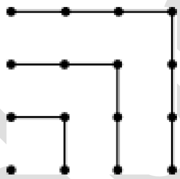
Respostas – Canguru 2010 – Nível S

1. (alternativa B)
Pelo desenho, observamos que o resultado da soma é igual ao número de parcelas multiplicado por ele mesmo, a saber:



$1 = 1\times1$

$1+3 = 4 = 2\times2$

$1+3+5 = 9 = 3\times3$

$1+3+5+9 = 16 = 4\times4$

A soma $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$ tem 11 parcelas, logo vale 11×11, conforme podemos comprovar, fazendo os cálculos.

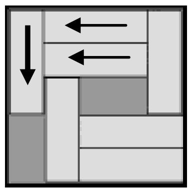
2. (alternativa C)
Com exceção da última coluna, os números da linha de baixo excedem os números da linha de cima em 10. Como são 10 colunas, a soma dos números de baixo excede a soma dos números de cima em 100. Portanto, o número representado por *, somado de 100, deve igualar 2010. Logo * é igual a 2010 – 100 = 1910

3. (alternativa D)
A base do cubo menor tem 1 dm^2 de área, logo sua aresta mede 1 dm e seu volume é 1 dm^3. A base do cubo maior tem 4 dm^2 de área, logo sua aresta mede 2 dm e seu volume é 8 dm^3. Usando a capacidade total do cubo menor para encher completamente o cubo maior, teremos que ir à bica $\frac{8\text{dm}^3}{1\text{dm}^3} = 8\,\text{vezes}$

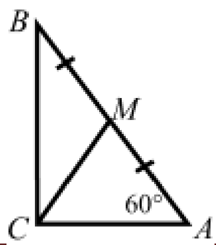
4. (alternativa B)
Números divisíveis por cinco com quatro algarismos ímpares devem ter o 5 como algarismos das unidades. Os demais algarismos podem ser qualquer um dos 5 ímpares. A quantidade de números assim formados é $5\times5\times5 = 125$.

5. (alternativa D)
Se não é verdade que “Todos os nossos empregados têm pelo menos 25 anos”, então existe algum empregado da companhia com menos de 25 anos.

6. (alternativa B)
A única peça que pode ser movida inicialmente é a peça marcada com a seta grossa. Movendo-a para baixo, as duas peças à direita, marcadas com setas finas, podem ser movidas. Isto deixará espaço para se colocar mais um taco vertical. Portanto, devem ser movidos 3 tacos.



7. (alternativa D)
Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa. Assim, MC = MA e o triângulo ACM é isósceles, de modo que $\text{m}\left(M\hat{C}A\right) = \text{m}\left(M\hat{A}C\right) = 60^{\text{O}}$. Assim, o ângulo externo $B\hat{M}C$ mede 120º

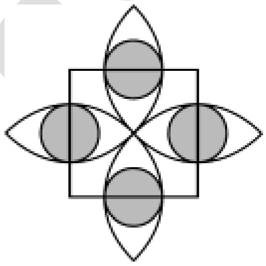


Direitos Reservados

8. (alternativa E)
Qualquer prisma tem *n* arestas na base inferior, *n* arestas na base superior e *n* arestas laterais, totalizando 3*n* arestas. Portanto, o número que pode ser igual ao número de arestas de um prisma é divisível por 3 que, neste caso, é o número 2010.

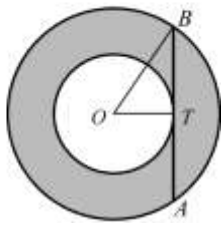
9. (alternativa A)
A soma de dois quadrados é nula se, e somente se, os quadrados são nulos. Portanto, $(x-3)^2+(y-2)^2=0 \Leftrightarrow x-3=0 \text{ e } y-2=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ e } y=2$. Assim *xy* =32 é o único número com a propriedade requerida.

