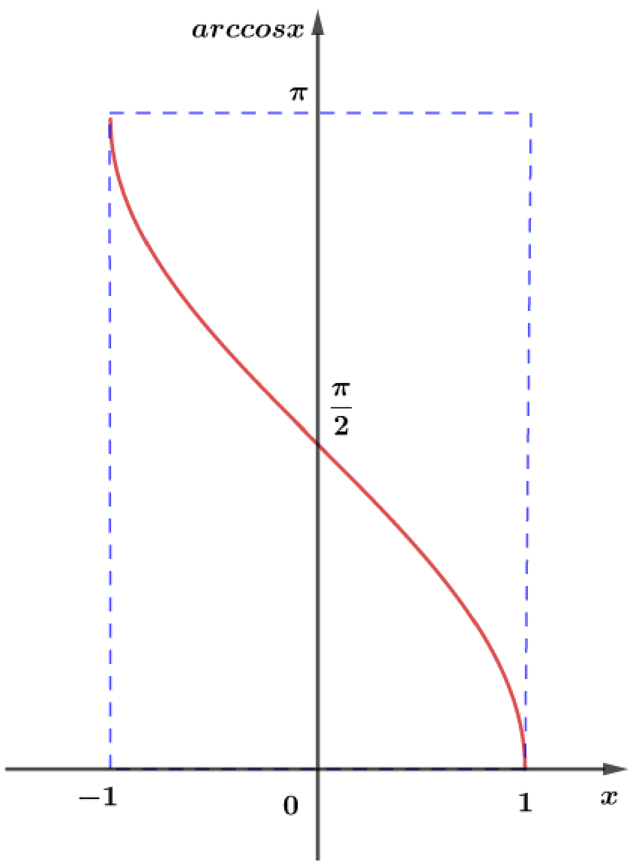
$$f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$f^{-1}(x) = arccosx$$

Note que no domínio $[0, \pi]$, a função cosseno é bijetora:



O gráfico da função arco-cosseno é dado por:



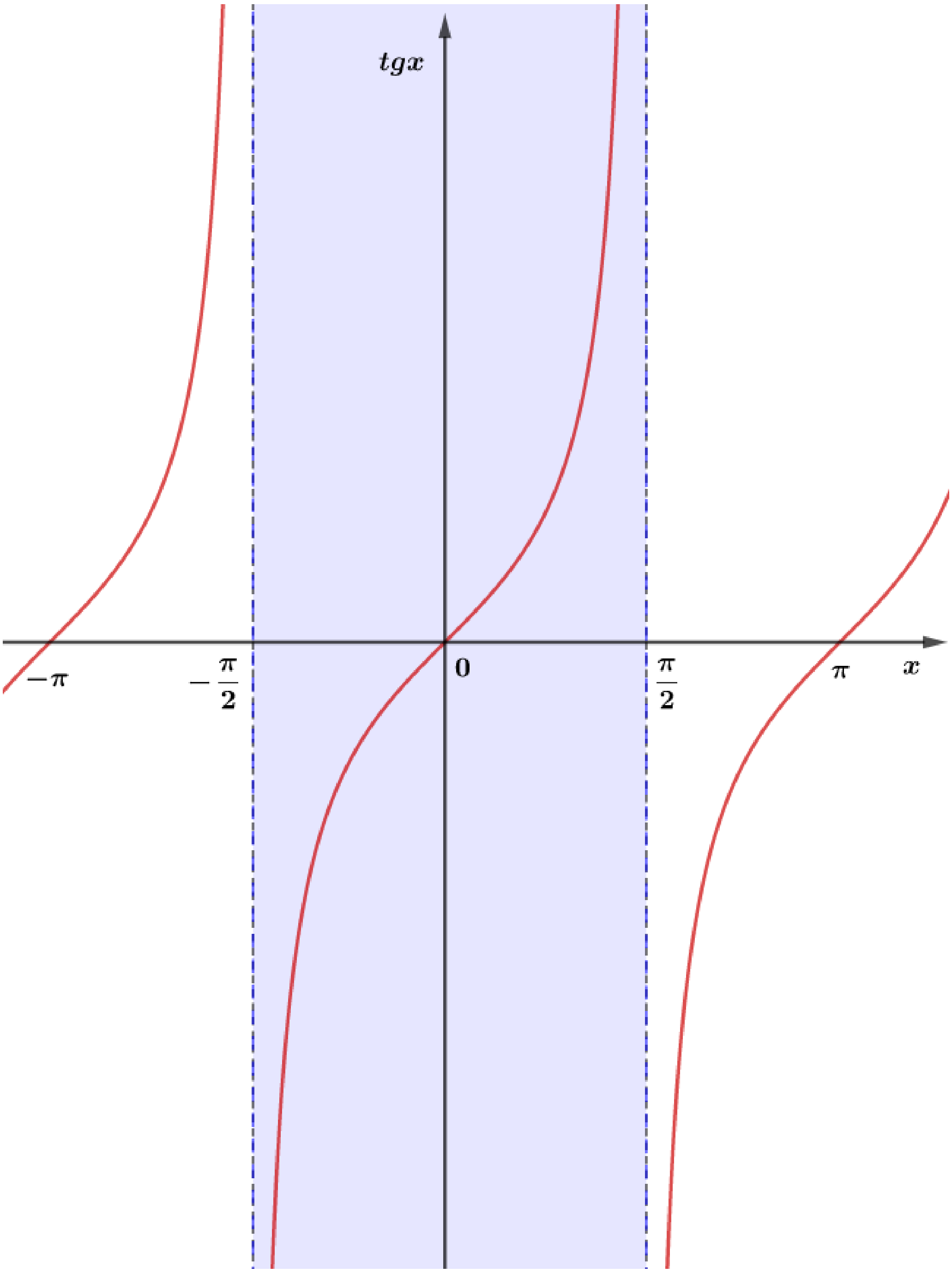
5.3. Função Arco-Tangente

Seja $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, se $f(x) = tgx$ a função arco-tangente é dada por:

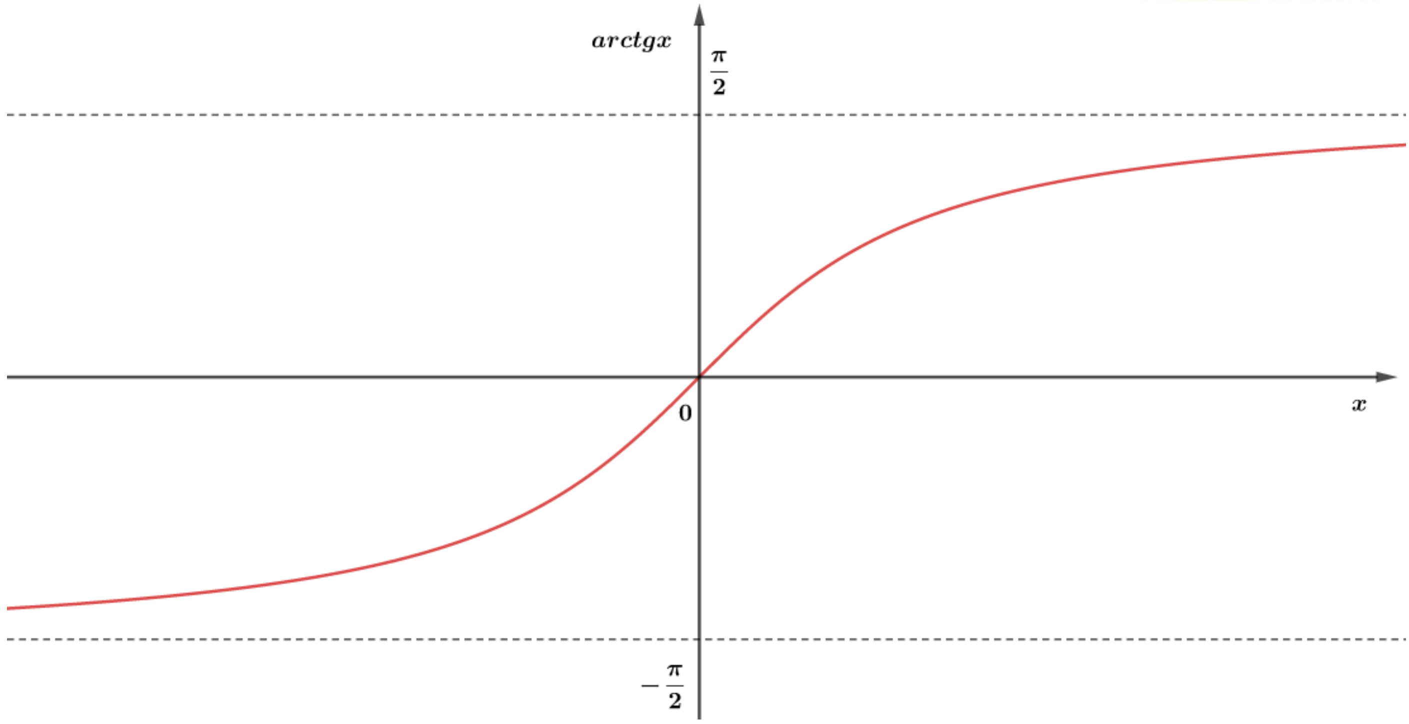
$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$f^{-1}(x) = arctgx$$

A função tangente é bijetora no domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



O gráfico da sua inversa é dado por:



6. Transformações

Vamos estudar as principais transformações que podem ser cobradas no vestibular. Tente decorar pelo menos as fórmulas de soma e diferença de arcos. Assim, se você esquecer as outras, você saberá deduzi-las na hora da prova.

6.1. Soma e diferença de arcos

Esse assunto é muito cobrado nas questões de trigonometria das provas! Então, tente decorar todas elas!

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{sen(A+B) = \text{sen}(\text{A})\cos(\text{B}) + \text{sen}(\text{B})\cos(\text{A})}$$

$$\boxed{sen(A-B) = \text{sen}(\text{A})\cos(\text{B}) - \text{sen}(\text{B})\cos(\text{A})}$$

$$\boxed{tg(A+B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)tg(B)}}$$

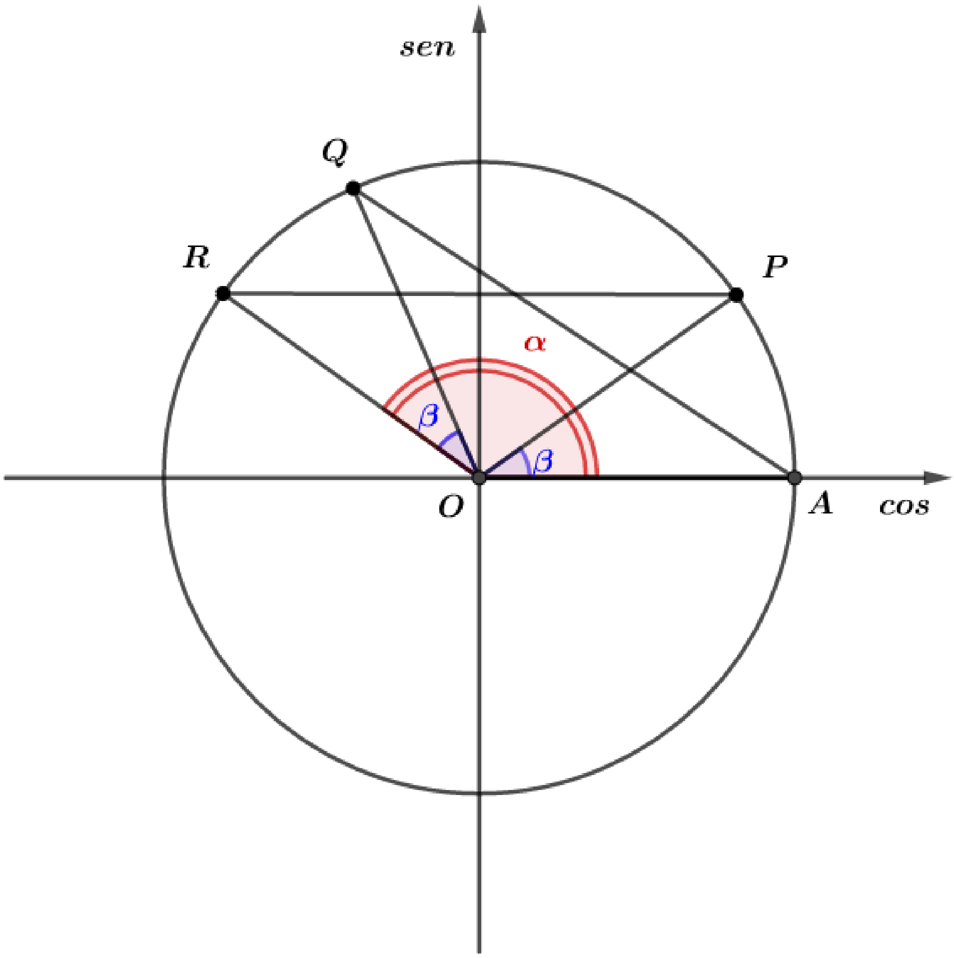
$$\boxed{tg(A-B)=\frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}}$$

Demonstração:

1) $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-sen(A)sen(B)$

Vamos usar o ciclo trigonométrico para demonstrar essa propriedade e a fórmula da distância da geometria analítica.

Sejam dados os pontos A, P, Q, R conforme ilustra a figura abaixo:



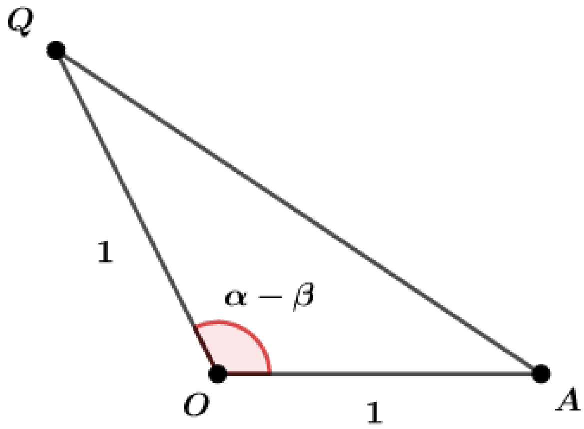
Os pontos P, Q, R possuem as seguintes coordenadas no plano:

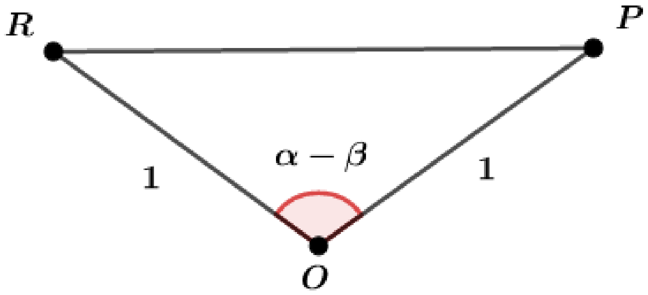
$$P(cos\beta, sen\beta)$$

$$Q(\cos(\alpha-\beta), sen(\alpha-\beta))$$

$$R(cos\alpha, sen\alpha)$$

Note que os triângulos OAQ e OPR são semelhantes:





Como os arcos Ô são iguais, podemos afirmar que $AQ = PR$. Usando a fórmula da distância da geometria analítica ($d_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$), temos:

(Estudaremos com mais detalhes na aula de Geometria Analítica)

$$AQ^2 = \left(x_A - x_Q\right)^2 + \left(y_A - y_Q\right)^2$$

$$AQ^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \mathrm{sen}(\alpha - \beta))^2$$

$$AQ^2 = (1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta)) + sen^2(\alpha - \beta)$$

$$AQ^2 = 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$$

$$\Rightarrow AQ^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$PR^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$

$$PR^2 = (cos\beta - cos\alpha)^2 + (sen\beta - sen\alpha)^2$$

$$PR^2 = \cos^2\beta - 2cos\alpha cos\beta + \cos^2\alpha + sen^2\beta - 2sen\alpha sen\beta + sen^2\alpha$$

$$PR^2 = \underbrace{\cos^2\beta + sen^2\beta}_{1} + \underbrace{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}_{1} - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow PR^2 = 2 - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

Igualando $AQ = PR$, temos:

$$AQ^2 = PR^2$$

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta}$$

2) $\cos(A + B) = cosAcosB - senAsenB$

Para demonstrar essa propriedade, podemos usar a fórmula acima e inserir $\beta = -\beta'$:

$$\cos\left(\alpha - (-\beta')\right) = cos\alpha\cos(-\beta') + sen\alpha sen(-\beta')$$

A função cosseno é par: $\cos(-\beta') = \cos(\beta')$.

A função seno é ímpar: $sen(-\beta') = -sen(\beta')$.

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos(\alpha + \beta') = cos\alpha cos\beta' - sen\alpha sen\beta'}$$

3) $sen(A + B) = \mathrm{sen(A)}\cos(\mathrm{B}) + \mathrm{sen(B)}\cos(\mathrm{A})$

Vamos usar a relação de ângulos complementares:

$$sen(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

Usando a fórmula da diferença de arcos do cosseno, temos:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos\beta+sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen\beta=sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{sen(\alpha+\beta)=sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta}$$

4) $sen(A-B)=\mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B})-\mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})$

Podemos obter o seno da diferença usando o seno da soma:

$$sen(\alpha+(-\beta))=sen\alpha\cos(-\beta)+cos\alpha sen(-\beta)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{sen(\alpha-\beta)=sen\alpha cos\beta-sen\beta cos\alpha}$$

5) $tg(A+B)=\frac{tg(A)+tg(B)}{1-tg(A)tg(B)}$

Vamos usar o seno e o cosseno da soma:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta-sen\alpha sen\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha cos\beta-sen\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}}$$

6) $tg(A-B)=\frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}$

Podemos usar a fórmula da demonstração 5:

$$tg(\alpha+(-\beta))=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha tg(-\beta)}$$

Como a função tangente é ímpar, temos:

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}}$$

6.2. Arco duplo, arco triplo e arco metade

Agora que conhecemos as fórmulas da soma e diferença de arcos, podemos expandir o conhecimento para arco duplo, arco triplo e arco metade.

6.2.1. Fórmulas de arco duplo

$$\boxed{\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A}$$

$$\boxed{sen(2A) = 2senAcosA}$$

$$\boxed{tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2 A}}$$

Demonstrações:

1) $\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A$

Usando a fórmula da soma do cosseno, temos:

$$\cos(A + A) = cosAcosA - senAsenA$$

$$\Rightarrow \cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A$$

Também podemos representar essa identidade de outras formas. Usando a relação fundamental $sen^2 A + \cos^2 A = 1$:

$$\cos(2A) = (1 - sen^2 A) - sen^2 A$$

$$\Rightarrow \cos(2A) = 1 - 2sen^2 A$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$

$$\Rightarrow \cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$$

2) $sen(2A) = 2senAcosA$

Usando a fórmula da soma do seno, temos:

$$sen(A + A) = senAcosA + senAcosA$$

$$\Rightarrow sen(2A) = 2senAcosA$$

3) $tg(2A) = \frac{2tgA}{1-tg^2 A}$

Usando a fórmula da soma da tangente, temos:

$$tg(A + A) = \frac{tgA + tgA}{1 - tgAtgA}$$

$$\Rightarrow tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2 A}$$

6.2.2. Fórmulas de arco triplo

$$\boxed{\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA}$$

$$\boxed{sen(3A) = 3senA - 4sen^3 A}$$

$$\boxed{tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3 A}{1 - 3tg^2 A}}$$

Demonstrações:

1) $\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA$

Podemos usar as fórmulas de arco duplo e soma:

$$\cos(2A + A) = \cos(2A)\,cosA - sen(2A)senA$$
$$\cos(3A) = (2\cos^2 A - 1)cosA - (2senAcosA)senA$$
$$\cos(3A) = 2\cos^3 A - cosA - 2sen^2AcosA$$
$$\cos(3A) = 2\cos^3 A - cosA - 2(1 - \cos^2 A)cosA$$
$$\Rightarrow \cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA$$

2) $sen(3A) = 3senA - 4sen^3A$

Usando as fórmulas de arco duplo e soma, temos:

$$sen(2A + A) = sen(2A)cosA + senAcos(2A)$$
$$sen(3A) = (2senAcosA)cosA + senA(1 - 2sen^2A)$$
$$sen(3A) = 2senAcos^2A + senA - 2sen^3A$$
$$sen(3A) = 2senA(1 - sen^2A) + senA - 2sen^3A$$
$$\Rightarrow sen(3A) = 3senA - 4sen^3A$$

3) $tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3A}{1 - 3tg^2A}$

$$tg(2A + A) = \frac{tg(2A) + tgA}{1 - tg(2A)tgA}$$
$$tg(3A) = \frac{\frac{2tgA}{1 - tg^2A} + tgA}{1 - \left(\frac{2tgA}{1 - tg^2A}\right)tgA}$$
$$\Rightarrow tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3A}{1 - 3tg^2A}$$

Observações:

Vale a pena decorar as fórmulas de arco triplo do seno e cosseno, pois eles já foram cobrados em provas anteriores.

6.2.3. Fórmulas de arco metade

$$\boxed{\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-\cos A}{senA}=\frac{senA}{1+\cos A}}$$

$$\boxed{senA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A)=\frac{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{tgA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Demonstrações:

1) $\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

Podemos usar a fórmula do arco duplo do cosseno:

$$\cos(2A)=2\cos^2 A-1$$

Fazendo $A=\alpha/2$, temos:

$$\cos\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{(1+\cos\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

2) $\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

Sabemos que $\cos(2A)=1-2sen^2A$, assim, temos:

$$\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=1-2sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$$

3) $tg\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$$

4) $tg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-cosA}{senA}=\frac{senA}{1+cosA}$

Usando as fórmulas de arco duplo, temos:

$$\frac{1-cosA}{senA}=\frac{1-\left(1-2sen^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{2sen^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=tg\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{senA}{1+cosA}=\frac{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{1+2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)-1}=\frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=tg\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow tg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-cosA}{senA}=\frac{senA}{1+cosA}$$

5) $senA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

Para deduzir essa fórmula, podemos usar o seno do arco duplo e usar $A=\frac{\alpha}{2}$:

$$sen\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$sen(\alpha)=\frac{2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$sen(\alpha) = 2\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow sen(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

6) $tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

Usando o arco duplo da tangente e fazendo $A = \alpha/2$, temos:

$$tg(2A) = \frac{2tgA}{1-tg^2A}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

7) $\cos(A) = \frac{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{sen\alpha}{tg\alpha}$$

Substituindo $sen\alpha$ e $tg\alpha$ na relação do cosseno, encontramos:

$$cos\alpha = \frac{\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

6.3. Fórmulas de Werner

As fórmulas de Werner são a transformação de produto em soma. Elas estão listadas abaixo:

$$\boxed{2cosAcosB = \cos(A+B) + \cos(A-B)}$$

$$\boxed{-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{2senBcosA = sen(A+B) - sen(A-B)}}$$

Demonstrações:

1) $2cosAcosB = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$

$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Podemos somar as duas identidades:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2cosAcosB$$

2) $-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$

$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Podemos subtrair as duas identidades:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2senAsenB$$

3) $2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)$

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Somando as duas identidades:

$$sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$$

4) $2senBcosA = sen(A+B) - sen(A-B)$

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Subtraindo as duas identidades:

$$sen(A+B) - sen(A-B) = 2senBcosA$$

6.4. Fórmulas de Prostaférese

Ao nos depararmos com equações trigonométricas, algumas questões podem exigir que você saiba como aplicar uma transformação trigonométrica para conseguir resolvê-las. Vamos estudar cada uma delas.

As fórmulas abaixo são a transformação de soma em produto:

$$\boxed{sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boxed{sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

Demonstrações:

1) $sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Vamos usar as fórmulas da soma e diferença de arcos do seno:

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Somando essas duas identidades, temos:

$$sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$$

Agora, vamos fazer as seguintes substituições:

$$A + B = p$$

$$A - B = q$$

Assim, podemos escrever:

$$A = \frac{p+q}{2}$$

$$B = \frac{p-q}{2}$$

Substituindo na identidade $sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$, encontramos:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2) $sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$
$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Vamos subtrair essas identidades:

$$sen(A+B) - sen(A-B) = 2senBcosA$$

Substituindo A e B em função de p e q, temos:

$$sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

3) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$
$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Somando as duas identidades, temos:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2cosAcosB$$

Substituindo A e B:

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

4) $\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$
$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Subtraindo as duas identidades e escrevendo A e B em função de p e q:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2senAsenB$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

3. Calcule:

a) $sen\left(arctg\left(\sqrt{2}\right)\right)$

b) $tg\left(2arctg\left(\frac{1}{5}\right)\right)$

c) $tg\left(arcsen\left(\frac{3}{5}\right) - arctg\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

Resolução:

a) Vamos fazer $\alpha = arctg(\sqrt{2})$, assim, temos:

$$tg\alpha = \sqrt{2}$$

Queremos calcular $sen\alpha$, podemos a seguinte identidade:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2}}$$

$$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

b) Fazendo $\alpha = 2arctg\left(\frac{1}{5}\right)$:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

Queremos calcular $tg\alpha$, vamos usar a seguinte identidade:

$$tg\alpha = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\alpha = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}$$

c) Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = arctg\left(\frac{5}{12}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$tg\beta = \frac{5}{12}$$

Queremos calcular $tg(\alpha - \beta)$. Podemos usar a diferença de arcos da tangente:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Conhecemos o valor de $tg\beta$, vamos encontrar $tg\alpha$:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$9 + 9tg^2\alpha = 25tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha = \frac{9}{16}$$

$$tg\alpha = \pm\frac{3}{4}$$

Para $tg\alpha = 3/4$, temos:

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

Para $tg\alpha = -3/4$, temos:

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\left(-\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{12}}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\left(-\frac{14}{12}\right)}{\frac{33}{48}} = -\frac{56}{33}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}}$ b) $\boldsymbol{tg\alpha = \frac{5}{12}}$ c) $\boldsymbol{tg(\alpha-\beta) = \frac{16}{63}}$ *ou* $\boldsymbol{tg(\alpha-\beta) = -\frac{56}{33}}$

4. Calcule a soma das soluções da equação $arctg\left(\frac{x}{2}\right) + arctg\left(\frac{x}{3}\right) = arctg\left(\frac{1}{5}\right)$.

Resolução:

Fazendo $\alpha = arctg\left(\frac{x}{2}\right)$, $\beta = arctg\left(\frac{x}{3}\right)$ e $\gamma = arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, temos:

$$tg\alpha = \frac{x}{2}$$

$$tg\beta = \frac{x}{3}$$

$$tg\gamma = \frac{1}{5}$$

Aplicando a tangente na equação, obtemos:

$$tg(\alpha+\beta) = tg\gamma$$

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = tg\gamma$$

Substituindo os valores das tangentes:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)}{1-\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5x}{6-x^2} = \frac{1}{5}$$

$$25x = 6 - x^2$$

$$x^2 + 25x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625+24}}{2} = \frac{-25 \pm \sqrt{649}}{2}$$

A soma das soluções é dada por:

$$x_1 + x_2 = -25$$

Gabarito: $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -25}$

5. Se $\cos(2x) = \frac{1}{3}$, onde $x \in (0, \pi)$, calcule o valor de $y = (sen(3x) - sen(x))/\cos(2x)$.

Resolução:

Vamos transformar a subtração em produto usando a fórmula de Prostaférese:

$$senp - senq = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$y = \frac{sen(3x) - sen(x)}{\cos(2x)}$$

$$y = \frac{2sen\left(\frac{3x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)}{\cos(2x)}$$

$$y = \frac{2senx\cos(2x)}{\cos(2x)}$$

$$y = 2senx$$

Usando a informação $\cos(2x) = 1/3$, temos:

$$\cos(2x) = 1 - 2sen^2x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = 2sen^2x$$

$$senx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $x \in (0, \pi)$, $senx > 0$, então:

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{y = 2\sqrt{3}/3}$

6. Transformando-se $sen40° + cos10°$ em produto, obtemos:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}sen40°$

b) $\sqrt{3}sen20°$

c) $\sqrt{3}cos20°$

d) $\sqrt{2}sen20°$

Resolução:

Podemos usar o ângulo complementar e escrever:

$$\cos 10° = sen80°$$

Assim, podemos usar a fórmula de Prostaférese:

$$senp + senq = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sen40° + sen80° = 2sen\left(\frac{40°+80°}{2}\right)\cos\left(\frac{80°-40°}{2}\right)$$

$$sen40° + sen80° = 2sen60°cos20°$$

$$\Rightarrow sen40° + sen80° = \sqrt{3}cos20°$$

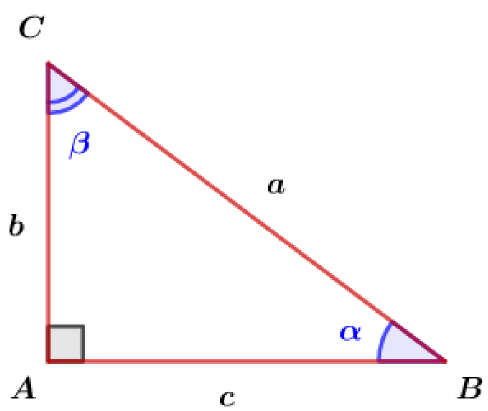
Gabarito: "c".

