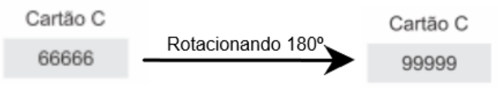
Resolução – Treinamento ENEM
S13.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 01 ===

Primeiro temos que entender o que quer dizer no enunciado quando ele fala que os cartões C, D e E podem ser lidos de duas maneiras. E isso quer dizer que o cartão C na primeira imagem do texto ao ser rotacionado 180º da origem ao cartão C na segunda imagem do texto, como vemos em destaque na imagem abaixo.



Com isso, percebam que essa outra maneira de ser escrita os números acontecem apenas quando os algarismos utilizados são 6 e 9, já que os demais algarismos ao rotacionarmos não formam números. Assim, para que o número possa ser escrito de duas maneiras ele deve ter apenas os algarismos 6 e 9 em sua composição.

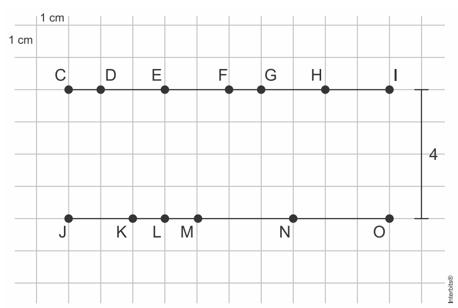
Calculando quantos são os números de 5 algarismos, sendo ele formado apenas pelos algarismos 6 e 9, obtemos:

$$\textit{total de cartões com dupla leitura} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$
$$\textit{total de cartões com dupla leitura} = 2^5$$
$$\textit{total de cartões com dupla leitura} = 32 \textit{ possibilidades}$$

Portanto, o total de cartões que admitem dupla leitura são 32 cartões.

Resposta: Letra A.

Item 02 ===



O quadrilátero que deverá ser desenhado é um trapézio. Sejam, respectivamente, B e b as medidas da base maior e menor do trapézio. Note que $B \neq b$ pois há somente um par de lados paralelos.

Assim, do enunciado e da figura, temos que $\frac{(B+b)\cdot 4}{2} = 12$ e que $B + b = 6$.

Note que B e b são inteiros, o que nos dá B = 5 e b = 1 ou B = 4 e b = 2. Nos dois casos (B = 5 e b = 1 ou B = 4 e b = 2) podemos obter B e b com os pontos da parte superior ou com os pontos da parte inferior.

Dessa forma, temos:

1) B = 5 obtido com os pontos da parte superior: $\overline{CF}$ ou $\overline{DG}$ ou $\overline{EH}$ ou $\overline{FI}$ (4 possibilidades).

   b = 1 obtido com os pontos da parte inferior: ou   (2 possibilidades).

   Então, o total de trapézios com B = 5 obtido com os pontos da parte superior e b = 1 obtido com os pontos da parte inferior, pelo princípio fundamental da contagem é $4 \cdot 2 = 8$.

2) B = 4 obtido com os pontos da parte superior: $\overline{DF}$ ou $\overline{GI}$ (2 possibilidades).

   b = 2 obtido com os pontos da parte inferior: $\overline{JK}$ ou $\overline{KM}$ (2 possibilidades).

   Então, o total de trapézios com B = 4 obtido com os pontos da parte superior e b = 2 obtido com os pontos da parte inferior, pelo princípio fundamental da contagem é $2 \cdot 2 = 4$.

3) B = 5 obtido com os pontos da parte inferior: $\overline{KN}$ (1 possibilidade).

   b = 1 obtido com os pontos da parte superior: $\overline{CD}$ ou $\overline{FG}$ (2 possibilidades).

   Então, o total de trapézios com B = 5 obtido com os pontos da parte inferior e b = 1 obtido com os pontos da parte superior, pelo princípio fundamental da contagem é $1 \cdot 2 = 2$.

4) B = 4 obtido com os pontos da parte inferior: $\overline{JM}$ ou $\overline{LN}$ (2 possibilidades).

   B = 2 obtido com os pontos da parte superior: $\overline{DE}$ ou $\overline{EF}$ ou $\overline{GH}$ ou $\overline{HI}$ (4 possibilidades).

   Então, o total de trapézios com B = 4 obtido com os pontos da parte inferior e b = 2 obtido com os pontos da parte superior, pelo princípio fundamental da contagem é $2 \cdot 4 = 8$.

