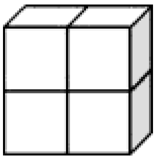
Respostas - Canguru 2010 – Nível J

1. (alternativa D)
20102010 = 2010 0000 + 2010=2010(10000 + 1) = 2010 × 10001
Portanto, ao dividir 20102010 por 2010 obtemos o quociente 10001

2. (alternativa D)
Rodrigo fez 90% – 85% = 5% mais do que Lucas. Como 5% da prova representam 1 ponto, o valor total da prova é $\frac{1}{5\%} = \frac{1}{0,05} = 20$ pontos, que é o máximo que alguém pode conseguir no teste.

3. (alternativa C)
Com exceção da última coluna, os números da linha de baixo excedem os números da linha de cima em 10. Como são 10 colunas, a soma dos números de baixo excede a soma dos números de cima em 100. Portanto, o número representado por *, somado de 100, deve igualar 2010. Logo * é igual a 2010 – 100 = 1910.

4. (alternativa D)



Cada face dos cubos menores tem área igual a $\frac{24}{6} = 4\,\text{cm}^2$. Duas faces em contato diminuem a área total em 8 cm^2. O bloco formado pelos quatro cubos tem 4 pares de faces em contato. Portanto, a área total do sólido é igual a $4\times 24 - 4\times 8 = 96 - 32 = 64\,\text{cm}^2$.

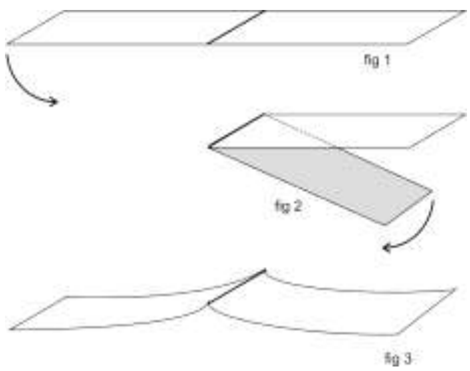
5. (alternativa D)
Se *n* é o número de anos que Rosa já completou, então

$$1+2+3+\ldots+n = 120 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow n^2 + n - 240 = 0 \Leftrightarrow$$

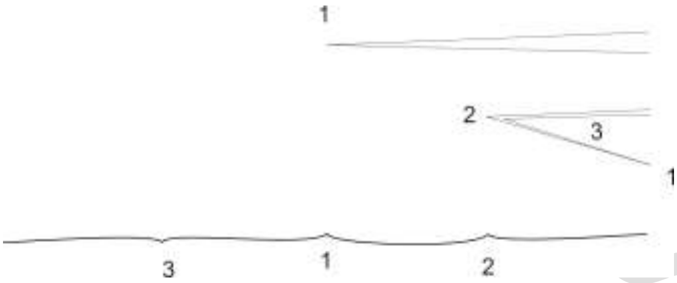
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times(-240)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{961}}{2} = \frac{-1\pm 31}{2} \Leftrightarrow n = -16 \text{ ou } n = 15$$

Portanto, Rosa já completou 15 anos.
Observação: o problema pode ser resolvido obtendo-se sucessivamente as somas
1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, etc.

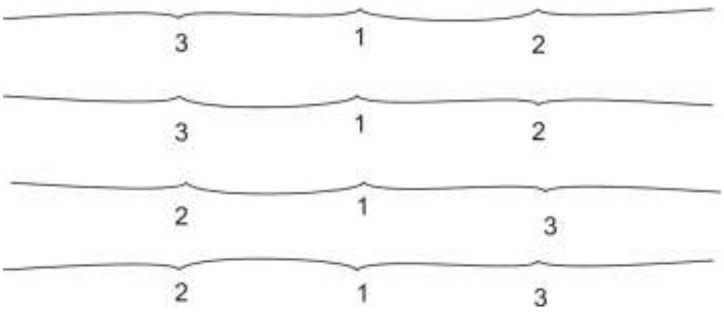
6. (alternativa D)
Tomando uma tira de papel branca do lado de cima e cinza do lado de baixo (fig. 1), fazemos uma dobra ao meio, de modo a esconder a parte cinza (fig. 2). Ao desdobrar a tira, vemos que se forma uma crista voltada para cima, do lado da parte branca (fig. 3)