7. Resumo

7.1. Medidas Usuais

Grau	Grado	Radiano
$360°$	$400gr$	$2\pi\ rad$
$180°$	$200gr$	$\pi\ rad$

7.2. Razões Trigonométricas



Principais Razões	
$sen\alpha$	$\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$
$cos\alpha$	$\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$
$tg\alpha$	$\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{b}{c}$
$sec\alpha$	$\frac{1}{cos\alpha}$
$csc\alpha$	$\frac{1}{sen\alpha}$
$cotg\alpha$	$\frac{1}{tg\alpha}$

7.3. Relação Fundamental

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

$$\boxed{cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

$$\boxed{1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}$$

7.4. Ângulos Complementares

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
$sen\alpha = cos\beta$
$sen\beta = cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$
$tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

7.5. Transformações

7.5.1. Soma e Diferença de Arcos

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{sen(A+B) = \mathrm{sen}(A)\cos(B) + \mathrm{sen}(B)\cos(A)}$$

$$\boxed{sen(A-B) = \mathrm{sen}(A)\cos(B) - \mathrm{sen}(B)\cos(A)}$$

$$\boxed{tg(A+B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)tg(B)}}$$

$$\boxed{tg(A-B) = \frac{tg(A) - tg(B)}{1 + tg(A)tg(B)}}$$

7.5.2. Arco Duplo

$$\boxed{\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A}$$

$$\boxed{sen(2A) = 2senAcosA}$$

$$\boxed{tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2 A}}$$

7.5.3. Arco Triplo

$$\boxed{\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA}$$

$$\boxed{sen(3A) = 3senA - 4sen^3 A}$$

$$\boxed{tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3 A}{1 - 3tg^2 A}}$$

7.5.4. Arco Metade

$$\boxed{\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}}$$

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{senA} = \frac{senA}{1 + cosA}}$$

$$\boxed{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

7.5.5. Fórmulas de Werner

$$\boxed{2cosAcosB = \cos(A + B) + \cos(A - B)}$$

$$\boxed{-2senAsenB = \cos(A + B) - \cos(A - B)}$$

$$\boxed{2senAcosB = sen(A + B) + sen(A - B)}$$

$$\boxed{2senBcosA = sen(A + B) - sen(A - B)}$$

7.5.6. Fórmulas de Prostaférese

$$\boldsymbol{sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

8. Lista de Questões

7. (EEAR/2019)

Simplificando a expressão $\operatorname{sen}(2\pi - x) + \operatorname{sen}(3\pi + x)$, obtém-se

a) $\operatorname{sen} x$

b) $-\operatorname{sen} x$

c) $2\operatorname{sen} x$

d) $-2\operatorname{sen} x$

8. (EEAR/2019)

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

a) $48°$

b) $54°$

c) $66°$

d) $72°$

9. (EEAR/2018)

O valor de $\operatorname{sen} 1270°$ é igual a

a) $-\cos 10°$

b) $-\operatorname{sen} 30°$

c) $-\operatorname{sen} 10°$

d) $-\cos 30°$

10. (EEAR/2018)

As funções $f(x) = \operatorname{sen} x \;\; e \; g(x) = \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

a) decrescente e decrescente

b) decrescente e crescente

c) crescente e decrescente

d) crescente e crescente

11. (EEAR/2018)

O valor de $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$ é igual a

a) $\operatorname{sen} 2a$

b) $\cos 2a$

c) $2 \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

d) $2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b$

12. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\operatorname{cossec} x + \sec x}{\operatorname{cotg} x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\operatorname{sen} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{cossec} x$

13. (EEAR/2017)

Ao somar as medidas angulares $120°$ e $\frac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao _____quadrante.

a) $1°$

b) $2°$

c) $3°$

d) $4°$

14. (EEAR/2016)

O valor de $\cos 735°$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

15. (EEAR/2016)

O valor correspondente ao $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) 1

16. (EEAR/2015)

Se $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta = \frac{4}{13}$ e $\text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha = \frac{36}{65}$, então $\text{sen}\,(\alpha+\beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

17. (EEAR/2015) [Adaptada]

Ao simplificar a expressão $(1+\cos x)(1-\cos x)$, tem-se

a) 2

b) $\text{sen}^2\, x$

c) $\cos^2 x$

d) $2+\cos^2 x$

18. (EEAR/2015)

Seja $A = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x}$, com $\operatorname{tg} x \neq 0$. Nessas condições, o valor de A é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 1

19. (EEAR/2015)

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

a) 36

b) 38

c) 42

d) 46

20. (EEAR/2014)

Dados $\operatorname{sen} a = x, \cos a = y, \operatorname{sen} b = z$ e $\cos b = w$, então $\operatorname{sen}(a+b)$ é igual a

a) $xw + yz$

b) $xz + yw$

c) $xy - wz$

d) $xw - yz$

21. (EEAR/2013)

Se x é um arco do 1° quadrante, com $\operatorname{sen} x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

a) a

b) b

c) $-a$

d) $-b$

22. (EEAR/2013)

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

a) 170°

b) $220°$

c) $280°$

d) $320°$

23. (EEAR/2013)

Sejam $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

24. (EEAR/2013)

Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\operatorname{sen} x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\cos x$ é

a) t

b) $\frac{u}{t}$

c) $u \cdot t$

d) $u + t$

25. (EEAR/2012)

Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$;

II- domínio $D = \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $Im = [-1,1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

a) I.

b) III.

c) I e II.

d) II e III.

26. (EEAR/2011)

Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em _______ arcos de $30°$

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

27. (EEAR/2011)

Se $\operatorname{sen} y = m$ e $\cos y = n$, o valor de $\frac{\sec y}{\operatorname{cossec} y}$ é

a) m.

b) n^2.

c) mn.

d) $\frac{m}{n}$.

28. (EEAR/2011)

Se $A = \operatorname{tg} 120°$ e $B = \operatorname{tg} 240°$, então

a) $B = A$

b) $B = -A$

c) $B = 2A$

d) $B = -2A$

29. (EEAR/2011)

Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{sen} 2x$ é

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

30. (EEAR/2010)

Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

a) $\operatorname{cossec} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{tg} x$

31. (EEAR/2010)

Se $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de $\operatorname{sen} x$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

32. (EEAR/2010)

Seja $x = 150°$. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\operatorname{sen} 2x < 0$

III) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

33. (EEAR/2010)

O valor de $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $2 - \sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{3}$

34. (EEAR/2010)

Para $x \cdot y \neq 0$, a expressão $\frac{y^2 \cos 180° - xy \operatorname{sen} 270° + y^2 \operatorname{sen} 90°}{x^2 \cos 0°}$ equivale a:

a) $\frac{y}{x}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{y}{x^2}$

d) $\frac{y^2}{x^2}$

35. (EEAR/2009)

São negativas, no $4°$ quadrante, as funções

a) seno, cosseno e tangente.

b) seno, cosseno e cotangente.

c) cosseno, tangente e secante.

d) seno, tangente e cossecante.

36. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\text{tg}\,10° = \text{tg}(-10°)$

II- $\text{tg}\,770° = -\text{tg}(50°)$

III- $\text{sen}\,250° = \text{sen}\,20°$

IV- $\text{sen}\,460° = \text{sen}\,100°$

O número de igualdades verdadeiras é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

37. (EEAR/2009)

Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se $a + b = 90°$, então cos $(a - b)$, em função de b, é igual a

a) $\text{sen}\,2b$

b) $\cos 2b$

c) $\frac{\text{sen}\,2b}{2}$

d) $\frac{\cos 2b}{2}$

38. (EEAR/2009)

Se x e y são arcos do $1°$ quadrante, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x+y)$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

39. (EEAR/2008)

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, então $\operatorname{sen} 2\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

40. (EEAR/2008)

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = 1 - m$ pertencem ao intervalo

a) $[-1,0[$.

b) $[0,1[$.

c) $[1,3[$.

d) $[0,2[$.

41. (EEAR/2008)

Comparando-se $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{tg} 110°$ e $\operatorname{tg} 200°$, obtém-se

a) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° > \operatorname{tg} 110°$.

b) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

c) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

d) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

42. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{(\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}-\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}}$ é

a) $1-\sqrt{2}$

b) $1+\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

43. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{cossec}\,x-1}$, para $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\mathrm{sen}\,x=\frac{1}{3}$, é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

44. (EEAR/2007)

Se $0<x<\frac{\pi}{4}$ e $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{cotg}\,x=3$, então $\mathrm{sen}\,2x$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

45. (EEAR/2007)

Se $0<x<\frac{\pi}{2}$, e $y=\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\mathrm{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$, então y é igual a

a) $\mathrm{tg}\,x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\mathrm{sen}\,x$

46. (EEAR/2007)

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

a) 30.

b) 40.

c) 50.

d) 60.

47. (EEAR/2007)

O conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 5\,\text{sen}\,x$ é

a) $[-2,8]$.

b) $[3,7]$.

c) $[-1,5]$.

d) $[0,4]$.

48. (EEAR/2007)

Seja x um arco do $1°$ quadrante. Se $\cos x = \frac{1}{8}$, então $\text{tg}\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

49. (EEAR/2006)

Se $2 \cdot \text{sen}\,x + 5 \cdot \cos x = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos x =$

a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$

c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$

d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

50. (EEAR/2006)

O domínio da função $f(x) = 3 \cdot \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

51. (EEAR/2006)

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

a) $1°$.

b) $2°$.

c) $3°$.

d) $4°$.

52. (EEAR/2006)

Sejam as medidas de arcos trigonométricos:

I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;

II- $1490°$ e $-1030°$

É correto afirmar que as medidas

a) em I são de arcos côngruos.

b) em I são de arcos suplementares.

c) em II são de arcos côngruos.

d) em II são de arcos complementares.

53. (EEAR/2006)

Se $x \in 1°Q$ e $\cos x = \frac{3}{8}$, então $\cos\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

54. (EEAR/2005)

Se $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, então $\operatorname{tg} 2\alpha$ é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

55. (EEAR/2005)

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade $\operatorname{sen} x = 2k - 5$ se, e somente se,

a) $1 < k \leq 3$.

b) $1 < k < 4$.

c) $2 \leq k < 4$.

d) $2 \leq k \leq 3$.

56. (EEAR/2005)

Seja $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0$. Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}$, obtém-se

a) $\frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha}$

b) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$

c) $\frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$

d) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$

57. (EEAR/2005)

Sendo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ é

a) 1

b) 7

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{7}{16}$

58. (EEAR/2004)

Seja x um arco do $1°$ quadrante. Se $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{2}$, então $\cos 2x$ é

a) $\frac{4}{25}$.

b) $\frac{33}{25}$.

c) $\frac{21}{25}$.

d) $\frac{17}{25}$.

59. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico:

I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ rad pertence ao $2°$ quadrante.

II. o arco $1510°$ pertence ao $3°$ quadrante.

III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao $4°$ quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

a) II.

b) I e II.

c) I e III.

d) I, II e III.

60. (EEAR/2003)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ é equivalente a:

a) $2 \operatorname{sen} x$

b) $2 \sec x$

c) $2 \cos x$

d) $2 \operatorname{cossec} x$

61. (EEAR/2003)

A expressão $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

a) $\operatorname{tg}^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\operatorname{cotg}^2 x$

d) $\cos^2 x$

62. (EEAR/2003)

Sendo $a - b = 30°$, calculando $y = (\operatorname{sen} a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} b - \cos a)^2$, obtemos

a) 1

b) $\frac{2}{3}$

c) 3

d) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

63. (EEAR/2003)

A expressão trigonométrica $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ é igual a

a) 1 para todo número real x.

b) -1 para todo número real x.

c) $2\cos^2 x - 1$, para todo número real x.

d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x.

64. (EEAR/2003)

O produto $(\operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{sen} 2x)$ é igual a

a) $\operatorname{sen}^2 x$

b) $\cos^2 x$

c) $2\operatorname{sen}^2 x$

d) $2\cos^2 x$

65. (EEAR/2002)

Das afirmações:

I. $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$

II. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

III. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Sendo x um arco no círculo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π, conclui-se que:

a) a única falsa é I

b) a única falsa é II

c) a única falsa é III

d) as três são verdadeiras

66. (EEAR/2002)

Se a $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$ é igual a:

a) $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $-\frac{1}{5}$

67. (EEAR/2002)

O $\operatorname{sen} \frac{122\pi}{9}$ é igual ao

a) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{9}$

b) $\operatorname{sen} \frac{4\pi}{9}$

c) $-\operatorname{sen} \frac{5\pi}{9}$

d) $-\operatorname{sen} \frac{4\pi}{9}$

68. (EEAR/2002)

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado de sua tangente, então o valor do seu cosseno é

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2}{3}$

69. (EEAR/2001)

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(1) $\operatorname{sen}^2 2x$	( )	$2\cos^2 x$
(2) $1 + \cos 2x$	( )	$2 \operatorname{sen} x \cos x$
(3) $\operatorname{sen} 2x$	( )	$1 - \cos^2 2x$

(4) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ( ) $-\operatorname{sen} x$

(5) $\operatorname{sen}(-x)$ ( ) $\cos x$

Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a sequência correta é:

a) $1, 3, 4, 5, 2$

b) $2, 3, 1, 5, 4$

c) $3, 1, 2, 4, 5$

d) $2, 3, 5, 1, 4$

70. (EEAR/2001) [Adaptada]

Em $0 \leq x \leq 2\pi$, a expressão $y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal que:

a) $y > 0$ somente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $y < 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

c) $y > 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

d) $y < 0$ somente se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

71. (EEAR/2001)

Se $\operatorname{tg} x = -3$, então $\operatorname{tg} 4x$ é igual a:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{24}{7}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{24}{7}$

72. (EEAR/2001)

A expressão $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$ é identicamente igual a:

a) $\operatorname{cotg} x$

b) $\sec x$

c) $\operatorname{sen} x$

d) $\operatorname{tg} x$

73. (EEAR/2000)

O valor de $(\text{sen}\, 112°30' + \cos 112°30')^2$ é:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

74. (EsPCEx/2018)

Considere o triângulo com ângulos internos $x, 45°$ e $120°$. O valor de $\text{tg}^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$

b) $4\sqrt{3} - 7$

c) $7 - 4\sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $2 - 4\sqrt{3}$

75. (EsPCEx/2018)

Sendo $M = \text{arctg}(x), N = \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $P = \text{tg}(M - N)$, o valor de $30P$ para $x = 15$ é:

a) $\frac{224}{30}$

b) $\frac{45}{6}$

c) 45

d) 224

e) 225

76. (EsPCEx/2014)

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

77. (EsPCEx/2014)

O valor de $(\cos 165° + \operatorname{sen} 155° + \cos 145° - \operatorname{sen} 25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é

a) $\sqrt{2}$

b) -1

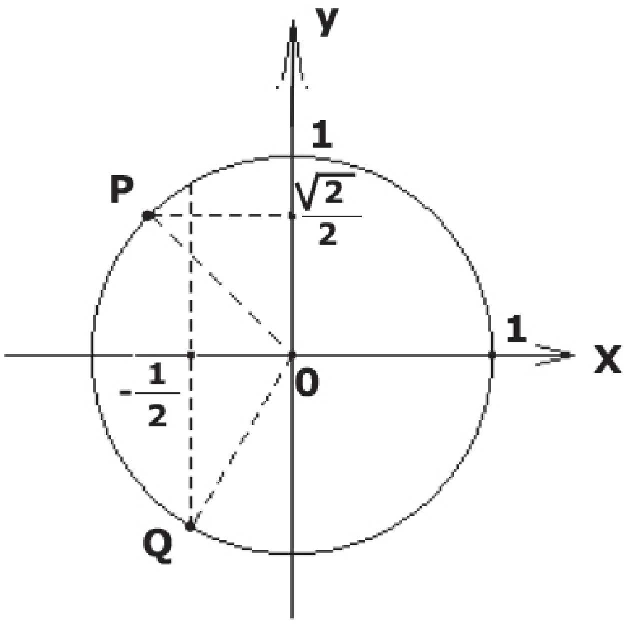
c) 0

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

78. (EsPCEx/2012)

Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo.



O valor de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

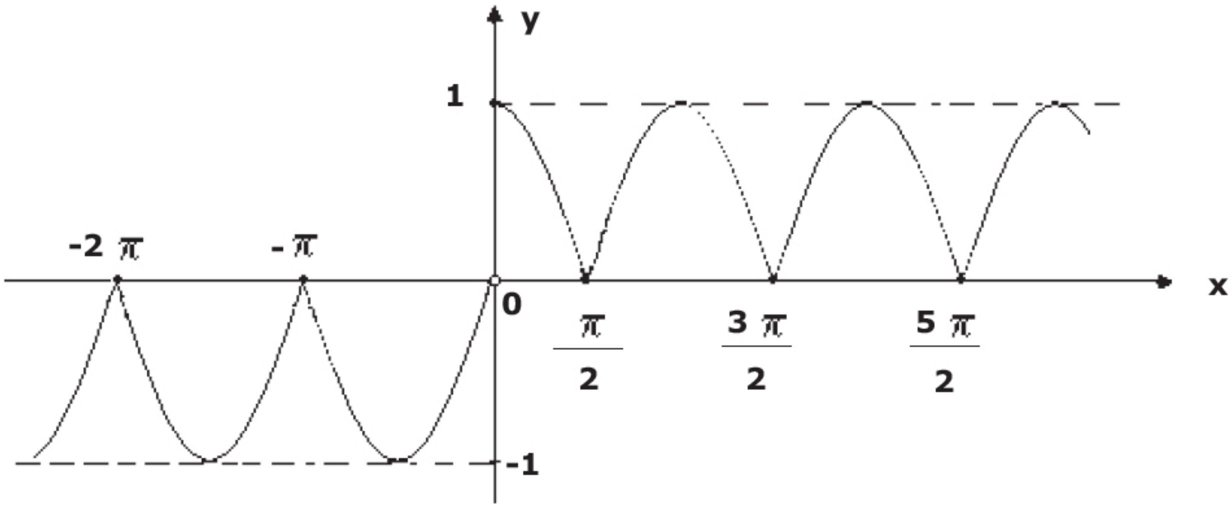
c) $2 + \sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $-1 + \sqrt{3}$

79. (EsPCEx/2011)

A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo. A expressão algébrica de $f(x)$ é:



a) $\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -|\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ x < 0 \\ \cos x, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

80. (EsPCEx/2011)

O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220°)^2$ é:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

81. (EsPCEx/2011)

O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(2+\sqrt{3})}{4}$

82. (EsPCEx/2010)

Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \cdots\right)$.

Se todos os termos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

a) pentágono (5 lados).

b) hexágono (6 lados).

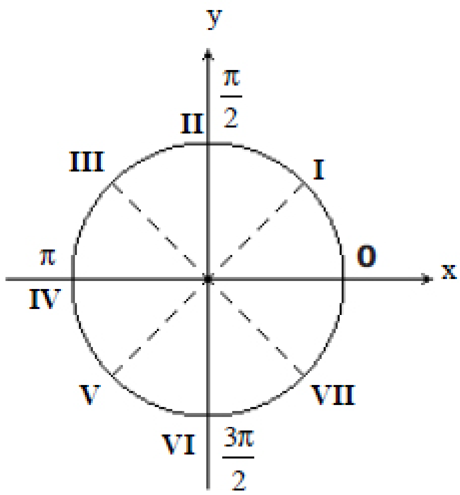
c) octógono (8 lados).

d) decágono (10 lados).

e) dodecágono (12 lados).

83. (EsPCEx/2007)

Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$ correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo. Os pontos identificados por 0 a VII representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao $13°$ termo da sequência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de 0, terá sua extremidade situada entre os pontos

a) I e II

b) II e III

c) IV e V

d) V e VI

e) VII e 0

84. (EsPCEx/2006)

O valor da expressão $\frac{\cos 15°+\cos 75°}{\operatorname{sen} 15°}+\frac{\operatorname{sen} 15°+\operatorname{sen} 75°}{\cos 15°}$ é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

85. (EsPCEx/2005)

A função $f(x)=\left[\operatorname{sen} 2x\cdot\left(\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2\operatorname{sen} x}\right)\right]^2-\operatorname{sen} 2x$ é definida para todo x real e $x\neq\frac{k\pi}{2}$, com k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) $f(2006)=f(2004)+f(2005)$.

b) $f(2005)=f(2006)-2f(2003)$.

c) $f(2006)=f(2005)+f(2004)+f(2003)$.

d) $f(2005)=f(2006)-f(2004)$.

e) $f(2006)=f(2003)+f(2004)-f(2005)$.

86. (EsPCEx/2003)

Considere as expressões:

I- $\frac{\operatorname{sen} 30°\cdot\cos 150°}{\operatorname{tg} 210°}$

II- $\frac{\operatorname{cotg} 50°\cdot\operatorname{sen} 93°}{\operatorname{tg} 181°}$

III- $\frac{\cos x\cdot\operatorname{cossec} x}{\sec x\cdot\operatorname{cotg} x}, x\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$

IV- $\frac{\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x}, x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

Têm sempre valor negativo:

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) I e III.

e) III e IV.

87. (EsPCEx/2002)

Se $z = \frac{2-3\,\text{sen}\,x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em

a) $-2 \leq x \leq -1$

b) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

d) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

88. (EsPCEx/2002)

Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao $1°$ quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) $[0°, 15°]$

b) $[15°, 30°]$

c) $[30°, 45°]$

d) $[45°, 60°]$

e) $[60°, 90°]$

89. (EsPCEx/2002)

O valor numérico da expressão $\text{sen}\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{11\pi}{12}$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

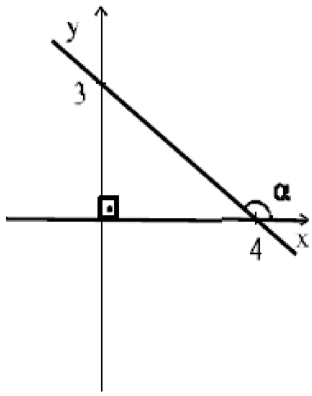
c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{8}$

90. (EsPCEx/2001)

A cossecante do ângulo da figura abaixo é:



a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $-\frac{5}{4}$

91. (EsPCEx/2001)

São arcos côngruos:

a) $-730°$ e $-\frac{\pi}{12}$ rad

b) $1640°$ e $-\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $350°$ e $-\frac{\pi}{18}$ rad

d) $1235°$ e $\frac{5\pi}{6}$ rad

e) $2000°$ e $-\frac{4\pi}{3}$ rad

92. (EsPCEx/2001)

Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então o valor de $\operatorname{tg}\alpha$ é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{12}{13}$

d) $\frac{12}{5}$

e) $-\frac{12}{13}$

93. (EsPCEx/2001) [Adaptada]

Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, simplificando a expressão $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$, obtém-se o valor:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $3/2$

d) 2

e) 0

94. (EsPCEx/2000)

Sendo $\left\{k \in \mathbb{Z}\ e\ x \neq \frac{k\pi}{4}\right\}$, então $2 - \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$ é equivalente a:

a) $\cos^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\sec^2 x$

d) $\operatorname{cossec}^2 x$

e) 1

95. (EsPCEx/2000)

Se y é a medida de um ângulo $0° < y < 30°$, o maior dentre os números $\operatorname{sen} y$, $\cos y$, $\operatorname{sen}^2 y$, $\cos^2 y$ e $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$ é

a) $\operatorname{sen} y$

b) $\cos y$

c) $\operatorname{sen}^2 y$

d) $\cos^2 y$

e) $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$

96. (EsPCEx/2000)

O valor de $3\text{sen } 10° \cdot (\text{tg } 5° + \text{cotg } 5°)$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) 3

d) 5

e) 6

97. (EsPCEx/2000)

O número de arcos existentes entre $0°$ e $1560°$ cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

98. (EsPCEx/2000) [Adaptada]

O domínio e imagem da função $f(x) = \frac{1}{5 - \text{sen } x}$ são, respectivamente,

a) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $[-1, 1]$

b) $\mathbb{R}$ e $\left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$

c) $\mathbb{R}$ e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$

d) $\mathbb{R}^*$ e $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

e) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $\left]-1, \frac{1}{3}\right]$

99. Exercício de Fixação

Num triângulo retângulo ABC, a hipotenusa BC mede 10 cm e $\cos \hat{B} = 0{,}6$. Calcular a soma dos catetos.

100. Exercício de Fixação

Num triângulo ABC tem-se $BC = 6, A\hat{B}C = 30°$ e $B\hat{C}A = 45°$. Calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

101. Exercício de Fixação

Obter M tal que $cosx = \frac{1}{M}$ e $senx = \frac{\sqrt{M+1}}{M}$.

102. Exercício de Fixação

Calcular $secx$ sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a > b > 0$.

103. Exercício de Fixação

Simplifique:

$$y = (tgx - senx)^2 + (1 - cosx)^2 - (secx - 1)^2$$

104. Exercício de Fixação

Simplifique:

$$y = \frac{\cos^4 x - sen^4 x}{1 - tg^4 x} + \frac{cossecx - senx}{secx - cosx}$$

105. Exercício de Fixação

Prove as seguintes identidades:

a) $\text{tg}(-2734°) = -\text{tg}\, 34°$

b) $\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

106. Exercício de Fixação

Utilizando um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos ângulos agudos de medida θ encontre $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em função de senos e cossenos.

107. Exercício de Fixação

Se $y = 2 - 3senx$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

a) 5

b) 1

c) 3

d) -1

e) 6

108. Exercício de Fixação

Sendo dado que $senx + cosx = a$, calcule:

a) $senxcosx$

b) $sen^4 x + cos^4 x$

c) $sen^6 x + \cos^6 x$

109. Exercício de Fixação

Se $\frac{senx - seny}{cosx - cosy} = 2$ e $tgx = \frac{1}{3}$, então tgy é igual a:

a) 3

b) $1/6$

c) 0

d) $-4/3$

e) -3

110. Exercício de Fixação

Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = 1 - 2sen^2x$

b) $\frac{cosx-senx}{cosx+senx} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$

111. Exercício de Fixação

Sabendo que $tgx + secx = 3/2$, calcular $senx$ e $cosx$.

112. Exercício de Fixação

Sabendo que $sen^2x + senx = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

113. Exercício de Fixação

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, prove as identidades abaixo:

a) $\frac{secx}{tgx+cotgx} = senx$

b) $\frac{tgx-cotgx}{tgx+cotgx} = 2sen^2x - 1$

114. Exercício de Fixação

Elimine o arco x na equação:

$$\begin{cases} senx - cosx = a \\ cos2x = b \end{cases}$$

115. Exercício de Fixação

Verifique a seguinte identidade:

$$2arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$

116. Exercício de Fixação

Sabendo que $0 < x < \pi/2$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $tgx = -tg\alpha$

b) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $secx = cossec\alpha$

c) Sendo $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então, $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

d) A função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

117. Exercício de Fixação

Sobre a função f definida por $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, podemos afirmar que:

a) f não é limitada.

b) f é constante.

c) f é injetora.

d) f é ímpar.
e) $f(x) = \cos^2 x$, para todo x real.

118. Exercício de Fixação
O valor numérico da expressão

$$sen\left(\frac{13\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

É
a) $1/2$
b) $1/3$
c) $1/4$
d) $1/6$
e) $1/8$

119. Exercício de Fixação
Prove que se A, B e C são ângulos de um triângulo, então:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2cosAcosBcosC$$

120. Exercício de Fixação
Calcular a soma

$$S = sen\left(\frac{\pi}{15}\right) + sen\left(\frac{5\pi}{15}\right) + sen\left(\frac{9\pi}{15}\right) + \cdots + sen\left(\frac{33\pi}{15}\right)$$

121. Desafio
Prove que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

122. Desafio
Calcular a soma abaixo, cujos arcos estão em PG:

$$S = tga \cdot \sec(2a) + tg(2a) \cdot \sec(4a) + tg(4a) \cdot \sec(8a) + \cdots + tg(2^{n-1}a) \cdot \sec(2^n a)$$

9. Gabarito

7. d
8. b
9. c
10. a
11. c
12. c
13. a
14. c
15. a
16. a
17. b
18. d
19. c
20. a
21. d
22. d
23. a
24. c

25. a
26. b
27. d
28. b
29. a
30. c
31. b
32. c
33. b
34. a
35. d
36. a
37. a
38. c
39. c
40. d
41. a
42. a
43. d
44. c
45. c
46. b
47. a
48. a
49. b
50. b
51. d
52. c
53. c
54. d
55. d
56. c
57. b
58. d
59. c
60. d
61. c
62. c
63. c
64. c
65. a
66. d
67. c ou d
68. b
69. b
70. c
71. d
72. a
73. c
74. c
75. d
76. a
77. c
78. d
79. a
80. d
81. d
82. d
83. d
84. d
85. e
86. b
87. c
88. e
89. c
90. d
91. c
92. a
93. d
94. c
95. b
96. e
97. d
98. c
99. $\boldsymbol{S = 14}$
100. $\boldsymbol{h = 3\sqrt{3} - 3}$
101. $\boldsymbol{M = -1 \text{ ou } M = 2}$ b
102. $\boldsymbol{secx = \pm\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$
103. $\boldsymbol{y = 0}$
104. $\boldsymbol{y = \cos^4 x + cotg^3 x}$ c
105. Demonstração
106. Demonstração
107. $\boldsymbol{y = 5}$
108. a) $\boldsymbol{senxcosx = \frac{a^2-1}{2}}$

   b) $\boldsymbol{sen^4 x + \cos^4 x = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}}$

   c) $\boldsymbol{sen^6 x + \cos^6 x = \frac{-3a^4+6a^2+1}{4}}$
109. e
110. Demonstração

111. $senx = 5/13$ e $cosx = 12/13$
112. Demonstração
113. Demonstração
114. $b^2 = a^2(2 - a^2)$
115. Demonstração
116. a) V b) V c) F d) V
117. b
118. c
119. Demonstração
120. $S = sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$
121. Demonstração
122. $S = tg(2^n a) - tga$

10. Lista de Questões Comentadas

7. (EEAR/2019)

Simplificando a expressão $\operatorname{sen}(2\pi - x) + \operatorname{sen}(3\pi + x)$, obtém-se

a) $\operatorname{sen} x$

b) $-\operatorname{sen} x$

c) $2 \operatorname{sen} x$

d) $-2 \operatorname{sen} x$

Comentários

$$\operatorname{sen}(2\pi - x) + \operatorname{sen}(3\pi + x) = \operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x.$$

Gabarito: "d".