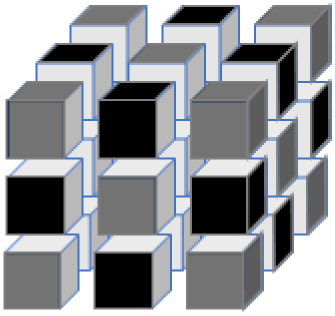
Dessa forma, o total de trapézios que podem ser formados nas condições dadas é $8 + 4 + 2 + 8 = 22$.

Resposta: Letra B.

Resolução – Treinamento ENEM
S13.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 03 ==

Desenhando esquematicamente os 27 cubos de madeira arranjados em um cubo maior e destacando os cubos que tem apenas duas de suas faces pintadas:



Com isso, percebemos que temos um cubo com apenas duas faces pintadas por aresta do cubo maior, e como este possui 12 arestas, teremos 12 cubos do tipo pedido no enunciado.

Portanto, como são 12 os cubos com duas faces pintadas de preto, podemos concluir que o resultado é $\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.

Resposta: Letra A.

Item 04 ==

Encontrar as probabilidades de o carro ir até F pode ser feito somando as probabilidades de todos os caminhos que podem levar a F.

Partindo de A, todos os caminhos de A até F são:

A→B→C→F

A→B→D→F

A→C→F

Agora, para encontrar as probabilidades de cada uma dessas viagens, basta multiplicar as probabilidades de cada etapa do trajeto.

Para o primeiro trajeto (A→B→C→F), temos:

$0,8 \times 0,1 \times 0,6 = 0,048$

Para o segundo trajeto (A→B→D→F), temos:

$0,8 \times 0,9 \times 0,3 = 0,216$

E para o terceiro trajeto (A→C→F), temos:

$0,2 \times 0,6 = 0,12$

Com isso, nossa resposta será a soma de todas essas possibilidades:

$0,048 + 0,216 + 0,12 = 0,384$

E nossa resposta será a **Letra E.**

Item 05 ==

Uma maneira bem eficiente de organizar as informações desse enunciado é montar uma tabela que separe as camisas em duas classificações: referente ao tamanho e referente à estampa. Com isso teremos:

	P	M	**Total**
Lisas			59
Estampadas	67		
Total	100		150

E a partir disso, podemos completar as lacunas:

	P	M	**Total**
Lisas	33	26	59
Estampadas	67	24	91
Total	100	50	150

Com isso, se nós sabemos que uma camisa é do tamanho M, temos que há 26 camisas lisas e 24 estampadas, de um total de 50, logo a probabilidade que essa camisa seja estampada é:

$$\frac{24}{50} = \frac{48}{100} = 48\%$$

E ficamos com a **Letra C.**

Item 06 ==

Para a primeira flor, podemos escolher livremente 3 cores para serem acendidas, o que é uma combinação de 5 tomados 3 a 3, cujo resultado será:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

E esse é o número de possibilidades para a primeira flor. Entretanto, a segunda flor não pode ter o mesmo padrão que a anterior, logo só há 9 possibilidades para esta. A terceira flor também só tem 9 opções, já que não pode ser igual à segunda; e todas as flores seguintes também terão sempre 9 opções.

Assim, a quantidade total de padrões combinados entre as cinco flores será:

$$10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4 \cdot 10$$

E ficamos com a **Letra B.**

Resolução – Treinamento ENEM
S13.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 07 ==

Temos 4 casos independentes:

1º caso) Não ocorre nenhuma substituição

Nesse caso a formação que começa o jogo é a mesma que inicia o segundo tempo, ou seja, 1 possibilidade.

2º caso) Ocorre uma substituição

Nesse caso primeiro calculamos o total de maneiras de 1 jogador sair, por meio de uma combinação de 5 itens tomados 1 a 1 e depois calculamos o total de maneiras de 1 jogador reserva ser escolhido para entrar, por meio de uma combinação de 4 itens tomados 1 a 1.

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{1!\cdot 3!}=5\cdot 4=20$$

3º caso) Ocorrem duas substituições

Nesse caso primeiro calculamos o total de maneiras de 2 jogadores saírem, por meio de uma combinação de 5 itens tomados 2 a 2 e depois calculamos o total de maneiras de 2 jogadores reservas serem escolhidos para entrar, por meio de uma combinação de 4 itens tomados 2 a 2.