No desenho ao lado, olhando para o perfil da folha, vemos que na primeira dobra se forma a crista 1 e na segunda dobra se formam as cristas 2 e 3. Ao desdobrar a tira, serão vistas 3 cristas, duas para cima e uma para baixo (a crista 3 refere-se à dobra que junta as faces brancas da tira; essa dobra se volta para a parte cinza)

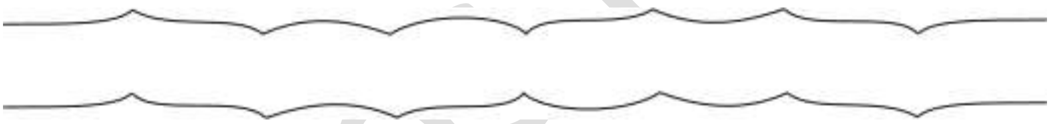


Note que três cristas separam quatro partes da tira. Note, abaixo, que podemos girar a tira e obter outras configurações.



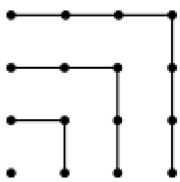
Ao fazer a 3ª dobra, teremos duas opções diferentes. No problema apresentado, as alternativas A e E representam uma dessas opções:

e as alternativa B e C representam a outra opção:



O perfil apresentado na alternativa D não pode ser obtido, pois não se enquadra em nenhuma das duas opções acima, mesmo após possíveis rotações da tira.

7. (alternativa B)
Pelo desenho, observamos que o resultado da soma é igual ao número de parcelas multiplicado por ele mesmo, a saber:



$1=1\times1$

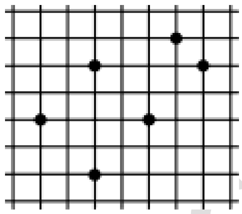
$1+3=4=2\times2$

$1+3+5=9=3\times3$

$1+3+5+9=16=4\times4$

A soma $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$ tem 11 parcelas, logo vale 11×11, conforme podemos comprovar, fazendo os cálculos.

8. (alternativa E)

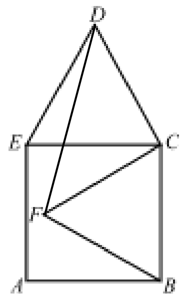


Considerando que o quadrado é um trapézio e também um losango, vemos que há quatro pontos, dentre os apresentados, que podem ser os vértices de um quadrado, por conseqüência podem ser vértices de um losango e de um trapézio; há três pontos que podem ser os vértices de um triângulo isósceles. Portanto, todos os tipos de figuras listados podem ser representados na grade, com vértices nos pontos dados.

9. (alternativa D)

Como o número de pontes é ímpar e Brigite deve voltar ao ponto de partida, passando por todas as pontes, o número total de vezes *n* em que ela deve passar pelas pontes é um número par maior do que 4. Logo, *n* pode ser igual a 6, conforme ilustrado na figura.

10.(alternativa A)

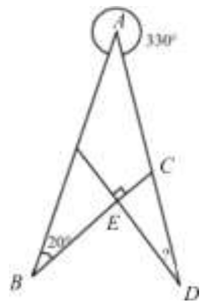


Como os triângulos *BCF* e *CDE* são triângulos eqüiláteros, temos $m\left(D\hat{C}E\right)=m\left(B\hat{C}F\right)=60^{O}$. O quadrilátero ABCE é quadrado, logo $m\left(E\hat{C}F\right)=90^{O}-60^{O}=30^{O}$. Portanto, o triângulo CDF é retângulo e isósceles, com catetos com medida 1. Logo, pelo teorema de Pitágoras, o segmento *FD* mede $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

11. (alternativa C)

$2010=2\times3\times5\times67$. É razoável supor que o pai de meu professor tem 67 anos (do contrário, teria pelo menos $2\times67=134$ anos. Portanto, meu professor tem $2\times3\times5=30$ anos. Como estamos em 2010, meu professor nasceu em 2010 – 30 = 1980.

