Colégio Militar de SM – Profs Augusto e Anchieta
Lista de Determinantes – 2^o ano

Aluno(a): ______________________________________

3 de agosto de 2011

1.) (UFSM – RS Peies II 2010) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \text{tg}\theta & 1 \\ 1 & \text{tg}\theta \end{bmatrix}$, com $\cos\theta \neq 0$. Então $detA$ é igual a:

A( ) $\sec^2\theta$ B( ) $\text{tg}^2\theta - 1$ C( ) $\text{cosec}^2\theta$
D( ) $\text{sen}^2\theta$ E( ) $-\sec^2\theta$

2.) (EN - 82) Se a, b e c são as medidas dos lados opostos aos ângulos A, B e C do triângulo ΔABC, então o determinante: $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \text{sen}\hat{A} & \text{sen}\hat{B} & \text{sen}\hat{C} \end{bmatrix}$ é NULO:

A( ) Somente se $a = b = c$
B( ) Somente se $a^2 = b^2 + c^2$
C( ) Somente se $a > b > c$
D( ) Somente se $a = b$
E( ) $\forall$ a, b e c.

3.) (IME – 2006) Seja a matriz D dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ \text{sen}\hat{P} & \text{sen}\hat{Q} & \text{sen}\hat{R} \end{bmatrix},$$

na qual p, q e r são lados de um triângulo cujos ângulos opostos são, respectivamente, $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$. O valor do determinante de D é:

A( ) -1 B( ) 0 C( ) 1
D( ) π E( ) $p + q + r$

4.) (EPCAr – 2003)Seja a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a expressão do determinante da matriz $(A - \alpha I)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e I a matriz identidade. A soma dos valores de α para os quais $det(A - \alpha I) = 0$ é dada por

A( ) 5 B( ) 6 C( ) -1 D( ) -5

5.) (EsPCEx – 1996) Sendo d o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 10^{x\log 10} & 0 & 0 \\ 0 & \log 100 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, então $\log d$ vale:

A( ) $x + 1$ B( ) $2x + 1$
C( ) $x - 1$ D( ) $2x - 1$
E( ) x

6.) (UFRGS – 1996) Na equação seguinte:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \text{sen}x \\ 0 & \text{sen}x & \cos x \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Um possível valor para x é:

A( ) 0 B( ) $\dfrac{\pi}{6}$ C( ) $\dfrac{\pi}{4}$ D( ) $\dfrac{\pi}{3}$ E( ) $\dfrac{\pi}{2}$

7.) (EPCAr – 2003) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, e P^{-1} a inversa de P. Se a matriz B é tal que $B = P^{-1}.A.P$, tem-se que

A( ) $detB = 0$
B( ) $detB = -50$
C( ) $B = A$
D( ) B é matriz diagonal

8.) (EPCAr – 2006) Sejam A, B, C matrizes reais não-nulas de ordem 2, satisfazendo às seguintes relações:

(I) $AB = C^{-1}$, em que C^{-1} é a inversa de C.

(II) $B = \dfrac{1}{2}A$

Se o determinante de C é 16, então o valor do módulo do determinante de A é igual a:

A( ) $\frac{1}{2}$ B( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C( ) $\dfrac{1}{8}$ D( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

9.) (EsPCEx – 1996) Sendo d o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 10^{x\log 2} & 0 & 0 \\ 0 & \log 100 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{3x} \end{bmatrix}$ então o $\log_2 d$ vale:

A( ) $4x + 1$ B( ) $4x2 + 1$ C( ) $4x^2 - 1$
D( ) $4x - 1$ E( ) $4x^2$

10.) (UFRGS – 1994)

$$\text{Se} \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \text{ então} \begin{vmatrix} 3a+1 & 3b+1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

vale:

A( ) 3 B( ) 4 C( ) 6 D( ) 8 E( ) 12

11.) (UFRGS – 1993) A soma dos quadrados das raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} x & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & x & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{é:}$$

A( ) 0 B( ) 2 C( ) 4 D( ) 6 E( ) 8

12.) (UFRGS – 91)

$$Se \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & d & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \text{então} \begin{vmatrix} a & d & c \\ 0 & b-d & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

é igual a:

A( ) -4 B( ) -2 C( ) 0 D( ) 2 E( ) 16

13.) (AMAN–86) Sabendo-se que $B_{3x3} = [b_{i,j}]$, onde:
$$\begin{cases} b_{ij} = i + j, & \text{se } i = j \\ b_{ij} = 2j, & \text{se } i < j \\ b_{ij} = 0, & \text{se } i > j \end{cases}$$
Então det$B$ é:

A( ) 10 B( ) 15 C( ) 22 D( ) 48 E( ) n.r.a.