10. (alternativa A)
Os raios das circunferências com centros nos vértices são iguais à metade da diagonal do quadrado de lado 2, logo medem $\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. O diâmetro de cada círculo cinza é igual a $2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$. A soma das áreas cinzas é a soma das áreas dos quatro círculos de raio $\sqrt{2}-1$, ou seja, $4\left(\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)=4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$.



11. (alternativa A)
Se $\sqrt{7},\sqrt[3]{7},\sqrt[6]{7} \text{ e } x$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\sqrt{7}\cdot x=\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[6]{7} \Leftrightarrow \sqrt{7}\cdot x=\sqrt[6]{7^2}\cdot\sqrt[6]{7} \Leftrightarrow \sqrt{7}\cdot x=\sqrt[6]{7^3}=\sqrt{7} \Leftrightarrow x=1$.

12. (alternativa C)
Se *O* é o centro comum às duas circunferências e *T* é o ponto de tangência da corda $\overline{AB}$ na circunferência menor, então o triângulo *BTO* é retângulo em *O* e *BT* = 8.

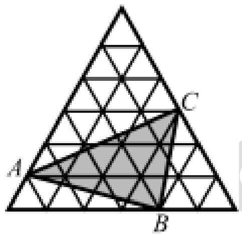


A área da coroa circular em cinza é a diferença entre as áreas do círculo maior e do círculo menor, igual a $\pi BO^2-\pi OT^2=\pi\left(BO^2-OT^2\right)$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BTO*, temos $BO^2=OT^2+BT^2 \Leftrightarrow BO^2-OT^2=BT^2=8^2=64$. Portanto, a área da região cinza é 64π

13. (alternativa C)
Temos $2x=5y \Leftrightarrow y=\frac{2x}{5}$. Portanto, $x+y=x+\frac{2x}{5}=\frac{7}{5}x$, o que nos leva a concluir que o número é um múltiplo de 7. Logo, o número é 2009.
Observação: calculando x e y obtemos, respectivamente, 1435 e 574. Temos 1435 + 574 = 2009 e $1435\times 2=574\times 5=2870$

Direitos Reservados

14. (alternativa C)



A área do triângulo *ABC* é a diferença entre a área do triângulo equilátero *PQR* e a soma das áreas dos triângulos *ABQ*, *BCR* e *ACP*. Se x e são as medidas do lado e da altura dos triângulos eqüiláteros de área 1cm², temos área $\Delta ABQ = \dfrac{4x \cdot h}{2}$, área $\Delta BCR = \dfrac{2x \cdot 3h}{2}$ e área $\Delta ACP = \dfrac{5x \cdot 3h}{2}$

Como $\dfrac{xh}{2} = 1 \Leftrightarrow xh = 2$, temos:

$$\text{área } \Delta ABC = 36 - \left(2xh + 3xh + \frac{15xh}{2}\right) = 36 - \frac{25}{2} \cdot xh = 36 - \frac{25}{2} \cdot 2 = 36 - 25 = 11\text{cm}^2.$$

15. (alternativa A)

Não pode haver mais do que três bolas de mesma cor na sacola, pois do contrário poderiam ser retiradas mais do que três bolas de mesma cor. Como duas dessas bolas são vermelhas, não pode haver duas bolas azuis ou duas verdes, já que ao serem retiradas sem ser vistas, poderiam sair duas azuis e pelo menos uma verde (ou o contrário), de modo que não haveria três bolas de mesma cor. Logo, na sacola, há três bolas vermelhas, uma verde e uma azul.