---

8. (EEAR/2019)

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

a) $48°$

b) $54°$

c) $66°$

d) $72°$

Comentários

Como π rad vale $180°$, temos:

$$\frac{3\pi}{10}\ rad = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$$

Gabarito: "b".

---

9. (EEAR/2018)

O valor de $\operatorname{sen} 1270°$ é igual a

a) $-\cos 10°$

b) $-\operatorname{sen} 30°$

c) $-\operatorname{sen} 10°$

d) $-\cos 30°$

Comentários

$$\operatorname{sen} 1270° = \operatorname{sen}(3 \cdot 360° + 190°) = \operatorname{sen} 190° = \operatorname{sen}(180° + 10\,°) = -\operatorname{sen} 10°$$

Gabarito: "c".

---

10. (EEAR/2018)

As funções $f(x) = \operatorname{sen} x\ \ e\ g(x) = \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

a) decrescente e decrescente

b) decrescente e crescente

c) crescente e decrescente

d) crescente e crescente

Comentários

A função seno atinge seu máximo em $x = \frac{\pi}{2}$, no início do segundo quadrante. Portanto, ela é decrescente no segundo quadrante. A função cosseno também é decrescente, atingindo seu mínimo ao final do segundo quadrante, em $x = \pi$.

Gabarito: "a".

---

11. (EEAR/2018)

O valor de $\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b)$ é igual a

a) $\operatorname{sen} 2a$

b) $\cos 2a$

c) $2 \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

d) $2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b$

Comentários

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b) = 2 \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Gabarito: "c".

---

12. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\text{cossec}\, x + \sec x}{\text{cotg}\, x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\text{sen}\, x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\text{cossec}\, x$

Comentários

$$M = \frac{\text{cossec}\, x + \sec x}{\text{cotg}\, x + 1} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\, x} + \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} + 1} = \frac{\text{sen}\, x + \cos x}{\cos^2 x + \text{sen}\, x \cos x} = \frac{\text{sen}\, x + \cos x}{(\cos x + \text{sen}\, x) \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Gabarito: "c".

---

13. (EEAR/2017)

Ao somar as medidas angulares $120°$ e $\frac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao _____quadrante.

a) $1°$

b) $2°$

c) $3°$

d) $4°$

Comentários

Vamos transformar tudo para graus.

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

Logo:

$$\frac{3\pi}{2}\, rad = \frac{3}{2} \cdot 180° = 270°$$

Efetuando a soma: $\gamma = \alpha + \beta = 120° + 270° = 390° = 360° + 30° \in]0,90°[$

Isto é, a soma γ pertence ao primeiro quadrante.

Gabarito: "a".

---

14. (EEAR/2016)

O valor de $\cos 735°$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

Comentários

$$\cos 735° = \cos(2 \cdot 360° + 15°) = \cos 15° = \cos(45° - 30°)$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: “c”.

---

15. (EEAR/2016)

O valor correspondente ao $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) 1

Comentários

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: “a”.

---

16. (EEAR/2015)

Se $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{4}{13}$ e $\operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha = \frac{36}{65}$, então $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

Comentários

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha = \frac{4}{13} + \frac{36}{65} = \frac{20+36}{65} = \frac{56}{65}$$

Gabarito: “a”.

---

17. (EEAR/2015) [Adaptada]

Ao simplificar a expressão $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$, tem-se

a) 2

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\cos^2 x$

d) $2 + \cos^2 x$

Comentários

$$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

Gabarito: “b”.

---

18. (EEAR/2015)

Seja $A = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x}$, com $\operatorname{tg} x \neq 0$. Nessas condições, o valor de A é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 1

Comentários

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

Gabarito: “d”.

---

19. (EEAR/2015)

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

a) 36

b) 38

c) 42

d) 46

Comentários

Como π rad vale $180°$, temos:

$$\frac{7\pi}{30}\ rad\ = \frac{7}{30} \cdot 180° = 42°$$

Gabarito: “c”.

---

20. (EEAR/2014)

Dados $\operatorname{sen} a = x, \cos a = y, \operatorname{sen} b = z$ e $\cos b = w$, então $\operatorname{sen}(a + b)$ é igual a

a) $xw + yz$

b) $xz + yw$

c) $xy - wz$

d) $xw - yz$

Comentários

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cos b + \cos a\, \text{sen}\, b = xw + yz$$

Gabarito: "a".

---

21. (EEAR/2013)

Se x é um arco do 1° quadrante, com $\text{sen}\, x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos x}{\text{tg}\, x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

a) a

b) b

c) $-a$

d) $-b$

Comentários

$$y = \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos x}{\text{tg}\, x \cdot \cos(\pi + x)} = \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos x}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \cdot (-\cos x)} = \frac{a \cdot b}{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = -b$$

Gabarito: "d".

---

22. (EEAR/2013)

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

a) $170°$

b) $220°$

c) $280°$

d) $320°$

Comentários

Como π rad $= 180°$, temos:

$$\frac{16\pi}{9}\, rad = \frac{16}{9} \cdot 180° = 320°$$

Gabarito: "d".

---

23. (EEAR/2013)

Sejam $\text{sen}\, x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}\, 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow b - a = 25 - 24 = 1$$

Gabarito: “a”.

---

24. (EEAR/2013)

Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\operatorname{sen} x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\cos x$ é

a) t

b) $\frac{u}{t}$

c) $u \cdot t$

d) $u + t$

Comentários

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{u}{\frac{1}{t}} = u \cdot t$$

Gabarito: “c”.

---

25. (EEAR/2012)

Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$;

II- domínio $D = \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $Im = [-1,1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

a) I.

b) III.

c) I e II.

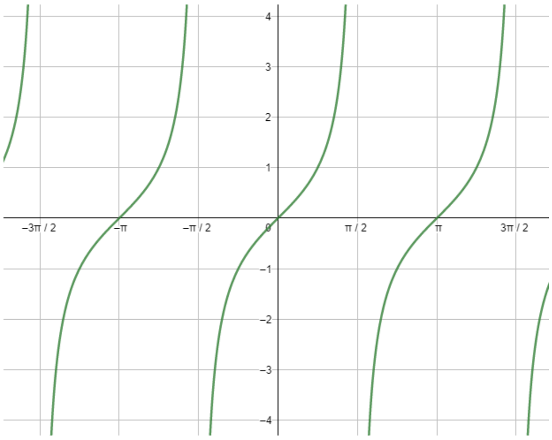
d) II e III.

Comentários

I-Verdadeiro.

II-Falso. Domínio $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

III-Falso. $Im = \mathbb{R}$. De fato, dado $y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid y = \operatorname{tg} x$. Tome $x = \operatorname{arctg} y$, por exemplo.



Gabarito: “a”.

---

26. (EEAR/2011)

Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em ______ arcos de $30°$

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

Comentários

Como π rad $= 180°$, temos:

$$\frac{5\pi}{6}\ rad\ = \frac{5}{6}\cdot 180° = 150°$$

que pode ser dividido em $(150°/30°) = 5$ arcos de $30°$.

Gabarito: “b”.

---

27. (EEAR/2011)

Se $\operatorname{sen} y = m$ e $\cos y = n$, o valor de $\frac{\sec y}{\operatorname{cossec} y}$ é

a) m.

b) n^2.

c) mn.

d) $\frac{m}{n}$.

Comentários

$$\frac{\sec y}{\operatorname{cossec} y} = \frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{1}{\operatorname{sen} y}} = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{m}{n}$$

Gabarito: “d”.

---

28. (EEAR/2011)

Se $A = \operatorname{tg} 120°$ e $B = \operatorname{tg} 240°$, então

a) $B = A$

b) $B = -A$

c) $B = 2A$

d) $B = -2A$

Comentários

$$B = \operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(360° - 120°) = \operatorname{tg}(-120°) = -\operatorname{tg} 120° = -A$$

Gabarito: "b".

---

29. (EEAR/2011)

Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{sen} 2x$ é

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Comentários

$$\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = +\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Gabarito: "a".

---

30. (EEAR/2010)

Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

a) $\operatorname{cossec} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{tg} x$

Comentários

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Gabarito: "c".

---

31. (EEAR/2010)

Se $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de $\operatorname{sen} x$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Usando a fórmula de cosseno do arco duplo, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$, ficamos com um polinômio do segundo grau em $\operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$$

$$\Leftrightarrow sen\, x(2\, sen\, x - 1) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \ ou \ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Gabarito: "b".

---

32. (EEAR/2010)

Seja $x = 150°$. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\operatorname{sen} 2x < 0$

III) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentários

I) Falsa.

$$\cos x = \cos(180° - 30°) = \cos 180° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 180° \cdot \operatorname{sen} 30° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

II) Verdadeira.

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 300° = \operatorname{sen}(360° - 60°) = \operatorname{sen}(-60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

III) Verdadeira.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\frac{\operatorname{sen}150°}{1+\cos 150°}=\frac{\operatorname{sen}30°}{1-\cos 30°}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

Gabarito: "c".

---

33. (EEAR/2010)

O valor de $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $2-\sqrt{2}$

d) $2+\sqrt{3}$

Comentários

O estudante poderia tentar ir pelo seguinte caminho (talvez já tenha até decorado o resultado), sem sucesso:

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\operatorname{sen}45°\operatorname{sen}30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Provavelmente o que a banca esperava era:

$$\cos 30°=\cos(2\cdot 15°)=2\cos^2 15°-1\Rightarrow\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Gabarito: "b".

---

34. (EEAR/2010)

Para $x\cdot y\neq 0$, a expressão $\frac{y^2\cos 180°-xy\operatorname{sen}270°+y^2\operatorname{sen}90°}{x^2\cos 0°}$ equivale a:

a) $\frac{y}{x}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{y}{x^2}$

d) $\frac{y^2}{x^2}$

Comentários

$$\frac{y^2\cos 180°-xy\operatorname{sen}270°+y^2\operatorname{sen}90°}{x^2\cos 0°}=\frac{y^2\cdot(-1)-xy\cdot(-1)+y^2\cdot 1}{x^2\cdot 1}$$
$$=\frac{-y^2+xy+y^2}{x^2}=\frac{xy}{x^2}=\frac{y}{x}.$$

Gabarito: “a”.

35. (EEAR/2009)

São negativas, no $4°$ quadrante, as funções

a) seno, cosseno e tangente.

b) seno, cosseno e cotangente.

c) cosseno, tangente e secante.

d) seno, tangente e cossecante.

Comentários

No $4°$ quadrante, o seno e a cossecante são negativos, o cosseno e a secante são positivos e a tangente e a cotangente são negativas.

Gabarito: “d”.

36. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\operatorname{tg} 10° = \operatorname{tg}(-10°)$

II- $\operatorname{tg} 770° = -\operatorname{tg}(50°)$

III- $\operatorname{sen} 250° = \operatorname{sen} 20°$

IV- $\operatorname{sen} 460° = \operatorname{sen} 100°$

O número de igualdades verdadeiras é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Comentários

I- Falsa. A tangente é uma função ímpar:

$$\operatorname{tg}(-10°) = \frac{\operatorname{sen}(-10°)}{\cos(-10°)} = \frac{-\operatorname{sen}(10°)}{\cos(10°)} = -\operatorname{tg} 10°$$

II- Falsa.

$$\operatorname{tg} 770° = \operatorname{tg}(4 \cdot 180° + 50°) = \operatorname{tg} 50° \neq \operatorname{tg}(-50°)$$

III-Falsa.

$$\operatorname{sen} 250° = \operatorname{sen}(270° - 20°) = \operatorname{sen} 270° \cos 20° - \operatorname{sen} 20° \cos 270° = -\cos 20° \neq \operatorname{sen} 20°.$$

IV-Verdadeira.

$$\operatorname{sen} 460° = \operatorname{sen}(360° + 100°) = \operatorname{sen} 100°$$

Gabarito: “a”.

37. (EEAR/2009)

Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se $a + b = 90°$, então cos $(a - b)$, em função de b, é igual a

a) $\operatorname{sen} 2b$

b) $\cos 2b$

c) $\frac{\operatorname{sen} 2b}{2}$

d) $\frac{\cos 2b}{2}$

Comentários

$$\cos(a - b) = \cos(90° - b - b) = \cos(90° - 2b) = \operatorname{sen} 2b$$

Gabarito: "a".

---

38. (EEAR/2009)

Se x e y são arcos do $1°$ quadrante, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x + y)$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

Comentários

x e y do primeiro quadrante $\Rightarrow \cos x > 0$ e $\operatorname{sen} y > 0$

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Gabarito: "c".

---

39. (EEAR/2008)

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, então $\operatorname{sen} 2\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Comentários

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Gabarito: “c”.

---

40. (EEAR/2008)

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = 1 - m$ pertencem ao intervalo

a) $[-1,0[$.

b) $[0,1[$.

c) $[1,3[$.

d) $[0,2[$.

Comentários

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = m^2 + (1 - m)^2 = 2m^2 - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1$$

Perceba que $\{0,1\} \subseteq [0,2[$ apenas.

Gabarito: “d”.

---

41. (EEAR/2008)

Comparando-se $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{tg} 110°$ e $\operatorname{tg} 200°$, obtém-se

a) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° > \operatorname{tg} 110°$.

b) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

c) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

d) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

Comentários

$$\operatorname{tg} 110° = \operatorname{tg}(180° - 70°) = -\operatorname{tg} 70° < 0$$

$$\operatorname{tg} 200° = \operatorname{tg}(180° + 20°) = \operatorname{tg} 20° > 0$$

Temos então:

$$\operatorname{tg} 110° < 0 < \operatorname{tg} 200° = \operatorname{tg} 20°$$

Gabarito: “a”.

42. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}$ é

a) $1-\sqrt{2}$

b) $1+\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Comentários

$$\frac{(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{3}}{0+\frac{\sqrt{3}}{2}}=1-\sqrt{2}$$

Gabarito: “a”.

43. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x-1}$, para $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x=\frac{1}{3}$, é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Comentários

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{8}$$

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \operatorname{tg} x>0\Rightarrow \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x-1}=\frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}-1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{\frac{1}{3}}-1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{3-1}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Gabarito: “d”.

44. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$, então $\operatorname{sen} 2x$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

Comentários

$$3 = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$3 = \frac{2}{sen\ 2x}$$

Logo,

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2}{3}$$

Gabarito: "c".

---

45. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e $y = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$, então y é igual a

a) $\operatorname{tg} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{sen} x$

Comentários

Para facilitar as contas, seja $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$.

$$y = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cossec} \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\cos \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} = \sec x$$

Gabarito: "c".

---

46. (EEAR/2007)

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

a) 30.

b) 40.

c) 50.

d) 60.

Comentários

$$\frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9}$$

Como π rad $= 180°$, temos que

$$\frac{2}{9}\pi\, rad \ = \frac{2}{9} \cdot 180° = 40°$$

Gabarito: "b".

---

47. (EEAR/2007)

O conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 5 \operatorname{sen} x$ é

a) $[-2,8]$.

b) $[3,7]$.

c) $[-1,5]$.

d) $[0,4]$.

Comentários

O conjunto imagem da função $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ é $Im(f_1) = [-1,1]$.

Multiplicando-se por 5, obtemos $f_2(x) = 5 \operatorname{sen} x \Rightarrow Im(f_2) = [-5,5]$.

Somando 3, obtemos $f(x) = 3 + 5 \operatorname{sen} x \Rightarrow Im(f) = [-2,8]$.

Gabarito: "a".

---

48. (EEAR/2007)

Seja x um arco do $1°$ quadrante. Se $\cos x = \frac{1}{8}$, então $\operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Comentários

Existe uma fórmula muito boa para se decorar de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{sen}2\cdot\frac{x}{2}}{1+\cos 2\cdot\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

Sabendo que o arco é do primeiro quadrante, o seu seno é positivo:

$$\operatorname{sen}x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

Logo,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Gabarito: “a”.

---

49. (EEAR/2006)

Se $2\cdot\operatorname{sen}x+5\cdot\cos x=0$ e $0<x<\frac{\pi}{2}$, então $\cos x=$

a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$

c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$

d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

Comentários

$$2\cdot\operatorname{sen}x+5\cdot\cos x=0\Leftrightarrow 2\cdot\operatorname{sen}x=-5\cdot\cos x\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-\frac{5}{2}$$

A segunda equivalência é possível pois $\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=0$, absurdo, tendo em vista que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$. Prosseguindo:

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\frac{25}{4}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{4}{29}\Leftrightarrow\cos x=\pm\frac{2\sqrt{29}}{29}$$

Como $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x>0$, temos obrigatoriamente $\cos x=\frac{2\sqrt{29}}{29}$.

Gabarito: “b”.

---

50. (EEAR/2006)

O domínio da função $f(x)=3\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentários

O argumento da função tangente nunca pode ser $\frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: "b".

---

51. (EEAR/2006)

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

a) $1°$.

b) $2°$.

c) $3°$.

d) $4°$.

Comentários

$1°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x > 0$, crescente.

$\cos x > 0$, decrescente (já atingiu o máximo em $x = 0$).

$\operatorname{tg} x > 0$, crescente.

$2°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x > 0$, decrescente (já atingiu o máximo em $x = \frac{\pi}{2}$).

$\cos x < 0$, decrescente.

$\operatorname{tg} x < 0$, crescente (após passar de $+\infty$ para $-\infty$).

$3°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x < 0$, decrescente.

$\cos x < 0$, crescente (já atingiu o máximo em $x = \pi$).

$\operatorname{tg} x > 0$, crescente.

$4°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x < 0$, crescente (já atingiu o máximo em $x = \frac{3\pi}{2}$).

$\cos x > 0$, crescente.

$\operatorname{tg} x < 0$, crescente. (após passar de $+\infty$ para $-\infty$).

Pode-se perceber que todas as três funções são crescentes simultaneamente no $4°$ quadrante.

Gabarito: “d”.

52. (EEAR/2006)

Sejam as medidas de arcos trigonométricos:

I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;

II- $1490°$ e $-1030°$

É correto afirmar que as medidas

a) em I são de arcos côngruos.

b) em I são de arcos suplementares.

c) em II são de arcos côngruos.

d) em II são de arcos complementares.

Comentários

I- $\frac{17\pi}{8} = 2\pi + \frac{\pi}{8}$ e $\frac{41\pi}{8} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8} + \pi \Rightarrow$ As marcações no círculo trigonométrico estarão defasadas de π, sendo diametralmente opostas! Não são arcos côngruos nem suplementares.

II- $1490° = 4 \cdot 360° + 50°$ e $-1030° = -3 \cdot 360° + 50° \Rightarrow$ Marcações no mesmo local! Arcos côngruos, não complementares.

Gabarito: “c”.

53. (EEAR/2006)

Se $x \in 1°Q$ e $\cos x = \frac{3}{8}$, então $\cos\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

Comentários

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{8}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$$

Como $x \in 1°\ Q \Rightarrow \frac{x}{2} \in 1°Q$, temos $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Gabarito: “c”.

54. (EEAR/2005)

Se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, então $\operatorname{tg} 2\alpha$ é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

Comentários

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: "d".

---

55. (EEAR/2005)

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade $\operatorname{sen} x = 2k - 5$ se, e somente se,

a) $1 < k \leq 3$.

b) $1 < k < 4$.

c) $2 \leq k < 4$.

d) $2 \leq k \leq 3$.

Comentários

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen} x \in [-1,1]$. Logo, devemos ter $-1 \leq 2k - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3$.

Gabarito: "d".

---

56. (EEAR/2005)

Seja $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$. Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{sen} a + \cos a}{\operatorname{sen} a} + \frac{\operatorname{sen} a - \cos a}{\cos a}$, obtém-se

a) $\frac{1}{\operatorname{sen} 2a}$

b) $\frac{1}{\cos 2a}$

c) $\frac{2}{\operatorname{sen} 2a}$

d) $\frac{2}{\cos 2a}$

Comentários

$$\frac{\operatorname{sen} a + \cos a}{\operatorname{sen} a} + \frac{\operatorname{sen} a - \cos a}{\cos a} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{2}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Gabarito: "c".

---

57. (EEAR/2005)

Sendo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ é

a) 1

b) 7

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{7}{16}$

Comentários

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Assim,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4+3}{4-3} = 7$$

Gabarito: "b".

---

58. (EEAR/2004)

Seja x um arco do $1°$ quadrante. Se $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{2}$, então $\cos 2x$ é

a) $\frac{4}{25}$.

b) $\frac{33}{25}$.

c) $\frac{21}{25}$.

d) $\frac{17}{25}$.

Comentários

$$\operatorname{cossec} x = \frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

Gabarito: "d".

---

59. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico:

I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ rad pertence ao $2°$ quadrante.

II. o arco $1510°$ pertence ao $3°$ quadrante.

III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao $4°$ quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

a) II.

b) I e II.

c) I e III.

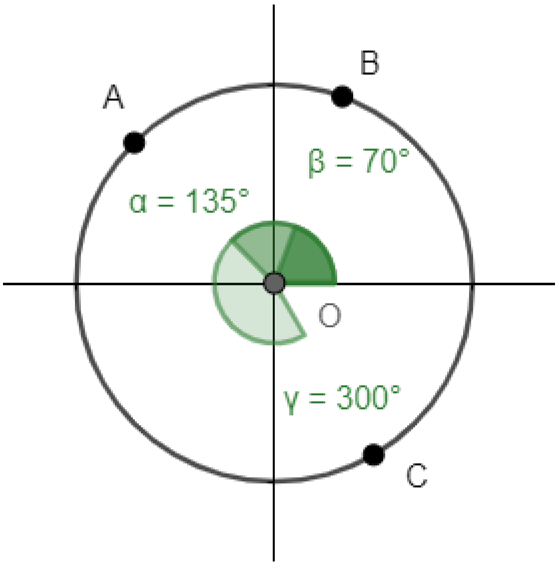
d) I, II e III.

Comentários

$\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ Esse ângulo representa uma volta completa no círculo trigonométrico, no sentido horário, mais um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad. Como $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, esse ângulo pertence ao $2°$ quadrante (Ponto A).

$1510° = 4 \cdot 360° + 70° \Rightarrow$ Esse ângulo representa quatro voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido horário, mais um ângulo de $70°$. Como $0 < 70° < 90°$, esse ângulo pertence ao $1°$ quadrante (Ponto B).

$-\frac{13\pi}{3} = -6\pi + \frac{5\pi}{3} \Rightarrow$ Esse ângulo representa três voltas completa no círculo trigonométrico, no sentido anti-horário, mais um ângulo de $\frac{5\pi}{3}$ rad no sentido horário. Como $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$, esse ângulo pertence ao $4°$ quadrante (Ponto C).



Gabarito: “c”.

---

60. (EEAR/2003)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\text{tg}\frac{x}{2} + \text{cotg}\frac{x}{2}$ é equivalente a:

a) $2 \text{ sen } x$

b) $2 \sec x$

c) $2 \cos x$

d) $2 \text{ cossec } x$

Comentários

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2}{\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}$$
$$=2\operatorname{cossec}x.$$

Gabarito: “d”.

---

61. (EEAR/2003)

A expressão $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

a) $\operatorname{tg}^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\operatorname{cotg}^2 x$

d) $\cos^2 x$

Comentários

$$\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\operatorname{cotg}^2 x$$

Gabarito: “c”.

---

62. (EEAR/2003)

Sendo $a-b=30°$, calculando $y=(\operatorname{sen}a+\cos b)^2+(\operatorname{sen}b-\cos a)^2$, obtemos

a) 1

b) $\frac{2}{3}$

c) 3

d) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

$$y=(\operatorname{sen}a+\cos b)^2+(\operatorname{sen}b-\cos a)^2$$
$$=(\operatorname{sen}^2 a+2\operatorname{sen}a\cos b+\cos^2 b)+(\operatorname{sen}^2 b-2\operatorname{sen}b\cos a+\cos^2 a)$$
$$=(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a)+(\operatorname{sen}^2 b+\cos^2 b)+2\cdot(\operatorname{sen}a\cos b-\operatorname{sen}b\cos a)$$
$$=1+1+2\cdot\operatorname{sen}(a-b)=2+2\cdot\operatorname{sen}30°=2+2\cdot\frac{1}{2}=3$$

Gabarito: “c”.

---

63. (EEAR/2003)

A expressão trigonométrica $\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ é igual a

a) 1 para todo número real x.

b) -1 para todo número real x.

c) $2\cos^2 x - 1$, para todo número real x.

d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x.

Comentários

Usando que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Gabarito: “c”.

---

64. (EEAR/2003)

O produto $(\text{tg}\, x) \cdot (\text{sen}\, 2x)$ é igual a

a) $\text{sen}^2 x$

b) $\cos^2 x$

c) $2\,\text{sen}^2 x$

d) $2\cos^2 x$

Comentários

$$(\text{tg}\, x) \cdot (\text{sen}\, 2x) = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \cdot 2\,\text{sen}\, x \cos x = 2\,\text{sen}^2 x$$

Gabarito: “c”.

---

65. (EEAR/2002)

Das afirmações:

I. $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}\, x}$

II. $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x$

III. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Sendo x um arco no círculo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π, conclui-se que:

a) a única falsa é I

b) a única falsa é II

c) a única falsa é III

d) as três são verdadeiras

Comentários

A raiz de qualquer número real positivo é positiva. Assim, se $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}\, x}$, conclui-se que $\cos x \geq 0$. Entretanto, o enunciado afirma que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o que implica que $\cos x < 0$. Dessa forma, conclui-se por absurdo que a afirmativa I é falsa.

As afirmativas II e III são simplesmente as fórmulas de arco duplo, que podem ser deduzidas das fórmulas de adição de arcos da seguinte maneira:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a \ \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{sen}\, 2x = \text{sen}(x+x) = 2\,\text{sen}\, x \cos x$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \ \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$$

Gabarito: “a”.

---

66. (EEAR/2002)

Se a $\text{tg}\, x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\cos x - \text{sen}\, x$ é igual a:

a) $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $-\frac{1}{5}$

Comentários

$$\text{tg}\, x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{tg}^2\, x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16 - 16\cos^2 x = 9\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\, x$$
$$= 1 - \cos^2 x = \frac{9}{25}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos que $\cos x < 0$ e $\text{sen}\, x < 0$. Logo, $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\text{sen}\, x = -\frac{3}{5}$. Portanto,

$$\cos x - \text{sen}\, x = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

Gabarito: “d”.

---

67. (EEAR/2002)

O $\text{sen}\frac{122\pi}{9}$ é igual ao

a) $\text{sen}\frac{5\pi}{9}$

b) $\text{sen}\frac{4\pi}{9}$

c) $-\text{sen}\frac{5\pi}{9}$

d) $-\text{sen}\frac{4\pi}{9}$

Comentários

$$\frac{122\pi}{9} = 12\pi + \frac{14\pi}{9} = 12\pi + 2\pi - \frac{4\pi}{9}$$

Logo,

$$\text{sen}\frac{122\pi}{9} = \text{sen}\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = -\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

Como $\frac{4\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \pi$, temos $\text{sen}\frac{4\pi}{9} = \text{sen}\frac{5\pi}{9}$. Portanto, existem duas alternativas corretas!

Gabarito: “c” ou “d”.

68. (EEAR/2002)

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado de sua tangente, então o valor do seu cosseno é

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2}{3}$

Comentários

No intervalo aberto dado, $\cos\theta \neq 0 \neq \operatorname{sen}\theta$. Logo:

$$2\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{tg}^2\theta \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\theta = 3\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 2\cos^2\theta = 3\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{-3-5}{4} \text{ ou } \operatorname{sen}\theta = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

Como devemos ter $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$, ficamos apenas com a segunda opção. Dessa forma, como θ está no primeiro quadrante, temos que $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gabarito: “b”.

69. (EEAR/2001)

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(1) $\operatorname{sen}^2 2x$	( )	$2\cos^2 x$
(2) $1+\cos 2x$	( )	$2\operatorname{sen}x\cos x$
(3) $\operatorname{sen}2x$	( )	$1-\cos^2 2x$
(4) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	( )	$-\operatorname{sen}x$
(5) $\operatorname{sen}(-x)$	( )	$\cos x$

Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a sequência correta é:

a) $1, 3, 4, 5, 2$

b) $2, 3, 1, 5, 4$

c) $3, 1, 2, 4, 5$

d) $2, 3, 5, 1, 4$

Comentários

(1) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1\ \forall\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{sen}^2\,2x = 1 - \cos^2 2x$ (terceiro vazio).

(2) $cos\,2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ (primeiro vazio).

(3) $\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \text{sen}\,b\cos a\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \text{sen}\,2x = \text{sen}(x+x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x$ (segundo vazio).

(4) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2}\cos(-x) + \text{sen}(-x)\cos\frac{\pi}{2} = \cos(-x) = \cos(x)$ (pois a função cosseno é par; quinto vazio).

(5) A função seno é ímpar (quarto vazio).

Sequência: $2, 3, 1, 5, 4$

Gabarito: “b”.

