

H. Moysés  
Nussenzveig



4 Ótica  
Relatividade  
Física Quântica

CURSO DE  
FÍSICA  
BÁSICA





**H. MOYSÉS NUSSENZVEIG**  
Professor Emérito do Instituto de Física da  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

*Curso de*  
**FÍSICA BÁSICA 4**  
**ÓTICA**  
**RELATIVIDADE**  
**FÍSICA QUÂNTICA**



© 1998 H. Moysés Nussenzveig

1ª edição – 1998

8ª reimpressão – 2010

*É proibida a reprodução total ou parcial  
por quaisquer meios  
sem autorização escrita da editora.*

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.  
Rua Pedroso Alvarenga, 1245 – 4º andar  
04531-012 – São Paulo, SP – Brasil  
Tel.: (55\_11) 3078-5366  
e-mail: editora@blucher.com.br  
site: www.blucher.com.br

ISBN 978-85-212-0163-2

*Impresso no Brasil Printed in Brazil*

#### FICHA CATALOGRÁFICA

Nussenzveig, Herch Moysés

Curso de Física básica – vol. 4 / H. Moysés Nussenzveig –  
1ª edição - - São Paulo: Editora Blucher, 1998.

Bibliografia.

ISBN 978-85-212-0163-2

Conteúdo: Ótica, relatividade, física quântica

1. Física I. Título.

04-5239

CDD-530

Índices para catálogo sistemático:

1. Física 530



# CONTEÚDO

CAPÍTULO 1 — INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 — ÓTICA GEOMÉTRICA .....	3
2.1 Propagação retilínea da luz .....	3
2.2 Reflexão e refração .....	6
2.3 O Princípio de Fermat .....	11
2.4 Reflexão total .....	15
2.5 Espelho plano .....	16
2.6 Espelho esférico .....	18
2.7 Superfície refratora esférica .....	24
2.8 Lentes delgadas .....	27
2.9 Noções sobre instrumentos óticos .....	32
2.10 Propagação num meio inomogêneo .....	35
2.11 A analogia ótico-mecânica .....	39
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 2 .....	45
CAPÍTULO 3 — INTERFERÊNCIA .....	51
3.1 Interferência de ondas .....	51
3.2 Análise do experimento de Young .....	56
3.3 Interferência em lâminas delgadas .....	59
3.4 Discussão das franjas de interferência .....	64
3.5 Interferômetros .....	69
3.6 Coerência .....	73
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 3 .....	80
CAPÍTULO 4 — DIFRAÇÃO .....	83
4.1 O conceito de difração .....	83
4.2 O Princípio de Huygens-Fresnel .....	84
4.3 O método das zonas de Fresnel .....	86
4.4 Difração de Fresnel: discussão qualitativa .....	93



4.5 Difração de Fraunhofer .....	98
4.6 Abertura retangular .....	103
4.7 Difração de Fraunhofer por uma fenda.....	106
4.8 Abertura circular. Poder separador .....	109
4.9 Par de fendas e rede de difração .....	113
4.10 Dispersão e poder separador da rede.....	118
4.11 Difração de raios X .....	122
4.12 Holografia .....	128
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4.....	134
CAPÍTULO 5 — POLARIZAÇÃO .....	137
5.1 Equações de Maxwell num meio transparente.....	137
5.2 Vetor de Poynting real e complexo.....	140
5.3 Ondas planas monocromáticas. Polarização.....	144
5.4 Atividade ótica natural.....	149
5.5 Condições de contorno.....	152
5.6 Reflexão e refração. Fórmulas de Fresnel .....	154
5.7 Refletividade .....	158
5.8 Polarização por reflexão .....	160
5.9 Reflexão total.....	164
5.10 Penetração da luz no meio menos denso .....	167
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 5.....	171
CAPÍTULO 6 — INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE.....	175
6.1 O Princípio de Relatividade na Eletrodinâmica.....	175
6.2 O experimento de Michelson e Morley.....	178
6.3 A relatividade da simultaneidade.....	183
6.4 A transformação de Lorentz .....	186
6.5 Efeitos cinemáticos da TL.....	191
6.6 A lei relativística de composição de velocidades .....	196
6.7 Intervalos .....	199
6.8 O efeito Doppler.....	203
6.9 Momento relativístico.....	208
6.10 Energia relativística .....	212
6.11 A inércia da energia.....	216