12. (alternativa D)



Temos $m\left(C\hat{A}B\right)=360^{O}-330^{O}=30^{O}$. Assim, o ângulo externo $D\hat{C}E$ do triângulo ABC mede $30^{O}+20^{O}=50^{O}$. No triângulo CDE temos $m\left(D\hat{C}E\right)=50^{O}$ e $m\left(D\hat{C}E\right)=90^{O}$, logo $m\left(C\hat{D}E\right)=180^{O}-50^{O}-90^{O}=40^{O}$.

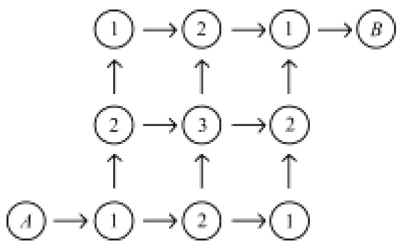
13. (alternativa D)

Tais números têm mais de um algarismo. Como o produto desses algarismos é 2, concluímos que um desses algarismos é 2 e os demais algarismos são todos iguais a 1. Como a soma desses algarismos é 2010, concluímos que o número é formado por um algarismo 2 e 2010 – 2 = 2008 algarismos iguais a 1. Há 2009 números nessas condições (por exemplo, 2111...1, 121...1, 1121...1, etc.)

14. (alternativa B)

Há 6 caminhos possíveis. As somas possíveis são

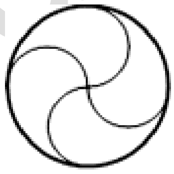
1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7
1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9
1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9
1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9
1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9
1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7



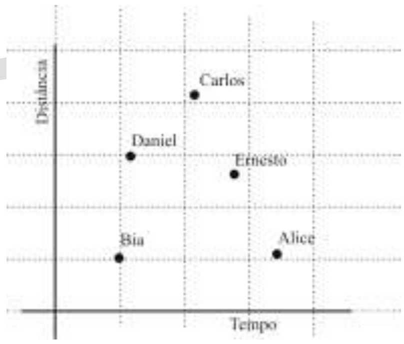
Portanto, o número de somas diferentes é 2.

15. (alternativa A)
Cada semana tem 7 dias. Para que haja três quintas-feiras em dias pares, a primeira delas deve cair num dia par (já que os dias das próximas quintas-feiras serão, respectivamente, ímpar, par, ímpar, par). O número de dias da primeira quinta-feira até a última é 28 + 1 = 29. Portanto, o dia da primeira quinta-feira só pode ser o dia 2 (se for 4, temos 29 + 4 > 31 dias). Assim, o primeiro dia do mês é uma quarta-feira, logo 22 também é uma quarta-feira. Assim, o 21º primeiro dia do mês é uma terça-feira.

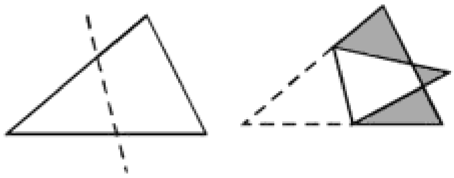
16. (alternativa C)
Cada parte é limitada por um arco de raio 4 cm e ângulo de 90º e duas semicircunferências de raio 2 cm. Logo, o perímetro de cada parte é $\frac{2\pi\cdot 4}{4}+2\cdot\pi\cdot 2=6\pi\,\text{cm}^2$.