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\times\frac{4!}{2!\cdot 2!}=10\cdot 6=60$$

4º caso) Ocorrem três substituições

Nesse caso primeiro calculamos o total de maneiras de 3 jogadores saírem, por meio de uma combinação de 5 itens tomados 3 a 3 e depois calculamos o total de maneiras de 3 jogadores reservas serem escolhidos para entrar, por meio de uma combinação de 4 itens tomados 3 a 3.

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\times\frac{4!}{3!\cdot 1!}=10\cdot 4=40$$

Somando todos os casos acima, obtemos o total de formações distintas que podem iniciar o segundo tempo:

1 + 20 + 60 + 40 = 121

Resposta: Letra B.

Item 08 ==

Primeiro vamos calcular qual a quantidade total de possibilidades para a soma das faces dos dados, obtendo:

$$\begin{aligned}&\textit{quantidade total de possibilidade}=\textit{faces dado}\,1\cdot\textit{faces dado}\,2\\&\textit{quantidade total de possibilidade}=20\cdot 20\\&\textit{quantidade total de possibilidade}=400\end{aligned}$$

Agora para que o jogador vença o jogo temos que os valores da soma dos dois dados tem que ser maior que 35, como fala o enunciado. Assim, as possíveis somas que são maiores que 35 são:

Soma = 36 $\rightarrow$ $\underset{\text{dado 1}}{16}+\underset{\text{dado 2}}{20}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{17}+\underset{\text{dado 2}}{19}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{18}+\underset{\text{dado 2}}{18}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{19}+\underset{\text{dado 2}}{17}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{20}+\underset{\text{dado 2}}{16}$

Soma = 37 $\rightarrow$ $\underset{\text{dado 1}}{17}+\underset{\text{dado 2}}{20}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{18}+\underset{\text{dado 2}}{19}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{19}+\underset{\text{dado 2}}{18}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{20}+\underset{\text{dado 2}}{17}$

Soma = 38 $\rightarrow$ $\underset{\text{dado 1}}{18}+\underset{\text{dado 2}}{20}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{19}+\underset{\text{dado 2}}{19}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{19}+\underset{\text{dado 2}}{18}$

Soma = 39 $\rightarrow$ $\underset{\text{dado 1}}{19}+\underset{\text{dado 2}}{20}$ ou $\underset{\text{dado 1}}{20}+\underset{\text{dado 2}}{19}$

Soma = 40 $\rightarrow$ $\underset{\text{dado 1}}{20}+\underset{\text{dado 2}}{20}$

Dessa forma como temos 15 valores em que a soma é maior que 35, como vemos acima e o total de possibilidades é 400, obtemos que o total de possibilidades para que esse jogador vença o jogo é:

$$\begin{aligned}&\Pr\textit{obabilidade de vencer}=\frac{\textit{qunatidade de somas}>35}{\textit{quantidade total de possibilidades}}\\&\Pr\textit{obabilidade de vencer}=\frac{15}{400}\\&\Pr\textit{obabilidade de vencer}=\frac{3\cdot 5}{80\cdot 5}\\&\Pr\textit{obabilidade de vencer}=\frac{3}{80}\end{aligned}$$

Resposta: Letra E.

Resolvendo de outra forma:

Uma outra forma de resolvermos seria montando uma tabela com o valor de cada face do dado e com respectivas somas de cada dado, como vemos abaixo.

valores da face do dado 2

valores da face do dado 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**	**37**
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**	**37**	**38**
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**	**37**	**28**	**39**
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**

soma das faces dos dados 1 e 2

Resolução – Treinamento ENEM
S13.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Apenas para facilitar a visualização vou ampliar um pouco a parte final da tabela que são os valores que nos interessam, já que para ganhar o jogo a soma tem que ser maior que 35.

31	32	33	34	35	**36**
32	33	34	35	**36**	**37**
33	34	35	**36**	**37**	**38**
34	35	**36**	**37**	**28**	**39**
35	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**

Assim, percebemos que a quantidade de valores possíveis que fazem com que o jogador vença a partida são 15, como vemos destacado na figura acima.