14.) (AFA–97) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é correto afirmar que:
A ( ) A nunca é inversível
B ( ) Se A é inversível, então $1 < \theta < \pi$
C ( ) A é inversível independentemente do valor de θ
D ( ) A é inversível se, e somente se $\theta = n.\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

15.) (AFA–97) Considere as matrizes $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ e $B = [b_{ij}]_{2x2}$ definidos por $a_{ij} = x^i - x^j$ e $b_{ij} = (i + j).x$, $x \in \mathbb{R}^*$. Se a função $f : \mathbb{R}^* \Rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então para $x = \dfrac{\text{Det } A}{\text{Det } B}$, o valor de $f(x)$ é:
A ( ) $(x-1)^2$ B ( ) $(x-2)^2$
C ( )$-(x-1)^2$ D ( ) $-(x-2)^2$

16.) (UFRGS –1998) No intervalo $[0, 2\pi]$, dois possíveis valores para a soma $x + y$ obtida na equação:
$$\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}x \\ \text{sen}y & \cos y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

A( ) $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$ B( ) $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{5\pi}{3}$ C( ) $\dfrac{4\pi}{3}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$
D( ) $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{2\pi}{3}$ E( ) $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{\pi}{6}$

17.) (UFRGS – 1997) O determinante da matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{bmatrix}$$
é nulo:

A( ) Para quaisquer valores de a e b
B( ) Apenas se $a = 0$
C( ) Apenas se $b = 0$
D( ) Somente se $a = 0$
E( ) Somente quando $1 + 2a + (b + 3) = 0$

18.) (IME – 2007) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

19.) (EsPCEx – 1999) Sendo $\{a, b\} \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ e o determinante $\begin{vmatrix} a^2 & -4b & b^2 \\ a & 2 & a \\ b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 128a - 128b$, pode-se dizer que:

A( ) $a + b = 4$ B( ) $a + b = 8$
C( ) $a + b = 2\sqrt{2}$ D( ) $a + b = 4\sqrt{2}$
E( ) $a + b = 2$

20.) (IME – 2003) Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

21.) (IME – 2008) Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:
$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

A( ) 1,0 B( ) π C( ) 11,0
D( ) 10,0 E( ) 11,1

22.) (IME – 2008) Sejam **L**, **D** e **U** matrizes quadradas de ordem n cujos elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna $l_{i,j}$, $d_{i,j}$ e $u_{i,j}$, respectivamente, são dados por:
$$l_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{i^2}{i.j}, & \text{para } i \geq j \\ 0, & \text{para } i < j \end{cases},$$
$$d_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{i+1}{i}, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad \text{e}$$
$$u_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{2i}{i+j}, & \text{para } i \leq j \\ 0, & \text{para } i > j \end{cases}.$$
O valor do determinante de $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ é igual a:

A( ) 0 B( ) 1 C( ) n
D( ) $n + 1$ E( ) $\dfrac{n+1}{n}$

23.) (ITA – SP) Se $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é:

A( ) 0 B( ) 4 C( ) 8 D( ) 12 E( ) 16

24.) (IME – 99) Calcule o determinante:
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

25.) (IME – 93) Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m & \dots & m \\ m & m+x & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

26.) (IME – 73) Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+M & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+N & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+P & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+R \end{vmatrix}$$

Sendo

$M = \log_a a^a$

$N = e^{\ln a}$

$P = \log_{10} 10^{(\frac{1}{a})^2}$

$R = (2a)^{2\log_a a}$

Obs:
$\log_a y$: logaritmo de y na base a;
$\ln x$: logaritmo de x na base e;
e: base dos logaritmos neperianos.

27.) (IME – 70) Calcule o valor do determinante de ordem n abaixo, em função de a e n.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

A( ) $n^2 + a(n-1)(a+1)^n$
B( ) $(a-1)^{(n+1)}(a+1-n)$
C( ) $(n+1)(n-1)(a+n)^{(n-1)}$
D( ) $(a+n-1)(a-1)^{(n-1)}$
E( ) Nenhuma das respostas acima

28.) (IME – 2009) Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

A( ) -81 B( ) -27 C( ) -3
D( ) 27 E( ) 81

29.) (IME – 89) Calcule o determinante da matriz $n\times n$ que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

30.) Calcule os determinantes abaixo:

a.) $\begin{vmatrix} (a+3)^2 & (a+1) & a^2 \\ (b+3)^2 & (b+1) & b^2 \\ (c+3)^2 & (c+1) & c^2 \end{vmatrix}$

