



01. (UFF-RJ) O triângulo  $M\hat{N}P$  é tal que  $\hat{M} = 80^\circ$  e  $\hat{P} = 60^\circ$ .  
A medida do ângulo formado pela bissetriz do ângulo interno  $\hat{N}$  com a bissetriz do ângulo externo  $\hat{P}$  é

- a)  $20^\circ$                       c)  $40^\circ$                       e)  $60^\circ$   
b)  $30^\circ$                       d)  $50^\circ$

02. (PUCPR-2005) Dois ângulos complementares  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , sendo  $A < B$ , têm medidas na razão de 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo  $\hat{A}$  para o suplemento do ângulo  $\hat{B}$  vale

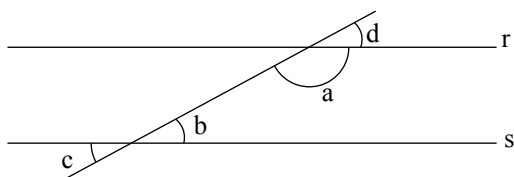
- a)  $43/47$                       c)  $13/17$                       e)  $47/43$   
b)  $17/13$                       d)  $119/48$

03. (FUVEST-SP) Três cidades, **A**, **B** e **C**, situam-se ao longo de uma estrada reta; **B** situa-se entre **A** e **C**, e a distância de **B** a **C** é igual a dois terços da distância de **A** a **B**. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto **P** da estrada, localizado entre as cidade **B** e **C** e à distância de 210 km de **A**. Sabendo-se que **P** está 20 km mais próximo de **C** do que de **B**, **DETERMINE** a distância que o morador de **B** deverá percorrer até o ponto de encontro.

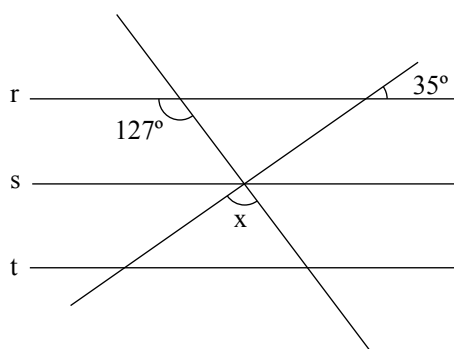
04. (IME-RJ-1970) Duas retas paralelas cortadas por uma terceira formam pares de ângulos suplementares tais que um é  $3/7$  do outro. Que relação com o ângulo reto tem cada um desses ângulos?

05. (IME-RJ-1970) Um relógio possui três ponteiros que giram em torno de um centro comum: o das horas, o dos minutos e o dos segundos. A que horas, pela primeira vez depois das doze horas, o ponteiro dos segundos fica situado entre o das horas e o dos minutos, formando com eles ângulos adjacentes suplementares?

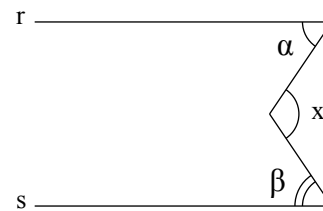
06. Na figura temos  $r//s$ , provar que  $2a + d - (a + 180^\circ) = b - c$



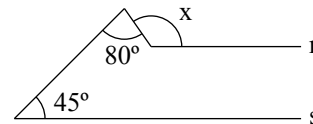
07. Sabendo-se que  $r//s//t$ , calcule  $x$



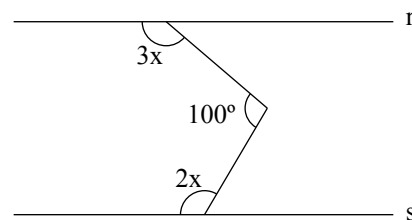
08. Na figura temos  $r//s$ , demonstre que  $x = \alpha + \beta$



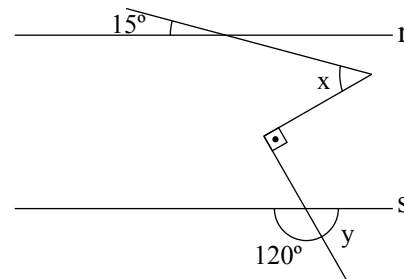
09. Na figura temos  $r//s$ . Determine o valor de  $x$ .



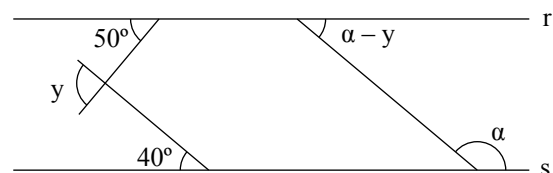
10. Na figura temos  $r//s$ . Determine o valor de  $x$ .



