MATEMÁTICA APLICADA

1

A Durante suas férias na Espanha, Marta trocou 600 dólares por euros ao câmbio de 0,85 euro por dólar. Ela gastou $\frac{2}{3}$ dos euros que recebeu e trocou o restante por dólares ao câmbio de 1,25 dólares por euro. Quantos dólares ela recebeu?

B Uma floricultura tem de fazer buquês para um casamento usando rosas brancas e rosas vermelhas. A razão do número de rosas brancas para o número de rosas vermelhas tem de ser a mesma em cada buquê. Se há 18 rosas brancas e 78 rosas vermelhas, qual é o maior número de buquês que podem ser formados usando todas as 96 rosas? Quantas rosas brancas e quantas rosas vermelhas vão em cada buquê?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Marta recebeu $600.0{,}85 = 510$ euros

Gastou $\frac{2}{3}.510 = 340$ euros e sobraram $510 - 340 = 170$ euros.

Ela recebeu no final $170.1{,}25 = 212{,}50$ dólares.

B O número de rosas brancas tem de ser um fator de 18: $1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 9 \ 18$.
O número de rosas vermelhas tem de ser um fator de 78: $1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 13 \ 26 \ 39 \ 78$.
Como a razão do número de rosas brancas para o número de rosas vermelhas, tem de ser a mesma em cada buquê, podem ser formados 1, 2, 3 ou 6 buquês.
O maior número de buquês que podem ser formados é 6.
Em cada buquê vão 3 rosas brancas e 13 rosas vermelhas.

2

A Se $1 < x < y < z$, é correto afirmar que $y(x+z) > x(y+z)$? Justifique a resposta.

B Se S é a soma dos inversos dos números inteiros consecutivos de 101 a 200, inclusive 101 e 200, demonstre que $\frac{1}{2} < S < 1$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Como $y > x$ e $z > 1$, temos que $yz > xz$ e também que $xy + yz > xy + xz$.
Portanto: $y(x+z) > x(y+z)$.

B Como $\frac{1}{200}$ é menor do que qualquer um dos 99 números $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \ldots, \frac{1}{199}$, a soma de 99 parcelas iguais a $\frac{1}{200}$ é menor que $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \ldots + \frac{1}{199}$, e se adicionarmos $\frac{1}{200}$ aos dois membros da inequação, obtemos: $100.\frac{1}{200} < S$ e $\frac{1}{2} < S$.

Do mesmo modo, como $\frac{1}{100}$ é maior que qualquer um dos 100 números $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \ldots, \frac{1}{199}$, $\frac{1}{200}$ temos que: $S < 100.\frac{1}{10}$, ou seja, $S < 1$.

Portanto: $\frac{1}{2} < S < 1$.

MATEMÁTICA APLICADA

3

A Um código de três algarismos para certas fechaduras usa os algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 de acordo com as seguintes restrições: o primeiro algarismo não pode ser 1 ou 2; o segundo algarismo tem de ser 1 ou 2; e o segundo e terceiro algarismos não podem ser, ambos, 1 no mesmo código. Quantos códigos diferentes são possíveis?

B Cada um dos 11 participantes de um congresso de cardiologia vai ser identificado com uma senha diferente consistindo ou de uma simples letra ou de um par de letras distintas escritas em ordem alfabética. Qual é o menor número de letras que pode ser usado?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Se o primeiro algarismo não pode ser nem 1, nem 2, há 7 possibilidades para o primeiro algarismo do código.
Como o segundo algarismo tem de ser 1 ou 2, há 2 possibilidades para o segundo algarismo.
Se não houvesse restrições, teríamos 9 possibilidades para o terceiro algarismo.
O número de códigos possíveis seria 7x2x9 = 126.
Mas com as restrições, temos de eliminar 3-1-1; 4-1-1; ...; 9-1-1, ou seja, 7 códigos. São possíveis 126 – 7 = 119 códigos diferentes.

B Com duas letras, por exemplo a e b: a, b, ab temos 3 senhas.
Com três letra a, b e c: a, b, c, ab, ac, bc temos 6 senhas.
Com quatro letras a, b, c e d: $a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd$ temos 10 senhas.
Já seria suficiente para afirmarmos que com mais de quatro letras teríamos mais de 10 senhas.
O menor número de letras que pode ser usado são 5 letras.

4

A Se n é um número inteiro positivo, qual é o resto da divisão de $(n+2).(n^3-n)$ por 6?