Resolução:

Abrindo os quadrados da primeira coluna:

$\begin{vmatrix} a^2+6a+9 & a+1 & a^2 \\ b^2+6b+9 & b+1 & b^2 \\ c^2+6c+9 & c+1 & c^2 \end{vmatrix}$ $C_1 \hookrightarrow C_1 - C_3$ $=$

$= \begin{vmatrix} 6a+9 & a+1 & a^2 \\ 6b+9 & b+1 & b^2 \\ 6c+9 & c+1 & c^2 \end{vmatrix}$ $C_1 \hookrightarrow C_1 - 6C_2$ $=$

$= \begin{vmatrix} 3 & a+1 & a^2 \\ 3 & b+1 & b^2 \\ 3 & c+1 & c^2 \end{vmatrix} =$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a^2 \\ 1 & b+1 & b^2 \\ 1 & c+1 & c^2 \end{vmatrix}$ $C_2 \hookrightarrow C_2 - C_1$ $=$

$=$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 3(b-a)(c-b)(c-a)$, pois a última matriz é de Vandermonde.

b.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$

Resolução:

Fazendo $\begin{cases} L_2 \hookrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \hookrightarrow L_3 - L_1 \\ \dots \\ L_n \hookrightarrow L_n - L_1 \end{cases}$

Teremos:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$

Fazendo Laplace pela segunda coluna, temos:

$=2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$

$2(-1)^{2+1}(n-2)! = -2(n-2)!$

31.) (IME – 89) Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

32.) (IME – 84) Seja D o determinante da matrix $A = [a_{ij}]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = |i-j|$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

33.) (AFA – 98) O determinante $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}$ é:

A ( ) positivo para $x \in \mathbb{R}$.
B ( ) negativo para $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < 1\}$
C ( ) positivo para $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -1 < x < 1\}$

D ( ) negativo para $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < -1\}$

34.) (AMAN–84) A raiz da equação: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ x & 1 & 0 \\ 2x & 0 & x \end{vmatrix} + 6 = 0$ é:

A( ) 1 B( ) -1 C( ) 2 D( ) -2 E( ) n.r.a

35.) (AMAN–85) A solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 2 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 = 0$ é:

A( ) -1 B( ) 0 C( ) 1 D( ) 4 E( ) n.r.a

36.) (AMAN–86) Sabendo-se que $A.X = B.C$, $A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \end{bmatrix}$, $C = [2, 3]$, então o valor de x_{21} é:

A( ) 120 B( ) $\dfrac{136}{19}$ C( ) $\dfrac{41}{11}$
D( ) 319 E( ) n.r.a

37.) (IME – 2007) Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\begin{pmatrix} n \\ n-i+1 \end{pmatrix}$;
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e $\det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $\det(x.I - A) = 0$.

38.) (AMAN–86) O det A^t para $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, vale:

A( ) 1 B( ) 4 C( ) 2 D( ) 3 E( ) n.r.a.

39.) (ITA–90) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \text{sen}x & 2 \\ \log_3 10 & 2\text{sen}x \end{bmatrix}$ onde x é real. Então podemos afirmar que:
A ( ) A é inversível apenas para $x > 0$;
B ( ) A é inversível apenas para $x = 0$;
C ( ) A é inversível para qualquer x;
D ( ) A é inversível apenas para x da forma $(2k+1)\pi$, k inteiro;
E ( ) A é inversível apenas para x da forma $2k\pi$, k inteiro.

40.) (ITA–90) Sejam A, B e C matrizes quadradas nxn tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:
A ( ) C é inversível e det $C = det(AB)^{-1}$;
B ( ) C não é inversível pois det $C = 0$;
C ( ) C é inversível e $detC = detB$;
D ( ) C é inversível e $detC = (detA)^2 detB$;
E ( ) C é inversível e $detC = \dfrac{detA}{detB}$.
Nota: det X denota o determinante da matriz quadrada X.

41.) (ITA – 2008) Considere o sistema $Ax = b$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é:

A( ) -4 B( ) -3 C( ) 0 D( ) 1 E( ) 4

42.) (ITA – 2008) Sejam A e C matrizes nxn inversíveis tais que $det(I + C^{-1}A) = \dfrac{1}{3}$ e $detA = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a:

A( ) $3n$ B( ) $2.\dfrac{3^n}{5^2}$ C( ) $\dfrac{1}{5}$ D( ) $\dfrac{3^{n-1}}{5}$
E( ) 5.3^{n-1}