Agora como temos 20 possibilidades para cada face do dado e temos dois dados, a quantidade total de possibilidades é:

$$\begin{aligned}&\textit{quantidade total de possibilidade} = \textit{faces dado } 1 \cdot \textit{faces dado } 2\\&\textit{quantidade total de possibilidade} = 20 \cdot 20\\&\textit{quantidade total de possibilidade} = 400\end{aligned}$$

Por fim, calculando a probabilidade de que esse jogador vença o duelo, obtemos:

$$\begin{aligned}&\text{Pr}\textit{obabilidade de vencer} = \frac{\textit{qunatidade de somas} > 35}{\textit{quantidade total de possibilidades}}\\&\text{Pr}\textit{obabilidade de vencer} = \frac{15}{400}\\&\text{Pr}\textit{obabilidade de vencer} = \frac{3 \cdot 5}{80 \cdot 5}\\&\text{Pr}\textit{obabilidade de vencer} = \frac{3}{80}\end{aligned}$$

Resposta: Letra E.

Item 09 ==

Pelo enunciado da questão vamos inicialmente calcular o número total de arrumações distintas que é igual ao número de permutações dos dez objetos com repetições de dois objetos cinco vezes, isto é:

$$P_{10}^{2,2,2,2,2} = \frac{10!}{2!2!2!2!2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

Podemos afirmar que o número de armazenamentos perfeitos é igual ao número de permutações simples dos cinco pares de mesma cor, isto é

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Finalmente, podemos calcular a probabilidade de organizar ao acaso os halteres, para a obtenção de um armazenamento perfeito, vamos lá:

$$P(A) = \frac{P_5}{P_{10}^{2,2,2,2,2}} = \frac{5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{945}$$

Resposta: Letra C.

Item 10 ==

Considere que o resultado do lançamento do par de dados seja representado por um par ordenado (x, y), em que x e y são os resultados dos dois dados em cada lançamento. Caso obtenha números distintos nos dados, o jogador pode encerrar a jogada na casa indicada com a bomba de 4 maneiras distintas: (1; 5), (2; 4), (4; 2) ou (5; 1), o que acontece com probabilidade $\frac{4}{36}$.

Caso obtenha números iguais nos dados do primeiro lançamento, a soma desses números deve ser menor do que 6. Assim, os resultados possíveis nos dois lançamentos são (1; 1) e (1; 3) ou (1; 1) e (2; 2) ou (1; 1) e (3; 1) ou (2; 2) e (1; 1), o que ocorre com probabilidade $\frac{4}{36^2} = \frac{4}{1296}$.

Portanto, a probabilidade de o jogador encerrar a jogada na casa indicada é $\frac{4}{36} + \frac{4}{1296} = \frac{37}{324}$.

Resposta: Letra A.

Item 11 ==

Cada tipo de brinde (figurinha, brinquedo e doce) é completamente independente, logo basta calcularmos a quantidade de possibilidades de cada um e depois multiplicar tudo.

A quantidade de possibilidades de figurinha consiste em escolher duas entre as 20, o que é uma combinação de 20 tomados 2 a 2, e teremos:

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = 190$$

Para o bonequinho, teremos 10 opções, e para os docinhos, 4 opções, logo basta usarmos o princípio multiplicativo, já que a quantidade total de combinações será o produto entre esses valores:

$$190 \cdot 10 \cdot 4 = 7.600$$

E ficamos com a **Letra B.**

Resolução – Treinamento ENEM
S13.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 12 ==

Uma maneira útil de abordar essa questão é ver que só há 3 possibilidades de tipo de movimento que a seta pode sofrer para terminar as 4 rodadas na posição inicial:

- Ficar parada durante as 4 rodadas;
- Andar uma vez para a esquerda, uma vez para a direita, e ficar parada durante as outras duas;
- Andar duas vezes para a esquerda e duas vezes para a direita

Estabelecendo que "→" significa andar para a direita, "←" significa andar para a esquerda, e "_" significa ficar parado, as 3 opções que apresentamos acima podem ser representadas assim:

- _ _ _ _
- ← → _ _
- ← ← → →

Mas note que a seta, ao se mover, a seta não precisa seguir essa ordem restrita de movimentos. Note que em ambos os esquemas a seguir: a seta andará uma vez para a direita, uma vez para a esquerda e ficará parada nas outras duas rodadas:

- ← → _ _
- ← _→ _

E nos dois casos, ela finalizará seu movimento na posição original. Com isso, para encontrar todas as possibilidades possíveis, vamos permutar as opções que temos

Para a opção "manter a seta parada durante as 4 rodadas", não há o que permutar, já que todos os movimentos são iguais, logo só há uma possibilidade (o que também pode ser visto como uma permutação com repetição de 4 termos, com 4 termos iguais, também resultando em 1).