B Se $xy \neq 0$ e $x^2y^2-xy=6$, calcule os possíveis valores numéricos da expressão algébrica xy.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Note que: $(n+2).(n^3-n)=(n+2)n(n^2-1)=(n+2)n(n+1)(n-1)$

Assim $(n-1)n(n+1)(n+2)$ são quatro números inteiros e consecutivos.

Dois desses números são necessariamente números pares e outro é divisível por 3.

Se $(n+2).(n^3-n)$ é divisível por 2 e por 3, então é divisível por 6 e o resto é igual a 0.

B

$x^2y^2-xy-6=0$

$(xy)^2-xy-6=0$

Note que as raízes desta última equação são -2 e 3.

$(xy+2).(xy-3)=0 \rightarrow xy=-2$ ou $xy=3$.

Os valores numéricos da expressão algébrica xy são -2 ou 3.

5

A Se $\frac{5}{28}$ do total de bolas nas três sacolas da tabela abaixo são vermelhas, quantas bolas estão na sacola B?

Sacola	Número de bolas em cada uma das três sacolas	Porcentagem de bolas vermelhas em cada uma das três sacolas
A	36	25%
B	N	12,5%
C	32	12,5%

B É correto afirmar que o número real $\sqrt{6{,}3\ x\ 10^{11}}$ é aproximadamente igual a 800 000? Justifique a resposta.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Em A temos $36.25\%=9$ bolas vermelhas.

Em B temos $N.12{,}5\%=0{,}125N$ bolas vermelhas.

Em C temos $32.12{,}5\%=4$ bolas vermelhas.

Como $\frac{5}{28}$ do total de bolas são vermelhas, temos a equação:

$$9+0{,}125N+4=\frac{5}{28}(36+N+32)$$

$$N=16$$

Na sacola B estão 16 bolas vermelhas.

B $\sqrt{6{,}3\ x\ 10^{11}} = \sqrt{63}.\sqrt{10^{10}}$

$\sqrt{63} \approx \sqrt{64} = 8 \quad \approx \sqrt{64}.10^{5} \approx 8.100000 = 800000$

6 Se n é um número inteiro maior que 6, demonstre que $(n-4)n(n+1)$ é divisível por 3. Recorde que o resto da divisão de um número inteiro positivo por 3 é igual a 0, igual a 1 ou igual a 2.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Se n é divisível por 3, a expressão $(n-4)n(n+1)$ é divisível por 3.

Se n não é divisível por 3 e o resto é 1, temos:

$n=3p+1$

$(n-4)n(n+1) = (3p+1-4)(3p+1)(3p+5) = 3(p-1)(3p+1)(3p+5)$ que é divisível por 3 por causa do fator 3.

Se n não é divisível por 3 e o resto é 2, temos:

$n=3p+2$

$(n-4)n(n+1) = (3p+2-4)(3p+2)(3p+2+1) = (3p-2)(3p+2)3(p+1)$ que é divisível por 3 por causa do fator 3.

MATEMÁTICA APLICADA

7 Durante suas férias, Marta fez uma programação para ler 9 *e-books* que ela baixou pela internet. O número de páginas de cada livro e a ordem em que ela planeja ler os livros são mostrados na tabela abaixo. Ela decidiu ler exatamente 60 páginas por dia, com uma exceção: ela nunca começará a ler o próximo livro no mesmo dia em que ela termina o anterior. Assim, em alguns dias, Marta lê menos de 60 páginas. Após 21 dias, quantos livros ela terminou de ler?

	1º livro	2º livro	3º livro	4º livro	5º livro	6º livro	7º livro	8º livro	9º livro
Número de páginas de cada um	**260**	**115**	**218**	**245**	**154**	**75**	**201**	**60**	**163**

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

1º ebook : 60 páginas em 4 dias (240 no total) e 20 páginas no 5º dia
2º ebook : 60 páginas em 1 dia (60 nototal) e 55 páginas no 7º dia
3º ebook : 60 páginas em 3 dias (180 no total) e 38 páginas no 10º dia
4º ebook: 60 páginas em 4 dias (240 no total) e 5 páginas no 15º dia
5º ebook: 60 páginas em 2 dias (120 no total) e 34 páginas no 18º dia
6º ebook: 60 páginas em 1 dia (60 no total) e 15 páginas no 21º dia

Ela terminou de ler seis ebooks.

