JUROS

Geralmente ao comprar um produto a prazo, pagamos um valor maior do que se fosse pago à vista. E quando pegamos um empréstimo de algo, geralmente dinheiro, costumamos devolver um valor maior do que o valor inicial. O valor deste acréscimo é chamado de juro e ele depende de algumas condições que vamos conhecer nesta apostila.

Estudaremos dois tipos de juros: o simples e o composto. Quando falamos de juros, existe uma nomenclatura bem específica:

- O valor inicial da operação é chamado de **capital** e é representado por C;
- O valor do acréscimo é chamado de **juro** e é representado por J;
- O valor final da operação após o acréscimo é chamado de **montante** e é representado por M;
- A **taxa de juros** é representada por i;
- O **tempo** de aplicação é representado por t (juro simples) ou n (juro composto).

Esses dois tipos de juros dependem tanto da taxa de juros, quanto do período de tempo da aplicação. A diferença entre eles é que no **juro simples** o juro incide sempre sobre o **capital inicial**, que não se altera, o que torna o valor do juro simples constante, enquanto o **juro composto** incide sempre sobre o **capital atualizado** e, consequentemente, o valor do juro composto se atualiza também.

A principal relação da matemática financeira é dada por:

$$M = C + J \quad (1)$$

Vamos aos juros simples.

JUROS SIMPLES

Calculamos o juro simples a partir da relação:

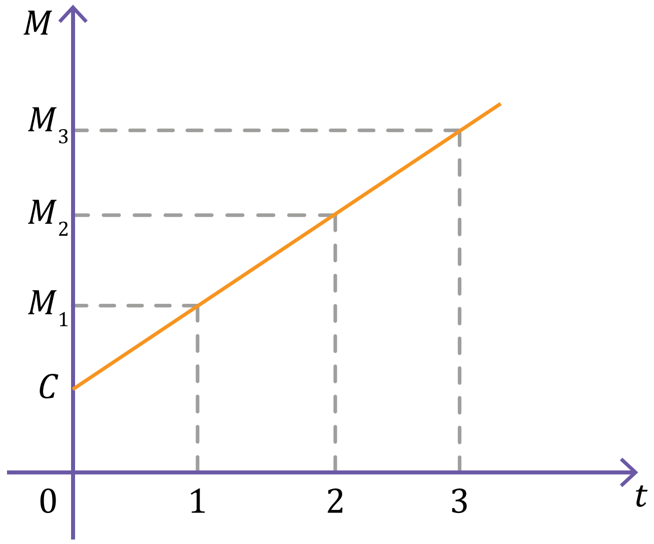
$$J = C \cdot i \cdot t$$

A partir da relação acima e da relação (1) podemos chegar em uma terceira relação dada por:

$$M = C + J$$
$$M = C + C \cdot i \cdot t$$
$$\boxed{M = C \cdot (1 + i \cdot t)}$$

O valor do capital e o valor da taxa de juros são fixos, porém o valor do montante é variável e essa variação ocorre em função do tempo, de forma linear.

Observação: A lei de formação do montante pode ser vista como uma função do primeiro grau e todo gráfico de uma função de primeiro grau é uma reta, conforme mostra o gráfico abaixo:



Na imagem acima, M_1 é o montante referente ao período 1, M_2 é o montante referente ao período 2, M_3 é o montante referente ao período 3 e assim sucessivamente até o último período da operação.

Sabendo estas informações, podemos focar agora em resolução de exemplos, mas antes, seguem algumas observações:

- **A taxa i deve ser usada na fórmula sempre em sua forma decimal.**

Exemplo: se a taxa dada for de 8%, como $8\% = \frac{8}{100}$, devemos considerar que a taxa é de 0,08.

- **O tempo e a taxa devem estar na mesma unidade!**

Se a taxa for ao ano, o tempo deve ser representado em ano. Se a taxa for ao mês, o tempo deve ser representado também em mês. E, se a taxa for ao dia devemos representar o tempo em dias.

Exemplos:

- Taxa 5% ao ano e tempo 3 meses. Devemos converter 3 meses em ano, como 3 meses equivale a 0,25 anos (ou $\frac{1}{4}$ de ano), o tempo será 0,25 anos.

- Taxa 1% ao mês e tempo 1 ano. Devemos converter 1 ano em meses. Logo, como 1 ano equivale a 12 meses, o tempo deverá ser 12 meses.

- Taxa 0,5% ao dia e tempo 2 meses. Devemos converter 2 meses em dias. E, como 2 meses equivale a 60 dias, o tempo deverá ser 60.