Para a opção "andar uma vez para a direita, uma para a esquerda e ficar parada duas vezes", temos 4 termos, com dois deles repetidos, logo o resultado para o número de permutações será:

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

E para a opção "andar duas vezes para a esquerda e duas vezes para a direita", temos também 4 termos, mas agora temos dois termos se repetindo duas vezes, logo teremos:

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Com isso, somando todas as possibilidades temos:

$$1 + 12 + 6 = 19$$

19 casos favoráveis, mas ainda não sabemos quantas possibilidades de movimentos há no espaço amostral. O espaço amostral representa todos os movimentos que a seta pode fazer. A cada rodada, a seta pode escolher independentemente entre 3 opções de movimento, logo o total possível de escolhas será:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

E a nossa probabilidade será o número de casos favoráveis sobre o espaço amostral:

$$\frac{19}{81}$$

E ficamos com a **Letra C.**

Item 13 ==

Uma maneira de abordar essa questão é dividindo-a em dois casos, um no qual a bola transferida é verde, e um no qual a bola transferida é amarela. Como há 3 bolas amarelas e 7 verdes na caixa 1, a probabilidade de a bola transferida ser amarela é 3/10, e da bola ser verde é 7/10. Com isso, nossos dois casos possíveis têm essas possibilidades iniciais de acontecerem.

Caso o caso 1 ocorra (e a bola transferida seja amarela), haverá 6 bolas amarelas na caixa 2, e 5 verdes; e, logo, a chance de a bola extraída ser amarela é 6/11. Com isso, a probabilidade do primeiro caso ocorrer e da bola pega ser amarela, em seguida, será:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{11} = \frac{18}{110}$$

Por outro lado, a chance do segundo caso ocorrer é de 7/10, e se isto ocorrer, haverá 5 bolas amarelas e 6 verdes na segunda caixa, e a probabilidade da bola sacada ser amarela será:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{110}$$

Com isso, como a ocorrência dos casos é completamente independente e disjunta, a probabilidade de qualquer um dos dois ocorrerem será a soma de suas probabilidades:

$$\frac{35}{110} + \frac{18}{110} = \frac{53}{110}$$

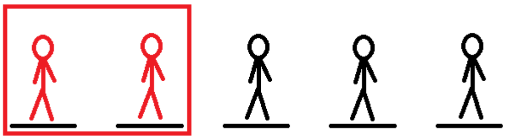
E ficamos com a **Letra C.**

Resolução – Treinamento ENEM
S13.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 14 ==

Uma maneira de resolver essa questão é por exclusão, ou seja, encontrar todas as possibilidades das 5 pessoas se arranjarem, e depois subtrair os cenários nos quais essas duas pessoas estarão juntas.

A quantidade total de arranjos é uma permutação de 5 termos em fila, logo será 5!, ou 120. Já para analisar em quantos casos as duas pessoas indesejáveis ficam juntas, podemos considerar que elas estarão juntas, como em um bloco:



Assim, podemos permutar esses 4 termos livremente (as 3 pessoas restantes e o bloco com as duas indesejáveis), assim como podemos permutar a posição dos dois indesejáveis dentro do bloco (uma permutação de 2 termos), logo o número de configurações será:

$$4! \cdot 2! = 48$$

Logo, se há 120 casos possíveis, e em 48 deles as duas pessoas que não se gostam ficam juntas, restam 72 possibilidades válidas, e ficamos com a **Letra B.**

Item 15 ==

Primeiro, calculamos quantos segundos existem em 2h30min, levando em conta que cada hora possui 3600 segundos:

$$3600 \cdot 2{,}5 = 9000$$

Como cada tentativa demora 1,8 segundos, o total de tentativas será:

$$\frac{9000}{1{,}8} = 5000$$

Sabemos que o último algarismo da senha é um número ímpar, logo teremos 5 possiblidades para aquela posição da senha. Para cada umas das outras d - 1 posições, teremos 10 possibilidades:

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{d-1} \cdot 5 = 5000$$

$$10^{d-1} \cdot 5 = 5000$$

$$10^{d-1} = 1000$$

$$d = 4$$

E 4 é um quadrado perfeito.

Resposta: Letra A.