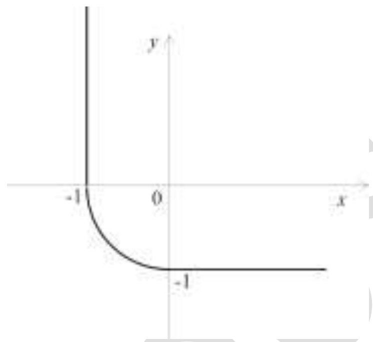
16. (alternativa A)
Temos

$$\left(x - |x|\right)^2 + \left(y - |y|\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \ge 0 \text{ e } y \ge 0 \text{ e } \left(x - x\right)^2 + \left(y - y\right)^2 = 4 \\ \text{ou} \\ x \le 0 \text{ e } y \ge 0 \text{ e } \left(x - (-x)\right)^2 + \left(y - y\right)^2 = 4 \\ \text{ou} \\ x \le 0 \text{ e } y \le 0 \text{ e } \left(x - (-x)\right)^2 + \left(y - (-y)\right)^2 = 4 \\ \text{ou} \\ x \ge 0 \text{ e } y \le 0 \text{ e } \left(x - x\right)^2 + \left(y - (-y)\right)^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \le 0 \text{ e } y \ge 0 \text{ e } 4x^2 = 4 \\ \text{ou} \\ x \le 0 \text{ e } y \le 0 \text{ e } 4x^2 + 4y^2 = 4 \\ \text{ou} \\ x \ge 0 \text{ e } y \le 0 \text{ e } 4y^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \le 0 \text{ e } y \ge 0 \text{ e } x^2 = 1 \quad (\text{I}) \\ \text{ou} \\ x \le 0 \text{ e } y \le 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{II}) \\ \text{ou} \\ x \ge 0 \text{ e } y \le 0 \text{ e } y^2 = 1 \quad (\text{III}) \end{array}\right.$$

Direitos Reservados

O gráfico da relação (I) é uma reta paralela ao eixo *Oy*, cujos pontos têm abscissa $x = -1$, contida apenas no 2º quadrante; a relação (III) é a reta paralela ao eixo *Ox*, cujos pontos têm ordenada $y = -1$, contida apenas no 4º quadrante e a relação (II) é a circunferência de centro $(0;0)$ e raio 1, contida apenas no 3º quadrante.



17. (alternativa B)
A circunferência circunscrita ao tetradecágono (14 lados) regular tem como diâmetros as diagonais $\overline{V_iV_{i+7}}$ $(1 \le i \le 7)$ do polígono, que são, portanto, hipotenusas dos triângulos retângulos cujo 3º vértice é qualquer um dos vértices diferentes das extremidades do diâmetro (ou da hipotenusa). Para cada hipotenusa há 12 vértices opostos possíveis. Como há 7 hipotenusas diferentes, concluímos que o número de triângulos retângulos assim formados é $7 \times 12 = 84$.

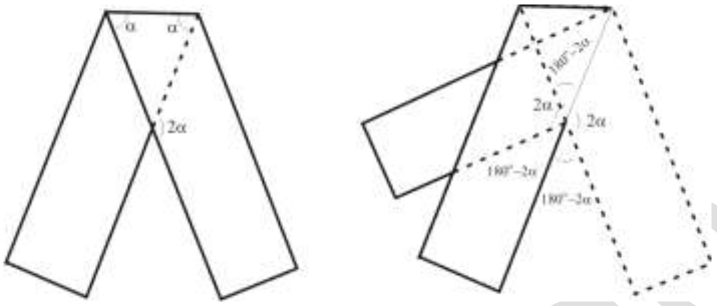
18. (alternativa E)
Dado um número inteiro positivo, qual resultado é maior: somar *k* ao mesmo ou multiplicá-lo por *k*, sendo *k* também um inteiro positivo? A resposta é simples: somente para k =1 a soma é maior que o produto. Portanto, a expressão com o maior valor possível é $1+2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$. Nenhum dos números primos 2, 3, 5 e 7 divide esse número. Se o número for primo, vai ser divisível por ele mesmo. Se não for, deverá haver algum fator primo menor que o número, que o divide. De fato, 11 é divisor desse número (fato não necessário para a resolução da questão).