Vamos aos exemplos:

1. Qual o valor do montante produzido por um capital de R$ 1.200,00, aplicado no regime de **juros simples** a uma taxa mensal de 2% durante 10 meses?

Resolução: As informações do problema são as seguintes:

Capital: 1200

Taxa: $2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02 \text{ (ao mês)}$

Período: 10 meses

M: ?

Observação: Note que a taxa e o período estão representados na mesma unidade de tempo, portanto não é necessário fazer a conversão.

Perceba que o exercício perguntou qual é o montante produzido, sendo assim, utilizaremos a relação $M = C + J$ para encontrar o valor pedido. Como não sabemos o valor de J, precisamos primeiro calculá-lo para depois chegarmos no valor de interesse.

Substituindo os valores conhecidos na fórmula de juros simples, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 1200 \cdot 0{,}02 \cdot 10$$

$$J = 240$$

Isso quer dizer que gerou R$ 240,00 de juros. Para saber o montante, basta somar o capital com os juros.

$$M = 1200 + 240$$

$$M = 1440$$

O montante é de R$ 1440, 00.

2. Qual o montante ao final de 2 anos, de um valor de R$ 20.000,00 aplicado a uma taxa de 4% ao mês no regime de juros simples?

Resolução: As informações do problema são as seguintes:

C: 20000

i: $4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$ (ao mês)

t: 2 anos = 24 meses

M: ?

Observe que o tempo foi dado em anos, porém como a taxa está ao mês, o tempo foi convertido de anos para meses.

Da mesma forma que o exemplo anterior, calculando primeiro o valor de J temos:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 20000 \cdot 0{,}04 \cdot 24$$

$$J = 19200$$

Agora, para descobrirmos o montante:

$$M = C + J$$

$$M = 20000 + 19200$$

$$M = 39200$$

Ao final do período o montante será de R$ 39.200,00.

Observação: trouxemos dois exemplos em que o objetivo era encontrar o valor do montante, mas nada impede do exercício perguntar apenas o valor do juro, a taxa ou o tempo da aplicação.

Agora que já aprendemos sobre juro simples, vamos aos juros compostos.

JUROS COMPOSTOS

Vimos anteriormente que nos juros compostos devemos entender que os juros irão incidir sempre sobre o montante ao final de cada período, ou seja, sobre o capital atualizado.

Isso quer dizer que no primeiro período de tempo é calculado o juro sobre o capital e o montante passa a ser o valor do capital mais o juro. No segundo período de tempo, o juro calculado não é mais sobre o capital inicial, mas sim sobre o montante ao final do primeiro período. No terceiro período, calcula-se o juro sobre o montante gerado ao final do segundo período e assim por diante. Ou seja, o juro gerado em cada período será sempre maior que do período anterior.

No final do primeiro período o montante é dado por: $M = C \cdot (1 + i)$

Pelo raciocínio de acréscimos sucessivos temos que nos próximos períodos o valor do montante é dado por:

2º período: $M = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$

3º período: $M = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$

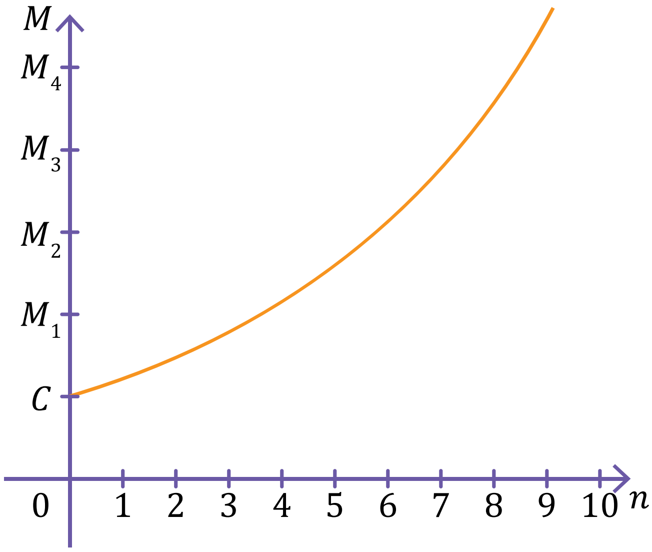
4º período: $M = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$

E assim por diante.

Desta forma, fica definido que para qualquer período de tempo n, a fórmula do montante será:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Como os valores do capital e da taxa de juros são fixos, percebemos pela igualdade acima que o valor do montante varia conforme o tempo de forma exponencial. Observe o gráfico abaixo:



Para saber o valor do juro gerado, basta calcular o valor do montante e subtrair, dele, o capital, ou seja:

$$J = M - C$$

A partir da relação acima e da relação do montante podemos chegar em uma terceira relação dada por:

$$J = M - C$$
$$J = C \cdot (1 + i)^n - C$$
$$J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

O juro composto é popularmente conhecido como "juro sobre juro" e é o sistema mais usado em investimentos e aplicações financeiras.