---

70. (EEAR/2001) [Adaptada]

Em $0 \le x \le 2\pi$, a expressão $y = \frac{\text{sen}\,x + \text{tg}\,x}{\cos x + \text{cotg}\,x}$ é tal que:

a) $y > 0$ somente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $y < 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$

c) $y > 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$

d) $y < 0$ somente se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Comentários

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \frac{\text{sen}\,x + \text{tg}\,x}{\cos x + \text{cotg}\,x} = \frac{\text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}}{\cos x + \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}} = \frac{\text{sen}^2\,x\cos x + \text{sen}^2\,x}{\cos^2 x\,\text{sen}\,x + \cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2\,x\,(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1+\text{sen}\,x)}$$

$$= \text{tg}^2\,x \cdot \left(\frac{1+\cos x}{1+\text{sen}\,x}\right)$$

Como $\text{sen}\,x, \cos x < 1$ (pois $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$), temos que $(1+\cos x), (1+\text{sen}\,x) > 0$. Além disso, $\text{tg}^2\,x > 0$. Portanto, y é sempre positivo.

Gabarito: “c”.

---

71. (EEAR/2001)

Se $\text{tg}\,x = -3$, então $\text{tg}\,4x$ é igual a:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{24}{7}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{24}{7}$

Comentários

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\cdot(-3)}{1-(-3)^2} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{2\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg}^2(2x)} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Gabarito: "d".

---

72. (EEAR/2001)

A expressão $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$ é identicamente igual a:

a) $\operatorname{cotg} x$

b) $\sec x$

c) $\operatorname{sen} x$

d) $\operatorname{tg} x$

Comentários

Parta de $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, além de $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$. Temos:

$$E = \frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\operatorname{sen} x\cos x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$

Gabarito: "a".

---

73. (EEAR/2000)

O valor de $(\operatorname{sen} 112°30' + \cos 112°30')^2$ é:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Seja $\alpha = 112°30'$. Queremos $E = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$.

Mas $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(2\cdot 112°30') = \operatorname{sen}(225°) = \operatorname{sen}(180° + 45°) = -\operatorname{sen}(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $E = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Gabarito: “c”.

---

74. (EsPCEx/2018)

Considere o triângulo com ângulos internos $x, 45°$ e $120°$. O valor de $\text{tg}^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$

b) $4\sqrt{3} - 7$

c) $7 - 4\sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $2 - 4\sqrt{3}$

Comentários

Todo triângulo tem a soma de seus ângulos internos resultando em $180°$:

$$180° = x + 45° + 120° \Leftrightarrow x = 15°.$$

$$\text{tg}\, x = \text{tg}(15°) = \text{tg}(45° - 30°) = \frac{\text{tg}\, 45° - \text{tg}\, 30°}{1 + \text{tg}\, 45° \cdot \text{tg}\, 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{3^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3}}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

Dessa forma, $\text{tg}^2\, x = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}.$

Gabarito: “c”.

---

75. (EsPCEx/2018)

Sendo $M = \text{arctg}(x), N = \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $P = \text{tg}(M - N)$, o valor de $30P$ para $x = 15$ é:

a) $\frac{224}{30}$

b) $\frac{45}{6}$

c) 45

d) 224

e) 225

Comentários

$$M = \text{arctg}\, x \Rightarrow x = \text{tg}\, M$$

$$N = \text{arctg}\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \text{tg}\, N$$

$$P = \text{tg}(M - N) = \frac{\text{tg}\, M - \text{tg}\, N}{1 + \text{tg}\, M \cdot \text{tg}\, N} = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Para $x = 15$, $P = \frac{1}{2} \cdot \left(15 - \frac{1}{15}\right) = \frac{224}{30}$. Logo, $30P = 224$.

Gabarito: “d”.

---

76. (EsPCEx/2014)

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Comentários

Sempre que temos uma expressão do tipo $y(t) = \mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{ftrig}(c \cdot t + d)$, onde a função trigonométrica $\mathrm{ftrig} = \mathrm{sen}$ ou $\cos$, o período da função $y(t)$ é calculado por $T = \frac{2\pi}{c}$.

Sabendo disso, a função $P(t)$, com $c = \frac{\pi}{6}$, tem período $T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ meses (anual). Como a função base é uma função do tipo cosseno, ela cresce em metade desse período e decresce na outra metade. Dessa forma, a resposta correta é o item a), já que a metade de 12 meses são 6 meses = dois trimestres.

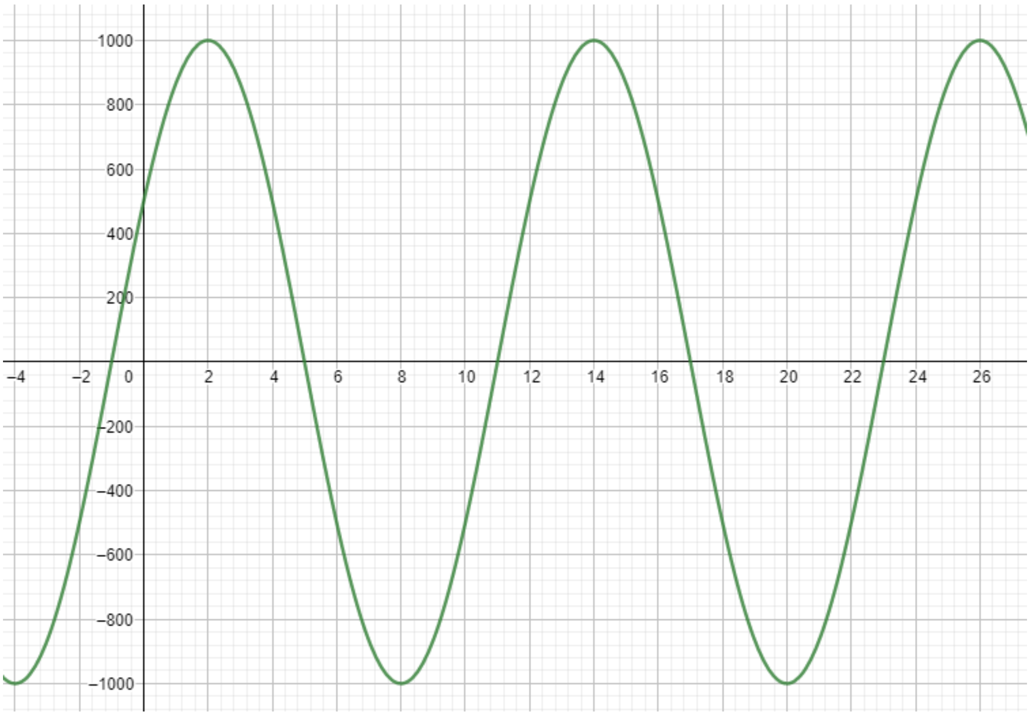
As outras alternativas estão erradas:

A população atinge seu máximo em $t = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$, isto é, todo mês de fevereiro.

O período de seca (estiagem) também corresponde a 6 meses do ano.

A população média anual é de 0 animais. Do jeito que a função foi construída, permite-se populações negativas (o que acontece em $t = 5$, por exemplo?)

A população atinge seu mínimo em $t = 5 + 12k$ com -1000 animais.



Gabarito: “a”.

---

77. (EsPCEx/2014)

O valor de $(\cos 165° + \text{sen}\, 155° + \cos 145° - \text{sen}\, 25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é

a) $\sqrt{2}$

b) -1

c) 0

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

Comentários

Seja E a expressão pedida. Podemos reescrevê-la da seguinte forma, agrupando termos suplementares:

$$E = (\cos 165° + \cos 15°) + (\text{sen}\, 155° - \text{sen}\, 25°) + (\cos 145° + \cos 35°)$$

Usando que $\cos(180° - x) = -\cos x$ e que $\text{sen}(180° - x) = \text{sen}\, x$, temos:

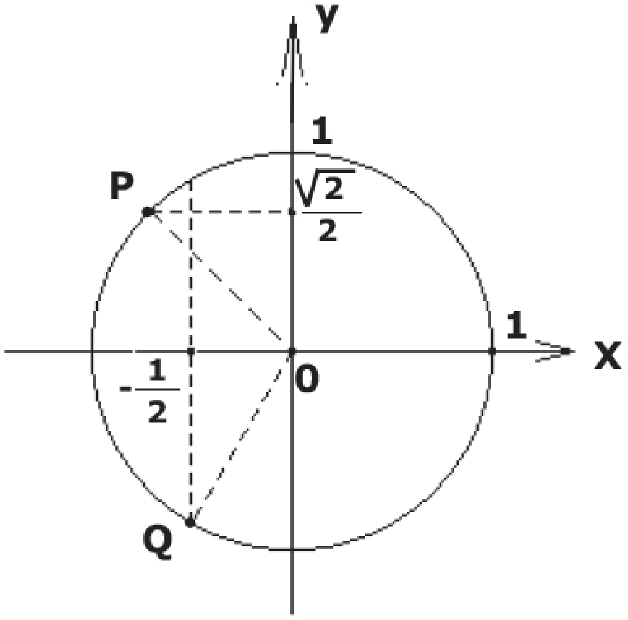
$$E = (-\cos 15° + \cos 15°) + (\text{sen}\, 25° - \text{sen}\, 25°) + (-\cos 35° + \cos 35°) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Gabarito: “c”.

---

78. (EsPCEx/2012)

Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo.



O valor de $\text{tg}(\alpha + \beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

c) $2 + \sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $-1 + \sqrt{3}$

Comentários

Seja A o ponto $(1,0)$. Então $\alpha = \widehat{AOP}$ e $\beta = \widehat{AOPQ}$. Das propriedades do círculo trigonométrico, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\beta = -\frac{1}{2}, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \beta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, $\text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}\left(\frac{25\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{25\pi}{12} - 2\pi\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}(15°)$

$$\text{tg}(15°) = \text{tg}(45° - 30°) = \frac{\text{tg}\,45° - \text{tg}\,30°}{1 + \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right)$$

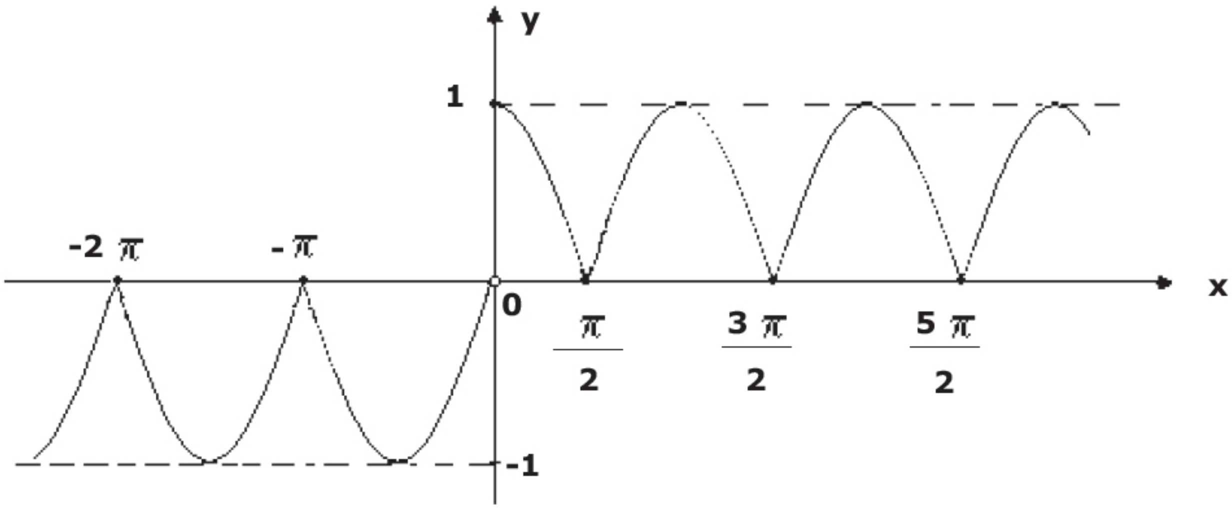
$$= \frac{3^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3}}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

Gabarito: "d".

---

79. (EsPCEx/2011)

A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo. A expressão algébrica de $f(x)$ é:



a) $\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -|\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ x < 0 \\ \cos x, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

Comentários

O gráfico se assemelha ao de funções trigonométricas do tipo seno ou cosseno, ligeiramente modificadas com modularização. Observe que para $x \geq 0, f(x) \geq 0$ e para $x < 0, f(x) \leq 0$. Logo, excluímos as alternativas b), d) e e) de nossa análise. Olhando para $x = \frac{\pi}{2}$ temos, pelo gráfico, que $f(x) = 0$, o que está de acordo com a alternativa a) e em desacordo com c).

Gabarito: "a".

---

80. (EsPCEx/2011)

O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220°)^2$ é:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Vamos primeiro fazer a equivalência dos ângulos para o intervalo $(0°, 360°]$

$$1320° = 3 \cdot 360° + 240°$$

$$\frac{53\pi}{3} = 8 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3} = 8 \cdot 360° + 300°$$

$$2220° = 6 \cdot 360° + 60°$$

Logo,

$$\sec 1320° = \sec 240° = \frac{1}{\cos 240°} = \frac{1}{-\cos 60°} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) = \cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2200° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

Portanto, $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220°)^2 \ = -1 - 1 + 3 = 1.$

Gabarito: "d".

---

81. (EsPCEx/2011)

O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

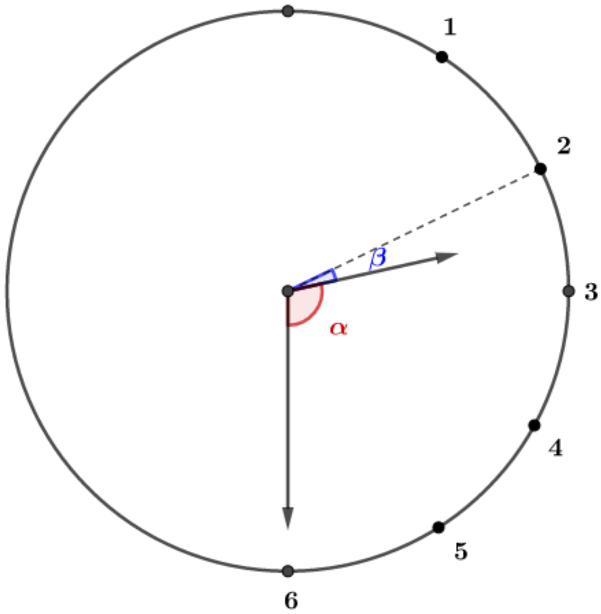
c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(2+\sqrt{3})}{4}$

Comentários

Desenhando o relógio do problema, temos:



No relógio, temos 12 horas. Cada hora possui um ângulo de 30°:

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

No momento em que o ponteiro dos minutos percorre 30 minutos, o ponteiro das horas percorrerá metade do ângulo de cada hora:

$$\beta = \frac{30°}{2} = 15°$$

Então, o ângulo α é dado por:

$$\alpha = 3 \cdot 30° + 15° = 105°$$

Queremos calcular o cosseno desse ângulo:

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = cos60°cos45° - sen60°sen45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: "d".

---

82. (EsPCEx/2010)

Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \cdots\right)$.

Se todos os termos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

a) pentágono (5 lados).

b) hexágono (6 lados).

c) octógono (8 lados).

d) decágono (10 lados).

e) dodecágono (12 lados).

Comentários

A razão da PA é $r = \frac{59\pi}{60} - \frac{47\pi}{60} = \frac{12\pi}{60} = \frac{2\pi}{10}$.

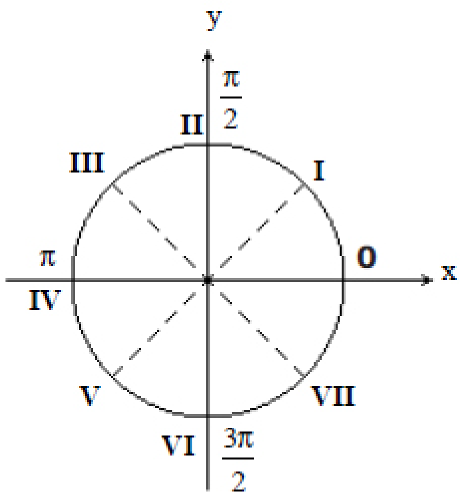
Como 2π é uma volta completa e $\frac{2\pi}{r} = 10 \in \mathbb{Z}$, temos que os pontos determinarão um polígono regular de 10 lados.

Gabarito: “d”.

---

83. (EsPCEx/2007)

Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$ correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo. Os pontos identificados por 0 a VII representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao $13°$ termo da sequência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de 0, terá sua extremidade situada entre os pontos

a) I e II

b) II e III

c) IV e V

d) V e VI

e) VII e 0

Comentários

A sequência tem termo inicial $a_1 = \frac{\pi}{3}$ e razão $r = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$. Assim,

$$a_{13} = a_1 + (13 - 1) \cdot r$$

$$\Rightarrow a_{13} = \frac{\pi}{3} + 12 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$$

Assim, a_{13} terá sua extremidade no mesmo ponto em que estaria a de $\frac{4\pi}{3}$. Como $\frac{5\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} < \frac{6\pi}{4}$ (verifique!), a_{13} está entre V e VI.

Gabarito: "d".

84. (EsPCEx/2006)

O valor da expressão $\frac{\cos 15°+\cos 75°}{\text{sen } 15°}+\frac{\text{sen } 15°+\text{sen } 75°}{\cos 15°}$ é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Comentários

$$\frac{\cos 15° + \cos 75°}{\text{sen } 15°}+\frac{\text{sen } 15° + \text{sen } 75°}{\cos 15°}=\frac{\cos 15° + \text{sen } 15°}{\text{sen } 15°}+\frac{\text{sen } 15° + \cos 15°}{\cos 15°}$$

$$=(\text{sen } 15° + \cos 15°)\cdot\left(\frac{1}{\text{sen } 15°}+\frac{1}{\cos 15°}\right)=(\text{sen } 15° + \cos 15°)\cdot 2\cdot\left(\frac{\text{sen } 15° + \cos 15°}{2\cdot \text{sen } 15° \cos 15°}\right)$$

$$=(\text{sen } 15° + \cos 15°)^2\cdot\frac{2}{\text{sen}(2\cdot 15°)}=(\text{sen}^2\, 15° + cos^2 15° + 2\cdot \text{sen } 15° \cos 15°)\cdot\frac{2}{\text{sen } 30°}$$

$$=(1+\text{sen } 30°)\cdot\frac{2}{\text{sen } 30°}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\frac{1}{2}}=6$$

Gabarito: "d".

85. (EsPCEx/2005)

A função $f(x)=\left[\text{sen } 2x\cdot\left(\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2\,\text{sen } x}\right)\right]^2-\text{sen } 2x$ é definida para todo x real e $x\neq\frac{k\pi}{2}$, com k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) $f(2006)=f(2004)+f(2005)$.

b) $f(2005)=f(2006)-2f(2003)$.

c) $f(2006)=f(2005)+f(2004)+f(2003)$.

d) $f(2005)=f(2006)-f(2004)$.

e) $f(2006)=f(2003)+f(2004)-f(2005)$.

Comentários

Desenvolvendo-se a expressão:

$$f(x)=\left[\text{sen } 2x\cdot\left(\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2\,\text{sen } x}\right)\right]^2-\text{sen } 2x=\left[\text{sen } 2x\cdot\left(\frac{\text{sen } x+\cos x}{2\,\text{sen } x\cos x}\right)\right]^2-\text{sen } 2x$$

$$=\left[\text{sen } 2x\cdot\left(\frac{\text{sen } x+\cos x}{\text{sen } 2x}\right)\right]^2-\text{sen } 2x=(\text{sen } x+\cos x)^2-\text{sen } 2x$$

$$=(\text{sen}^2\, x+\cos^2 x+2\,\text{sen } x\cos x)-\text{sen } 2x=1+\text{sen } 2x-\text{sen } 2x=1$$

Assim, $f(2006)=1=1+1-1=f(2003)+f(2004)-f(2005)$.

Gabarito: “e”.

86. (EsPCEx/2003)

Considere as expressões:

I- $\frac{\text{sen}\,30°\cdot\cos 150°}{\text{tg}\,210°}$

II- $\frac{\text{cotg}\,50°\cdot\text{sen}\,93°}{\text{tg}\,181°}$

III- $\frac{\cos x\cdot\text{cossec}\,x}{\sec x\cdot\text{cotg}\,x}, x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

IV- $\frac{\text{sen}\,x\cdot\text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x}, x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Têm sempre valor negativo:

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) I e III.

e) III e IV.

Comentários

I- $30° \in 1°\text{Q} \Rightarrow \text{sen}\,30° > 0\,, 150° \in 2°\text{Q} \Rightarrow \cos 150° < 0, 210° \in 3°\text{Q} \Rightarrow \text{tg}\,210° > 0.$ Assim, a expressão E_I resulta num valor negativo, pois $E_I = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$.

II- $50° \in 1°\text{Q} \Rightarrow \text{cotg}\,50° > 0\,, 93° \in 2°\text{Q} \Rightarrow \text{sen}\,93° > 0, 181° \in 3°\text{Q} \Rightarrow \text{tg}\,210° > 0.$ Assim, a expressão E_{II} resulta num valor positivo, pois $E_{II} = \frac{(+)\cdot(+)}{(+)} = (+)$.

III- No intervalo $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[= 4°Q$, $E_{III} = \frac{\cos x\cdot\text{cossec}\,x}{\sec x\cdot\text{cotg}\,x} = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(-)} = (+)$, isto é, E_{III} é positivo.

IV- No intervalo $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[= 2°Q$, $E_{IV} = \frac{\text{sen}\,x\cdot\text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x} = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$, isto é, E_{III} é negativo.

Assim, são negativos E_I e E_{IV}.

Gabarito: “b”.

87. (EsPCEx/2002)

Se $z = \frac{2-3\,\text{sen}\,x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em

a) $-2 \leq x \leq -1$

b) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

d) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

Comentários

Isolando-se a função trigonométrica, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2-4z}{3}$$

Assim, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \iff -1 \leq \frac{2-4z}{3} \leq 1 \iff -3 \leq 2-4z \leq 3$$

$$\iff -5 \leq -4z \leq 1 \iff \frac{5}{4} \geq z \geq \frac{-1}{4}$$

Gabarito: “c”.

---

88. (EsPCEx/2002)

Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao $1°$ quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) $[0°, 15°]$

b) $[15°, 30°]$

c) $[30°, 45°]$

d) $[45°, 60°]$

e) $[60°, 90°]$

Comentários:

$$\cos k = 2 \cdot \cos w$$

Como $k \in 1°$ quadrante, temos $0 \leq \cos k \leq 1 \iff 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \cos k \leq \frac{1}{2}$. Assim,

$$0 \leq \cos w \leq \frac{1}{2}$$

Como $w \in 1°$ quadrante, devemos ter $w \in [60°, 90°]$, visto que $\arccos 0 = 90°$ e $\arccos \frac{1}{2} = 60°$.

Gabarito: “e”.

---

89. (EsPCEx/2002)

O valor numérico da expressão $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{8}$

Comentários

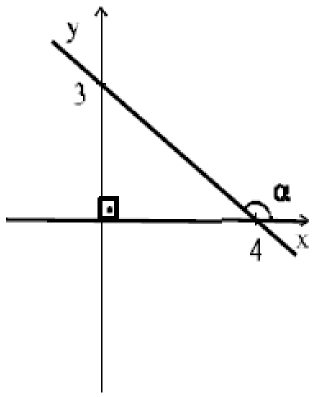
$$\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12}=\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Gabarito: “c”.

---

90. (EsPCEx/2001)

A cossecante do ângulo da figura abaixo é:



a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $-\frac{5}{4}$

Comentários

Seja $\beta=180°-\alpha$ o ângulo complementar. Da figura, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(180°-\beta)=-\operatorname{tg}\beta=-\frac{3}{4}\Rightarrow\operatorname{cotg}\alpha=-\frac{4}{3}\Rightarrow\operatorname{cossec}^2\alpha=1+\operatorname{cotg}^2\alpha=\frac{25}{9}$.

Como $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $\operatorname{sen}\alpha>0\Rightarrow\operatorname{cossec}\alpha>0$. Logo, $\operatorname{cossec}\alpha=\frac{5}{3}$.

Gabarito: “d”.

---

91. (EsPCEx/2001)

São arcos côngruos:

a) $-730°$ e $-\frac{\pi}{12}$ rad

b) $1640°$ e $-\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $350°$ e $-\frac{\pi}{18}$ rad

d) $1235°$ e $\frac{5\pi}{6}$ rad

e) $2000°$ e $-\frac{4\pi}{3}$ rad

Comentários

1) Usando que π rad = $180°$, temos:	2) Fazendo a equivalência do valor na primeira coluna para o primeiro quadrante	2) Equivalência do outro valor
$-\frac{\pi}{12}$ rad $= -\frac{180°}{12} = -15°$	$-15° \rightarrow -15° + 1 \cdot 360° = 345°$	$-730° \rightarrow -730° + 3 \cdot 360° = 350°$
$-\frac{7\pi}{6}$ rad $= -\frac{7 \cdot 180°}{6} = -210°$	$-210° \rightarrow -210° + 1 \cdot 360° = 150°$	$1640° \rightarrow 1640° - 4 \cdot 360° = 200°$
$-\frac{\pi}{18}$rad $= -\frac{180°}{18} = -10°$	$-10° \rightarrow -10° + 1 \cdot 360° = 350°$	$350° \rightarrow 350° + 0 \cdot 360° = 350°$
$\frac{5\pi}{6}$ rad $= \frac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$	$150° \rightarrow 150° + 0 \cdot 360° = 150°$	$1235° \rightarrow 1235° - 3 \cdot 360° = 155°$
$-\frac{4\pi}{3}$ rad $= -\frac{4 \cdot 180°}{3} = -240°$	$-240° \rightarrow -240° + 1 \cdot 360° = 120°$	$2000° \rightarrow 2000° - 5 \cdot 360° = 200°$

Pode-se perceber que apenas no item "c" os ângulos são trigonometricamente equivalentes.

Gabarito: "c".

---

92. (EsPCEx/2001)

Se sen $\alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então o valor de tg α é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

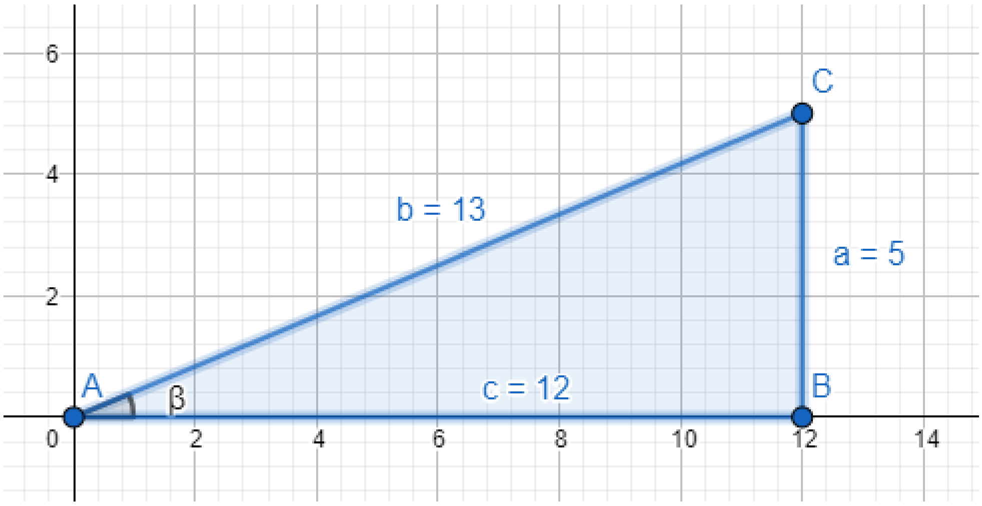
b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{12}{13}$

d) $\frac{12}{5}$

e) $-\frac{12}{13}$

Comentários



Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$, temos que α e β são suplementares, isto é, $\alpha + \beta = \pi$. Temos que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{5}{12}$.

Gabarito: "a".

---

93. (EsPCEx/2001) [Adaptada]

Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, simplificando a expressão $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$, obtém-se o valor:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $3/2$

d) 2

e) 0

Comentários

Dica de prova: como a expressão deve valer para todo x naquele conjunto, então tente entrar com um x qualquer do conjunto e calcule o valor da expressão! Exemplo com $x = 30° = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$$
$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{\frac{7}{4}} + \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7}$$
$$= 1 + 1 = 2$$

Caso prefira uma solução genérica:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 1.$$

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}=\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1.$$

Logo, temos

$$\left(\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x}\right)+\left(\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}\right)=1+1=2.$$

Gabarito: “d”.

---

94. (EsPCEx/2000)

Sendo $\left\{k\in\mathbb{Z}\ e\ x\neq\frac{k\pi}{4}\right\}$, então $2-\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$ é equivalente a:

a) $\cos^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\sec^2 x$

d) $\operatorname{cossec}^2 x$

e) 1

Comentários

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\Leftrightarrow\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=1-\operatorname{tg}^2 x\Leftrightarrow 2-\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$$

Pois,

$$1+\operatorname{tg}^2 x=1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

Gabarito: “c”.

---

95. (EsPCEx/2000)

Se y é a medida de um ângulo $0°<y<30°$, o maior dentre os números $\operatorname{sen} y$, $\cos y$, $\operatorname{sen}^2 y$, $\cos^2 y$ e $\operatorname{sen} y\cdot\cos y$ é

a) $\operatorname{sen} y$

b) $\cos y$

c) $\operatorname{sen}^2 y$

d) $\cos^2 y$

e) $\operatorname{sen} y\cdot\cos y$

Comentários

$$0<\operatorname{sen} y<1\Rightarrow\operatorname{sen}^2 y<\operatorname{sen} y<1$$

$$0<\cos y<1\Rightarrow\cos^2 y<\cos y<1$$

Além disso, como $0°<y<30°$, e como $\cos y<1$,

$$\cos y>\operatorname{sen} y>\operatorname{sen} y\cdot\cos y$$

Portanto, $\cos y$ é o maior número.