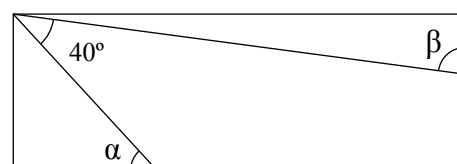
11. Na figura temos  $r//s$ . Determine os valores de  $x$  e  $y$



12. (AFA-2001) Sejam  $r$  e  $s$  paralelas. Determine a medida do ângulo  $\alpha$  na figura a seguir:



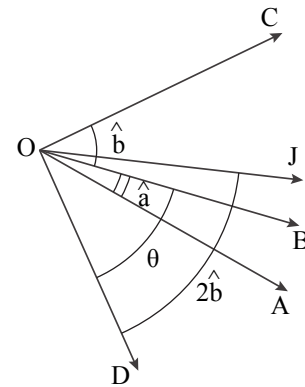
13. (FUVEST-1997) Nos retângulos abaixo, calcule o valor de  $\alpha + \beta$  em graus.



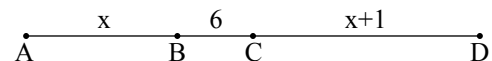


14. Demonstre a unicidade do ponto médio M de um segmento  $\overline{AB}$ .
15. A, B e C são pontos colineares, determine AC, sendo  $AB = 20$  cm e  $BC = 12$  cm.
16. Numa reta r, tomemos os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  e um ponto P de modo que  $\overline{AB}$  seja o quádruplo de  $\overline{PC}$ ,  $\overline{BC}$  seja o quádruplo de  $\overline{PC}$  e  $AP = 80$  cm. Sendo M e N os pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente, determine MN.
17. M é o ponto médio de um segmento  $\overline{AB}$  e C é um ponto da reta  $\overline{AB}$  externo ao segmento  $\overline{AB}$ . Demonstrar que  $MC = 1/2(CA + CB)$ .
18. Determinar o complemento, suplemento e o replemento do ângulo de  $60^\circ 42' 17''$ .
19. Determinar a medida sexagesimal do suplemento do complemento do ângulo de  $28,75$  gr.
20. O dobro do suplemento de um ângulo vale 7 vezes o seu complemento. Achar o ângulo.
21. A soma de dois ângulos é  $78^\circ$  e um deles vale os  $\frac{3}{5}$  do complemento do outro. Achar os ângulos.
22. O quádruplo do suplemento do complemento de um ângulo é igual ao triplo do replemento do seu suplemento. Achar o ângulo.
23. Demonstrar que 2 ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) são congruentes.
24. Demonstrar que as bissetrizes de 2 ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares. ( $\perp \equiv$  perpendicular)
25. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de  $38^\circ$ . Um dos ângulos mede  $41^\circ$ . Calcular o outro ângulo.
26. Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5 h 10 min.
27. Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4 h 42 min.
28. A que horas pela primeira vez após o meio dia, os ponteiros de um relógio formam  $110^\circ$ ?
29. Entre 16 h e 17 h, em quais instantes os ponteiros de horas e minutos formam ângulo reto?
30. Do vértice de um ângulo traçam-se as semi-retas perpendiculares aos seus lados. Demonstrar que o ângulo formado por essas semi-retas e o ângulo dado são suplementares.
31. (ITA-1973) Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Determine os momentos destas ocorrências.

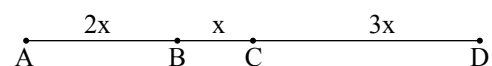
32. Na figura a seguir calcule  $\theta$  em função de  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  sabendo que  $\overline{OJ}$  é a bissetriz de  $\hat{AOC}$ .



33. Demonstre que o menor ângulo ( $\theta$ ), que os ponteiros de um relógio fazem entre si, quando o relógio marca h horas e m minutos é dado por  $\theta = \left| 30h - \frac{11}{2}m \right|$ .
34. Considerando o espaço de tempo de 24 h, quantas vezes os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio formam  $90^\circ$ ?
35. A diferença entre os inversos das medidas de um arco em graus e em radianos é igual ao quociente da sua medida em radianos por  $2\pi$ . Determine a medida deste arco.
36. Seja um segmento  $\overline{AB}$ , e  $a, b$  e  $c \in \mathbb{N}^*$  tal que  $a > b$ . O ponto D divide  $\overline{AB}$  na razão  $b/a$  e E divide  $\overline{AB}$  na razão  $a/b$ . Se  $DE = c$ , calcule a medida de  $\overline{AB}$ .
37. Considere um segmento  $\overline{AB}$  de medida  $\ell$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ , tal que  $\alpha < \beta$ . C divide  $\overline{AB}$  na razão  $\alpha$  e D divide  $\overline{AB}$  na razão  $\beta$ . Calcule a medida de  $\overline{CD}$ .
38. Determine x para que os pontos a seguir formem uma divisão harmônica.