Para melhor fixação, veremos alguns exemplos.

Observação: se o exercício não especificar qual é o regime de juros, adotamos o juro composto na resolução.

Exemplos:

1. Uma pessoa pega um empréstimo de R$ 15.000,00 com um banco por um período de 4 meses, e com uma taxa de 10% ao mês, no regime de juros compostos. Qual o valor de juro que ela pagará no final do período?

Resolução: As informações do problema são as seguintes:

C: 15000

t: 4 meses

i: 10% = 0,1 (ao mês)

J: ?

Primeiramente vamos calcular o valor do montante gerado nesse período:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 15000 \cdot (1+0,1)^4$$

$$M = 15000 \cdot (1,1)^4$$

$$M = 15000 \cdot 1,4641$$

$$M = 21961,50$$

Isso quer dizer que o montante é de R$ 21961,50. Para saber o valor do juro, basta subtrair o capital do montante. Essa diferença é o valor que está sendo pago de juros.

$$\mathrm{J} = \mathrm{M} - \mathrm{C}$$

$$\mathrm{J} = 21961,5 - 15000$$

$$\mathrm{J} = 6961,50$$

Ou seja, essa pessoa irá pagar R$ 6961,50 de juros.

2. Apliquei R$ 30.000,00 na poupança, com uma taxa de 0,5% ao mês. Qual será o saldo da minha poupança daqui a 4 anos, caso eu não retire e nem coloque mais nenhum valor?

Resolução: As informações do problema são as seguintes:

C: 30000

i: 0,5% = 0,005 (ao mês)

t: 4 anos = 48 meses

M: ?

Queremos encontrar o valor do montante gerado no período:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 30000 \cdot (1 + 0{,}005)^{48}$$

$$M = 30000 \cdot (1{,}005)^{48}$$

$$M = 38114{,}67$$

Portanto, o saldo da poupança daqui a 4 anos será R$ 38.114,67.

JURO SIMPLES E JURO COMPOSTO

Algumas vezes os exercícios misturam juros compostos com juros simples. Veja alguns exemplos abaixo:

1. Maria tem duas opções: aplicar R$ 100.000,00 no regime de juro simples com taxa de 8% ao ano ou aplicar no regime de juro composto com taxa de 3% ao ano, por 2 anos. Qual das duas aplicações dará o maior retorno à Maria?

Resolução:

Pensando primeiro no juro simples temos:

$$M = C(1 + i \cdot t)$$

$$M = 100.000 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 2)$$

$$M = 100.000 \cdot (1{,}16)$$

$$M = 116.000$$

Agora, no regime de juro composto temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 100.000 \cdot (1 + 0{,}03)^2$$

$$M = 100.000 \cdot (1{,}03)^2$$

$$M = 106.090$$

Neste caso, o regime de juro simples é mais vantajoso.

Percebemos por este exemplo que dependendo das condições, o juro simples é mais vantajoso que o composto.

Agora, supondo que agora as duas taxas são de 8% ao ano, qual regime de juro é mais vantajoso?

Já sabemos que neste caso para juro simples temos: $M = 116.000$

No caso do juro composto vamos ter:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 100.000 \cdot (1 + 0{,}08)^2$$

$$M = 100.000 \cdot (1{,}08)^2$$

$$M = 116.640$$

Neste caso o juro composto se torna mais vantajoso.

