MÓDULO 15

1.. DEFINIÇÃO

Sendo a e b números reais e positivos, com a ≠ 1, chama–se *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Em símbolos:
Se a, b ∈ IR, 0 < a ≠ 1 e b > 0, então:

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Em $\log_a b = x$, dizemos:
a é a base logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

Exemplos:
1º) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

2º) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$

3º) $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$

Observação:

$$\boxed{\text{Antilogaritmo} \rightarrow \log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a x}$$

Exemplos:
1º) $\text{antilog}_3 2 = 9$, pois $\log_3 9 = 2$

2º) $\text{antilog}_2 (-2) = \frac{1}{4}$, pois $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

2. PROPRIEDADES (1° PARTE)

1ª) $\log_a 1 = 0$

2ª) $\log_a a = 1$

3ª) $a^{\log_a b} = b$

4ª) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

3. PROPRIEDADES (2° PARTE)

Se 0 < a ≠ 1, b > 0 e c > 0, então:

1ª) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2ª) $\log_a = \log_a b - \log_a c$

Cuidado

$$\log_2 (3 + 4) \neq \log_2 3 + \log_2 4$$

$\log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 12 \neq \log_2 (3 + 4) = \log_2 7$

Observação:

$$\boxed{\text{colog}_a\, b = -\log_a b}$$

Exemplo: $\text{co}\log{}^{32}_{2} = -\log_2^{32}$

3ª) **Regras do "Peteleco"**

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

4. PROPRIEDADES (3° PARTE)

Mudança de Base

Há ocasiões em que os logaritmos em bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente, por exemplo, nas propriedades operatórias, onde os logaritmos devem estar na mesma base.

Para isso usamos a seguinte propriedade:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Exemplo :
$\log_3^5$ na base 2.

$$\log_3^5 = \frac{\log_2^5}{\log_2^3}$$

$\log_3^5$ na base 15.

$$\log_3^5 = \frac{\log_{15}^5}{\log_{15}^3}$$

Exemplo :

$$\frac{\log_4^7}{\log_4^3}.$$

$$\frac{\log_4^7}{\log_4^3} = \log_3^7$$

Consequências da Mudança de Base

a) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

b) $a^{\log b} = b^{\log a}$ (pode ser em qualquer base do log)

c) $\log_a^b \cdot \log_b^c = \log_a^c$

5. EXERCÍCIOS

1) (ESA – 2019)
O valor da expressão A = $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \log_8 32$ é:

a) 1
b) 5/3
c) 2/3
d) -1
e) 0

2) (EEAR – 2019)
O valor de $\log_3 1 + \log_{\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{64}{27}\right)$ é:

a) 3/4
b) 9/4
c) 0
d) –3

3) (ESA – 2011)
Aumentando-se um número x em 75 unidades, seu logaritmo na base 4 aumenta 2 unidades. Pode-se afirmar que x é um número:
a) múltiplo de 3
b) divisor de 8
c) maior que 4
d) menor que 1
e) irracional

4) (ESA – 2014)
O logaritmo de um produto de dois fatores é igual à soma dos logaritmos de cada fator, mantendo-se a mesma base. Identifique a alternativa que representa a propriedade do logaritmo anunciada:
a) $\log_b(a.c) = \log_b a + \log_b c$
b) $\log_b(a.c) = \log_b(a + c)$
c) $\log_b(a + c) = (\log_b a).(\log_b c)$
d) $\log_b(a + c) = \log_b(a.c)$

5) (EEAR – 2017)
Se $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 36 = 1{,}6$, então $\log 3 =$ _______.
a) 0,4
b) 0,5
c) 0,6
d) 0,7

6) (ESA – 2018)
Se log *x* representa o logaritmo na base 10 de *x* , então o valor de *k* ε (0,+∞) , tal que log *k* = 10 - log5 é:
a) 10^9
b) 5.10^{10}
c) 10^9
d) $2.\ 10^9$
e) 5.10^9

7) (ESA – 2017)
Utilizando os valores aproximados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, encontramos para $\log \sqrt[3]{12}$ o valor de:
a) 0,33
b) 0,36
c) 0,35
d) 0,31
e) 0,32

8) (ESA – 2016)
Dados $\log 3 = \mathrm{a}$ e $\log 2 = \mathrm{b}$, a solução de $4^x = 30$ é:
a) $(2\mathrm{a} + 1)/\mathrm{b}$
b) $(\mathrm{a} + 2)/\mathrm{b}$
c) $(2\mathrm{b} + 1)/\mathrm{a}$
d) $(\mathrm{a} + 1)/2\mathrm{b}$
e) $(\mathrm{b} + 2)/\mathrm{a}$

9) (ESA – 2013)
Se $\log_2 3 = a$ e $\log_2 5 = b$, então o valor de $\log_{0,5} 75$ é:
a) $\mathrm{a} + \mathrm{b}$
b) $-\mathrm{a} + 2\mathrm{b}$
c) $\mathrm{a} - \mathrm{b}$
d) $\mathrm{a} - 2\mathrm{b}$
e) $-\mathrm{a} - 2\mathrm{b}$

10) (ESA – 2013)
Sabendo que $\log P = 3\ .\log a - 4\ .\log b + \frac{1}{2}\ .\log c$, a alternativa que representa o valor de P.
$(dados: a = 4, b = 2\ e\ c = 16)$
a) 12
b) 52
c) 16
d) 24
e) 73

11) (EEAR)
A razão entre o logaritmo de 16 e o de 4, numa mesma base b, sendo $0 < b \neq 1$, é:
a) 1/4
b) 1/2
c) 4
d) 2

12) (ESA – 2013)
Se $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x^2$, com x real e maior que zero, então o valor de $f(f(5))$ é:
a) $\frac{2\log 2}{1+\log 2}$
b) $\frac{\log 2}{\log 2+2}$
c) $\frac{5\log 2}{\log 2+1}$
d) $\frac{8\log 2}{1-\log 2}$
e) $\frac{5\log 2}{1-\log 2}$

3. GABARITO

1) C
2) D
3) C
4) A
5) B
6) D
7) B
8) D
9) E
10) C
11) D
12) D

4. ANOTAÇÕES

____
____
____
____
____
____
____