MATEMÁTICA

1

João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$ 57,00.

Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

Resolução

Sejam x, y e z respectivamente os preços do hambúrguer, do suco e da cocada.

$$\cdot(-8)\cdot(-3)\begin{cases} x + y + z = 10,00 \\ 3x + y + 2z = 21,50 \\ 8x + 3y + 5z = 57,00 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10,00 \\ -2y - z = -8,50 \\ -5y - 3z = -23,00 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10,00 \\ 2y + z = 8,50 \\ 5y + 3z = 23,00 \end{cases}$$

$$\cdot(-3)\begin{cases} x + y + z = 10,00 \\ 2y + z = 8,50 \\ 5y + 3z = 23,00 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10,00 \\ 2y + z = 8,50 \\ -y = -2,50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,00 \\ y = 2,50 \\ z = 3,50 \end{cases}$$

Resposta: *O preço do hambúrguer é R$ 4,00, o do suco é R$ 2,50 e o da cocada é R$ 3,50.*

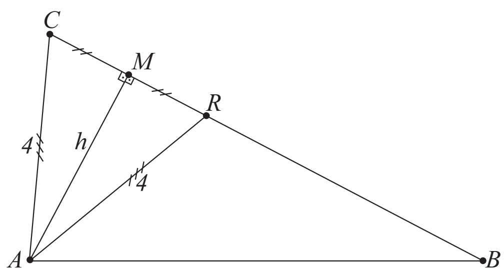
2

No triângulo ABC, tem-se que $AB > AC$, $AC = 4$ e $\cos \hat{C} = \dfrac{3}{8}$. Sabendo-se que o ponto R pertence ao segmento $\overline{BC}$ e é tal que $AR = AC$ e $\dfrac{BR}{BC} = \dfrac{4}{7}$, calcule

a) a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

b) a área do triângulo ABR.

Resolução



$h = AM$, em que M é o ponto médio de $\overline{CR}$, é a altura do triângulo isósceles ACR, de base $\overline{CR}$ e também é a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

De acordo com a figura e o enunciado, tem-se:

1) $CM = AC \cdot \cos \hat{C}$

Assim: $CM = 4 \cdot \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow CM = \dfrac{3}{2}$

2) $CM = \dfrac{1}{2} \cdot CR$

Assim: $\dfrac{3}{2} = \dfrac{CR}{2} \Leftrightarrow CR = 3$

3) $BC = CR + RB$

Assim: $BC = 3 + \dfrac{4}{7} \cdot BC \Leftrightarrow BC = 7$

4) $RB = \dfrac{4}{7} \cdot BC = \dfrac{4}{7} \cdot 7 = 4$

5) $AM^2 + CM^2 = AC^2$

Assim: $h^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{55}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{55}}{2}$

6) A área S do triângulo ABR é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \,.\, RB \,.\, h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{55}}{2} = \sqrt{55}$$

Respostas: *a) $\dfrac{\sqrt{55}}{2}$ unidades de comprimento*

b) $\sqrt{55}$ unidades de área

3

Um polinômio de grau 3 possui três raízes reais que, colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética em que a soma dos termos é igual a $\dfrac{9}{5}$. A diferença entre o quadrado da maior raiz e o quadrado da menor raiz é $\dfrac{24}{5}$.

Sabendo-se que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio é 5, determine

a) a progressão aritmética.

b) o coeficiente do termo de grau 1 desse polinômio.

Resolução

a) Sendo $a - r$, a e $a + r$ as três raízes em progressão aritmética de razão $r > 0$, temos, de acordo com o enunciado, que:

$$\begin{cases} a - r + a + a + r = \dfrac{9}{5} \\ (a + r)^2 - (a - r)^2 = \dfrac{24}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ r = 2 \end{cases}$$

A progressão aritmética é, portanto,

$-\dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{5}$ *e* $\dfrac{13}{5}$

b) Sendo $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ *com* $a_0 = 5$, *decorre das relações de Girard:*

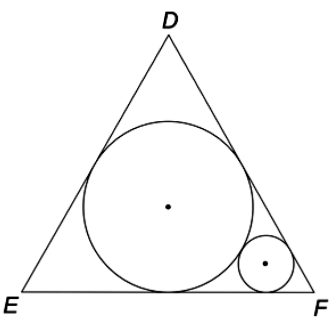
$$\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(\frac{13}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{13}{5}\right) =$$

$$= \frac{a_2}{5} \Leftrightarrow \frac{a_2}{5} = -\frac{73}{25} \Leftrightarrow a_2 = -\frac{73}{5}$$

***Respostas**: a)* $-\dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{13}{5}$ *b)* $-\dfrac{73}{5}$

4

O círculo *C*, de raio *R* , está inscrito no triângulo eqüilátero *DEF*. Um círculo de raio *r* está no interior do triângulo *DEF* e é tangente externamente a *C* e a dois lados do triângulo, conforme a figura.