17. (alternativa D)
Escolhendo o tempo (t) e a distância percorrida por Bia (d) como referência, devemos determinar o ponto para o qual a fração $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}}$ é a maior.
Os pontos para os quais a distância é grande e o tempo é pequeno indicam os mais velozes. No caso de Carlos, a fração é aproximadamente $\frac{4,2d}{3,2t}\cong 1,3\frac{d}{t}$ e no caso de Daniel temos $\frac{3d}{1,2t}\cong 2,5\frac{d}{t}$.
Concluímos então que o estudante mais veloz foi Daniel.



18. (alternativa B)
A área H do heptágono é igual à área Q do quadrilátero branco mais a soma das áreas sombreadas, ou seja, H = Q +1 (figura à direita). A área T do triângulo original (figura da esquerda) é igual à área H do heptágono somada à área do Q quadrilátero branco (o quadrilátero branco se superpõe ao heptágono), isto é, T = H + Q. Como T = 1,5 H, temos



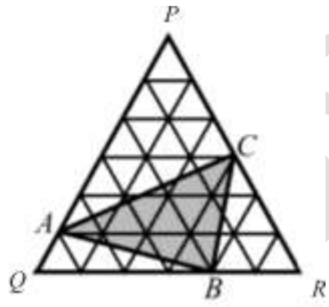
$$\left|\begin{array}{l} H=Q+1 \\ T=H+Q \\ T=1,5H \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} H-1=Q \\ T=H+Q \\ T=1,5H \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} T=2H-1 \\ H=\frac{T}{1,5} \end{array}\right. \Rightarrow T=\frac{2T}{1,5}-1 \Leftrightarrow 1,5T=2T-1,5 \Leftrightarrow T=3$$

19. (alternativa C)
Para cada carrinho acrescentado numa fileira, o comprimento da mesma aumenta *x*. Sendo *c* o comprimento de um carrinho, vemos que toda fileira com *k* carrinhos tem comprimento $c+(k-1)x$. Portanto,

$$\left|\begin{array}{l} c+9x=2,9 \\ c+19x=4,9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 10x=2 \\ c+19x=4,9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=0,2 \\ c=4,9-19x \end{array}\right. \Rightarrow c=4,9-3,8=1,1\text{metros}$$

20. (alternativa C)

A área do triângulo ABC é a diferença entre a área do triângulo equilátero PQR e a soma das áreas dos triângulos ABQ, BCR e ACP. Se x e são as medidas do lado e da altura dos triângulos eqüiláteros de área 1cm^2, temos área $\Delta ABQ = \frac{4x \cdot h}{2}$, área $\Delta BCR = \frac{2x \cdot 3h}{2}$ e área $\Delta ACP = \frac{5x \cdot 3h}{2}$

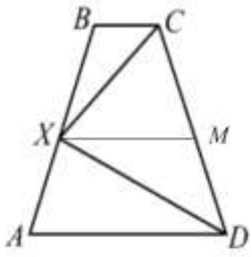


Como $\frac{xh}{2} = 1 \Leftrightarrow xh = 2$, temos:

$$\text{área } \Delta ABC = 36 - \left(2xh + 3xh + \frac{15xh}{2}\right) = 36 - \frac{25}{2} \cdot xh = 36 - \frac{25}{2} \cdot 2 = 36 - 25 = 11\text{cm}^2.$$

21. (alternativa B)

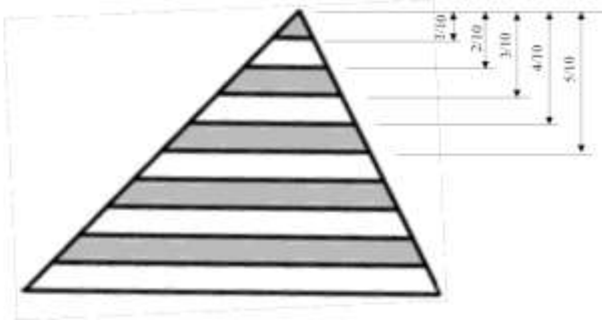
A base média $\overline{XM}$ do trapézio mede $\frac{BC + AD}{2}$. Por outro lado, ela é a mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo CXD, logo $XM = CM = MD$. Como $\overline{XM}$ é paralela às bases e o trapézio é isósceles, temos $CM = BX = 1$. Portanto, $\frac{BC + AD}{2} = XM = 1 \Leftrightarrow BC + AD = 2$. Assim, o perímetro do trapézio é $AB + BC + AD + CD = 2 + 2 + 2 = 6$.