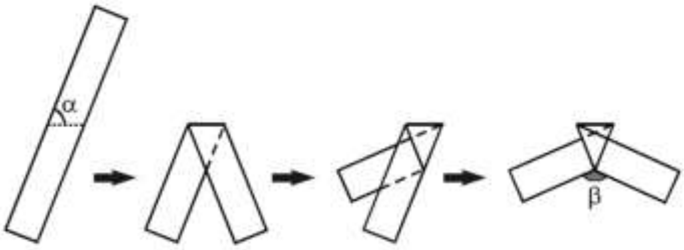
19. (alternativa A)
Como *x* e *y* são inteiros positivos e $xy = 105$, podemos supor $y < x$. Assim, da relação da desigualdade entre os lados de um triângulo temos $x - y < 13 < x + y$. Sabendo que $105 = 3\times5\times7$, podemos escrever 105 como os seguintes produtos de dois inteiros $1\times105 = 3\times35 = 5\times21 = 7\times15$. Os únicos fatores que obedecem à desigualdade são 15 e 7. Logo, o perímetro do triângulo é 15 + 7 + 13 = 35

Direitos Reservados

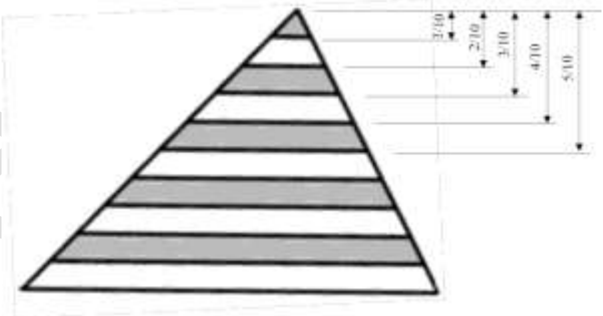
20. (alternativa C)
Após a primeira dobra-se, veem-se os ângulos assinalados na figura da esquerda. Depois da segunda dobra, os ângulos destacados na figura da direita. No final, decorrente da simetria da figura, fica evidente que $\beta = 3\left(180^{O} - 2\alpha\right) = 540^{O} - 6\alpha$.

Se $\alpha = 70^{O}$ então
$\beta = 540^{O} - 6\times 70^{O} = 120^{O}$





21. (alternativa C)
Cada um dos segmentos é a base de um triângulo semelhante ao triângulo maior. Como são paralelos e dividem cada um dos dois lados do triângulo em 10 partes iguais, concluímos que as razões de semelhança desses triângulos, em ordem crescente, são $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots$, conforme indicado na figura.



Seja S a área do triângulo original, antes da divisão. A área do menor triângulo, de cor cinza, é $\left(\frac{1}{10}\right)^2 S = \frac{1}{100}S$. O triângulo a seguir contendo uma faixa cinza, tem área $\frac{9}{100}S$; a área da faixa cinza dentro dele é a diferença entre sua área e a área do triângulo anterior na ordem crescente, ou seja $\frac{9}{100}S - \frac{4}{100}S = \frac{5}{100}S$. Raciocinando de forma análoga, concluímos que a área da próxima faixa cinza é $\frac{25}{100}S - \frac{16}{100}S = \frac{9}{100}S$ e assim sucessivamente. Portanto, a área da região cinza é igual a

$$\frac{1}{100}S + \frac{5}{100}S + \frac{9}{100}S + \frac{13}{100}S + \frac{17}{100}S = \frac{45}{100}S = 45\% \text{ de } S$$

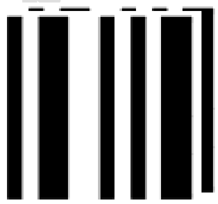
22. (alternativa D)
Como não houve empates na chegada, os números das posições dos corredores são os inteiros de 1 a 100, cuja soma é $\frac{100\times 101}{2} = 5050$. A diferença entre esse número e a soma dos números dados pelos corredores é 5050 – 4000 = 1050. O número de mentirosos diminui à medida que as diferenças entre a melhor posição, que dada pelo número 1, e a posições reais dos mentirosos são as maiores possíveis, a saber: 100 – 1 = 99, 99 – 1 = 98, etc. Uma estimativa grosseira do número de mentirosos é

Direitos Reservados

$\left\lceil \frac{1050}{100} \right\rceil = 11$. Temos $99+98+97+\ldots+89=1034$. Para a soma chegar a 1050, é preciso que algum mentiroso diga que chegou no 16º lugar. Portanto, o menor número possível de mentirosos é 12.