39. Determine a condição de x para que os pontos a seguir formem uma divisão harmônica.



40. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão  $\frac{7}{3}$ . Calcule MN se  $AB = 40$  cm.
41. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ . Se J é o ponto médio de  $\overline{MN}$ , calcule a razão  $JA/JB$ .



42. Demonstre que a distância entre os conjugados harmônicos de um segmento  $AB = \ell$  e razão de secção  $k$  é dada por  $\frac{2k\ell}{|k^2 - 1|}$ .
43. Demonstre a seguinte propriedade: Se  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos de  $\overline{AB}$  na razão  $k$  ( $k > 1$ ), então  $A$  e  $B$  são conjugados harmônicos de  $\overline{MN}$  na razão  $\frac{k-1}{k+1}$ .
44. (IME) Considere as equações do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$  e  $a'x^2 + b'x + c' = 0$ . Suas raízes reais são respectivamente iguais a  $x_1, x_2$  e  $x_3, x_4$ . Determine a relação entre os coeficientes das equações para que o segmento de extremidades com abscissas  $x_1$  e  $x_2$  seja dividido harmonicamente pelos pontos de abscissas  $x_3$  e  $x_4$ .
45. Tomam-se sucessivamente sobre um segmento os pontos  $A, B, C$  e  $D$  sendo,  $AB = 5, BC = 1$  e  $CD = 3$ . Considera-se o ponto  $M$  exterior ao segmento  $AC$ , mas na reta suporte, tal que  $MA/MC = 5/3$ , e o ponto  $M'$  interior ao segmento  $BC$  de modo que  $M'B/M'C = 5/3$ . Sendo  $O$  e  $O'$  os pontos médios de  $AB$  e  $CD$ , calcule as razões  $MO/MO'$  e  $M'O/M'O'$ .
46. Num segmento  $AC$ , toma-se um ponto  $B$  tal que  $AB/AC = 2BC/AB$ . Determine o valor de  $BC/AB$ .
24. Demonstração
25.  $35^\circ$
26.  $95^\circ$
27.  $111^\circ$
28. 12 h 20 min
29. 16 h 60/11 min e 16 h 420/11 min
30. Demonstração
31. 4 h 60/11 min e 4 h 420/11 min
32.  $\theta = (a + 3b) / 2$
33. Demonstração
34. 44 vezes

GABARITO

01. C
02. E
03. 60 km
04.  $7/5$  e  $3/5$
05. 12 h 32 min 45 s
06. Demonstração
07.  $92^\circ$
08. Demonstração
09.  $125^\circ$
10.  $52^\circ$
11.  $y = 60^\circ$  e  $x = 45^\circ$
12.  $135^\circ$
13.  $130^\circ$
14. Demonstração
15. 8 cm ou 32 cm
16. 36, 45 ou 20 cm
17. Demonstração
18.  $22^\circ 17' 43''$   
 $112^\circ 17' 43''$   
 $292^\circ 17' 43''$
19.  $115^\circ 52' 30''$
20.  $54^\circ$
21.  $18^\circ$  e  $60^\circ$
22.  $45^\circ$
23. Demonstração
24. Demonstração
25.  $35^\circ$
26.  $95^\circ$
27.  $111^\circ$
28. 12 h 20 min
29. 16 h 60/11 min e 16 h 420/11 min
30. Demonstração
31. 4 h 60/11 min e 4 h 420/11 min
32.  $\theta = (a + 3b) / 2$
33. Demonstração
34. 44 vezes
35.  $6^\circ$
36.  $c \left( \frac{a+b}{a-b} \right)$
37.  $\frac{(\beta - \alpha) \ell}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$
38. 14
39.  $x > 0$
40. 42 cm
41.  $k^2$
42. Demonstração
43. Demonstração
44.  $2(c'a + a'c) = bb'$
45.  $5/3$
46.  $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$