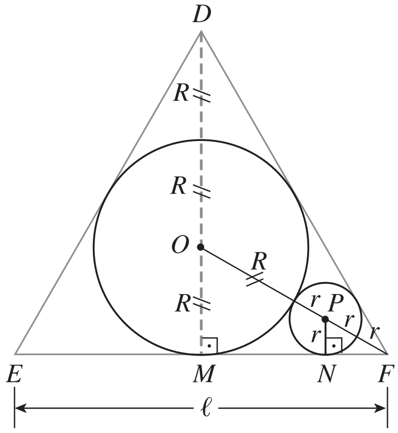


Assim, determine

a) a razão entre *R* e *r*.

b) a área do triângulo *DEF* em função de *r*.

Resolução



a) Da semelhança entre os triângulos retângulos MOF e NPF, tem-se:

$$\frac{OM}{PN} = \frac{OF}{PF}$$

Assim: $\dfrac{R}{r} = \dfrac{R + 3r}{2r} \Leftrightarrow 2R = R + 3r \Leftrightarrow$

$R = 3r \Leftrightarrow \dfrac{R}{r} = 3$

b) Sendo ℓ *a medida do lado do triângulo eqüilátero DEF e S a sua área, tem-se:*

1) $R = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Assim: $3r = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \ell = 6\sqrt{3}\, r$

2) $S = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Assim: $S = \dfrac{(6\sqrt{3}\, r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow S = 27\sqrt{3}\, r^2$

***Respostas**: a) 3*

b) $27\sqrt{3}\, r^2$

5

A medida *x*, em radianos, de um ângulo satisfaz $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e verifica a equação

sen *x* + sen 2*x* + sen 3*x* = 0. Assim,

a) determine *x*.

b) calcule cos *x* + cos 2*x* + cos 3*x*.

Resolução

Se $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ *e satisfaz a equação*

sen x + sen (2x) + sen (3x) = 0, temos:

a) $\text{sen } x + \text{sen } (2x) + \text{sen } (3x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{sen } (2x) + 2 \,.\, \text{sen}\left(\frac{3x + x}{2}\right) . \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } (2x) + 2 \,.\, \text{sen } (2x) \,.\, \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } (2x) \,.\, [1 + 2 \,.\, \cos x] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } (2x) = 0 \text{ (impossível) ou } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

b) $\cos x + \cos (2x) + \cos (3x) =$

$$= \cos (2x) + 2 \,.\, \cos\left(\frac{3x + x}{2}\right) . \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) =$$

$= \cos(2x) + 2 \cdot \cos(2x) \cdot \cos x =$

$= \cos(2x) \cdot [1 + 2 \cdot \cos x]$

Para $x = \dfrac{2\pi}{3}$, resulta:

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot \left[1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot [1 - 1] = 0$$

***Respostas**: a) $x = \dfrac{2\pi}{3}$*

b) $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$

6

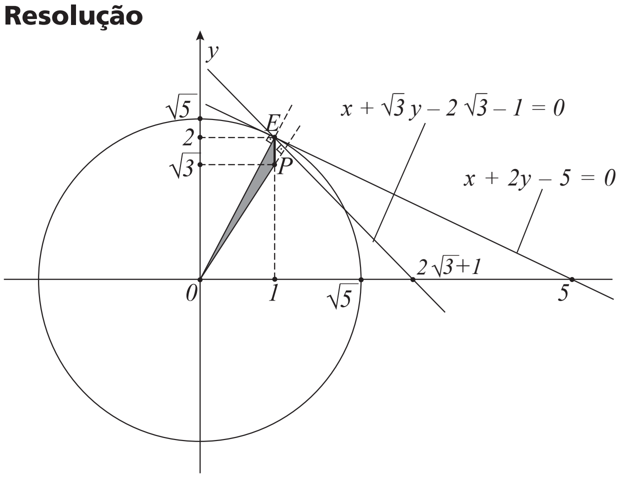
São dados, no plano cartesiano de origem O, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$, o ponto $P = (1, \sqrt{3})$ e a reta s que passa por P e é paralela ao eixo y. Seja E o ponto de ordenada positiva em que a reta s intercepta a circunferência.

Assim sendo, determine

a) a reta tangente à circunferência no ponto E.

b) o ponto de encontro das alturas do triângulo OPE.