Gabarito: "b".

---

96. (EsPCEx/2000)

O valor de $3\text{sen } 10° \cdot (\text{tg } 5° + \text{cotg } 5°)$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) 3

d) 5

e) 6

Comentários

$$3\text{sen } 10° \cdot (\text{tg } 5° + \text{cotg } 5°) = 3 \text{ sen } 10° \cdot \left(\frac{\text{sen } 5°}{\cos 5°} + \frac{\cos 5°}{\text{sen } 5°}\right)$$

$$= 3 \text{ sen } 10° \cdot \left(\frac{2 \text{ sen}^2 5°}{2 \text{ sen } 5° \cos 5°} + \frac{2 \cos^2 5°}{2 \text{ sen } 5° \cos 5°}\right) = 3 \text{ sen } 10° \cdot \left(\frac{2(\text{sen}^2 5° + \cos^2 5°)}{2 \text{ sen } 5° \cos 5°}\right).$$

Usando a identidade fundamental da trigonometria e a fórmula para seno do arco duplo, temos que a expressão acima é igual a

$$3 \text{ sen } 10° \cdot \left(\frac{2}{\text{sen } 10°}\right) = 6$$

Gabarito: "e".

---

97. (EsPCEx/2000)

O número de arcos existentes entre $0°$ e $1560°$ cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

a) 6

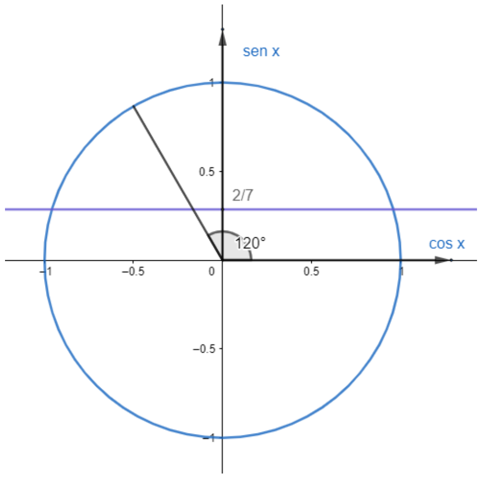
b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

Comentários



$1560° = 4 \cdot 360° + 120°$. Assim, estamos dando quatro voltas no círculo trigonométrico e avançando mais $120°$ além. Como $\text{sen}\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{7}$ e como, no segundo quadrante, a função seno é decrescente, temos que o ângulo do segundo quadrante cujo seno é $\frac{2}{7}$ é maior que $120°$. Logo, temos 2 ângulos cujo seno é $\frac{2}{7}$ a cada volta (um no primeiro e outro no segundo quadrante) e mais um último ângulo no primeiro quadrante, contido no intervalo $[4 \cdot 360°, 4 \cdot 360° + 120°)$, dando um total de 9 arcos.

Gabarito: "d".

---

98. (EsPCEx/2000) [Adaptada]

O domínio e imagem da função $f(x) = \frac{1}{5-\text{sen}\,x}$ são, respectivamente,

a) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $[-1, 1]$

b) $\mathbb{R}$ e $\left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$

c) $\mathbb{R}$ e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$

d) $\mathbb{R}^*$ e $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

e) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $\left]-1, \frac{1}{3}\right]$

Comentários

O maior domínio para essa função é aquele que considera todos os números reais, exceto aqueles que zeram o denominador da expressão, pois aí a função não ficaria definida. Acontece que se tivermos $5 - \text{sen}\,x = 0$, então $\text{sen}\,x = 5$, equação que não tem solução nos reais. Logo, nenhum número será excluído e o domínio é todos os reais, isto é, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para a imagem, pensemos o seguinte (na primeira equivalência, faz-se o produto por -1):

$$-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\text{sen}\,x \leq 1 \Leftrightarrow 5-1 \leq 5 - \text{sen}\,x \leq 5+1 \Leftrightarrow 4 \leq 5 - \text{sen}\,x \leq 6.$$

Assim, como $5 - \text{sen}\,x$ está entre 4 e 6, o inverso, que é $f(x) = \frac{1}{5-\text{sen}\,x}$, deve estar entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Como $\frac{1}{6}$ é menor, temos $\frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$, isto é, $Im(f) = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$.

Gabarito: "c".

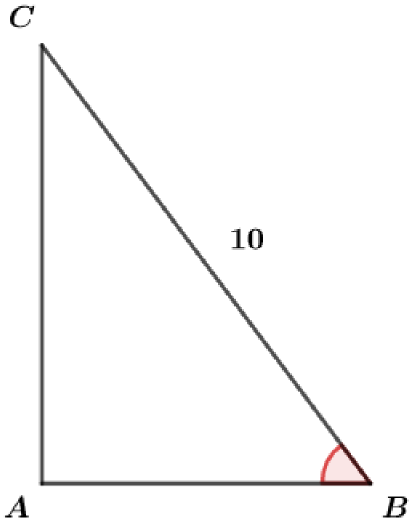
---

99. Exercício de Fixação

Num triângulo retângulo ABC, a hipotenusa BC mede 10 cm e $\cos \hat{B} = 0,6$. Calcular a soma dos catetos.

Comentários

Temos o seguinte triângulo:



Usando os dados do enunciado:

$$\cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$0,6 = \frac{AB}{10} \Rightarrow AB = 6$$

Aplicando a relação fundamental:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

A soma dos catetos é dada por:

$$S = AB + AC = 6 + 8 = 14$$

Gabarito: $S = 14$

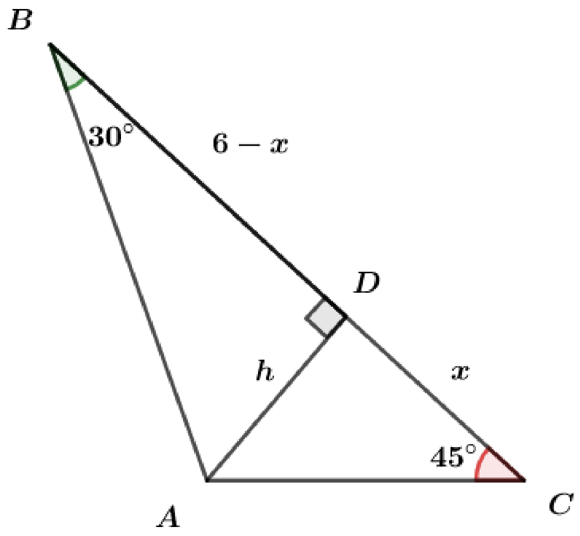
---

100. Exercício de Fixação

Num triângulo ABC tem-se $BC = 6, A\hat{B}C = 30°$ e $B\hat{C}A = 45°$. Calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

Comentários

Temos o seguinte triângulo:



Queremos calcular h. Perceba que o triângulo ADC é isósceles:

$$D\hat{A}C + 45° + 90° = 180° \Rightarrow D\hat{A}C = 45°$$

Assim, podemos afirmar que $x = h$. Usando a razão tangente no triângulo ADB:

$$tg(30°) = \frac{h}{6-h} \Rightarrow h = \frac{(6-h)\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left(3+\sqrt{3}\right)h = 6\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 3$$

Gabarito: $\boldsymbol{h = 3\sqrt{3} - 3}$

---

101. Exercício de Fixação

Obter M tal que $cosx = \frac{1}{M}$ e $senx = \frac{\sqrt{M+1}}{M}$.

Comentários

Usando a relação fundamental, obtemos:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$
$$\frac{M+1}{M^2} + \frac{1}{M^2} = 1$$
$$M^2 - M - 2 = 0$$

As raízes são dadas por:

$$M = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1 \; ou \; 2$$

Gabarito: $\boldsymbol{M = -1 \; ou \; M = 2}$

---

102. Exercício de Fixação

Calcular $secx$ sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a > b > 0$.

Comentários

Sabemos que $secx = \frac{1}{cosx}$. Então, devemos calcular cosseno. Usando a relação fundamental:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1 - sen^2x}$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2}$$
$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{a^2 + b^2}$$
$$\cos x = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Assim, o secante é dado por:

$$\sec x = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{secx = \pm \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

---

103. Exercício de Fixação

Simplifique:

$$y = (tgx - senx)^2 + (1 - cosx)^2 - (secx - 1)^2$$

Comentários

Vamos desenvolver a expressão:

$$y = tg^2x - 2tgxsenx + sen^2x + 1 - 2cosx + \cos^2 x - (\sec^2 x + 1 - 2secx)$$

Usando a relação $tg^2x = \sec^2 x - 1$, temos:

$$y = \sec^2 x - 1 - 2tgxsenx + \underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1} + 1 - 2cosx - \sec^2 x - 1 + 2secx$$
$$y = -2tgxsenx - 2cosx + 2secx$$
$$y = -\frac{2sen^2x}{cosx} - 2cosx + \frac{2}{cosx}$$
$$y = \frac{\underbrace{-2sen^2x - 2\cos^2 x}_{-2} + 2}{cosx}$$
$$\Rightarrow y = 0$$

Gabarito: $\boldsymbol{y = 0}$

---

104. Exercício de Fixação

Simplifique:

$$y = \frac{\cos^4 x - sen^4x}{1 - tg^4x} + \frac{cossecx - senx}{secx - cosx}$$

Comentários

Vamos simplificar a expressão, escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$y = \frac{\cos^4 x - sen^4x}{1 - \frac{sen^4x}{\cos^4 x}} + \frac{\frac{1}{senx} - senx}{\frac{1}{cosx} - cosx}$$
$$y = \frac{\cos^4 x - sen^4x}{\frac{\cos^4 x - sen^4x}{\cos^4 x}} + \frac{\frac{1 - sen^2x}{senx}}{\frac{1 - \cos^2 x}{cosx}}$$
$$y = \cos^4 x + \frac{cosx(\cos^2 x)}{senx(sen^2x)}$$
$$y = cos^4x + \frac{\cos^3 x}{sen^3x}$$
$$\Rightarrow y = \cos^4 x + cotg^3x$$

Gabarito: $\boldsymbol{y = \cos^4 x + cotg^3x}$

---

105. Exercício de Fixação

Prove as seguintes identidades:

a) $\operatorname{tg}(-2734°) = -\operatorname{tg} 34°$

b) $\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

Comentários

a) Sabemos que os valores da razão tangente repetem para cada $k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$. Assim, vamos encontrar o valor do arco congruente a $-2734°$:

$$tg(-2734°) = tg(-34° - 15 \cdot 180°) = tg(-34°)$$

b) A função cosseno repete seus valores para cada $k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Desse modo:

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = \cos\left(-5\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

Gabarito: Demonstração

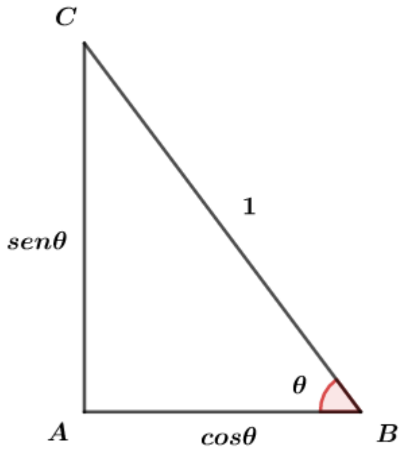
---

106. Exercício de Fixação

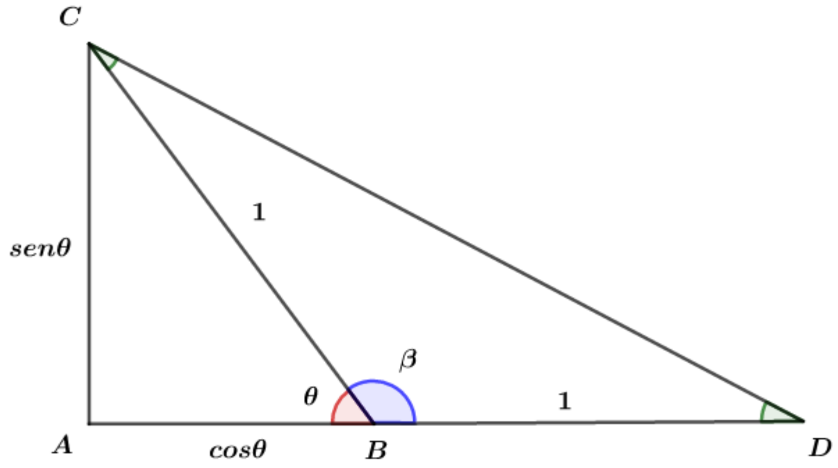
Utilizando um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos ângulos agudos de medida θ encontre $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em função de senos e cossenos.

Comentários

A figura inicial é dada por:



Podemos estender o lado AB de forma a obter um triângulo isósceles BCD:



Pelas propriedades do triângulo isósceles, como $BD = BC$, temos $\widehat{D} = \hat{C} = \alpha$.
O ângulo externo θ é a soma dos ângulos adjacentes $\hat{C}$ e $\widehat{D}$. Veja:

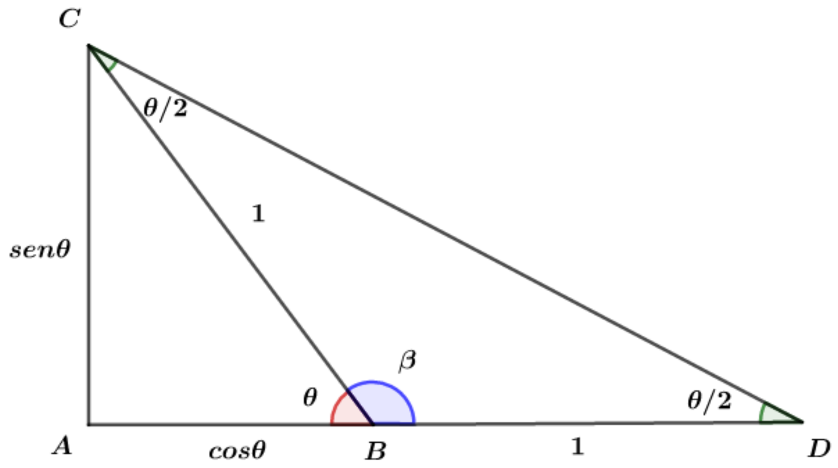
$$\theta + \underbrace{\beta}_{\alpha+\alpha+\beta=\pi} = \pi$$

$$\theta + \big(\pi - (\alpha + \alpha)\big) = \pi$$

$$\theta = 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

Assim, temos a seguinte figura:



Podemos escrever:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen\theta}{1 + \cos\theta}$$

Gabarito: Demonstração

---

107. Exercício de Fixação

Se $y = 2 - 3senx$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

a) 5

b) 1

c) 3

d) -1

e) 6

Comentários

Sabemos que a imagem da função seno é dada por:

$$-1 \leq senx \leq 1$$

Então, o valor máximo que y assume ocorre quando $senx$ é mínimo, isto é, $senx = -1$:

$$y = 2 - 3(-1) = 5$$

Gabarito: $\boldsymbol{y = 5}$

---

108. Exercício de Fixação

Sendo dado que $senx + cosx = a$, calcule:

a) $senxcosx$

b) $sen^4x + cos^4x$

c) $sen^6x + \cos^6 x$

Comentários

a) Podemos elevar a equação dada ao quadrado:

$$(senx + cosx)^2 = a^2$$

$$\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1} + 2senxcosx = a^2$$

$$1 + 2senxcosx = a^2$$

$$senxcosx = \frac{a^2 - 1}{2}$$

b) Vamos escrever a relação como um quadrado perfeito:

$$sen^4x + \cos^4 x = sen^4x + \cos^4 x + 2sen^2xcos^2x - 2sen^2xcos^2x$$

$$sen^4x + \cos^4 x = \left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 2(senxcosx)^2$$

Substituindo o valor calculado de $senxcosx$:

$$sen^4x + \cos^4 x = 1 - 2\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2$$

$$sen^4x + \cos^4 x = 1 - \frac{2(a^4 - 2a^2 + 1)}{4}$$

$$sen^4x + \cos^4 x = \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2}$$

c) Usando a fatoração clássica:

$$sen^6x + \cos^6 x = \left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)(sen^4x - sen^2xcos^2x + \cos^4 x)$$

Substituindo os valores de $senxcosx$ e $sen^4x + \cos^4 x$, obtemos:

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2} - \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-2a^4 + 4a^2 + 2}{4} - \frac{(a^4 - 2a^2 + 1)}{4}$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-2a^4 + 4a^2 + 2 - a^4 + 2a^2 - 1}{4}$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-3a^4 + 6a^2 + 1}{4}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{senxcosx = \frac{a^2-1}{2}}$ **b)** $\boldsymbol{sen^4x + \cos^4 x = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}}$ **c)** $\boldsymbol{sen^6x + \cos^6 x = \frac{-3a^4+6a^2+1}{4}}$

---

109. Exercício de Fixação

Se $\frac{senx-seny}{cosx-cosy}=2$ e $tgx=\frac{1}{3}$, então tgy é igual a:

a) 3

b) $1/6$

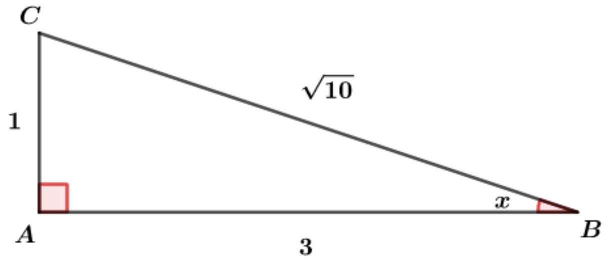
c) 0

d) $-4/3$

e) -3

Comentários

Podemos usar o triângulo:



BC foi obtido usando o teorema de Pitágoras:

$$BC^2=AC^2+AB^2$$
$$BC=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

Assim, temos as seguintes razões:

$$senx=\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$cosx=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Substituindo os valores na expressão, obtemos:

$$\frac{senx-seny}{cosx-cosy}=2$$
$$senx-seny=2(cosx-cosy)$$
$$\frac{1}{\sqrt{10}}-seny=\frac{6}{\sqrt{10}}-2cosy$$
$$2cosy-seny=\frac{5}{\sqrt{10}}$$

Dividindo a equação por $cosy$:

$$2-tgy=\frac{5}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{cosy}$$
$$2-tgy=\frac{5}{\sqrt{10}}secy$$

Elevando a equação ao quadrado e usando a relação $\sec^2 y=1+tg^2y$:

$$4+tg^2y-4tgy=\frac{25}{10}(1+tg^2y)$$
$$8+2tg^2y-8tgy=5+5tg^2y$$
$$3tg^2y+8tgy-3=0$$

Encontrando as raízes:

$$tgy=\frac{-4\pm\sqrt{25}}{3}=-3\ ou\ \frac{1}{3}$$

Não podemos ter $tgy=1/3$, pois:

$$tgy = \frac{1}{3} \Rightarrow seny = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow cosy = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\frac{senx - seny}{cosx - cosy} = \frac{0}{0}\ (valor\ indeterminado)$$

Portanto:

$$tgy = -3$$

Gabarito: "e".

---

110. Exercício de Fixação

Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = 1 - 2sen^2x$

b) $\frac{cosx-senx}{cosx+senx} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$

Comentários

a) Vamos escrever a tangente em função do seno e cosseno:

$$\frac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x} = \frac{1 - \frac{sen^2x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{sen^2x}{\cos^2 x}} = \frac{\overbrace{\cos^2 x}^{1-sen^2x} - sen^2x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\underbrace{\cos^2 x + sen^2x}_{1}} = 1 - 2sen^2x$$

b) Vamos dividir a expressão à esquerda por $cosx$:

$$\frac{cosx - senx}{cosx + senx} = \frac{1 - \frac{senx}{cosx}}{1 + \frac{senx}{cosx}} = \frac{1 - tgx}{1 + tgx}$$

Gabarito: Demonstração

---

111. Exercício de Fixação

Sabendo que $tgx + secx = 3/2$, calcular $senx$ e $cosx$.

Comentários

$$tgx + secx = \frac{3}{2}$$
$$tgx = \frac{3}{2} - secx$$

Elevando a equação ao quadrado, obtemos:

$$tg^2x = \frac{9}{4} - 3secx + \sec^2 x$$

Usando a relação $\sec^2 x = 1 + tg^2x$:

$$\sec^2 x - 1 = \frac{9}{4} - 3secx + \sec^2 x$$
$$3secx = \frac{9}{4} + 1$$
$$\frac{1}{cosx} = \frac{13}{12}$$
$$cosx = \frac{12}{13}$$
$$senx = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$$

Testando os valores:

$$tgx + \frac{13}{12} = \frac{3}{2}$$
$$tgx = \frac{5}{12} > 0$$

Como a tangente é positiva, temos que o seno deve ser positivo:

$$cosx > 0 \Rightarrow senx > 0$$
$$\therefore senx = \frac{5}{13}$$

Gabarito: $senx = 5/13$ e $cosx = 12/13$

---

112. Exercício de Fixação

Sabendo que $sen^2x + senx = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

Comentários

Vamos calcular o valor da expressão $\cos^4 x + \cos^2 x$:

$$\cos^4 x + \cos^2 x = \cos^2 x\,(\cos^2 x + 1)$$

Usando a relação fundamental:

$$\cos^4 x + \cos^2 x = (1 - sen^2x)(1 - sen^2x + 1)$$
$$\cos^4 x + \cos^2 x = 2 - sen^2x - 2sen^2x + sen^4x$$
$$\cos^4 x + \cos^2 x = 2 - 3sen^2x + (sen^2x)^2$$

Usando o dado do enunciado:

$$sen^2x = 1 - senx$$
$$\Rightarrow \cos^4 x + \cos^2 x = 2 - 3(1 - senx) + (1 - senx)^2$$
$$\cos^4 x + \cos^2 x = 2 - 3 + 3senx + 1 + sen^2x - 2senx$$
$$\Rightarrow \cos^4 x + \cos^2 x = sen^2x + senx = 1$$

Gabarito: Demonstração

---

113. Exercício de Fixação

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, prove as identidades abaixo:

a) $\frac{secx}{tgx+cotgx} = senx$

b) $\frac{tgx-cotgx}{tgx+cotgx} = 2sen^2x - 1$

Comentários

a) Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{secx}{tgx + cotgx}$$

Escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\frac{1}{cosx}}{\frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx}} = \frac{\frac{1}{cosx}}{\frac{sen^2x + \cos^2 x}{cosxsenx}} = \frac{1}{cosx} \cdot \frac{cosxsenx}{1} = senx$$

b) Simplificando a expressão:

$$\frac{tgx - cotgx}{tgx + cotgx}$$

Escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\frac{senx}{cosx} - \frac{cosx}{senx}}{\frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx}} = \frac{\frac{sen^2x - \cos^2 x}{cosxsenx}}{\frac{sen^2x + \cos^2 x}{cosxsenx}} = sen^2x - (1 - sen^2x) = 2sen^2x - 1$$

Gabarito: Demonstração

114. Exercício de Fixação

Elimine o arco x na equação:

$$\begin{cases} senx - cosx = a \\ cos2x = b \end{cases}$$

Comentários

Analisando a segunda equação, temos:

$$\cos^2 x - sen^2 x = b$$

$$\left(\underbrace{cosx - senx}_{-a}\right)(cosx + senx) = b$$

$$cosx + senx = -\frac{b}{a}$$

Somando a equação acima com a primeira equação do sistema, temos:

$$2senx = a - \frac{b}{a}$$

$$senx = \frac{a^2 - b}{2a}$$

Substituindo o valor do seno na primeira equação:

$$cosx = senx - a$$

$$cosx = \frac{a^2 - b}{2a} - a$$

$$cosx = \frac{-a^2 - b}{2a}$$

Usando a relação fundamental:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{a^2 - b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-a^2 - b}{2a}\right)^2 = 1$$

$$2a^4 + 2b^2 = 4a^2$$

$$b^2 = a^2(2 - a^2)$$

Gabarito: $\boldsymbol{b^2 = a^2(2 - a^2)}$

115. Exercício de Fixação

Verifique a seguinte identidade:

$$2arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Comentários

Fazendo $\alpha = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$ e $\beta = arctg\left(\frac{1}{7}\right)$, temos para $\alpha, \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$tg\alpha = \frac{1}{3}$$

$$tg\beta = \frac{1}{7}$$

Vamos calcular o valor da seguinte expressão:

$$tg(2\alpha + \beta) = \frac{tg(2\alpha) + tg\beta}{1 - tg(2\alpha)tg\beta}$$

Calculando $tg(2\alpha)$:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

Substituindo os valores na expressão:

$$tg(2\alpha + \beta) = \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

Gabarito: Demonstração

---

116. Exercício de Fixação

Sabendo que $0 < x < \pi/2$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $tgx = -tg\alpha$

b) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $secx = cossec\alpha$

c) Sendo $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então, $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

d) A função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

Comentários

a) Verdadeira.

$$x = 2\pi - \alpha$$

$$tgx = tg(2\pi - \alpha) = \frac{sen(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = -\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha$$

b) Verdadeira.

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$secx = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{sen(\alpha)} = cossec\alpha$$

c) Falsa.

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{5}$$

d) Verdadeira.

$$f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = -sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 = -\cos x + 2 = g(x)$$

Gabarito: a) V b) V c) F d) V

---

117. Exercício de Fixação

Sobre a função f definida por $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, podemos afirmar que:

a) f não é limitada.

b) f é constante.

c) f é injetora.

d) f é ímpar.

e) $f(x)=\cos^2 x$, para todo x real.

Comentários

Desenvolvendo a função, obtemos:

$$f(x)=\cos^2 x+\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cosx-sen\left(\frac{\pi}{3}\right)senx\right]^2+\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cosx+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)senx\right]^2$$

$$f(x)=\cos^2 x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2 x+2sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)sen^2x$$

$$f(x)=\cos^2 x+2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos^2 x+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 sen^2x$$

$$f(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}sen^2x$$

$$f(x)=\frac{3}{2}$$

Portanto, f é constante.

Gabarito: "b".

---

118. Exercício de Fixação

O valor numérico da expressão

$$sen\left(\frac{13\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

É

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $1/4$

d) $1/6$

e) $1/8$

Comentários

Reescrevendo a expressão:

$$sen\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\left[-sen\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\left[-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{sen\left(\frac{2\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$$

Gabarito: "c".