6.12 O espaço-tempo de Minkowski .....	219
6.13 Noções sobre relatividade geral .....	223
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 6 .....	240
CAPÍTULO 7 — OS PRIMÓRDIOS DA TEORIA QUÂNTICA .....	245
7.1 Introdução .....	245
7.2 A hipótese de Planck .....	246
7.3 O efeito fotoelétrico .....	249
7.4 O efeito Compton .....	254
7.5 Rutherford e a descoberta do núcleo .....	257
7.6 Espectros atômicos .....	260
7.7 O modelo atômico de Bohr .....	262
7.8 As ondas de de Broglie .....	272
7.9 A equação de Schrödinger para estados estacionários .....	275
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 7 .....	279
CAPÍTULO 8 — PRINCÍPIOS BÁSICOS DA TEORIA QUÂNTICA ...	283
8.1 A dualidade onda-partícula .....	283
8.2 A interpretação probabilística .....	288
8.3 Estados de polarização da luz .....	291
8.4 Vetores de estado .....	293
8.5 Observação binária. Polarização circular .....	296
8.6 Observáveis .....	298
8.7 Representações. Matrizes .....	301
8.8 Regras para observáveis .....	307
8.9 Momento angular do fóton .....	311
8.10 Relação de incerteza .....	315
8.11 Descrição quântica da atividade ótica natural .....	322
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 8 .....	328
CAPÍTULO 9 — A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER .....	333
9.1 A equação de Schrödinger unidimensional .....	333
9.2 Conjugado hermiteano .....	337
9.3 Operadores posição e momento .....	340
9.4 O teorema de Ehrenfest .....	343



9.5 Autofunções do momento .....	344
9.6 Densidade de corrente de probabilidade .....	345
9.7 Partículas livres .....	347
9.8 A equação de Schrödinger tridimensional .....	351
9.9 A relação de incerteza .....	354
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 9 .....	356
CAPÍTULO 10 — SISTEMAS QUÂNTICOS SIMPLES .....	359
10.1 Estados estacionários em uma dimensão .....	359
10.2 Degrau de potencial .....	361
10.3 Partícula confinada .....	369
10.4 Barreira de potencial retangular .....	379
10.5 Estado fundamental do átomo de hidrogênio .....	387
10.6 Spin e Princípio de Exclusão .....	393
10.7 Movimento de elétrons em cristais .....	395
10.8 A interpretação da mecânica quântica .....	406
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 10 .....	414
RESPOSTAS DOS PROBLEMAS .....	417
BIBLIOGRAFIA .....	425
ÍNDICE .....	427

## PREFÁCIO

Neste volume final da série *Física Básica*, concluímos a apresentação da física clássica e abordamos a física do século XX. A concepção mantém-se fiel aos objetivos adotados em toda a obra: enfatizar as idéias e princípios fundamentais. Esperamos que a conclusão do projeto torne aparente a estreita unidade e interligação entre os diferentes volumes.

Os capítulos 2 a 5 são dedicados à ótica. Na ótica geométrica, destaca-se a bela analogia ótico-mecânica de Hamilton, de grande relevância na introdução da física quântica e na compreensão de seu relacionamento com a física clássica.

Os fenômenos da ótica ondulatória desempenham um papel não menos importante na transição para a mecânica quântica, justificando um tratamento mais completo do que é usual neste nível. Nas aplicações, foram incluídas difração de raios X e holografia.

O capítulo sobre polarização também mereceu destaque especial, pois é usado como base para a formulação dos princípios da física quântica. Em particular, a reflexão total frustrada ilustra os efeitos de tunelamento.

Na introdução à relatividade restrita (capítulo 6), são discutidos cuidadosamente todos os efeitos cinemáticos da transformação de Lorentz e é dada uma breve apresentação da dinâmica relativística, incluindo a inércia da energia. Há também uma introdução qualitativa à relatividade geral.