Resolução



a) A equação da reta tangente à circunferência no ponto E é $x + 2y - 5 = 0$

1) Se E é um ponto da circunferência, então as coordenadas de E são $x_E = 1$ e $y_E = 2$

2) O coeficiente angular da reta OE é

$m_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1}$ *. O coeficiente angular da reta tangente à circunferência em E é*

$m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{2}$

3) A equação da reta tangente à circunferência em E é

$y - y_E = m_2(x - x_E)$, *ou seja,*

$y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$

b) O ponto de encontro das alturas do triângulo OPE é $(2\sqrt{3} + 1; 0)$

4) O coeficiente angular da reta OP é

$m_3 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$ *. O coeficiente angular da reta que contém a altura do triângulo OPE e que passa por E é*

$m_4 = -\dfrac{1}{m_3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5) A equação da reta que contém a altura do triângulo OPE e que passa por E é

$y - y_E = m_4(x - x_E)$, *ou seja,*

$y - 2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - 1) \Leftrightarrow x + \sqrt{3}\,y - 2\sqrt{3} - 1 = 0$

6) O ortocentro do triângulo OPE é o ponto de intersecção da reta de equação $y = 0$ (altura do triângulo OPE que passa por O) e da reta de equação $x + \sqrt{3}\,y - 2\sqrt{3} - 1 = 0$ (altura do triângulo OPE que passa por E):

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + \sqrt{3}\,y - 2\sqrt{3} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

***Respostas**: a) $x + 2y - 5 = 0$*

b) $(2\sqrt{3} + 1; 0)$

7

Em um jogo entre Pedro e José, cada um deles lança, em cada rodada, um mesmo dado honesto uma única vez. O dado é cúbico, e cada uma de suas 6 faces estampa um único algarismo de maneira que todos os algarismos de 1 a 6 estejam representados nas faces do dado.

Um participante vence, em uma certa rodada, se a diferença entre seus pontos e os pontos de seu adversário for, no mínimo, de duas unidades. Se nenhum dos participantes vencer, passa-se a uma nova rodada.

Dessa forma, determine a probabilidade de

a) Pedro vencer na primeira rodada.

b) nenhum dos dois participantes vencer na primeira rodada.

c) um dos participantes vencer até a quarta rodada.

Resolução

	PEDRO					
	1	2	3	4	5	6
JOSÉ 1	1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
2	2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
3	3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
4	4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
5	5;1	5;2	5;3	5;4	5;5	5;6
6	6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6

A → Pedro ganha

B → José ganha

a) *Dos 36 resultados possíveis, Pedro vencerá se for obtido um dos resultados assinalados na tabela como conjunto A. Dessa forma, a probabilidade de Pedro vencer na primeira rodada é* $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

b) *A possibilidade de José vencer na primeira rodada também é* $\frac{5}{18}$*, e a de nenhum dos dois vencer na primeira jogada é* $1 - \frac{5}{18} - \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$.

c) *A possibilidade de nenhum dos dois vencer nas quatro primeiras rodadas é*

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{256}{6561}$$

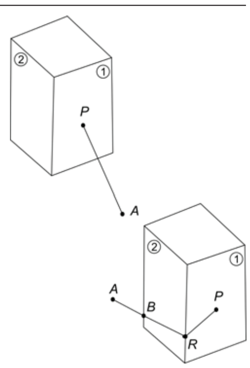
A probalidade de um dos participantes vencer até a quarta rodada é $1 - \frac{256}{6561} = \frac{6305}{6561}$.

Respostas: *a)* $\frac{5}{18}$ *b)* $\frac{4}{9}$ *c)* $\frac{6305}{6561}$

8

Um poste vertical tem base quadrada de lado 2.

Uma corda de comprimento 5 está esticada e presa a um ponto P do poste, situado à altura 3 do solo e distando 1 da aresta lateral. A extremidade livre *A* da corda está no solo, conforme indicado na figura.



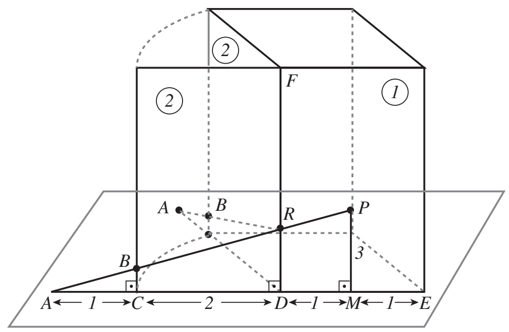
A corda é então enrolada ao longo das faces 1 e 2, mantendo-se esticada e com a extremidade *A* no solo, até que a corda toque duas arestas da face 2 em pontos *R* e *B*, conforme a figura.

Nessas condições,

a) calcule *PR*.

b) calcule *AB*.

Resolução



Vamos rebater a face 2 *em torno da aresta* $\overline{DF}$ *até o plano da face* 1.

