NOÇÕES DE CONJUNTOS

1. INTRODUÇÃO

Em matemática, as noções de conjunto, de elemento e de pertinência entre elemento e conjunto são ***primitivas***, isto é, *não requerem definição*. No entanto, a ideia de conjunto é a mesma usada na linguagem comum e está associada à de *coleção* de objetos, desde que sejam todos distintos. Por exemplo, podemos citar o conjunto das vogais do alfabeto, o conjunto dos números primos ou o conjunto dos jogadores de um time de futebol.

Utilizam-se letras maiúsculas para nomear conjuntos e minúsculas para nomear elementos.

A noção principal entre um conjunto X e um objeto x é a de ***pertinência***. Se este objeto pertence ao conjunto, escreveremos $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, caso contrário, deverá ser escrito $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{X}$ (o símbolo "∈" significa *pertence* e "∉" *não pertence*). Por exemplo, se M_3 é conjunto de todos os múltiplos de $três$, então $18 \in M_3$ e $14 \notin M_3$.

2. FORMAS DE REPRESENTAR UM CONJUNTO

2.1. Extensão (ou Citação)

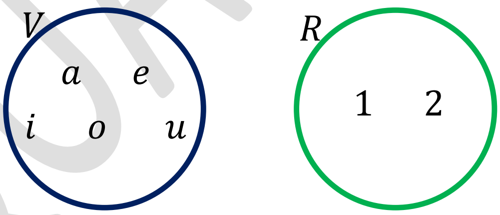
Neste caso, descrevem-se, um a um, os elementos do conjunto e os exibe entre chaves. Veja os exemplos.

$A = \{a, e, i, o, u\}$ é o conjunto das vogais do alfabeto. Trata-se de um ***conjunto finito***, pois *possui um número finito de elementos*;

$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais pares. Trata-se um ***conjunto infinito***, pois *possui um número infinito de elementos*, fato este representado pelos três pontinhos "...". Em geral estes três pontinhos serão utilizados somente quando estiverem subentendidos os elementos que forem omitidos.

2.2. Diagrama de Euler - Venn

Neste formato, os elementos do conjunto ficam interiores a uma linha fechada. Representa-se a seguir o conjunto das V vogais e o conjunto R das raízes de $x^2 - 3x + 2 = 0$.



2. 3. Atributo (ou propriedade comum)

Neste caso, diremos que um conjunto A é o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P, ou seja, $A = \{x, x \text{ goza da propriedade } P\}$. A vírgula significa "*tal que*" e pode ser substituída por "/" com o mesmo significado.

Pode-se assim representar o conjunto das vogais $V = vogais\ do\ alfabeto$ (modo simplificado) ou ainda, $V = \{x, x \text{ é } vogal\ do\ alfabeto\}$, modo mais formal. O conjunto R do exemplo ficaria $R = \{x,\ x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

3. DEFINIÇÕES GERAIS

Se um conjunto *possui um único elemento* ele será dito ***conjunto unitário***. São exemplos de conjuntos unitário $A = \{-3\}$ e $B = \{x, x > 0 \text{ e } x^2 = 1\}$ e $C = \{x, x \text{ é } satélite\ natural\ da\ Terra\}$

Caso um conjunto *não possua elementos*, ele será dito ***conjunto vazio*** e será indicado por "∅" ou "{ }". É exemplo de conjunto vazio $X = \{x, x \neq x\}$. Atenção: jamais escreva $\{\emptyset\}$. Este conjunto não é vazio! Ele é unitário.

Dois conjuntos A e B serão ditos ***conjuntos iguais*** se *possuírem os mesmos elementos*. Neste caso escreveremos $A = B$, por exemplo, $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$.

Entre dois conjuntos pode haver uma ***relação de inclusão***, isto é, um conjunto pode ter todos os elementos do outro. Assim, se o conjunto B *possui todos os elementos do conjunto* A, diz-se que A *está contido em* B ($A \subset B$), ou que B *contém* A ($B \supset A$), diz-se também que A é um ***subconjunto*** B, ou ainda, que A é parte de B. Se $A \subset B$ e $A \neq B$, diremos que A é parte própria de B.

Por exemplo, dados $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$, temos $A \subset B$.

O conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto. Em símbolos, qualquer que seja X, $\emptyset \subset X$.