22. (alternativa C)

Cada um dos segmentos é a base de um triângulo semelhante ao triângulo maior. Como são paralelos e dividem cada um dos dois lados do triângulo em 10 partes iguais, concluímos que as razões de semelhança desses triângulos, em ordem crescente, são $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots$, conforme indicado na figura.

Seja S a área do triângulo original, antes da divisão. A área do menor triângulo, de cor cinza, é



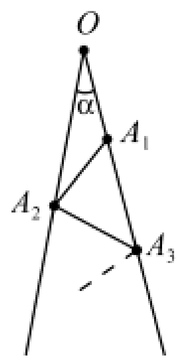
$\left(\frac{1}{10}\right)^2 S = \frac{1}{100} S$. O triângulo a seguir contendo uma faixa cinza, tem área $\frac{9}{100} S$; a área da faixa cinza dentro dele é a diferença entre sua área e a área do triângulo anterior na ordem crescente, ou seja $\frac{9}{100} S - \frac{4}{100} S = \frac{5}{100} S$. Raciocinando de forma análoga, concluímos que a área da próxima faixa cinza é $\frac{25}{100} S - \frac{16}{100} S = \frac{9}{100} S$ e assim sucessivamente. Portanto, a área da região cinza é igual a

$$\frac{1}{100} S + \frac{5}{100} S + \frac{9}{100} S + \frac{13}{100} S + \frac{17}{100} S = \frac{45}{100} S = 45\% \text{ de } S$$

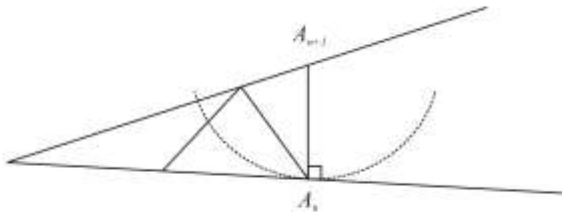
23. (alternativa E)

Sendo n um inteiro positivo, o número n^n é um quadrado perfeito se *n* for um número par, já que se *n* = *2k*, então $n^n = n^{2k} =$. Os números pares entre 1 e 100 são 2, 4, ..., 100, num total de 50 números. Mas há alguns casos em que *n* é ímpar, mas é quadrado perfeito: neste caso, n^n é um quadrado perfeito: $1^1 = 1^2, 9^9 = \left(3^2\right)^9 = \left(3^9\right)^2, 25^{25} = \left(5^{25}\right)^2, 49 = \left(7^{49}\right)^2$ e $81^{81} = \left(9^{81}\right)^2$. Portanto, há 55 quadrados perfeitos nas condições dadas.

24. (alternativa B)
A soma do número de tentáculos é um número determinado, entre 24 e 32. Supondo que todos os polvos fossem mentirosos, todos eles teriam 7 tentáculos e o total seria 28, que é o número que o polvo azul diz existir. Mas nesse caso ele não seria mentiroso, uma contradição. Portanto, algum diz a verdade, e só pode ser um único, já que a soma dos números de tentáculos é um número determinado. Assim, há três polvos mentirosos, e cada um deles obrigatoriamente tem 7 tentáculos. Como o polvo que está dizendo a verdade tem 6 ou 8 tentáculos, então a soma dos tentáculos só pode ser 27 ou 29. Logo, o polvo verde diz a verdade, porque ele afirma que juntos todos têm 27 tentáculos. Os outros três afirmam que a soma dos tentáculos são outros números, logo são mentirosos.