---

119. Exercício de Fixação

Prove que se A, B e C são ângulos de um triângulo, então:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2cosAcosBcosC$$

Comentários

Se A, B, C são ângulos de um triângulo, temos a seguinte relação:

$$A+B+C=\pi$$

$$A=\pi-(B+C)$$

Desenvolvendo a seguinte expressão:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$$

$$\cos^2\big(\pi-(B+C)\big)+\cos^2 B+\cos^2 C$$

$$[-\cos(B+C)]^2+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$\cos^2(B+C)+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$[\cos B\cos C-senBsenC]^2+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$\cos^2 B\cos^2 C+sen^2Bsen^2C-2cosBcosCsenBsenC+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$\cos^2 B\cos^2 C+(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)-2cosBcosCsenBsenC+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$\cos^2 B\cos^2 C+1-\cos^2 B-\cos^2 C+\cos^2 B\cos^2 C-2cosBcosCsenBsenC+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$1+2\cos^2 B\cos^2 C-2cosBcosCsenBsenC$$
$$1+2\cos^2 B\cos^2 C-2cosBcosCsenBsenC$$
$$1+2\cos B\cos C\,(cosB\,cosC-senBsenC)$$
$$1+2\cos B\cos C\left(\cos\left(\underbrace{B+C}_{\pi-A}\right)\right)$$
$$1+2\cos B\cos C\cos(\pi-A)$$
$$1-2\cos A\cos B\cos C$$

Gabarito: Demonstração

---

120. Exercício de Fixação

Calcular a soma

$$S=sen\left(\frac{\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{9\pi}{15}\right)+\cdots+sen\left(\frac{33\pi}{15}\right)$$

Comentários

Temos a seguinte soma:

$$S=sen\left(\frac{\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{9\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{13\pi}{15}\right)$$
$$+sen\left(\frac{17\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{21\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{25\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{29\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{33\pi}{15}\right)$$
$$S=sen\left(\frac{\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{9\pi}{15}\right)+sen\left(\frac{13\pi}{15}\right)$$
$$+\underbrace{sen\left(2\pi-\frac{13\pi}{15}\right)}_{-sen\left(\frac{13\pi}{15}\right)}+\underbrace{sen\left(2\pi-\frac{9\pi}{15}\right)}_{-sen\left(\frac{9\pi}{15}\right)}+\underbrace{sen\left(2\pi-\frac{5\pi}{15}\right)}_{-sen\left(\frac{5\pi}{15}\right)}+\underbrace{sen\left(2\pi-\frac{\pi}{15}\right)}_{-sen\left(\frac{\pi}{15}\right)}+\underbrace{sen\left(2\pi+\frac{3\pi}{15}\right)}_{sen\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

Os termos coloridos se cancelam, logo:

$$S=sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=sen\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

---

121. Desafio

Prove que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}$$

Comentários

Vamos aplicar Prostaférese na diferença:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$
$$=2sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)sen\left(\frac{\pi}{14}\right)+sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{7}\right)$$
$$=2sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)sen\left(\frac{\pi}{14}\right)+sen\left(\frac{\pi}{14}\right)$$

Colocando seno em evidência:

$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\left[2sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)+1\right]$$
$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)+1\right]$$
$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\left[2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+1\right]$$
$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}_{2\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)-1}+1\right]$$
$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$$
$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Agora, vamos escrever o seno dessa forma:

$$sen\left(\frac{\pi}{7}\right)=2sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\Rightarrow 2sen\left(\frac{\pi}{14}\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Assim, temos:

$$= sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Somando as frações:

$$=\frac{sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+sen\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$
$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}\left[sen\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

Perceba que os termos em evidência são a soma do seno:

$$=\frac{sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Usando a propriedade de arco complementar:

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$
$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Gabarito: Demonstração

122. Desafio

Calcular a soma abaixo, cujos arcos estão em PG:

$$S = tga \cdot \sec(2a) + tg(2a) \cdot \sec(4a) + tg(4a) \cdot \sec(8a) + \cdots + tg(2^{n-1}a) \cdot \sec(2^n a)$$

Comentários

Geralmente, somatórios nesse formato devem ser transformados em soma telescópica. Vamos verificar se encontramos um padrão. Analisando $tga \cdot \sec(2a)$:

$$tga \cdot \sec(2a) = \frac{tga}{\cos(2a)}$$

Usando a seguinte identidade:

$$\cos(2a) = \frac{1 - tg^2 a}{1 + tg^2 a}$$

Temos:

$$tga \cdot \sec(2a) = \frac{tga(1 + tg^2 a)}{1 - tg^2 a}$$

$$tga \cdot \sec(2a) = \frac{tga(2 - 1 + tg^2 a)}{1 - tg^2 a}$$

$$tga \cdot \sec(2a) = \frac{2tga - tga(1 - tg^2 a)}{1 - tg^2 a}$$

$$tga \cdot \sec(2a) = \frac{2tga}{1 - tg^2 a} - tga$$

$$tga \cdot \sec(2a) = tg2a - tga$$

Portanto, temos o seguinte somatório:

$$S = tg2a - tga + tg4a - tg2a + tg8a - tg4a + \cdots + tg(2^n a) - tg(2^{n-1}a)$$

Os termos coloridos se cancelam, logo, temos o seguinte resultado:

$$S = tg(2^n a) - tga$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = tg(2^n a) - tga}$

11. Questões de Provas Anteriores

123. (ITA/2019)

Seja $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x) = arcsen(x)$. Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$

b) $\frac{245}{162}\pi$

c) $-\frac{152}{81}\pi$

d) $-\frac{82}{81}\pi$

e) $-\frac{79}{162}\pi$

124. (ITA/2019)

Considere um retângulo $ABCD$ em que o comprimento do lado AB é o dobro do comprimento do lado BC. Sejam M o ponto médio de BC e N o ponto médio de CM. A tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a

a) $\frac{1}{35}$

b) $\frac{2}{35}$

c) $\frac{4}{35}$

d) $\frac{8}{35}$

e) $\frac{16}{35}$

125. (ITA/2019)

Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \text{ e } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

126. (ITA/2017)

O maior valor de tgx, com $x = \frac{1}{2} arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 3

127. (ITA/2016)

Se $tgx = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $sen(3x)$ é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$

128. (ITA/2015)

Os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem a equação $2sen\ (x) - \cos x = 1$ são

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

b) $\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

c) $\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π

129. (ITA/2014)

Sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a \neq 0\ e\ b \neq 0$, um possível valor para $cossec(2x) - \frac{1}{2}tgx$ é

a) $\frac{a-b}{ab}$

b) $\frac{a+b}{2ab}$

c) $\frac{a^2-b^2}{ab}$

d) $\frac{a^2+b^2}{4ab}$

e) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$

130. (ITA/2013)

Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{cotgx-1}{cossec(x-\pi)-\sec(\pi-x)}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) 2

131. (ITA/2012)

Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| arcsen\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right) + arccos\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}$. Então

a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \mathbb{R}^{+}\setminus\{0\}$

d) $S = \mathbb{R}^{+}$

e) $S = \mathbb{R}$

132. (ITA/2012)

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

b) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

c) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

d) $sen(\alpha)$ quando n é par.

e) zero quando n é ímpar.

133. (ITA/2012)

Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $tg(x)$ são, respectivamente,

a) 1 e 0

b) 1 e $\frac{5}{2}$.

c) -1 e 0.

d) 1 e 5.

e) -1 e $-\frac{5}{2}$.

134. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$

b) $\frac{16}{6}\pi$

c) $\frac{24}{11}\pi$

d) $\frac{25}{11}\pi$

e) $\frac{7}{3}\pi$

135. (ITA/2011)

a) Calcule $\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} - 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

136. (ITA/2010)

A equação em x, $arctg(e^x + 2) - arccotg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.

b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

d) admite apenas soluções negativas.

e) não admite solução.

137. (ITA/2010)

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$

b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

c) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

e) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$

138. (ITA/2008)

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2sen^2(3x) + sen(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3, 3]$ e 2π

b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$

c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$

e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

139. (ITA/2008)

Sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o contradomínio da função arco-seno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arco-cosseno, assinale o valor de

$$\cos\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

140. (ITA/2007)

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) $(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})/3$

e) $(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})/3$

141. (ITA/2004)

Considerando as funções

$$arcsen: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e}$$
$$arccos: [-1, 1] \to [0, \pi],$$

Assinale o valor de $\cos\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$.

a) $6/25$

b) $7/25$

c) $1/3$

d) $2/5$

e) $5/12$

142. (ITA/2004)

Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação:

$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0$, então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a $60°$.

143. (ITA/2003)

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente.

Com respeito à função $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = arcsenx + arccosx$, temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.

b) f não é par nem ímpar.

c) f é sobrejetora.

d) f é injetora.

e) f é constante.

144. (ITA/2003)

Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento CD e F um ponto sobre o segmento CE tal que $m(BC) + m(CF) = m(AF)$. Prove que $cos\alpha = cos2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

145. (ITA/2003)

Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2[sen(2x)]^2 senx$ é igual a:

a) $2^{-4}[sen(2x) + sen(5x) + sen(7x)]$.

b) $2^{-4}[2sen(x) + sen(7x) - sen(9x)]$.

c) $2^{-4}[-sen(2x) - sen(3x) + sen(7x)]$.

d) $2^{-4}[-sen(x) + 2sen(5x) - sen(9x)]$.

e) $2^{-4}[sen(x) + 2sen(3x) + sen(5x)]$.

146. (ITA/2002)

Seja $f: \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ dada por $f(x) = \{y \in \mathbb{R}; seny < x\}$.

Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$, então

a) $A = [-1, 1]$.

b) $A = [a, \infty), \forall a > 1$.

c) $A = [a, \infty), \forall a \geq 1$.

d) $A = (-\infty, a], \forall a < -1$.

e) $A = (-\infty, a], \forall a \leq -1$.

147. (ITA/2002)

Se x, y e z são ângulos internos de um triângulo ABC e $senx = (seny + senz)/(cosy + cosz)$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

148. (ITA/2001)

Considere as funções

$$f(x) = \frac{5 + 7^x}{4}, g(x) = \frac{5 - 7^x}{4} \text{ e } h(x) = arctgx$$

Se a é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \pi/4$, então $f(a) - g(a)$ vale:

a) 0

b) 1

c) $7/4$

d) $7/2$

e) 7

149. (ITA/2001)

Sendo α e β os ângulos de um triângulo retângulo, e sabendo que $sen^2 2\beta - 2cos2\beta = 0$, então $sen\alpha$ é igual a:

a) $\sqrt{2}/2$

b) $\sqrt[4]{2}/2$

c) $\sqrt[4]{8}/2$

d) $\sqrt[4]{8}/4$

e) zero

150. (ITA/2000)

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2sen3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right]$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.

b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π.

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

151. (ITA/1999)

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < \pi/2$. A expressão $\left[sen\left(\frac{3\pi}{4} + a\right) + sen\left(\frac{3\pi}{4} - a\right)\right] sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ é idêntica a:

a) $\frac{\sqrt{2}cotg^2 a}{1+cotg^2 a}$

b) $\frac{\sqrt{2}cotga}{1+cotg^2 a}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{1+cotg^2 a}$

d) $\frac{1+3cotga}{2}$

e) $\frac{1+2cotga}{1+cotga}$

152. (ITA/1999)

Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4tg^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $sen(2x) + sen(4x)$ é:

a) $\sqrt{15}/4$

b) $\sqrt{15}/8$

c) $3\sqrt{5}/8$

d) $1/2$

e) 1

153. (ITA/1996)

Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1+\sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

a) $30°$

b) $45°$

c) $60°$

d) $135°$

e) $120°$

154. (ITA/1996)

Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $sen\alpha + cos\alpha = m$. Então, o valor de $y = sen2\alpha/(sen^3\alpha + \cos^3\alpha)$ será:

a) $\frac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$

b) $\frac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$

c) $\frac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

d) $\frac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$

e) $\frac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

155. (ITA/1995)

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right), se\ x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{x} senx, se\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R}; f(y) = 0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K$?

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) $\pi^2/2$

e) π^2

156. (ITA/1995)

Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois progéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge-a a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:

a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$

b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$

c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$

d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$

e) $H = hd^2/(d^2 + h)$

157. (ITA/1995)

A expressão $sen\theta/(1 + cos\theta)$, $0 < \theta < \pi$, é idêntica a:

a) $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b) $cossec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

e) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

158. (IME/2020)

Seja $\frac{1}{b} = sen\frac{\pi}{14} \cdot sen\frac{3\pi}{14} \cdot sen\frac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

159. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

160. (IME/2017)

Calcule o valor de $\frac{sen^4\alpha+\cos^4\alpha}{sen^6\alpha+\cos^6\alpha}$, sabendo-se que $sen\alpha cos\alpha = \frac{1}{5}$.

a) $\frac{22}{21}$

b) $\frac{23}{22}$

c) $\frac{25}{23}$

d) $\frac{13}{12}$

e) $\frac{26}{25}$

161. (IME/2017)

Se $\frac{cosx}{cosy} + \frac{senx}{seny} = -1$, calcule o valor de S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3sen\ y - sen\ 3y}{sen\ x}$$

162. (IME/2015)

Os lados a, b e c de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos aos ângulos internos A, B e C, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$

b) 2

c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) 4

163. (IME/2014)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x) = x^2 - \pi x$. Sejam também a, b, c e d números reais tais que:

$$a = sen^{-1}\left(\frac{1}{3}\right); b = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right); c = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ e } d = cotg^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$ é

a) $f(b) > f(a) > f(d) > f(c)$

b) $f(d) > f(a) > f(c) > f(b)$

c) $f(d) > f(a) > f(b) > f(c)$

d) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$

e) $f(a) > f(b) > f(d) > f(c)$

164. (IME/2014)

Sejam $f(x) = sen(\log x)$ e $g(x) = \cos(log\, x)$ duas funções reais, nas quais $\log x$ representa o logaritmo decimal de x. O valor da expressão $f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(x \cdot y)\right]$ é

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

165. (IME/2014)

Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(sen^2 x + sen^4 x + sen^6 x + \cdots)\ln 2}$. Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x + sen\, x}$ é

Observação: $\ln 2$ representa o logaritmo neperiano de 2.

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\sqrt{3} - 1$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

e) $\sqrt{3} + 1$

166. (IME/2013)

Assinale a alternativa que representa o mesmo valor da expressão $[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3]$:

a) $sen(9°)$

b) $tg\ (9°)$

c) $\cos(9°)$

d) $\sec(9°)$

e) $cossec\ (9°)$

167. (IME/2012)

Seja $arcsenx + arcseny + arcsenz = \frac{3\pi}{2}$, onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Determine o valor de $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

168. (IME/2012)

O valor de $y = sen70°cos50° + sen260°cos280°$ é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

169. (IME/2010)

Considere a sequência $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}, a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}},$

... Determine o produto dos 20 primeiros termos dessa sequência.

170. (IME/2001)

Calcule o valor exato de:

$$sen\left[2arccotg\left(\frac{4}{3}\right)\right]+\cos\left[2arccossec\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

171. (IME/1997)

Se tga e tgb são as raízes da equação $x^2+px+q=0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y=sen^2(a+b)+psen(a+b)\cos(a+b)+qcos^2(a+b)$$

Considere $p,q\in\mathbb{R}$ com $q\neq 1$.

172. (IME/1991)

Mostre que se num triângulo ABC vale a relação:

$$\frac{\cos(B-C)}{senA+sen(C-B)}=tgB$$

Então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

173. (IME/1991)

Sejam A,B,C os ângulos de um triângulo. Mostre que:

$$sen(2A)+sen(2B)+sen(2C)=4senAsenBsenC$$

174. (IME/1989)

Provar que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação:

$$sen(4A)+sen(4B)+sen(4C)=0$$

Então, o triângulo ABC é retângulo.

12. Gabarito

123. b
124. c
125. $\boldsymbol{r_{min}=2\pi/3}$
126. b
127. b
128. a

129. e
130. a
131. b
132. e
133. b
134. c
135. a) $\mathbf{0}$ b) $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}}$
136. b
137. a
138. c
139. b
140. c
141. b
142. Demonstração
143. e
144. Demonstração
145. b
146. b
147. Demonstração
148. d
149. c
150. b
151. a
152. b
153. d
154. c
155. d
156. a
157. d
158. $\boldsymbol{b=8}$
159. d
160. b
161. $\boldsymbol{S=4}$
162. b
163. d
164. e
165. a
166. b
167. c
168. d
169. $\boldsymbol{P=\frac{\sqrt{3}}{2^{21}}\cdot\frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2^{20}}\right)}}$
170. $\mathbf{17/25}$
171. $\boldsymbol{y=q}$
172. Demonstração

173. Demonstração
174. Demonstração

13. Questões de Provas Anteriores Comentadas

123. (ITA/2019)

Seja $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x) = arcsen(x)$. Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$

b) $\frac{245}{162}\pi$

c) $-\frac{152}{81}\pi$

d) $-\frac{82}{81}\pi$

e) $-\frac{79}{162}\pi$

Comentários

Vamos calcular o valor de cada termo:

Para n = 0:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^0}\right) = 1 \Rightarrow f(1) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

Para n = 1:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Para n = 2:

Temos que usar a relação $cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right) \Rightarrow f\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}$$

Para n = 3:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right) \Rightarrow f\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}$$

Para n = 4:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right) \Rightarrow f\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}$$

A soma desses valores nos dá:

$$S = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right) = \frac{245}{162}\pi$$

Gabarito: "b".

---

124. (ITA/2019)

Considere um retângulo $ABCD$ em que o comprimento do lado AB é o dobro do comprimento do lado BC. Sejam M o ponto médio de BC e N o ponto médio de CM. A tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a

a) $\frac{1}{35}$

b) $\frac{2}{35}$

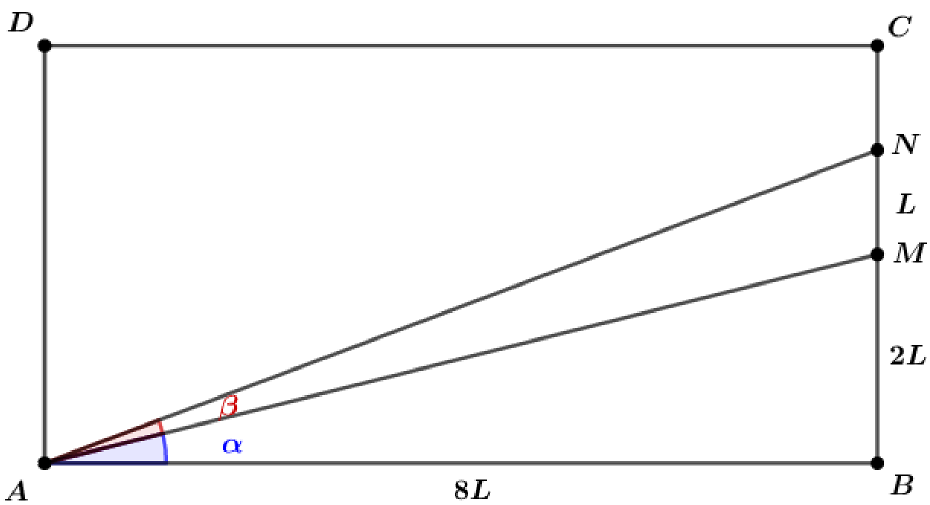
c) $\frac{4}{35}$

d) $\frac{8}{35}$

e) $\frac{16}{35}$

Comentários

Pelos dados do enunciado e para simplificar nossos cálculos, vamos escrever $AB = 8L, BM = 2L$ e $MN = L$. Queremos descobrir β que é o ângulo de $M\hat{A}N$. Assim, temos a seguinte figura:



Vamos aplicar a tangente nos triângulos ABM e AMN:

ΔABM:

$$tg(\alpha) = \frac{2L}{8L} = \frac{1}{4}$$

ΔABN:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{3L}{8L} = \frac{3}{8}$$

Usando a fórmula da soma da tangente:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{3}{8}$$

Substituindo o valor de $tg(\alpha)$ na equação, obtemos:

$$\frac{\frac{1}{4} + tg\beta}{1 - \frac{tg\beta}{4}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1 + 4tg\beta}{4 - tg\beta} = \frac{3}{8}$$

$$8 + 32tg\beta = 12 - 3tg\beta$$

$$35tg\beta = 12$$

Portanto, a tangente de $M\hat{A}N$ é dada por:

$$tg\beta = \frac{4}{35}$$

Gabarito: "c".

---

125. (ITA/2019)

Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \text{ e } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

Comentários

(a, b, c) é uma PA crescente, vamos escrevê-lo como $(b - r, b, b + r)$, com r sua razão.

Para as condições do problema, temos:

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \Rightarrow \cos(b - r) + \cos b + \cos(b + r) = 0$$

Aplicando as transformações trigonométricas:

$$\cos b \cos r + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} r + \cos b + \cos b \cos r - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} r = 0$$

$$2 \cos b \cos r + \cos b = 0 \Rightarrow \cos b\,(2 \cos r + 1) = 0$$

$$\cos b = 0 \text{ ou } \cos r = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(b - r) + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(b + r) = 0$$

$$\operatorname{sen} b \cos r - \operatorname{sen} r \cos b + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} b \cos r + \operatorname{sen} r \cos b = 0$$

$$2\,\mathrm{sen}\, b \cos r + \mathrm{sen}\, b = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\, b\,(2\cos r + 1) = 0$$

$$sen\ b = 0 \text{ ou} \cos r = -\frac{1}{2}$$

Se $\cos b = 0$, temos $sen\ b \neq 0$, logo, $\cos r = -1/2$. Se $sen\ b = 0$, temos, analogamente, $\cos r = -1/2$.

Como a PA é crescente, devemos ter $r > 0$, desse modo:

$$\cos r = -\frac{1}{2} \Rightarrow r = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

O menor valor possível é:

$$r_{min} > 0 \Rightarrow r_{min} = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{r_{min} = \frac{2\pi}{3}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{r_{min} = \frac{2\pi}{3}}$

---

126. (ITA/2017)

O maior valor de tgx, com $x = \frac{1}{2}arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 3

Comentários

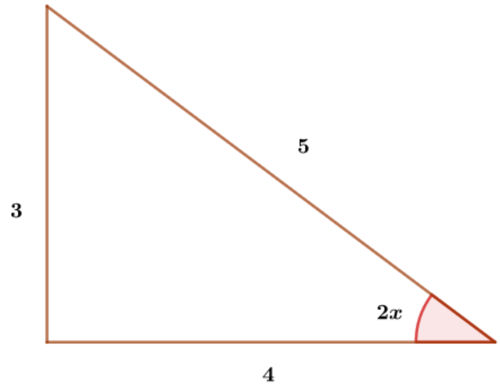
O bizu nessa questão é usar a fórmula da tangente em função de seno e cosseno:

$$tgx = \frac{sen2x}{1 + cos2x}$$

O enunciado nos dá:

$$x = \frac{1}{2}arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$$



$$sen2x = \frac{3}{5}$$

$$cos2x = \frac{4}{5}$$

Substituindo em tgx, encontramos:

$$tgx = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: "b".

---

127. (ITA/2016)

Se $tgx = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $sen(3x)$ é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$

Comentários

Devemos trabalhar com os ângulos.

Usando a identidade $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$:

$$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 7$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{8} \Rightarrow sen^2 x = \frac{7}{8}$$

Calculando $sen(3x)$:

$$sen(3x) = sen(2x + x) = sen(2x)\cos(x) + sen(x)\cos(2x)$$

$$2sen(x)\cos^2(x) + sen(x)\left(1 - 2sen^2(x)\right)$$

$$\Rightarrow sen(3x) = 3sen(x) - 4sen^3(x)$$

Como $sen^2 x = \frac{7}{8}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, temos:

$$senx = -\sqrt{\frac{7}{8}} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$sen(3x) = 3\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\right) - 4\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^3$$

$$sen(3x) = -\frac{3}{4}\sqrt{14} + 4 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4^3}$$

$$sen(3x) = -\frac{3}{4}\sqrt{14} + \frac{14}{16}\sqrt{14}$$

$$sen(3x) = \frac{2}{16}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

Gabarito: “b”.

---

128. (ITA/2015)

Os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem a equação $2sen\,(x) - \cos x = 1$ são

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

b) $\mathrm{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

c) $\mathrm{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π

Comentários

A equação possui seno e cosseno do mesmo ângulo. Vamos elevá-lo ao quadrado (lembrando que devemos verificar as raízes):

$$2sen(x) - \cos\,(x) = 1$$

$$\cos(x) + 1 = 2sen(x)$$

$$\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 4sen^2(x)$$

$$\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 4(1 - \cos^2(x))$$

$$5\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$$

As raízes são dadas por:

$$cosx = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{16}\right)}{5} = -1 \; ou \; \frac{3}{5}$$

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$

$$cosx = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

Testando os valores:

$$x = \pi \Rightarrow 2sen\pi - cos\pi = -(-1) = 1$$

$$cosx = \frac{3}{5} \Rightarrow senx = \frac{4}{5} \Rightarrow 2senx - cosx = 2\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} = 1$$

Gabarito: “a”.

---

129. (ITA/2014)

Sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a \neq 0 \; e \; b \neq 0$, um possível valor para $cossec(2x) - \frac{1}{2}tgx$ é

a) $\frac{a-b}{ab}$

b) $\frac{a+b}{2ab}$

c) $\frac{a^2-b^2}{ab}$

d) $\frac{a^2+b^2}{4ab}$

e) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$

Comentários

Vamos analisar a expressão:

$$cossec(2x) - \frac{1}{2}tgx = \frac{1}{sen(2x)} - \frac{1}{2}tg(x) = \frac{1}{2sen(x)\cos(x)} - \frac{tg(x)}{2}$$

Do enunciado, temos:

$$sen(x) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - sen^2(x)} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \pm\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$$

Encontrando o valor da expressão:

$$\frac{1}{2sen(x)\cos(x)} - \frac{tg(x)}{2} = \frac{1}{2sen(x)\cos(x)} - \frac{sen(x)}{2\cos(x)} = \frac{1}{2\cos(x)}\left(\frac{1}{sen(x)} - sen(x)\right)$$

$$\frac{1}{2\left(\pm\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\right)}\left(\frac{1}{\frac{2ab}{a^2+b^2}}-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$$

Vamos simplificar a expressão:

$$\pm\frac{1}{2}\frac{(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)}\left(\frac{((a^2+b^2)^2-4a^2b^2)}{2ab(a^2+b^2)}\right)$$

$$\pm\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{(a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2)}{2ab}\right)$$

$$\pm\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\right)$$

$$\pm\frac{a^2-b^2}{4ab}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra e.

Gabarito: “e”.

---

130. (ITA/2013)

Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{cotgx-1}{cossec(x-\pi)-\sec(\pi-x)}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) 2

Comentários

Analisando o cosseno dado, temos:

$$cos2x = \frac{1}{2}$$

$$1-2sen^2x = \frac{1}{2}$$

$$sen^2x = \frac{1}{4}$$

$$senx = \pm\frac{1}{2}$$

$$cosx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calculando o valor da expressão:

$$\frac{cotgx - 1}{cossec(x-\pi) - \sec(\pi - x)} = \frac{\frac{cosx}{senx} - 1}{\frac{1}{sen(x-\pi)} - \frac{1}{\cos(\pi - x)}}$$

$$*sen(x-\pi) = senxcos\pi - sen\pi cosx = -senx$$

$$*\cos(\pi - x) = cos\pi cosx + sen\pi senx = -cosx$$

$$\left(\frac{cosx - senx}{senx}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{-senx} + \frac{1}{cosx}}\right)$$

$$\left(\frac{cosx - senx}{senx}\right)\left(\frac{senxcosx}{cosx - senx}\right)$$

$$cosx$$

Sabemos que $cosx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: "a".

---

131. (ITA/2012)

Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| arcsen\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right) + arccos\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}$. Então

a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$

d) $S = \mathbb{R}^+$

e) $S = \mathbb{R}$

Comentários

Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right)$ e $\beta = \arccos\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)$:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$sen\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta$$

Conhecemos os valores de $sen\alpha$ e $cos\beta$. Dessa forma:

$$\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$2e^{-x} = 2e^{x}$$

$$e^{2x} = 1$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore S = \{0\}$$

Gabarito: “b”.

---

132. (ITA/2012)

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

b) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

c) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

d) $sen(\alpha)$ quando n é par.

e) zero quando n é ímpar.

Comentários

Vamos analisar a expressão $\cos(\alpha + k\pi)$:

$$\cos(\alpha + k\pi) = cos\alpha \cos(k\pi) - sen\alpha sen(k\pi) = cos\alpha \cos(k\pi)$$

Para os valores de k, temos:

$$k\ par \Rightarrow \cos(\alpha + k\pi) = cos\alpha$$

$$k\ ímpar \Rightarrow \cos(\alpha + k\pi) = -cos\alpha$$

Portanto, a soma depende do valor de n:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) = cos\alpha - cos\alpha + cos\alpha - \cdots + cos\alpha$$

$$S = \begin{cases} cos\alpha, n\ par \\ 0, n\ ímpar \end{cases}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra e.

Gabarito: “e”.

---

133. (ITA/2012)

Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $tg(x)$ são, respectivamente,

a) 1 e 0

b) 1 e $\frac{5}{2}$.

c) -1 e 0.

d) 1 e 5.

e) -1 e $-\frac{5}{2}$.

Comentários

Do enunciado:

$$sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$$

$$2sen(x)\cos(x) = \frac{4}{5}$$

$$sen(2x) = \frac{4}{5}$$

Usando a fórmula $sen(2x) = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$, temos:

$$\frac{2tgx}{1+tg^2x} = \frac{4}{5}$$

$$10tgx = 4 + 4tg^2x$$

$$2tg^2x - 5tgx + 2 = 0$$

Raízes:

$$tgx = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = 2\ ou \frac{1}{2}$$

Encontrando o que se pede:

$$S = tgx_1 + tgx_2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$P = tgx_1 tgx_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Gabarito: "b".

---

134. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$

b) $\frac{16}{6}\pi$

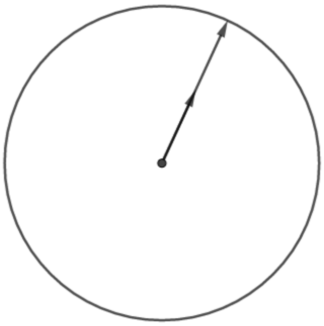
c) $\frac{24}{11}\pi$

d) $\frac{25}{11}\pi$

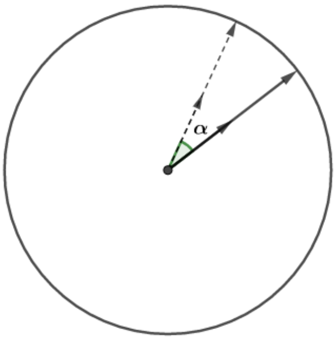
e) $\frac{7}{3}\pi$

Comentários

Supondo a situação inicial dada pela figura:



Após a segunda superposição, temos a seguinte figura:



Quando os ponteiros dos minutos percorrerem 2π radianos, o ponteiro das horas percorrerá $\pi/6$ radianos. Assim, podemos calcular o ângulo α usando a regra de 3:

$$\frac{2\pi+\alpha}{\alpha}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}$$

$$2\pi+\alpha=12\alpha$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{11}$$

Portanto, o ponteiro dos minutos após 2 superposições, percorrerá $2\pi+\alpha$ radianos:

$$2\pi+\alpha=2\pi+\frac{2\pi}{11}=\frac{24\pi}{11}$$

Gabarito: "c".

---

135. (ITA/2011)

a) Calcule $\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10}-2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Comentários

a) Vamos calcular o valor da expressão:

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10}-2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} - 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$$

b) Usando o que acabamos de mostrar em a):

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} - 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$$

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} = 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{4sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

Agora, basta perceber que $\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$$

Gabarito: a) 0 b) $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}}$

136. (ITA/2010)

A equação em x, $arctg(e^x + 2) - arccotg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.

b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo $]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}[$.

d) admite apenas soluções negativas.

e) não admite solução.

Comentários

Fazendo $\alpha = arctg(e^x + 2)$ e $\beta = arccotg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)$:

$$tg\alpha = e^x + 2$$

$$cotg(\beta) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando a tangente na equação acima, temos:

$$tg(\alpha - \beta) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = 1$$

Substituindo $tg\alpha$ e $tg\beta$:

$$(e^x + 2) - \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right) = 1 + (e^x + 2)\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)$$

$$e^{2x} + 2e^x - e^{2x} + 1 = e^x + e^{3x} - e^x + 2e^{2x} - 2$$

$$e^{3x} + 2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

Fazendo $y = e^x$:

$$y^3 + 2y^2 - 2y - 3 = 0$$

Fatorando:

$$y^3 + y^2 + y^2 - 2y - 2 - 1 = 0$$

$$y^2(y + 1) + y^2 - 1 - 2(y + 1) = 0$$

$$y^2(y + 1) + (y - 1)(y + 1) - 2(y + 1) = 0$$

$$(y + 1)(y^2 + y - 1 - 2) = 0$$

$$(y + 1)(y^2 + y - 3) = 0$$

Raízes:

$$y = -1$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Como $y = e^x > 0$, temos uma única solução:

$$e^x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: “b”.