1) *Como AP = 5 e MP = 3, tem-se AM = 4*

2) *AC + CD + DM = AM*

Assim: AC + 2 + 1 = 4 $\Leftrightarrow$ *AC = 1*

3) *Da semelhança entre os triângulos retângulos MPA e DRA, tem-se:*

$$\frac{AP}{AR} = \frac{AM}{AD}$$

Assim: $\frac{5}{5 - PR} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow PR = \frac{5}{4}$

4) *Da semelhança entre os triângulos retângulos MPA e CBA, tem-se:*

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC}$$

Assim: $\frac{5}{AB} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow AB = \frac{5}{4}$

Respostas*: a)* $PR = \frac{5}{4}$ *b)* $AB = \frac{5}{4}$

9

A figura na página de respostas representa o número $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Nessas condições,

a) determine as partes real e imaginária de $\frac{1}{\omega}$ e de ω^3.

b) represente $\frac{1}{\omega}$ e ω^3 na figura ao lado.

c) determine as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

Resolução

$$Se\ \omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ então:$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$cos\ 120^o + i\ .\ sen\ 120^o$

Assim:

a) $\frac{1}{\omega} = \frac{cos\ 0^o + i\ .\ sen\ 0^o}{cos\ 120^o + i\ .\ sen\ 120^o} =$

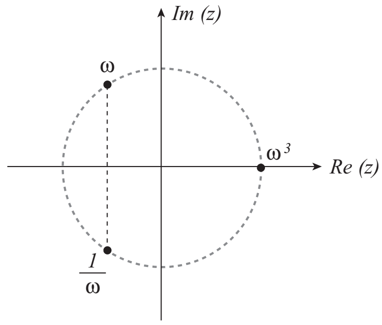
$cos\ (-120^o) + i\ .\ sen\ (-120^o) =$

$= cos\ 240^o + i\ .\ sen\ 240^o = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega^3 = cos\ (3\ .\ 120^o) + i\ .\ sen\ (3\ .\ 120^o) =$

$= cos\ 360^o + i\ .\ sen\ 360^o = 1$

b)



c) $z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1 = cos\ 0^o + i\ .\ sen\ 0^o$

As raízes da equação são as raízes cúbicas de 1 e , portanto:

$z_1 = 1\ .\ (cos\ 0^o + i\ .\ sen\ 0^o) = 1 = \omega^3$

$z_2 = 1\ .\ (cos\ 120^o + i\ .\ sen\ 120^o) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega$

$z_3 = 1\ .\ (cos\ 240^o + i\ .\ sen\ 240^o) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\omega}$

Respostas: a) $Re\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{2}$; $Im\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Re\ (\omega^3) = 1;\ Im\ (\omega^3) = 0$

b) ver figura

c) $\left\{1; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$

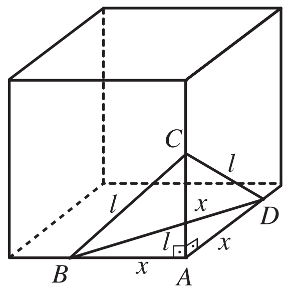
10

Pedrinho, brincando com seu cubo mágico, colocou-o sobre um copo, de maneira que

- apenas um vértice do cubo ficasse no interior do copo, conforme ilustra a foto;
- os pontos comuns ao cubo e ao copo determinassem um triângulo eqüilátero.

Sabendo-se que o bordo do copo é uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ cm, determine o volume da parte do cubo que ficou no interior do copo.

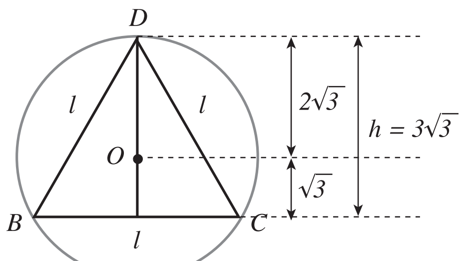
Resolução



*A parte do cubo mágico que fica no interior do copo constitui a pirâmide ABCD, cujas faces ABC, ABD e ACD são triângulos retângulos isósceles de catetos medindo **x** e a face BCD é um triângulo eqüilátero de lado **l**. Esse triângulo eqüilátero está inscrito no círculo de raio $2\sqrt{3}$ cm, da boca do copo.*

Assim, em centímetros, temos:

1)



$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow l = 6$$

2) *Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, temos* $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 6^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

3) *O volume V, da pirâmide ABCD, em centímetros cúbicos, é:*

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot AD}{2} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\ .\ x}{2} \cdot x = \frac{x^3}{6} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{2})^3}{6} = 9\sqrt{2}$$

Resposta: $9\sqrt{2}\ cm^3$