25. (alternativa C)


Como o triângulo OA_1A_2 é isósceles, temos $m\left(O\hat{A}_2A_1\right) = \alpha$. Portanto, o ângulo externo $A_3\hat{A}_1A_2$ mede 2α e, de forma semelhante, podemos concluir que $m\left(A_2\hat{A}_3A_1\right) = 2\alpha$. Assim, no triângulo OA_2A_3, temos $m\left(A_4\hat{A}_2A_3\right) = 3\alpha$. Repetindo esse raciocínio chegamos à conclusão de que $m\left(A_{n+2}\hat{A}_nA_{n+1}\right) = n \cdot \alpha$, que deve ser menor do que um ângulo reto. Se esse ângulo for reto, não será mais possível traçar segmentos iguais a partir do ponto A_{n+1}, conforme indicado na figura. Se o ângulo for obtuso, os segmentos poderão ser traçados regressivamente, opção aqui descartada. Assim, $n \cdot 7^{O} < 90^{O} \Leftrightarrow n < \dfrac{90^{O}}{7^{O}} = 12,85...$. Como *n* é inteiro, temos *n* = 12. Portanto, o maior número de segmentos que podem ser traçados dessa maneira, é 12.

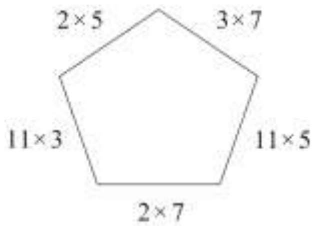


26. (alternativa A)
Aplicando a definição da sequência, obtemos
$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 0, a_5 = 5, a_6 = -2, a_7 = 7, a_8 = -4,$ etc. Aparentemente, $a_{2k+1} = 2k + 1$ e $a_{2k} = 4 - 2k$. Substituindo esses valores na expressão geral da sequência, temos duas possibilidades:

- $n = 2k (k \in Z, k > 1)$
  $a_{n-3} + a_{n-2} = a_{n-1} + a_n \Leftrightarrow a_{2k-3} + a_{2k-2} = a_{2k-1} + a_{2k} \Leftrightarrow 2k - 3 + 4 - (2k - 2) = 2k - 1 + 4 - 2k$
  $\Leftrightarrow 2k - 2k + 3 = 2k - 2k + 3$
- $n = 2k + 1 (k \in Z, k \geq 1)$
  $a_{n-3} + a_{n-2} = a_{n-1} + a_n \Leftrightarrow a_{2k-2} + a_{2k-1} = a_{2k} + a_{2k+1} \Leftrightarrow 4 - (2k - 2) + 2k - 1 = 4 - 2k + 2 + 2k - 1$
  $\Leftrightarrow -2k + 2k + 5 = -2k + 2k + 5$

Logo, a hipótese é verdadeira e se conclui que o 2010º termo da sequência é
$a_{2010} = 4 - 2010 = -2006$

27. (alternativa D)



Todo número primo tem só dois divisores positivos, que são 1 e o próprio número. Dois números são coprimos se admitem somente o número 1 como divisor comum. Logo, não deve ser escrito nenhum primo *p* nos lados do pentágono, pois do lado oposto deverão aparecer números não coprimos com *p*, mas coprimos entre si e isto é impossível (tente fazer isso). Portanto, devem ser escritos apenas números compostos nos lados do pentágono. Mas não é qualquer composto que serve. Se o composto admitir somente um fator primo, os dois números adjacentes, nas faces opostas, forçosamente admitirão esse fator primo e não serão coprimos. Logo, o número a ser escrito deve admitir pelo menos dois fatores primos distintos. Entre as alternativas apresentadas, apenas o número 10 obedece a essa condição. A figura mostra uma configuração possível utilizando o número 10.