No capítulo 7, é revisto o desenvolvimento histórico que levou à formulação da mecânica quântica. São introduzidas as ordens de grandeza básicas características da escala atômica. O acompanhamento em paralelo no laboratório, indispensável em todo o curso, é especialmente importante nesta parte.

É nos capítulos de 8 a 10, que contém a introdução à física quântica, que o tratamento mais diverge dos usuais. Em lugar de desenvolver a mecânica ondulatória, fomentando a ilusão de que basta estender um pouco as idéias sobre ondas clássicas, enfatiza-se o caráter radical das mudanças introduzidas pela quantização, procurando formular os princípios de forma a servir como base correta para generalizações ulteriores.

A formulação dos princípios da teoria quântica é inteiramente baseada no conceito de estados de polarização de fótons, que permite introduzi-los corretamente,

utilizando a intuição desenvolvida na ótica e com grande economia, a exemplo do que foi feito por Dirac no capítulo inicial de seu extraordinário tratado.

A extensão à equação de Schrödinger, no capítulo 9, torna-se natural, generalizando o formalismo sem alterar os princípios básicos. As aplicações, no capítulo 10, visam ilustrar os mais importantes efeitos quânticos e os principais tipos de espectros de energia encontrados, incluindo os espectros de bandas da física dos sólidos.

A última seção trata da interpretação da mecânica quântica, tema em que tem havido importantes progressos recentes, tanto teóricos como experimentais.

Consideramos inteiramente inútil incluir os habituais capítulos sobre física “moderna” (física atômica, nuclear e de partículas de altas energias), pois só podem limitar-se, neste nível, ao caráter de divulgação científica. Para a formação de engenheiros, em especial, devem ser incluídos num curso independente posterior. A base de física quântica aqui fornecida permite acesso a esses tópicos sem maiores dificuldades.

Mesmo assim, este volume é apreciavelmente mais extenso que os anteriores. O material foi todo ministrado pelo autor, mais de uma vez, em um semestre, com seis horas de aula semanais. Em cursos mais compactos, será necessária uma seleção.

Como nos volumes anteriores, os problemas no final de cada capítulo foram cuidadosamente escolhidos para ilustrar e testar a compreensão da matéria. Listas de problemas e um curso paralelo de laboratório são essenciais.

Atribui-se a Dirac a observação de que nunca se deve iniciar uma frase sem saber como se vai terminá-la. Se o autor tivesse pressentido, ao empreender esta obra, que demoraria quase vinte anos para completá-la, é possível que não a tivesse levado a cabo. O estímulo para fazê-lo veio principalmente dos estudantes, a quem ela é dedicada. Entretanto, teria sido inviável sem a compreensão e o apoio de minha esposa Micheline, a quem reitero todo o meu reconhecimento.

Agradeço ainda à Fundação José Bonifácio, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pelo seu auxílio.

Rio de Janeiro, 7 de julho de 1998

H. Moysés Nussenzveig



# 1

# INTRODUÇÃO

○ que é a luz? Como se propaga? Como é gerada?

Essas são algumas das questões fundamentais que abordaremos na primeira parte deste curso.

Vamos discutir de início alguns dos aspectos mais simples da propagação da luz, parcialmente conhecidos desde a antigüidade, objeto da *ótica geométrica*.

Os fenômenos da ótica geométrica são compatíveis com a *teoria corpuscular da luz*, da qual se costuma (erroneamente) citar Newton como principal partidário. A teoria rival, a *teoria ondulatória da luz*, teve sua primeira grande contribuição no “Tratado sobre a Luz” de Christian Huygens, publicado em 1690, onde se encontra formulado o *Princípio de Huygens*, que desempenha um papel fundamental no tratamento da propagação de ondas.

A “Ótica” de Newton, publicada em 1704 e revista em 1717, é uma obra extraordinária. Relata seus resultados sobre a decomposição espectral da luz branca e observações de efeitos ondulatórios, como os anéis de Newton, incluindo determinações precisas de comprimentos de onda. As idéias de Newton sobre a luz combinavam as teorias corpuscular e ondulatória, lembrando um pouco a atual teoria quântica.