MATEMÁTICA APLICADA

8 Um programa de matemática com o uso de computador foi experimentado em duas classes de cada uma de 28 escolas de Ensino Médio. O programa envolvia 50 professores de matemática. Cada classe tinha um único professor e cada professor tinha de ensinar em ao menos uma classe e, no máximo, em três classes. Seja *x* o número de professores alocados em apenas uma classe, *y* o número de professores alocados exatamente em duas classes e *z* o número de professores alocados exatamente em três classes. Quais são os possíveis valores de *x*, *y* e *z*?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

O total de classes é igual a 2 x 28 = 56.

Considere:
x é o número de professores que aplica o programa em 1 classe.
y é o número de professores que aplica o programa em 2 classes.
z é o número de professores que aplica o programa em 3 classes.

Então :

$$x+y+z=50$$
$$x+2y+3z=56$$

Subtraindo as equações obtemos: $y + 2z = 6$.
Como $y = 6 – 2y$ e estamos trabalhando com números inteiros, temos:

$y = 6 – 2z$ e $2z \leq 6 \rightarrow z \leq 3$

As possíveis soluções são:

$z = 3$, $y = 0$ e $x = 47$;
$z = 2$, $y = 2$ e $x = 46$;
$z = 1$, $y = 4$ e $x = 45$;
$z = 0$, $y = 6$ e $x = 44$.

9

A Nos últimos *N* dias, a média aritmética diária na produção de tênis de uma empresa foi de 70 unidades. Hoje, a produção de 90 unidades elevou a média aritmética para 75 unidades diárias. Qual é o valor de *N*?

B Uma empresa produz computadores em três cidades diferentes. Mensalmente, a soma dos computadores produzidos nas três cidades é o triplo da produção de computadores de uma das cidades. É correto afirmar que a mediana das três quantidades é igual à média aritmética das três quantidades?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Seja x a produção total nos últimos N dias.
Podemos expressar o enunciado do problema em duas equações:

$$70=\frac{x}{N}$$

$$75=\frac{x+90}{N+1}$$

Resolvendo o sistema de equações determinamos o valor de N: 3dias.

B Sejam x, y e z as quantidades de computadores produzidos das três cidades com $x<y<z$.
Temos de analisar 3 situações.

1ª $x+y+z=3x$

Portanto: $y+z-2x=0 \rightarrow (y-x)+(z-x)=0$ que é uma afirmação falsa, pois as duas parcelas são positivas e a soma não pode ser 0.

2ª $x+y+z=3y$

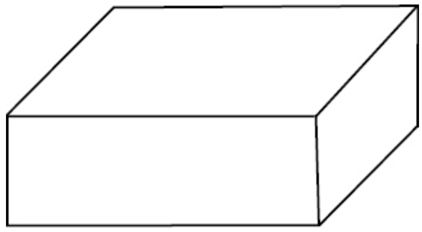
Portanto: $x+y+z=3y \rightarrow y=\dfrac{x+y+z}{3}$

Neste caso a mediana é igual à média aritmética.

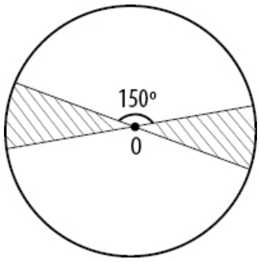
3ª Se $x+y+z=3z$ temos $(x-z)+(y-z)$ que é uma afirmação falsa, pois a soma de duas parcelas negativas nunca vai ser igual a 0.
Portanto, podemos afirmar que a mediana das três quantidades é igual à média aritmética das três quantidades.

10

A No paralelepípedo reto-retângulo da figura, as três faces visíveis têm áreas de 10, 18 e 45 centímetros quadrados, respectivamente. Qual é o volume do sólido geométrico?



B O número real que expressa o comprimento da circunferência de centro O da figura é um oitavo do número real que expressa a área do círculo. Qual é a área da região hachurada?



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Expressamos as arestas do prisma por x, y e z.

Temos: $xy=10\,;yz=18\,;xz=45$

Multiplicando membro a membro as equações temos que:

$x^2y^2z^2=8100 \rightarrow xyz=90$

O volume do sólido geométrico é 90 cm³.

B $2\pi r=\frac{1}{8}\pi r^2$

$16=r$

A área da região hachurada é $\frac{1}{6}\pi\,.16^2=\frac{128}{3}\pi$.