28. (alternativa E)

Um número inteiro a é a média de dois outros números inteiros b e c se, e somente se, $a = \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow b+c = 2a$. Se a, b, c são algarismos de 0 a 9 e b é média aritmética de a e c, então $b+c$ só pode assumir os valores pares de 2 a 18 (os três algarismos não podem ser simultaneamente nulos). Assim,

$$a+b=2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a=2 \text{ e } b=0 \\ a=1 \text{ e } b=1 \end{array} \right. \text{ (2 números)}$$

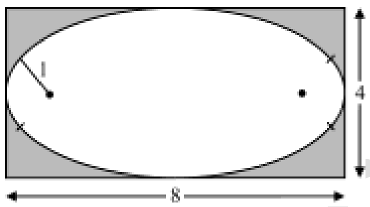
$$a+b=4 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a=4 \text{ e } b=0 \\ a=3 \text{ e } b=1 \\ a=2 \text{ e } b=2 \\ a=1 \text{ e } b=3 \end{array} \right. \text{(4 números)}$$

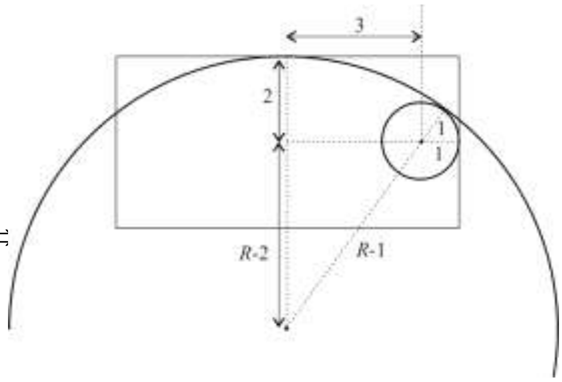
$$a+b=6 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a=6 \text{ e } b=0 \\ a=5 \text{ e } b=1 \\ a=4 \text{ e } b=2 \\ a=3 \text{ e } b=3 \\ a=2 \text{ e } b=4 \\ a=1 \text{ e } b=5 \end{array} \right. \text{(6 números)}$$

Para somas 8, 10, 12, 14, 16 e 18, temos, respectivamente, 8, 9, 7,5,3 e 1 números.
Portanto, a quantidade de números que satisfazem as condições apresentadas é 45.

29. (alternativa A)

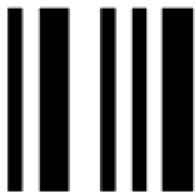
Nas condições dadas, os arcos maiores, de raio R, tangenciam os lados de medida 8, enquanto que os arcos menores, de raio 1, tangenciam os lados de medida 4. A figura a seguir mostra parcialmente como as circunferências contendo dois dos arcos mencionados se relacionam. A partir daí, no triângulo retângulo evidenciado pelas linhas tracejadas, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e escrever $(R-1)^2 = 3^2 + (R-2)^2 \Leftarrow$ $\Leftrightarrow R = 6$





30. (alternativa D)

O número de faixas é sempre ímpar (não pode haver um código do tipo PBBP, pois duas faixas brancas contíguas tornam-se uma só). O desenho é um exemplo de uma sequência de 9 faixas PBPBPBPBP. Uma vez conhecido o número de faixas de uma sequência desse tipo, precisamos saber qual a largura de cada uma das faixas, lembrando que a soma dessas larguras é 12. Para isto, basta permutar as faixas,



Seja x o número de faixas de largura 1 e y o número de faixas de largura 2. Temos $x + 2y = 12$ e as únicas possibilidades são

$x = 2$ e $y = 5$ $(x + y = 7)$

$x = 6$ e $y = 3$ $(x + y = 9)$

$x = 10$ e $y = 1$ $(x + y = 11)$

Para o primeiro caso, temos 2 faixas de largura 1 e 5 faixas de largura 2. Como a posição das cores é fixa, basta escolher os lugares das faixas de largura 1, num total de $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ códigos.

No segundo caso, o número de códigos é $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = 84$ e, para o terceiro caso, $\binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11$.

Assim, o número total de códigos, lidos da esquerda para a direita é 21 + 84 + 11 = 116.