O triunfo da teoria ondulatória sobreveio no início do século passado, com os trabalhos de Thomas Young e Augustin Fresnel sobre os efeitos de *interferência e difração*.

A obra de Huygens já continha uma discussão dos efeitos de dupla refração, relacionados com a *polarização* da luz, que também foram discutidos por Newton e depois por Fresnel, levando à conclusão de que as ondas de luz são *transversais*, e não longitudinais como as de som.

Vimos no curso de eletromagnetismo (*Fís. Bás. 3*) que Maxwell, em 1861, após formular as equações básicas do campo eletromagnético, deduziu delas a existência

de ondas eletromagnéticas, propagando-se com a velocidade da luz, levando-o a inferir que a luz é uma onda eletromagnética. A confirmação experimental da *teoria eletromagnética da luz* resultou das experiências de Hertz, em 1888, em que produziu ondas eletromagnéticas (de rádio) e mostrou que tinham propriedades análogas às da luz. A antena dipolar que empregou constitui o modelo clássico mais simples do processo de *geração* de ondas eletromagnéticas.

Tentativas de detectar um suporte material das ondas (o “éter”) culminaram na experiência de Michelson e Morley, em 1887, cujo resultado negativo, juntamente com outras evidências da inexistência do éter, foi uma das origens da *teoria da relatividade restrita*, formulada por Einstein em 1905, que discutiremos na segunda parte do curso.

Curiosamente, foi nas experiências de Hertz, feitas para comprovar a teoria eletromagnética da luz, que ele observou as primeiras evidências do *efeito fotoelétrico*, que iria contribuir para o renascimento de uma teoria corpuscular.

A luz do sol, cujo espectro contínuo foi revelado por Newton, é um exemplo de *radiação térmica*, emitida por um corpo a temperatura elevada. Foram dificuldades em conciliar as leis da radiação térmica com a física clássica que levaram Max Planck, em 1900, a formular sua revolucionária hipótese dos *quanta*, a origem da teoria quântica.

Em 1905, Einstein mostrou que os resultados observados no efeito fotoelétrico, que também pareciam inexplicáveis pela física clássica, podiam ser explicados estendendo à luz a hipótese de Planck e descrevendo-a em termos de *fótons*, com caráter corpuscular.

O espectro da luz emitida por vapores atômicos, como numa lâmpada de sódio, não é contínuo como o da luz solar: é um espectro de raias. Mais uma vez, a física clássica não o explica, como não explica a existência de átomos. A estrutura atômica e o processo elementar da emissão de luz por um átomo só puderam ser explicados pela teoria quântica. Foi ela também que permitiu reconciliar a coexistência de aspectos corpusculares e ondulatórios da luz.

Uma introdução à teoria quântica será dada na terceira parte deste curso.

A ótica é atualmente uma das áreas mais ativas da física, em boa parte devido à invenção de um novo tipo de fonte de luz, o *laser*, que data dos anos 60. Aplicações importantes da luz laser são encontradas em praticamente todas as áreas da ciência e da tecnologia.

Entre as aplicações práticas mais promissoras em desenvolvimento encontram-se aquelas relacionadas com comunicações óticas e computação ótica.

# 2

## ÓTICA GEOMÉTRICA

### 2.1 Propagação retilínea da luz

Num meio homogêneo, como o ar dentro de uma sala ou o espaço interestelar, a luz se propaga em linha reta. Isso é particularmente reconhecível quando a fonte de luz é “puntiforme”, ou seja, de dimensões desprezíveis em confronto com as demais que entram na observação: um exemplo é um buraco de alfinete iluminado num anteparo opaco.

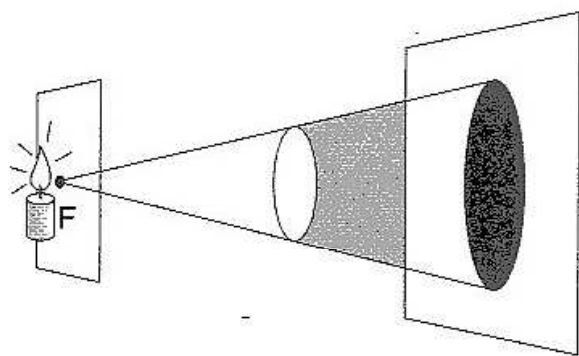


Fig. 2.1 Propagação retilínea da luz

Nesse caso, um obstáculo opaco iluminado pela fonte  $F$  puntiforme projeta uma *sombra* de contornos bem nítidos, definidos pela propagação retilínea (fig. 2.1).