---

137. (ITA/2010)

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$

b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

c) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

e) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$

Comentários

Podemos escrever o produto do seno dessa forma:

$$sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

Assim, a soma fica:

$$S = \sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$$

$$S = \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \cos(\alpha)\right) + \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3^2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) + \cdots + \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^5}\right)\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right) - \cos(\alpha)\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos(\alpha)\right]$$

Gabarito: “a”.

---

138. (ITA/2008)

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2sen^2(3x) + sen(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3, 3]$ e 2π

b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$

c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$

e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

Comentários

Perceba que temos o termo escondido $\cos(6x) = 1 - 2sen^2(3x)$.

Assim, podemos escrever:

$$f(x) = sen(6x) - \left(1 - 2sen^2(3x)\right)$$

$$f(x) = sen(6x) - \cos(6x)$$

Agora, encontramos uma equação clássica. Veja o pulo do gato:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(sen(6x) - \cos(6x))$$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(sen(6x)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(6x)\right)$$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(sen(6x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(6x)\right)$$

Essa é a fórmula da diferença do seno:

$$f(x) = \sqrt{2}\left(sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Sabemos que a função seno pertence ao intervalo $[-1;\ 1]$, dessa forma:

$$-1 \leq sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Im(f) = \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$$

Para encontrar o período da função, podemos usar a definição:

$$f(x + T) = f(x)$$

$$\sqrt{2}sen\left(6(x + T) - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Sabemos que o período da função seno é $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$6x + 6T - \frac{\pi}{4} = 6x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$6T = 2k\pi$$

$$T = \frac{k\pi}{3}$$

O período é dado pelo menor valor positivo de T:

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

Com isso, encontramos o gabarito na letra “c”.

Gabarito: “c”.

---

139. (ITA/2008)

Sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o contradomínio da função arco-seno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arco-cosseno, assinale o valor de

$$\cos\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Comentários

Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$cos\beta = \frac{4}{5}$$

Perceba que podemos usar a relação fundamental:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como o contradomínio da função arco-seno é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow cos\alpha = \frac{4}{5}$$

O contradomínio da função arco-cosseno é $[0, \pi]$, então:

$$cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Assim, podemos afirmar que $\alpha = \beta$, pois $cos\alpha = cos\beta = 4/5$.

Calculando o valor da expressão:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

Gabarito: "b".

---

140. (ITA/2007)

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) $(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})/3$

e) $(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})/3$

Comentários

Vamos encontrar os elementos de cada conjunto:

$$A = \left\{x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}$$

$$x_1 = sen^2\left(\frac{1^2\pi}{24}\right) = sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$x_2 = sen^2\left(\frac{2^2\pi}{24}\right) = sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$B = \left\{y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}$$

$$y_1 = sen^2\left(\frac{(3+5)\pi}{24}\right) = sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_2 = sen^2\left(\frac{(6+5)\pi}{24}\right) = sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)$$

Os elementos de $A \cup B$ são dados por:

$$A \cup B = \{x_1, x_2\} \cup \{y_1, y_2\} = \left\{sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right), sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right), sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right), sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)\right\}$$

Queremos a soma dos elementos desse conjunto:

$$S = sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)$$

Perceba que temos ângulos complementares:

$$\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24} \Rightarrow sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Reescrevendo a soma:

$$S = \underbrace{sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)}_{1} + \underbrace{sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{1}$$

$$\Rightarrow S = 2$$

Gabarito: "c".

---

141. (ITA/2004)

Considerando as funções

$$arcsen: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e}$$

$$arccos: [-1, 1] \to [0, \pi],$$

Assinale o valor de $\cos\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$.

a) $6/25$

b) $7/25$

c) $1/3$

d) $2/5$

e) $5/12$

Comentários

Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $sen\alpha = 3/5$, temos $cos\alpha > 0$:

$$cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Para β:

$$cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow sen\beta = \pm\frac{3}{5}$$

Como $\beta \in [0, \pi]$, temos $sen\beta > 0$:

$$sen\beta = \frac{3}{5}$$

Queremos calcular o valor da expressão:

$$\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

Substituindo os valores:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16 - 9}{25} = \frac{7}{25}$$

Gabarito: "b".

---

142. (ITA/2004)

Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação:

$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0$, então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a $60°$.

Comentários

Se α, β, γ são os ângulos internos do triângulo, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

Vamos transformar a soma $sen(3\alpha) + sen(3\beta)$ em produto e substituir $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$:

Lembrando que:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0$$
$$2sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + sen\big(3 \cdot 180° - 3(\alpha + \beta)\big) = 0$$

Sabemos que $sen\big(3 \cdot 180° - 3(\alpha + \beta)\big) = sen(3\alpha + 3\beta)$, usando a fórmula do arco metade:

$$2sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + 2sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) = 0$$
$$2sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\right) = 0$$
$$2sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{3\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) - sen\left(\frac{3\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right) = 0$$
$$2sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0\ ou\ \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)ou\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)=0$$

Para $sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0$:

$$\frac{3\alpha+3\beta}{2}=k180°\Rightarrow\alpha+\beta=k120°$$

Como $\alpha,\beta,\gamma\in(0,180°)$, temos:

$$\alpha+\beta=120°$$

Substituindo $\alpha+\beta=180°-\gamma$:

$$180°-\gamma=120°\Rightarrow\gamma=60°$$

Para $\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=0$:

$$\frac{3\alpha}{2}=90°\Rightarrow\alpha=60°$$

Para $\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)=0$:

$$\frac{3\beta}{2}=90°\Rightarrow\beta=60°$$

Portanto, em qualquer uma das situações temos que um dos três ângulos é $60°$.

Gabarito: Demonstração

---

143. (ITA/2003)

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $[0,\pi]$, respectivamente.

Com respeito à função $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x)=arcsenx+arccosx$, temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.

b) f não é par nem ímpar.

c) f é sobrejetora.

d) f é injetora.

e) f é constante.

Comentários

Fazendo $\alpha=arcsenx$ e $\beta=arccosx$ tal que $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $\beta\in[0,\pi]$, temos:

$$sen\alpha=x$$

$$cos\beta=x$$

Igualando os dois valores de x:

$$sen\alpha=cos\beta$$

$$sen\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \beta \leq \pi \Rightarrow -\pi \leq -\beta \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Devido às restrições dos intervalos, podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$arcsenx + arccosx = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore f$ é constante

Gabarito: "e".

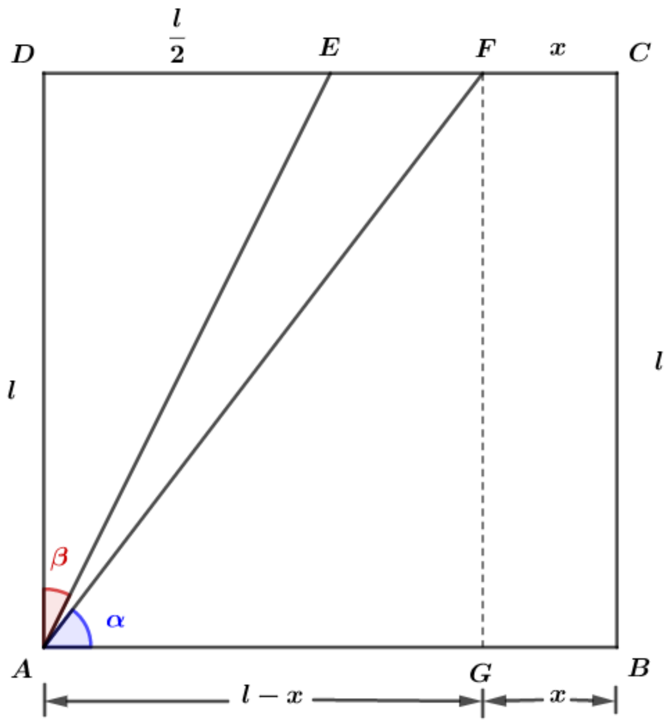
---

144. (ITA/2003)

Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento CD e F um ponto sobre o segmento CE tal que $m(BC) + m(CF) = m(AF)$. Prove que $cos\alpha = cos2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos EAD e GAF:

$$AE^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2$$

$$AE = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

$$AF^2 = l^2 + (l - x)^2$$

Do enunciado, temos:

$$m(BC) + m(CF) = m(AF)$$

$$AF = l + x$$

$$\Rightarrow (l + x)^2 = l^2 + (l - x)^2$$

$$l^2 + 2lx + x^2 = l^2 + l^2 - 2lx + x^2$$

$$\cancel{l^2} + 2lx + \cancel{x^2} = \cancel{l^2} + l^2 - 2lx + \cancel{x^2}$$

$$l^2 - 4lx = 0$$

$$l(l - 4x) = 0$$

Como $l \neq 0$:

$$l = 4x \Rightarrow x = \frac{l}{4}$$

Assim, os valores dos cossenos são dados por:

$$cos\alpha = \frac{AG}{AF} = \frac{\frac{3l}{4}}{\frac{5l}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$cos\beta = \frac{AD}{AE} = \frac{l}{\frac{\sqrt{5}}{2}l} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculando $\cos(2\beta)$:

$$\cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 = 2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(2\beta) = \cos\ \alpha$$

Gabarito: Demonstração

---

145. (ITA/2003)

Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2[sen(2x)]^2senx$ é igual a:

a) $2^{-4}[sen(2x) + sen(5x) + sen(7x)]$.

b) $2^{-4}[2sen(x) + sen(7x) - sen(9x)]$.

c) $2^{-4}[-sen(2x) - sen(3x) + sen(7x)]$.

d) $2^{-4}[-sen(x) + 2sen(5x) - sen(9x)]$.

e) $2^{-4}[sen(x) + 2sen(3x) + sen(5x)]$.

Comentários

Podemos simplificar a expressão:

$$[\cos(2x)\, sen(2x)]^2 senx = \left[\frac{sen(4x)}{2}\right]^2 senx = \frac{sen(4x)sen(4x)senx}{4}$$

Analisando as alternativas, devemos transformar o produto em soma. Usando a seguinte fórmula de Werner:

$$\boxed{\boldsymbol{-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)}}$$

$$2senAsenB = \cos(A-B) - \cos\,(A+B)$$

$$\frac{sen(4x)sen(4x)senx}{4} = \frac{2sen(4x)[sen(4x)senx]}{8}$$

$$\frac{sen(4x)[\cos(3x) - \cos(5x)]}{8} = \frac{2sen(4x)\cos(3x) - 2sen(4x)\cos(5x)}{16}$$

Usando a outra fórmula de Werner:

$$\boxed{\boldsymbol{2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)}}$$

$$\frac{sen(7x) + sen(x) - \left(sen(9x) + \underbrace{sen(-x)}_{-sen(x)}\right)}{16}$$

$$\frac{1}{2^4}\big(sen(7x) + sen(x) - sen(9x) - (-sen(x))\big)$$

$$\frac{1}{2^4}\big(2sen(x) + sen(7x) - sen(9x)\big)$$

Gabarito: “b”.

---

146. (ITA/2002)

Seja $f: \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ dada por $f(x) = \{y \in \mathbb{R}; seny < x\}$.

Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$, então

a) $A = [-1, 1]$.

b) $A = [a, \infty), \forall a > 1$.

c) $A = [a, \infty), \forall a \geq 1$.

d) $A = (-\infty, a], \forall a < -1$.

e) $A = (-\infty, a], \forall a \leq -1$.

Comentários

Analisando a função e de acordo com o enunciado:

$$f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$$

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R}; seny < x\}$$
$$\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}; seny < x\} = \mathbb{R}$$

Para todo real y, temos $seny \leq 1$, então, se $x > 1$ a igualdade acima torna-se verdadeira.

Portanto, $x \in A \Leftrightarrow x > 1$.

$$A = [a, \infty], \forall a > 1$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: “b”.

---

147. (ITA/2002)

Se x, y e z são ângulos internos de um triângulo ABC e $senx = (seny + senz)/(cosy + cosz)$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

Comentários

Como x, y, z são os ângulos internos do triângulo ABC, temos:

$$x + y + z = \pi$$
$$y + z = \pi - x$$

Vamos transformar as somas em produto, usando as seguintes transformações:

$$\boxed{sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$senx = \frac{2sen\left(\frac{y+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{y+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}$$

$$senx = tg\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

Substituindo $y + z = \pi - x$:

$$senx = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = cotg\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando a fórmula de arco metade do seno:

$$2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sabemos que $x < \pi$, então, $\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x) \neq 0$. Assim, temos:

$$2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como x é um ângulo do triângulo, temos $x>0$, então:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

Portanto, o triângulo ABC é retângulo.

Gabarito: Demonstração

---

148. (ITA/2001)

Considere as funções

$$f(x)=\frac{5+7^x}{4}, g(x)=\frac{5-7^x}{4}\text{ e } h(x)=arctgx$$

Se a é tal que $h\big(f(a)\big)+h\big(g(a)\big)=\pi/4$, então $f(a)-g(a)$ vale:

a) 0

b) 1

c) $7/4$

d) $7/2$

e) 7

Comentários

Usando os dados do problema, temos:

$$arctg\big(f(a)\big)+arctg\big(g(a)\big)=\frac{\pi}{4}$$

Fazendo $\alpha=arctg\big(f(a)\big)$ e $\beta=arctg\big(g(a)\big)$ e aplicando a função tangente na equação acima:

$$tg\alpha=f(a)\ e\ tg\beta=g(a)$$

$$tg(\alpha+\beta)=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)}=1$$

$$tg(\alpha)+tg(\beta)=1-tg(\alpha)tg(\beta)$$

$$f(a)+g(a)=1-f(a)g(a)$$

Substituindo os valores das funções:

$$\frac{5+7^a}{4}+\frac{5-7^a}{4}=1-\left(\frac{5+7^a}{4}\right)\left(\frac{5-7^a}{4}\right)$$

$$\frac{10}{4} = 1 - \frac{25 - 7^{2a}}{16}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{7^{2a} - 9}{16}$$

$$49 = 7^{2a}$$

$$a = 1$$

Calculando o valor da expressão $f(a) - g(a)$:

$$f(a) = f(1) = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$g(a) = g(1) = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f(a) - g(a) = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

Gabarito: “d”.

---

149. (ITA/2001)

Sendo α e β os ângulos de um triângulo retângulo, e sabendo que $sen^2 2\beta - 2cos2\beta = 0$, então $sen\alpha$ é igual a:

a) $\sqrt{2}/2$

b) $\sqrt[4]{2}/2$

c) $\sqrt[4]{8}/2$

d) $\sqrt[4]{8}/4$

e) zero

Comentários

Substituindo $sen^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta$:

$$1 - \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$$

$$\cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta - 1 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$\cos 2\beta = -1 \pm \sqrt{2}$$

Como $-1 \leq \cos 2\beta \leq 1$, temos:

$$\cos 2\beta = \sqrt{2} - 1$$

Reescrevendo o cosseno:

$$2\cos^2 \beta - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\cos^2 \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos \beta$ é positivo, pois é ângulo de um triângulo. Então:

$$\cos\beta = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt[4]{2^2} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Queremos calcular o valor de $sen\alpha$, sendo α e β ângulos de um triângulo retângulo, temos a seguinte relação:

$$sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Gabarito: "c".

---

150. (ITA/2000)

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2sen3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right]$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.

b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π.

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

Comentários

Como a função cosseno é par, podemos escrever:

$$f(x) = 2sen3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right] = 2sen3x - \cos\left[\frac{\pi - x}{2}\right] = 2sen3x - sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Analisando a paridade da função:

$$f(-x) = 2sen(-3x) - sen\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = -2sen(3x) + sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\therefore f \text{ é ímpar}$$

O período da função $sen(3x)$ é:

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

O período da função $sen\left(\frac{x}{2}\right)$ é:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Perceba que $T_2 = 4\pi = 6\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6T_1$. Portanto, o período fundamental da função f é:

$$T = T_2 = 4\pi$$

Gabarito: "b".

---

151. (ITA/1999)

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < \pi/2$. A expressão $\left[sen\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]sen\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ é idêntica a:

a) $\frac{\sqrt{2}cotg^2a}{1+cotg^2a}$

b) $\frac{\sqrt{2}cotga}{1+cotg^2a}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{1+cotg^2a}$

d) $\frac{1+3cotga}{2}$

e) $\frac{1+2cotga}{1+cotga}$

Comentários

Perceba que $sen\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$. Vamos transformar a soma do seno em produto, usando a seguinte fórmula:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

A expressão fica:

$$\left[2sen\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+a+\frac{3\pi}{4}-a}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+a-\frac{3\pi}{4}+a}{2}\right)\right]\cos\ a$$

$$\left[2sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos a\right]\cos a$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}\cos^2 a$$

$$\sqrt{2}\cos^2 a$$

Analisando as alternativas, vemos que devemos escrever o cosseno como cotangente:

$$\sqrt{2}\cos^2 a = \frac{\sqrt{2}\cos^2 a}{sen^2a}\cdot sen^2a = \frac{\sqrt{2}cotg^2a}{cossec^2a} = \frac{\sqrt{2}cotg^2a}{1+cotg^2a}$$

Gabarito: "a".

---

152. (ITA/1999)

Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4tg^4x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $sen(2x) + sen(4x)$ é:

a) $\sqrt{15}/4$

b) $\sqrt{15}/8$

c) $3\sqrt{5}/8$

d) $1/2$

e) 1

Comentários

Usando os dados do enunciado, temos:

$$4tg^4x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$$
$$\frac{4sen^4x}{\cos^4 x} = \frac{1 + 4\cos^4 x}{\cos^4 x}$$
$$4sen^4x - 4\cos^4 x = 1$$
$$4(sen^2x - \cos^2 x)\left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right) = 1$$
$$4(-\cos(2x)) = 1$$
$$\cos(2x) = -\frac{1}{4}$$

Aplicando o teorema fundamental:

$$sen(2x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(2x)} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

O enunciado afirma que x pertence ao intervalo:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < \pi$$

Para esses valores, temos $sen(2x) > 0$, desse modo:

$$sen(2x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Calculando o valor da expressão:

$$sen(2x) + sen(4x) = sen(2x) + 2sen(2x)\cos(2x)$$

Substituindo os valores:

$$\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{15}}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Gabarito: “b”.

---

153. (ITA/1996)

Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1 + \sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

a) $30°$

b) 45°

c) 60°

d) 135°

e) 120°

Comentários

Seja θ, β, γ os ângulos internos de um triângulo ABC. Vamos calcular as raízes da equação:

$$x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha + 1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2} \ e \ x_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2}$$

Definindo $cotg\beta = x_1 \ e \ cotg\gamma = x_2$, temos da propriedade do triângulo:

$$\theta + \beta + \gamma = 180°$$

$$\beta + \gamma = 180° - \theta$$

$$cotg(\beta + \gamma) = cotg(180° - \theta) = -cotg(\theta)$$

$$cotg(\theta) = -cotg(\beta + \gamma)$$

Calculando $cotg(\theta)$:

$$cotg(\theta) = -cotg(\beta + \gamma) = -\frac{1}{tg(\beta + \gamma)} = \frac{tg\beta tg\gamma - 1}{tg\beta + tg\gamma}$$

$$cotg(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{cotg\beta cotg\gamma} - 1\right)}{\frac{1}{cotg\beta} + \frac{1}{cotg\gamma}} = \frac{1 - cotg\beta cotg\gamma}{cotg\beta + cotg\gamma}$$

Sabemos que:

$$cotg\beta = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2} \ e \ cotg\gamma = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow cotg\beta + cotg\gamma = \alpha$$

$$\Rightarrow cotg\beta cotg\gamma = \frac{\alpha^2 - (\alpha^2 - 4\alpha - 4)}{4} = \alpha + 1$$

*Poderíamos ter aplicado diretamente as relações de Girard na equação para encontrar esses valores. Ainda estudaremos esse tema na aula de Polinômios.

Substituindo esses valores na equação da cotangente:

$$cotg(\theta) = \frac{1 - (\alpha + 1)}{\alpha} = -\frac{\alpha}{\alpha} = -1$$

Logo:

$$\theta = 135°$$

Gabarito: "d".

154. (ITA/1996)

Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $sen\alpha + cos\alpha = m$. Então, o valor de $y = sen2\alpha/(sen^3\alpha + \cos^3\alpha)$ será:

a) $\frac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$

b) $\frac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$

c) $\frac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

d) $\frac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$

e) $\frac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

Comentários

Usando os dados do enunciado, temos:

$$sen\alpha + cos\alpha = m \Rightarrow \underbrace{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \underbrace{2sen\alpha cos\alpha}_{sen(2\alpha)} = m^2 \Rightarrow sen(2\alpha) = m^2 - 1$$

Vamos fatorar a expressão:

$$y = \frac{sen(2\alpha)}{sen^3\alpha + \cos^3\alpha}$$

$$y = \frac{sen(2\alpha)}{(sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha cos\alpha + \cos^2\alpha)}$$

$$y = \frac{sen(2\alpha)}{(sen\alpha + cos\alpha)\left(1 - \frac{sen(2\alpha)}{2}\right)}$$

Substituindo os valores das variáveis, obtemos:

$$y = \frac{m^2 - 1}{m\left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right)}$$

$$y = \frac{2(m^2 - 1)}{m(3 - m^2)}$$

Gabarito: "c".

155. (ITA/1995)

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(x+\frac{\pi}{2}\right), se\ x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}-\frac{a}{x}senx, se\ x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Onde $a>0$ é uma constante. Considere $K=\{y\in\mathbb{R}; f(y)=0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\in K$?

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) $\pi^2/2$

e) π^2

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\in K\Rightarrow f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Calculando $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}$$

Temos que calcular $f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)$:

Como $a>0$, temos:

$$-a<0\Rightarrow-\frac{2a}{\pi}<0$$

Então:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}<\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)=a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)=a\left(\pi-\frac{2a}{\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)=0\Rightarrow a\left(\pi-\frac{2a}{\pi}\right)=0$$

Como $a>0$:

$$\pi-\frac{2a}{\pi}=0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi^2}{2}$$

Gabarito: "d".

156. (ITA/1995)

Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois progéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge-a a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:

a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$

b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$

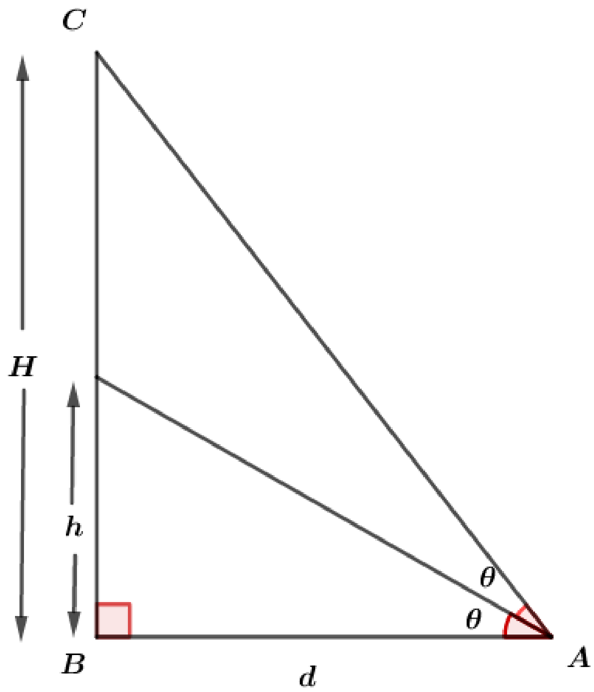
c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$

d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$

e) $H = hd^2/(d^2 + h)$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos o seguinte triângulo ABC:



Assim, temos as seguintes razões:

$$tg\theta = \frac{h}{d}$$

$$tg(2\theta) = \frac{H}{d}$$

$$\frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{H}{d}$$

$$\frac{\frac{2h}{d}}{1-\left(\frac{h}{d}\right)^2}=\frac{H}{d}$$

$$H=\frac{2hd^2}{d^2-h^2}$$

Gabarito: "a".

---

157. (ITA/1995)

A expressão $sen\theta/(1+cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, é idêntica a:

a) $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b) $cossec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

e) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Comentários

Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{sen\theta}{1+cos\theta}=\frac{2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}=\frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Gabarito: "d".

---

158. (IME/2020)

Seja $\frac{1}{b}=sen\frac{\pi}{14}\cdot sen\frac{3\pi}{14}\cdot sen\frac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte expressão:

$$E=sen\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Multiplicando os dois lados por $2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$, temos:

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\underbrace{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{14}\right)}_{sen\left(2\cdot\frac{\pi}{14}\right)}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=sen\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Entretanto:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}=\frac{5\pi}{14}\Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Logo:

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\underbrace{sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)}_{\frac{sen\left(2\cdot\frac{5\pi}{14}\right)}{2}}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

Por outro lado:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{7}=-\frac{3\pi}{14}\Rightarrow \cos\left(-\frac{3\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)}_{\frac{sen\left(2\cdot\frac{3\pi}{14}\right)}{2}}$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

Mas:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}=\frac{3\pi}{7}\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

Portanto:

$$E=\frac{1}{8}=\frac{1}{b}$$

$$\therefore \boxed{b=8}$$

Gabarito: $b=8$.

---

159. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11}+\theta_{26}+\theta_{75}+\theta_{90}=\frac{\pi}{4}$. O valor de $sen\left(\sum_{i=1}^{100}\theta_i\right)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

Comentários

Calculando o valor do somatório usando a fórmula da soma de uma PA:

$$\sum_{i=1}^{100} \theta_i = \frac{(\theta_1 + \theta_{100})100}{2} = 50(\theta_1 + \theta_{100})$$

O bizu nessa questão é perceber que os termos $\theta_1 + \theta_{100} = \theta_{11} + \theta_{90} = \theta_{26} + \theta_{75}$ são equidistantes. Assim, basta substituir:

$$\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$$

$$2(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{4}$$

$$(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{8}$$

$$sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = sen\big(50(\theta_1 + \theta_{100})\big) = sen\left(\frac{50\pi}{8}\right) = sen\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: "d".

---

160. (IME/2017)

Calcule o valor de $\frac{sen^4\alpha + \cos^4\alpha}{sen^6\alpha + \cos^6\alpha}$, sabendo-se que $sen\alpha cos\alpha = \frac{1}{5}$.

a) $\frac{22}{21}$

b) $\frac{23}{22}$

c) $\frac{25}{23}$

d) $\frac{13}{12}$

e) $\frac{26}{25}$

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$\frac{sen^4\alpha + \cos^4\alpha}{sen^6\alpha + \cos^6\alpha}$$

$$\frac{\overbrace{sen^4\alpha + \cos^4\alpha + 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}^{(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)^2} - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}{(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)(sen^4\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)}$$

$$\frac{1 - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}{(sen^4\alpha + \cos^4\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha)}$$

$$\frac{1 - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}{1 - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1-2(sen\alpha cos\alpha)^2}{1-3(sen\alpha cos\alpha)^2}$$

Usando a informação dada no enunciado:

$$sen\alpha cos\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1-2(sen\alpha cos\alpha)^2}{1-3(sen\alpha cos\alpha)^2} = \frac{1-2\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1-3\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{23}{25}}{\frac{22}{25}} = \frac{23}{22}$$

Gabarito: "b".

---

161. (IME/2017)

Se $\frac{cosx}{cosy} + \frac{senx}{seny} = -1$, calcule o valor de S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3sen\ y - sen\ 3y}{sen\ x}$$

Comentários

Essa questão é trabalhosa e para resolvê-la, temos que usar o método da tentativa e erro. Inicialmente, tentamos simplificar a expressão e depois usamos a informação dada no enunciado para obter algum resultado numérico.