São três as propriedades relativas a relação de inclusão, a saber, ***Reflexiva***: $A \subset A$, qualquer que seja A, ***Transitiva:*** Se $A \subset B$ e $B \subset C$**,** então $A \subset C$ e ***Antissimétrica:*** Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

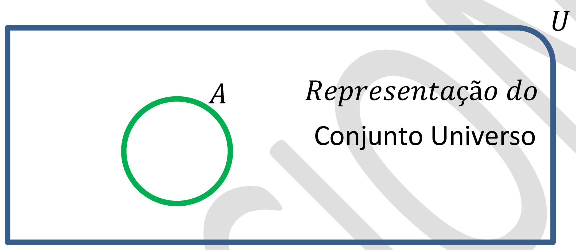
Dado um conjunto A, chamamos de ***conjunto das partes*** de A o conjunto $\mathcal{P}(A)$ *formado por todos os seus subconjuntos*. Por exemplo, sendo $A = \{1, 2\}$, segue que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$.

A *quantidade* k de elementos de um conjunto X (ou ***cardinal*** de X) será indicada na forma $n(X) = k$. Por exemplo, o conjunto V das vogais do alfabeto possui cinco elementos, isto é $n(V) = 5$.

Se A é tal que $n(A) = k$, então $n(\mathcal{P}(A)) = 2^k$. *(o total de subconjuntos de um conjunto com k elementos é* 2^k). Por exemplo, um conjunto com 10 elementos terá $2^{10} = 1024$ subconjuntos.

Se dois conjuntos, A e B, são tais que $n(A) = n(B)$, isto é, *possuem a mesma quantidade de elementos*, então se diz que A e B são ***conjuntos equipotentes.***

Na resolução de questões que envolvem conjuntos, chama-se ***conjunto Universo U***, o conjunto que *possui todos os elementos que estão sendo considerados*. Por exemplo, a solução da equação $x + 2 = 0$ é vazia se o conjunto universo em questão for $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Agora, se o conjunto universo for $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, então a solução será $x = -2$.

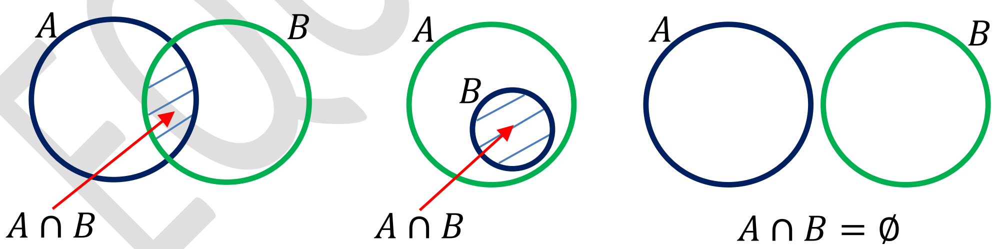


4. OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

4.1. Interseção (∩)

Dados os conjuntos, A e B, definimos a operação de interseção por

$$A \cap B = \{x, x \in A \text{ e } x \in B\}$$



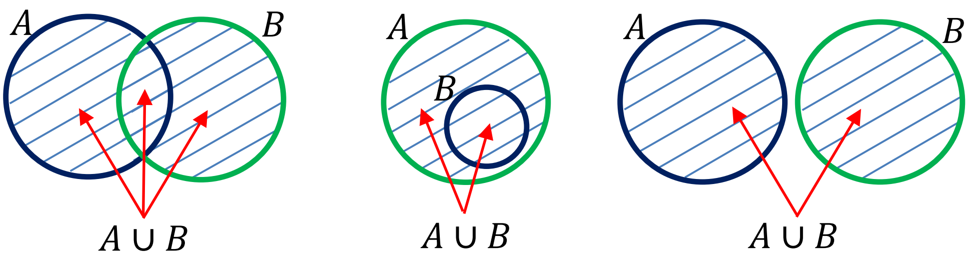
Por exemplo, se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ então teremos $A \cap B = \{a, e\}$.