23. (alternativa D)
Se o número de pontos no terceiro lançamento é igual à soma dos pontos dos dois primeiros lançamentos, então o número total de possibilidades é o número de ternos $(x, y, x+y)$ tais que $1 \le x, y \le 6$ e $2 \le x+y \le 6$. Uma listagem nos leva a concluir que há 15 ternos nessas condições. Os casos que nos interessam são $(1,1,2),(1,2,3),(2,1,3),(2,2,4),(2,3,5),(2,4,6),(3,2,5),(4,2,6)$. Logo, a probabilidade de que o 2 tenha aparecido pelo menos uma vez é $\frac{8}{15}$.

24. (alternativa D)



O número de faixas é sempre ímpar (não pode haver um código do tipo PBBP, pois duas faixas brancas contíguas tornam-se uma só). O desenho é um exemplo de uma sequência de 9 faixas PBPBPBPBP. Uma vez conhecido o número de faixas de uma sequência desse tipo, precisamos saber qual a largura de cada uma das faixas, lembrando que a soma dessas larguras é 12. Para isto, basta permutar as faixas,
Seja *x* o número de faixas de largura 1 e *y* o número de faixas de largura 2. Temos $x+2y=12$ e as únicas possibilidades são

$x=2$ e $y=5$ $(x+y=7)$

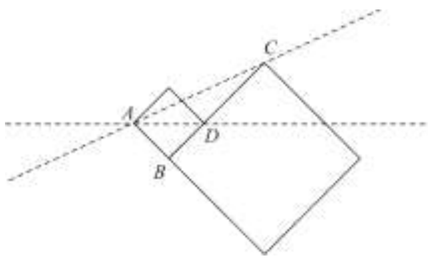
$x=6$ e $y=3$ $(x+y=9)$

$x=10$ e $y=1$ $(x+y=11)$

Para o primeiro caso, temos 2 faixas de largura 1 e 5 faixas de largura 2. Como a posição das cores é fixa, basta escolher os lugares das faixas de largura 1, num total de $\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!5!}=21$ códigos.

No segundo caso, o número de códigos é $\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!3!}=84$ e, para o terceiro caso, $\binom{11}{10}=\binom{11}{1}=11$.
Assim, o número total de códigos lidos da esquerda para a direita é 21 + 84 + 11 = 116.

25. (alternativa B)



No triângulo *ABC* temos *BC* = *a* e *AB* = *b*. No triângulo *ABD* temos $m(B\hat{A}D)=45^{O}$. Sabendo que $m(C\hat{A}D)=30^{O}$, podemos concluir que

$$\frac{a}{b}=\frac{BC}{AB}=\operatorname{tg}(C\hat{A}B)=\operatorname{tg}(30^{O}+45^{O})=\frac{\operatorname{tg}30^{O}+\operatorname{tg}45^{O}}{1-\operatorname{tg}30^{O}\cdot\operatorname{tg}45^{O}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}$$

Direitos Reservados

26. (alternativa B)

A soma de todos os números de 1 a 10 é $\frac{10\times 11}{2}=55$. Dez vezes essa soma resulta 550. A operação de tomar dois números quaisquer da lista de 10 números, somá-los e subtrair 1 da soma e escrever essa diferença no lugar desses dois números, deverá ser repetida 99 vezes (a quantidade de números da lista irá diminuir de um em um, até chegar a um só número). Portanto, a soma será reduzida em 99 unidades, resultando o número final 550 –99 = 451.