Para os termos $cos3y$ e $sen3y$, temos:

$$\cos(3y) = 4\cos^3 y - 3cosy$$

$$sen(3y) = 3seny - 4sen^3y$$

Substituindo na expressão:

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3sen\ y - sen\ 3y}{sen\ x}$$

$$S = \frac{3\cos y + 4\cos^3 y - 3cosy}{\cos x} + \frac{3sen\ y - (3seny - 4sen^3y)}{sen\ x}$$

$$S = \frac{4\cos^3 y}{\cos x} + \frac{4sen^3y}{sen\ x}$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcos^3y + sen^3ycosx)$$

Vamos expandir os termos cúbicos:

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy(\cos^2 y) + (sen^2y)senycosx)$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy(1 - sen^2y) + (1 - \cos^2 y)senycosx)$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy - senxcosysen^2y + senycosx - senycosxcos^2y)$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}(senxcosy+senycosx-senxcosysen^2y-senycosxcos^2y)$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)-senycosy(senxseny+cosxcosy)\right)$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)-senycosy(\cos(x-y))\right)$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)-\frac{1}{2}sen(2y)cos(x-y)\right)$$

Agora, vamos analisar a informação dada no enunciado:

$$\frac{cosx}{cosy}+\frac{senx}{seny}=-1$$

$$\frac{senycosx+senxcosy}{senycosy}=-1$$

$$\frac{sen(x+y)}{senycosy}=-1$$

$$sen(x+y)=-senycosy$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}sen(2y)=sen(x+y)$$

Substituindo essa informação na soma, obtemos:

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)+sen(x+y)cos(x-y)\right)$$

Vamos transformar o produto $sen(x+y)\cos(x-y)$ em soma:

Usando a seguinte identidade, temos:

$$sen(A+B)+sen(A-B)=2senA\cos B$$

$$sen(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}[sen(x+y+x-y)+sen(x+y-x+y)]$$

$$\Rightarrow sen(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}[sen(2x)+sen(2y)]$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)+\frac{1}{2}[sen(2x)+sen(2y)]\right)$$

Substituindo $sen(x+y)=-\frac{1}{2}sen(2y)$:

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(-\frac{1}{2}sen(2y)+\frac{1}{2}[sen(2x)+sen(2y)]\right)$$

$$S=\frac{4}{sen(2x)}\left(sen(2x)\right)$$

$$\therefore S=4$$

Gabarito: $S=4$

162. (IME/2015)

Os lados a, b e c de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos aos ângulos internos A, B e C, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$

b) 2

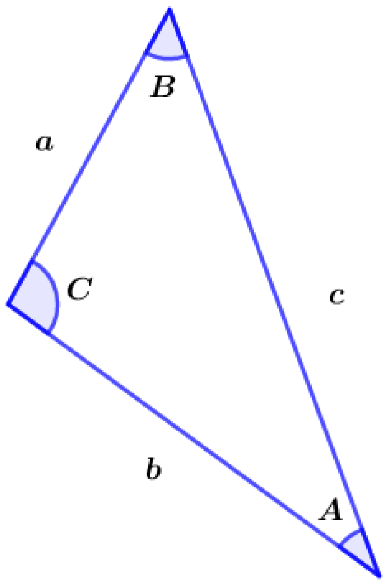
c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) 4

Comentários

De acordo com o enunciado, (a, b, c) estão em PA. Temos a seguinte figura:



Se r é a razão da PA, podemos reescrever os seus termos dessa forma:

$$a = b - r$$

$$c = b + r$$

$$(b - r, b, b + r)$$

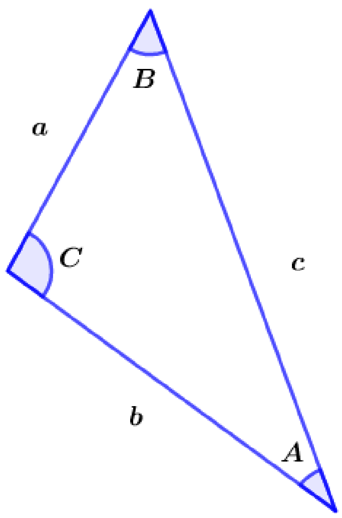
Vamos calcular o valor da expressão:

$$\frac{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) + sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) - sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$, encontramos:

$$\frac{1+tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Precisamos calcular o valor de $tg\left(\frac{A}{2}\right)$ e $tg\left(\frac{C}{2}\right)$, vamos encontrar essa informação no triângulo dado:



Usando a Lei dos Cossenos em A e C:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+(b+r)^2-(b-r)^2}{2b(b+r)}$$

$$\cos(A) = \frac{b^2+b^2+2br+r^2-b^2+2br-r^2}{2b(b+r)}$$

$$\cos(A) = \frac{b^2+4br}{2b(b+r)}$$

$$\cos(A) = \frac{b+4r}{2(b+r)}$$

Analogamente para C:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

$$\cos(C) = \frac{(b-r)^2+b^2-(b+r)^2}{2(b-r)b}$$

$$\cos(C) = \frac{b^2-4br}{2b(b-r)}$$

$$\cos(C) = \frac{b-4r}{2(b-r)}$$

Vamos usar a identidade:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}}$$

Como $0 < A < \pi$ (das condições do triângulo), temos $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$. Assim, podemos escrever:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}}$$

Substituindo $cosA$ na equação:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{b + 4r}{2(b + r)}\right)}{1 + \left(\frac{b + 4r}{2(b + r)}\right)}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{b + 4r}{2(b + r)}\right)}{1 + \left(\frac{b + 4r}{2(b + r)}\right)}} = \sqrt{\frac{b - 2r}{3b + 6r}} = \sqrt{\frac{b - 2r}{3(b + 2r)}}$$

Fazendo o mesmo para $cosC$:

$$tg\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{b - 4r}{2(b - r)}\right)}{1 + \left(\frac{b - 4r}{2(b - r)}\right)}} = \sqrt{\frac{b + 2r}{3(b - 2r)}}$$

Substituindo esses valores na expressão, obtemos:

$$\frac{1 + tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}{1 - tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$\frac{1 + \sqrt{\frac{b - 2r}{3(b + 2r)}}\sqrt{\frac{b + 2r}{3(b - 2r)}}}{1 - \sqrt{\frac{b - 2r}{3(b + 2r)}}\sqrt{\frac{b + 2r}{3(b - 2r)}}}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: “b”.

---

163. (IME/2014)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x) = x^2 - \pi x$. Sejam também a, b, c e d números reais tais que:

$$a = sen^{-1}\left(\frac{1}{3}\right); b = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right); c = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ e } d = cotg^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$ é

a) $f(b) > f(a) > f(d) > f(c)$

b) $f(d) > f(a) > f(c) > f(b)$

c) $f(d) > f(a) > f(b) > f(c)$

d) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$

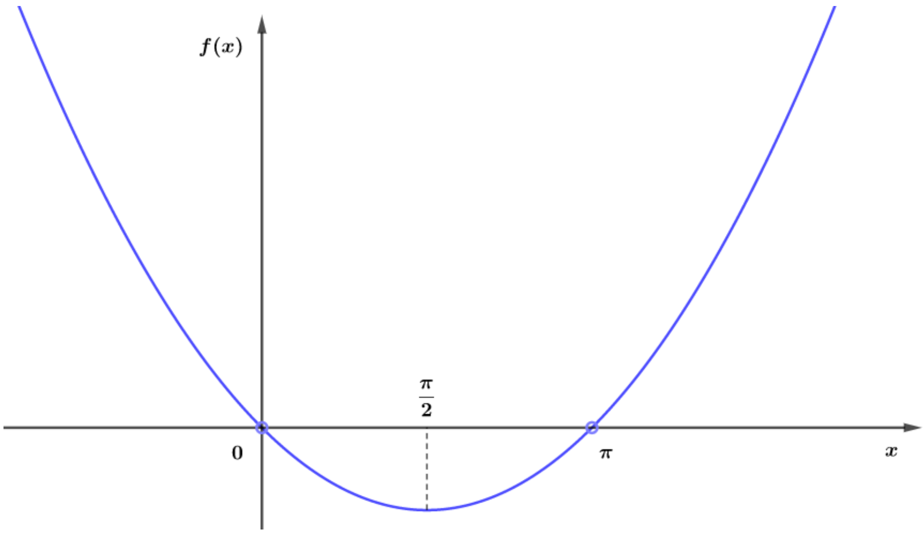
e) $f(a) > f(b) > f(d) > f(c)$

Comentários

Inicialmente, vamos analisar a função:

$$f(x) = x^2 - \pi x$$

Esboçando o gráfico dessa função:



A função f é decrescente para $x \leq \frac{\pi}{2}$ e crescente para $x \geq \frac{\pi}{2}$.

Vamos analisar os ângulos da questão:

Devemos usar o círculo trigonométrico para fazer as comparações.

Para cada ângulo, devemos analisar o domínio da função arco:

$$a = arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b = arctg\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

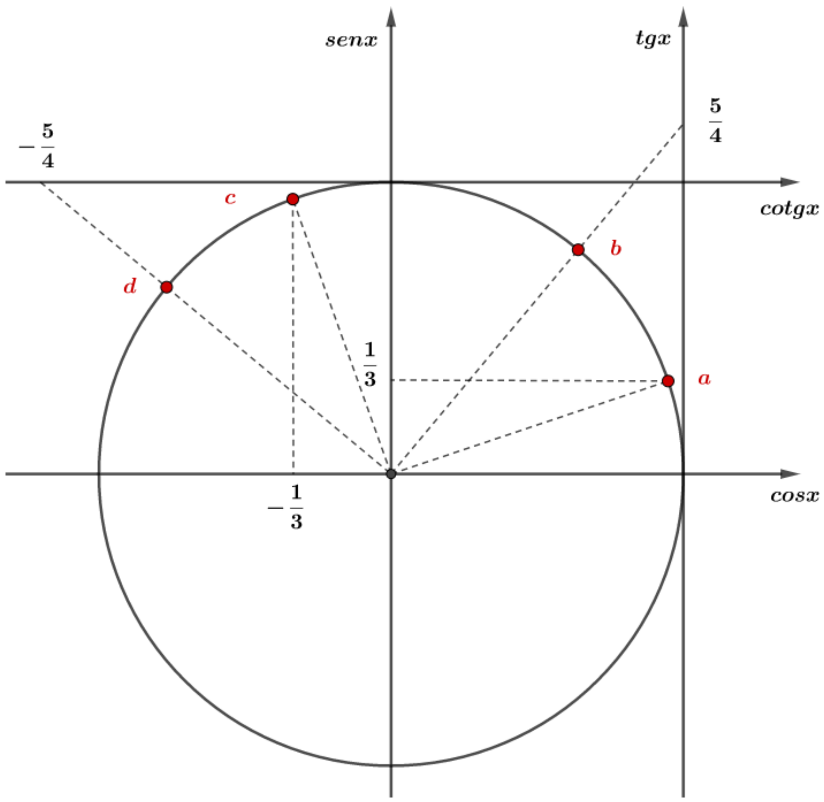
$$c = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow c \in [0, \pi]$$

$$d = arccotg\left(-\frac{5}{4}\right) \Rightarrow d \in (0, \pi)$$

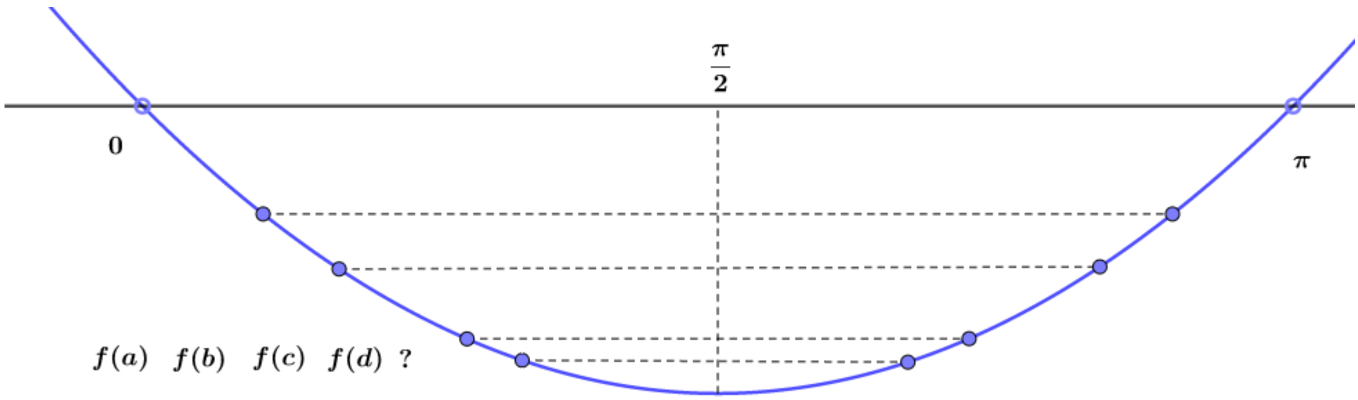
Perceba que temos ângulos complementares:

$$sena = \frac{1}{3}\ e\ cosc = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = c - \frac{\pi}{2}$$
$$tgb = \frac{5}{4}\ e\ cotgd = -\frac{5}{4} \Rightarrow b = d - \frac{\pi}{2}$$

Colocando os ângulos no círculo, temos:



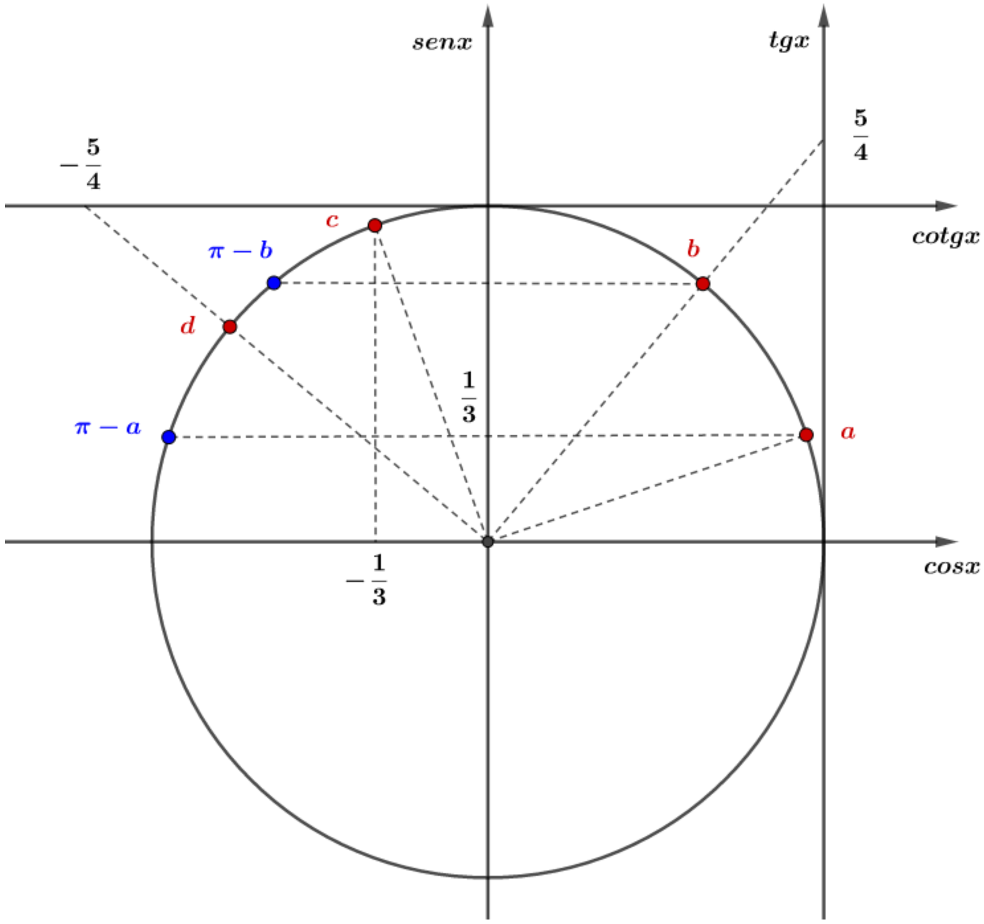
Para comparar os valores de $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$, devemos lembrar que a função f é simétrica em relação à reta $x = \pi/2$. Assim, temos que escolher um lado da parábola para fazer as comparações:



Vamos escolher o lado crescente da função e comparar os valores $x \geq \pi/2$. De acordo com o círculo, $0 < a < b < \pi/2$. Devemos pegar o simétrico de a e b. Assim, temos:

$$f(a) = f(\pi - a)$$
$$f(b) = f(\pi - b)$$

Usando o círculo trigonométrico:



Agora, com os ângulos no segundo quadrante, basta comparar os valores:

$$f(\pi - a) > f(d) > f(\pi - b) > f(c)$$

$$f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$$

Gabarito: "d".

---

164. (IME/2014)

Sejam $f(x) = sen(\log x)$ e $g(x) = \cos(log\, x)$ duas funções reais, nas quais $\log x$ representa o logaritmo decimal de x. O valor da expressão $f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(x \cdot y)\right]$ é

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

Comentários

Se $f(x) = sen(\log x)$ e $g(x) = \cos(log\, x)$, temos:

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \cos\left(log\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \cos(log\, x - log\, y)$$

$$g(x \cdot y) = \cos(log(x \cdot y)) = \cos(log\, x + log\, y)$$

Calculando o valor da expressão:

$$f(x)\cdot f(y)-\frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right)-g(x\cdot y)\right]$$

$$sen(\log x)\ \cdot sen(\log y)\ -\frac{1}{2}[\cos(log\,x-log\,y)-\cos(log\,x+log\,y)]$$

$$sen(\log x)\cdot sen(\log y)-\frac{1}{2}[2sen(\log x)sen(\log y)]=0$$

Portanto, o valor da expressão é zero.

Gabarito: “e”.

---

165. (IME/2014)

Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2-9y+8=0$ pode ser representada pela expressão $e^{(sen^2x+sen^4x+sen^6x+\cdots)\ln 2}$. Sendo $0<x<\frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x+sen\,x}$ é

Observação: $\ln 2$ representa o logaritmo neperiano de 2.

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\sqrt{3}-1$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

e) $\sqrt{3}+1$

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$y^2-9y+8=0$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$y_1=1\ e\ y_2=8$$

Agora, vamos analisar a expressão:

$$e^{(sen^2x+sen^4x+sen^6x+\cdots)\ln 2}$$

Como $0<x<\pi/2$, temos $0<senx<1$. Então, a soma $sen^2x+sen^4x+\cdots$ é uma soma de PG infinita de razão sen^2x. Dessa forma, temos:

$$sen^2x+sen^4x+\cdots=\frac{sen^2x}{1-sen^2x}$$

$$e^{\left(\frac{sen^2x}{1-sen^2x}\right)\ln 2}=e^{\log_e 2^{\frac{sen^2x}{1-sen^2x}}}=2^{\frac{sen^2x}{1-sen^2x}}=2^{\frac{sen^2x}{\cos^2 x}}=2^{tg^2x}$$

De acordo com o enunciado, uma das raízes é o valor dessa expressão:

$$2^{tg^2x}=1\ ou\ 2^{tg^2x}=8$$

Para $2^{tg^2x} = 1$:

$$tg^2x = 0 \Rightarrow \text{não tem solução}$$

Para $2^{tg^2x} = 8$:

$$2^{tg^2x} = 2^3 \Rightarrow tg^2x = 3 \Rightarrow tgx = \pm\sqrt{3}$$

Como $0 < x < \pi/2$, temos:

$$tgx = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Calculando o valor da razão, temos:

$$\frac{\cos x}{\cos x + sen\, x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Gabarito: “a”.

---

166. (IME/2013)

Assinale a alternativa que representa o mesmo valor da expressão $[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3]$:

a) $sen(9°)$

b) $tg\ (9°)$

c) $\cos(9°)$

d) $\sec(9°)$

e) $cossec\ (9°)$

Comentários

Perceba que os termos da expressão são muito próximos da fórmula do arco triplo:

$$[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3]$$

Lembrando que o arco triplo é dado por:

$$\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA$$

Como $\cos(9°) > 0$ e $\cos(27°) > 0$, podemos multiplicar a expressão por $\cos(27°)\cos(9°)$ e obter:

$$[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3] = \frac{[4\cos^3(9°) - 3\cos(9°)][4\cos^3(27°) - 3\cos(27°)]}{\cos(27°)\cos(9°)}$$

$$\frac{\cos(27°)\cos(81°)}{\cos(27°)\cos(9°)} = \frac{\text{sen}(9°)}{\cos(9°)} = tg(9°)$$

Gabarito: “b”.

---

167. (IME/2012)

Seja $arcsenx + arcseny + arcsenz = \frac{3\pi}{2}$, onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Determine o valor de $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Comentários

Do enunciado, temos:

$$arcsenx + arcseny + arcsenz = \frac{3\pi}{2}$$

Sabemos que a imagem da função arco-seno é:

$$arcsen(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Então, a única possibilidade é quando a função arco-seno assume seu valor máximo:

$$arcsenx = arcseny = arcsenz = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = y = z = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Substituindo esses valores na expressão, obtemos:

$$x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}} = 1^{100} + 1^{100} + 1^{100} - \frac{9}{1^{101} + 1^{101} + 1^{101}} = 3 - \frac{9}{3} = 0$$

Gabarito: "c".

---

168. (IME/2012)

O valor de $y = sen70°cos50° + sen260°cos280°$ é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Comentários

Vamos calcular o valor da expressão:

$$y = sen70°cos50° + sen260°cos280°$$

$$y = sen70°cos50° + sen(180° + 80°)\cos(180° + 100°)$$

$$*sen(180° + 80°) = sen(180°)\cos(80°) + sen(80°)\cos(180°) = -sen(80°)$$

$$*\cos(180° + 100°) = cos(180°)\cos(100°) - sen(180°)\,\mathrm{sen}(100°) = -cos(100°)$$

$$y = sen70°cos50° + \big(-sen(80°)\big)\big(-cos(100°)\big)$$

$$y = sen70°cos50° + sen80°cos100°$$

Vamos transformar o produto em soma usando a fórmula de Prostaférese:

$$senAcosB = \frac{1}{2}\big(sen(A + B) + sen(A - B)\big)$$

$$sen70°cos50° = \frac{1}{2}\big(sen(120°) + sen(20°)\big)$$

$$sen80°cos100° = \frac{1}{2}\big(sen(180°) + sen(-20°)\big) = \frac{1}{2}\big(sen(180°) - sen(20°)\big)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\big(sen(120°) + sen(20°)\big) + \frac{1}{2}\big(sen(180°) - sen(20°)\big)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Gabarito: "d".

---

169. (IME/2010)

Considere a sequência $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}, a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}},$

... Determine o produto dos 20 primeiros termos dessa sequência.

Comentários

Vamos analisar cada termo da sequência:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1}$$

$$2a_2^2 = 1 + a_1$$

A relação acima nos lembra da seguinte fórmula do cosseno:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

$$2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$$

Vamos escrever os termos em função do cosseno:

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^1}\right)$$

$$2a_2^2 = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow a_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^2}\right)$$

Analogamente para os outros termos, encontramos:

$$a_3 = \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^3}\right)$$

$$\vdots$$

$$a_{20} = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)$$

Queremos calcular o produto dos 20 primeiros termos da sequência:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{20}$$

$$P = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}_{20\ termos}$$

Podemos usar a fórmula do arco duplo do seno:

$$sen(2\alpha) = 2sen\alpha cos\alpha$$

Vamos multiplicar essa expressão por $2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)$:

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) \cdot 2^{20}$$

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot 2^{19}$$

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{18}}\right) \cdot 2^{18}$$

$$\vdots$$

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{P = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}}$

---

170. (IME/2001)

Calcule o valor exato de:

$$sen\left[2arccotg\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2arccossec\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Comentários

Fazendo as seguintes substituições:

Para $\alpha \in]0, \pi[$:

$$\alpha = arccotg\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow cotg\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow cotg^2\alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow cossec^2\alpha - 1 = \frac{16}{9}$$

$$\frac{1}{sen\alpha} = \pm\frac{5}{3}$$

Como $\alpha \in]0, \pi[$, temos $sen\alpha > 0$:

$$\Rightarrow sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Para $\beta \in]-\pi/2\,,0[\, \cup\,]0, \pi/2[$:

$$\beta = arccossec\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow cossec\beta = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{sen\beta} = \frac{5}{4} \Rightarrow sen\beta = \frac{4}{5}$$

Queremos calcular:

$$sen(2\alpha) + \cos(2\beta) = 2sen\alpha cos\alpha + 1 - 2sen^2\beta$$

$$2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} - \frac{7}{25} = \frac{17}{25}$$

$$\therefore sen(2\alpha) + \cos(2\beta) = \frac{17}{25}$$

Gabarito: $17/25$

---

171. (IME/1997)

Se tga e tgb são as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y = sen^2(a+b) + psen(a+b)\cos(a+b) + qcos^2(a+b)$$

Considere $p, q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 1$.

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = tga + tgb = -p$$

$$x_1x_2 = tgatgb = q$$

Agora, dividindo a expressão por $\cos^2(a+b)$:

$$\frac{y}{\cos^2(a+b)} = tg^2(a+b) + ptg(a+b) + q$$

$$y=\frac{tg^2(a+b)+ptg(a+b)+q}{\sec^2(a+b)}$$

$$y=\frac{tg^2(a+b)+ptg(a+b)+q}{1+tg^2(a+b)}$$

Calculando $tg(a+b)$:

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}=-\frac{p}{1-q}=\frac{p}{q-1}$$

Substituindo o valor na expressão:

$$y=\frac{\left(\frac{p}{q-1}\right)^2+p\left(\frac{p}{q-1}\right)+q}{1+\left(\frac{p}{q-1}\right)^2}$$

$$y=\frac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}$$

$$y=\frac{p^2+p^2q-p^2+q^3-2q^2+q}{q^2-2q+1+p^2}$$

$$y=\frac{q(p^2+q^2-2q+1)}{p^2+q^2-2q+1}$$

$$\Rightarrow y=q$$

Gabarito: $\boldsymbol{y=q}$

---

172. (IME/1991)

Mostre que se num triângulo ABC vale a relação:

$$\frac{\cos(B-C)}{senA+sen(C-B)}=tgB$$

Então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

Comentários

Se A, B, C são os ângulos internos de um triângulo ABC, temos:

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A=\pi-(B+C)$$

Vamos simplificar o lado esquerdo da expressão:

$$\frac{\cos(B-C)}{sen\big(\pi-(B+C)\big)+sen(C-B)}$$

$$\frac{\cos(B-C)}{sen(B+C)+sen(C-B)}$$

$$\frac{\cos B\cos C+senBsenC}{senBcosC+senCcosB+senCcosB-senBcosC}$$

$$\frac{cosBcosC + senBsenC}{2senCcosB}$$

$$\frac{cotgC + tgB}{2}$$

Usando a relação do enunciado:

$$\frac{cotgC + tgB}{2} = tgB$$

$$cotgC = tgB$$

$$\frac{cosC}{senC} = \frac{senB}{cosB}$$

$$cosBcosC - senBsenC = 0$$

$$cos(B + C) = 0$$

Usando a relação dos ângulos internos do triângulo:

$$\cos(\pi - A) = 0$$

$$-\cos(A) = 0$$

Como $A \in]0, \pi[$, temos:

$$A = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, o triângulo é retângulo em A.

Gabarito: Demonstração

---

173. (IME/1991)

Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que:

$$sen(2A) + sen(2B) + sen(2C) = 4senAsenBsenC$$

Comentários

Se A, B, C são ângulos internos de um triângulo, temos:

$$A + B + C = \pi$$

$$2A = 2\pi - 2(B + C)$$

Calculando o valor da expressão:

$$sen(2A) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$sen\big(2\pi - 2(B + C)\big) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$-sen\big(2(B + C)\big) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$-(sen(2B)\cos(2C) + sen(2C)\cos(2B)) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$sen(2B)(1 - \cos(2C)) + sen(2C)(1 - \cos(2B))$$

$$2senBcosB(2sen^2C) + 2senCcosC(2sen^2B)$$

$$4senBsenC(senCcosB + senBcosC)$$

$$4senBsenCsen(B+C)$$
$$4senBsenCsen(\pi-A)$$
$$4senAsenBsenC$$

Portanto:

$$sen(2A)+sen(2B)+sen(2C)=4senAsenBsenC$$

Gabarito: Demonstração

---

174. (IME/1989)

Provar que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação:

$$sen(4A)+sen(4B)+sen(4C)=0$$

Então, o triângulo ABC é retângulo.

Comentários

Como A,B,C são ângulos de um triângulo ABC, temos:

$$A+B+C=\pi$$
$$4A=4\pi-4(B+C)$$

Vamos calcular o valor da expressão:

$$sen(4A)+sen(4B)+sen(4C)$$
$$sen\big(4\pi-4(B+C)\big)+sen(4B)+sen(4C)$$
$$-sen(4B+4C)+sen(4B)+sen(4C)$$
$$-sen(4B)\cos(4C)-sen(4C)\cos(4B)+sen(4B)+sen(4C)$$
$$sen(4B)(1-\cos(4C))+sen(4C)(1-\cos(4B))$$
$$2sen(2B)\cos(2B)\left(2\operatorname{sen}^2(2C)\right)+2sen(2C)\cos(2C)(2\operatorname{sen}^2(2B))$$
$$4sen(2B)\operatorname{sen}(2C)\left(sen(2C)\cos(2B)+sen(2B)\cos(2C)\right)$$
$$4\operatorname{sen}(2B)\operatorname{sen}(2C)\left(sen(2B+2C)\right)$$
$$4\operatorname{sen}(2B)\operatorname{sen}(2C)\,sen(2\pi-2A)$$
$$-4sen(2A)\operatorname{sen}(2B)\operatorname{sen}(2C)$$

Usando a relação do enunciado:

$$-4\operatorname{sen}(2B)\operatorname{sen}(2C)\,sen(2A)=0$$

Como A,B,C são ângulos internos de um triângulo, temos $A,B,C\in(0,\pi)$. Então:

$$sen(2A)=0\Rightarrow 2A=\pi\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$$

Ou

$$sen(2B)=0\Rightarrow 2B=\pi\Rightarrow B=\frac{\pi}{2}$$

Ou

$$sen(2C) = 0 \Rightarrow 2C = \pi \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Para qualquer um dos casos, temos que o triângulo possui um ângulo reto.

Gabarito: Demonstração

14. Considerações Finais da Aula

Chegamos ao final da nossa aula de trigonometria. Esse assunto possui uma alta taxa de incidência nas provas militares. Tente resolver todos os exercícios dessa aula.

O melhor jeito de estudar trigonometria é resolver uma grande quantidade de exercícios e pegar todos os bizus da aula. Na hora da prova, não teremos surpresas pois já saberemos resolver cada tipo de problema que possa cair.

Lembre-se! A prática leva à perfeição! Conte comigo na sua preparação!

Se ficar com dúvidas ou tiver alguma sugestão e/ou crítica, nos procure no fórum de dúvidas ou fale diretamente comigo:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

15. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.

[2] Antar Neto, Aref. Sampaio, José Luiz Pereira. Lapa, Nilton. Cavallantte, Sidney Luiz. Noções de Matemática, v.3. 2 ed. Vestseller, 2009. 324p.

[3] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.

[4] Rufino, Marcelo. Elementos da Matemática volume 5 – Trigonometria e Geometria Espacial. 1 ed. Vestseller, 2017. 552p.