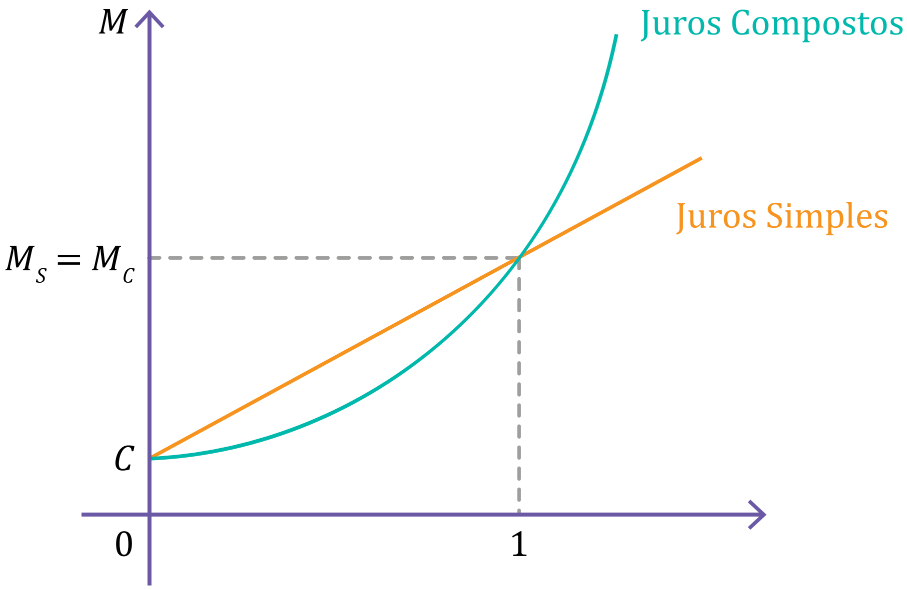
A pergunta que surge agora é: será que existe algum período de tempo em que os montantes resultantes de cada regime de juro são equivalentes? Sim, existe! Considerando M_s o montante gerado através do juro simples e M_c o montante gerado através do juro composto, a taxa de juros e t o período de tempo, temos:

$$M_s = M_c$$

$$C \cdot (1 + i \cdot t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$1 + i \cdot t = (1 + i)^t$$

Perceba que os valores de t que satisfazem a igualdade são $t = 0$ e $t = 1$. O tempo $t = 0$ equivale ao início da operação, ou seja, equivale apenas ao capital inicial. Depois os montantes se igualam apenas em $t = 1$. Este fato está ilustrado na imagem abaixo:



Observação: só podemos fazer essa comparação e garantir que os montantes se igualam em $t = 1$ quando os dois regimes de juros possuírem **mesmo capital e mesma taxa**.

Perceba pelo gráfico que para períodos menores que $t = 1$ (não nos preocupando com a unidade de tempo), o juro simples é mais vantajoso em uma aplicação, enquanto para períodos maiores que $t = 1$ o juro composto é mais vantajoso.

No nosso exemplo anterior, tornando a taxa de juros iguais a 8% ao ano e fazendo $t = 2$ anos, descobrimos que é mais vantajoso o juro composto, o que condiz com o fato explicado acima.

Neste mesmo exemplo, fazendo $t = 0{,}5$ anos temos:

No juro simples:

$$M = C(1 + i \cdot t)$$
$$M = 100.000 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 0{,}5)$$
$$M = 100.000 \cdot (1{,}16)$$
$$M = 104.000$$

No juro composto:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M = 100.000 \cdot (1 + 0{,}08)^{0{,}5}$$
$$M = 100.000 \cdot (1{,}08)^{0{,}5}$$
$$M = 103.923{,}05$$

O que condiz novamente com o exposto anterior que para $t < 1$ o juro simples é mais vantajoso.

O exercício ainda pode misturar os dois regimes de juros, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo: João investiu R$ 1.000,00 por 1 ano. Nos 4 primeiros meses, ele optou pelo regime de juro simples a uma taxa de 5% ao ano. Nos demais meses, ele optou pelo regime de juro composto a uma taxa de 2% ao ano. Passado 1 ano, quanto João possui de dinheiro?

Resolução: As informações do problema são as seguintes:

C: 1.000

t: 1 ano

M: ?

Neste exemplo, primeiro descobrimos o montante por juro simples nos 3 primeiros meses. Esse montante será o capital do regime do juro composto:

No regime de juro simples:

$$M = C(1 + i \cdot t)$$
$$M = 1.000\left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{1}{3}\right)$$
$$M = 1.016{,}67$$

No regime de juro composto:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1.016{,}67(1 + 0{,}02)^{\frac{2}{3}}$$

$$M = 1.016{,}67 \cdot 1{,}01$$

$$M = 1.030{,}18$$

Sendo assim, no final de 1 ano João terá R$1.030,18.

Perceba as conversões de unidade: 4 meses equivale a $\frac{1}{3}$ de ano e 8 meses equivale a $\frac{2}{3}$ de ano.

Observação: é bastante comum nos exercícios de juros aparecerem números decimais.

PRICE E SAC

Existem também outras tabelas usadas pelo sistema financeiro para cobrar os juros de empréstimos. As duas mais usadas são a tabela Price e a tabela SAC. A tabela Price é a mais usada em empréstimos de curto prazo, como empréstimos consignados, empréstimos para aquisição de bens materiais como carros, motocicletas, materiais de construção, entre outros.

Já a tabela SAC é a tabela usada nos financiamentos de longo prazo, como o financiamento para a compra de terrenos e imóveis, por exemplo.

ANOTAÇÕES