27. (alternativa C)
Temos

$$(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})=\frac{(2-3)}{(2-3)}\times(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})$$

$$=\frac{(2^2-3^2)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})}{-1}=\frac{(2^4-3^4)(2^4+3^4)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})}{-1}$$

$$=\frac{(2^{1024}-3^{1024})(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})}{-1}=\frac{(2^{2048}-3^{2048})(2^{2048}+3^{2048})}{-1}=3^{4096}-2^{4096}$$

Portanto $\frac{(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}=\frac{3^{4096}-2^{4096}+2^{4096}}{3^{2048}}=\frac{3^{4096}}{3^{2048}}=3^{2048}$

28. (alternativa E)
Sabemos que

$\sqrt{0,444\dots}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}=0,666\dots$ (dízimas periódicas – 4 e 6 repetem-se indefinidamente)

Portanto $\sqrt{0,\underbrace{444\dots4}_{100\,\text{vezes}}}=0,\underbrace{666\dots6}_{100\,\text{vezes}}\ \underbrace{ABC...}_{\text{outros algarismos}}$ (note que $\sqrt{0,\underbrace{444\dots4}_{100\,\text{vezes}}}\neq\sqrt{0,444\dots44\dots}$)

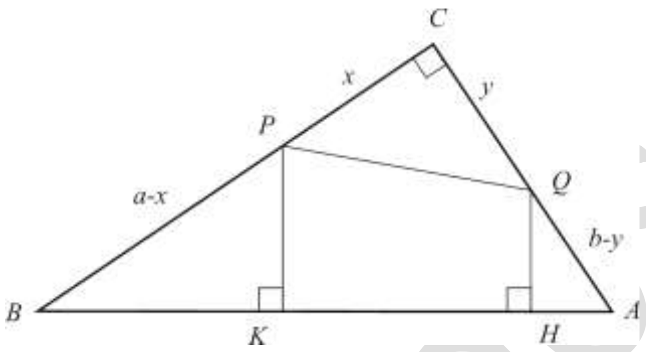
29. (alternativa C)
Como $2010=6\times 335$, podemos escrever

$$\left|\begin{array}{l}2f(6)+3f\left(\frac{2010}{6}\right)=5\cdot 6\\ 2f(335)+3f\left(\frac{2010}{335}\right)=5\cdot 335\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}2f(6)+3f(335)=30\\ 2f(335)+3f(6)=1675\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}-4f(6)-6f(335)=-60\\ 6f(335)+9f(6)=5025\end{array}\right.\Rightarrow 5f(6)=4695\Leftrightarrow f(6)=993$$

Direitos Reservados

30. (alternativa C)



Na figura, $BC = a, AC = b$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Fazendo $PC = x$ e $CQ = y$, como o triângulo *CPQ* é retângulo em *C*, temos $PQ = x^2 + y^2$. Mas

$$\Delta PBK \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{PK}{PB} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow PK = \frac{b}{c}(a - x)$$

$$\Delta QAH \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{QH}{QA} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow QH = \frac{a}{c}(b - y)$$

Assim,

$$KP + PQ + QH = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{b}{c}(a - x) + \frac{a}{c}(b - y) = \frac{2ab}{c} + \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{c}(bx + ay)}_{f(x,y)}$$

Sabemos que $(ax - by)^2 \geq 0$ para *a,b,x,y* reais quaisquer, em particular para $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$. Logo

$$a^2x^2 - 2axby + b^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 - 2axby \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)y^2 \geq a^2y^2 + 2axby + b^2x^2 \Leftrightarrow c^2(x^2 + y^2) \geq (ay + bx)^2$$

$$\Leftrightarrow c\sqrt{x^2 + y^2} \geq ay + bx \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{c}(ay + bx) \geq 0 \Leftrightarrow f(x,y) \geq 0$$

O valor mínimo de $KP + PQ + QH$ ocorre quando $f(x,y) = 0$, ou seja, quando $x = y = 0$. Esse valor é igual a $\dfrac{2ab}{c} = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (dobro da altura relativa à hipotenusa).

Nota: para $x = a$ e $y = b$, o comprimento do caminho é igual à hipotenusa *c*, que é maior ou igual ao dobro da altura relativa à mesma.

Direitos Reservados