É trivial perceber que qualquer que seja A, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4.2. União (U) (ou Reunião)

Dados os conjuntos, A e B, definimos a operação de união por

$$A \cup B = \{x, x \in A \; ou \; x \in B\}$$



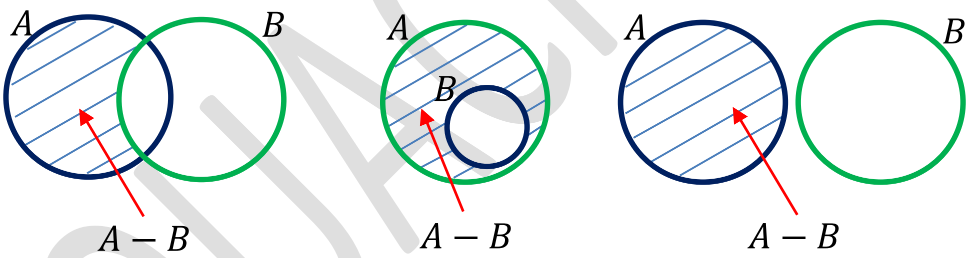
Por exemplo, se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ então teremos $AUB = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$.

É fácil notar que qualquer que seja A, $A \cup \emptyset = A$.

4.3. Diferença (-)

Dados os conjuntos, A e B, definimos a operação de diferença de A por B como

$$A - B = \{x, x \in A \; e \; x \notin B\}$$

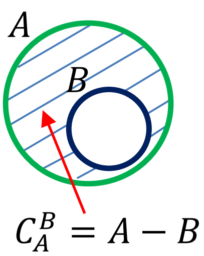


Por exemplo, se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ então teremos $A - B = \{i, o, u\}$.

4.4. Complementar de B em relação a A (C_A^B)

$$C_A^B = A - B$$

Essa definição é exclusiva para o caso $B \subset A$



Por exemplo, sejam $B = \{1, 2, 3\}$ e $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, como $B \subset A$, podemos determinar $C_A^B = A - B = \{0, 4, 5, 6\}$

Agora, seja U o conjunto de todas as letras do alfabeto, $A = \{x, x \text{ é } vogal\}$ e $C = \{x, x \text{ é } consoante\}$ teremos $C_U^A = U - A = C$ e $C_U^C = U - C = A$, neste caso diremos que A e C são ***conjuntos complementares.*** Podemos indicar o complementar do conjunto X por $\bar{X}$.

4.5. Algumas propriedades da união e interseção entre conjuntos

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \; e \; A \cup B = B \cup A$
- Associatividade: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \; e \; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Distributividade: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) e \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Idempotência: $A \cap A = A \; e \; A \cup A = A$

4.6. Leis de Morgan

- $C_U^{A \cap B} = C_U^A \cup C_U^B$
- $C_U^{A \cup B} = C_U^A \cup C_U^B$

4.7. Número de elementos da União entre conjuntos

Para dois conjuntos, temos

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Para três conjuntos, temos

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - (n(A \cap C) + n(B \cap C)) + n(A \cap B \cap C)}$$

Veja a seguir, um exemplo de aplicação da primeira fórmula:

Dois conjuntos A e B são tais que A possui 12 elementos enquanto B possui 15. Se são 4 os elementos comuns entre estes conjuntos, quantos elementos tem em sua união?

Aplicando a fórmula vem,

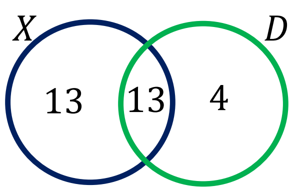
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$
$$n(A \cup B) = 12 + 15 - 4 = 23$$

5. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM AUXÍLIO DE DIAGRAMAS

Veja os seguintes exemplos.

1. O professor Paulo realizou uma pesquisa com os alunos de uma de suas turmas. Dos 32 alunos envolvidos verificou-se que 26 gostam de jogar xadrez, 17 gostam de jogar damas e 13 gostam de jogar xadrez e damas. Quantos são os alunos do professor Paulo que não gostam de jogar nem xadrez nem damas?

Em primeiro lugar devemos marcar no diagrama o número de elementos comuns aos dois conjuntos em questão ($X = xadrez \; e \; D = damas$), que é 13. Após isto, marcam-se o restante, não se esquecendo de subtrair os 13 elementos já contados. Em X, $26 - 13 = 13$ e em D, $17 - 13 = 4$. Veja.



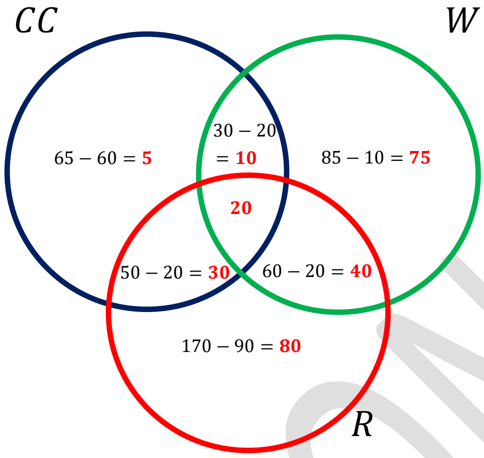
Como $13 + 13 + 4 = 30$, o número de alunos que não gostam de jogar nem xadrez nem damas é dado por $32 - 30 = 2$.

2. (Espcex (Aman) 2014) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos cream cracker, wafer e recheados. Os resultados indicaram que:

- *65 pessoas compraram cream cracker;*
- *85 pessoas compraram wafer;*

- *170 pessoas compraram recheados*
- *20 pessoas compraram wafer, cream cracker e recheados;*
- *50 pessoas compraram cream cracker e recheados;*
- *30 pessoas compraram cream cracker e wafer;*
- *60 pessoas compraram wafer e recheados;*
- *50 pessoas não compraram biscoitos.*

Determine quantas pessoas responderam a essa pesquisa.
a) 200   b) 250   c) 320   d) 370   e) 530



Assim, o número de pessoas que responderam a pesquisa será dado por:

N = 5 + 10 + 30 + 20 + 15 + 40 + 80 + 50 = 250. Opção b.

6. COMENTÁRIOS GERAIS E APROFUNDAMENTO

Seguem algumas observações importantes:

- É incorreto escrever, por exemplo, M = {conjunto dos números positivos}, o correto seria M = conjunto dos números positivos (sem as chaves);
- Para representar o conjunto vazio, usamos { } ou ∅, nunca { ∅ };
- Se x é um elemento de X, então escrevemos $x \in X$ e nunca $x \subset X$. Podemos escrever $\{x\} \subset X$;
- Não faz sentido escrever, por exemplo, $\{a, a\}$, o correto seria $\{a\}$.

Veja agora a prova de que *qualquer que seja* $X, \emptyset \subset X$:

Suponha por absurdo que $\emptyset$ *não está contido em* X*. Assim, deve existir ao menos um elemento de* $\emptyset$ *que não esteja em* X*. Mas claro que este tal elemento não existe, pois* $\emptyset$ *não possui elemento algum.*

Veja também a prova de que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n:

Seja X *um conjunto tal que* $n(X) = n$*. Digamos* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*. A fim de confeccionar um subconjunto de* X*, teremos que decidir se o elemento* x_i *estará ou não no subconjunto. Isto nos diz que para cada um dos* n *elemento, há sempre duas opções. Logo o total de possibilidades, pelo principio multiplicativo, será o produto de* n *fatores iguais a* 2*,*

$$2.2.2 \ldots 2 = 2^n$$

Acompanhe a resolução das seguintes questões:

1. (IME – 2008/2009) Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por

$$X \Delta Y = (X - Y) U (Y - X)$$

Pode se afirmar que:

a) $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$
b) $(X\Delta Y) \cap (X - Y) = \emptyset$
c) $(X\Delta Y) \cap (Y - X) = \emptyset$
d) $(X\Delta Y) U (X - Y) = X$
e) $(X\Delta Y) U (Y - X) = X$

Solução:

Por definição $X\Delta Y = \ (X - Y)U(Y - X) = (XUY) - \ (X \cap Y)$ (faça um gráfico para verificar)
Logo, a letra A é a correta, uma vez que $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = [(XUY) - \ (X \cap Y)] \cap (X \cap Y) = \ \emptyset$
(verifique o erro nas demais opções!)

2. Demonstre que $A - \ \bar{B} = A \cap B$, em que A e B são conjuntos no universo U e $\bar{B}$é o complementar de B.

Demonstração:

$$x \in A - \ \bar{B} \ \ \leftrightarrow (x \in A \ e \ x \notin \bar{B}) \leftrightarrow (x \in A \ e \ x \in B) \leftrightarrow x \in A \cap B$$

(o símbolo ↔ significa “se, e somente se”)

Agora tente você resolver as demais questões.