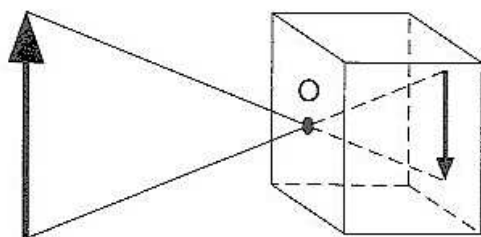


Fig. 2.2 Câmara escura

Analogamente, numa *câmara escura* (fig. 2.2), forma-se uma imagem (invertida) de um objeto, representando uma forma primitiva de aparelho fotográfico.



Um feixe cônico de luz de abertura muito pequena chama-se um *pincel* de raios luminosos, e no limite idealizado em que a abertura tende a zero tem-se um *raio* de luz, uma linha reta num meio homogêneo. Na teoria corpuscular, um raio representa a trajetória de um corpúsculo de luz.

Para a teoria ondulatória, a propagação retilínea da luz parece difícil de explicar, como foi observado por Newton. As ondas sonoras não têm propagação retilínea. Assim, por exemplo, ouvimos a voz de uma pessoa que fala do lado de fora de uma sala com a porta entreaberta mesmo quando a pessoa está fora da linha de visão.

Conforme vimos no curso de acústica (*Fís.Bás. 2*), Huygens procurou explicar a propagação retilínea na teoria ondulatória através de seu célebre Princípio. Numa onda, temos de examinar a propagação da *fase* da onda, que define suas cristas e vales. Uma *frente de onda* (em 3 dimensões, é uma superfície) é o lugar geométrico de pontos que têm a mesma fase, p. ex., pertencem todos à mesma crista de onda.

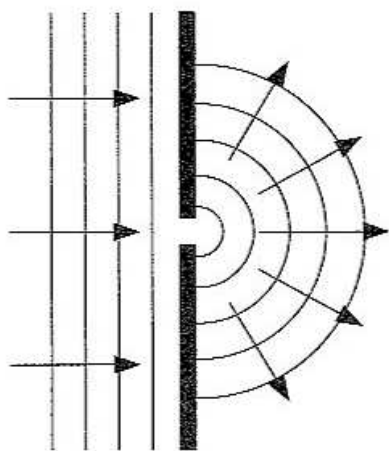


Fig. 2.3 Princípio de Huygens

O *Princípio de Huygens* pode ter sido motivado pela observação de ondas na superfície de um tanque com água. Sabemos neste caso que uma frente de onda que atinge uma barreira em que há uma pequena abertura (fig. 2.3) gera ondas circulares do outro lado; a porção da frente de onda não obstruída comporta-se como uma fonte puntiforme.

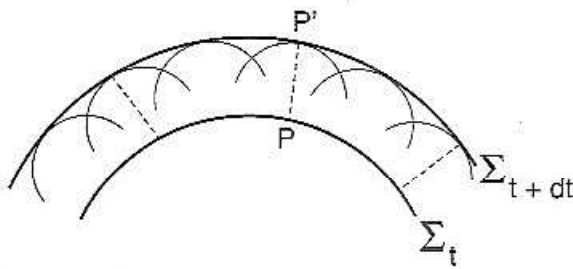
Segundo Huygens, *cada ponto de uma frente de onda comporta-se como fonte puntiforme, gerando ondas secundárias*. Num meio homogêneo, essas ondas são *ondas esféricas* com centro na fonte, propagando-se com a velocidade das ondas no meio.

Dada uma frente de onda inicial, Huygens propõe uma construção geométrica para obter a frente de onda num instante posterior: Consideram-se todas as ondas secundárias emanadas de pontos da frente de onda inicial não obstruídos por obstáculos. *A frente de onda no instante posterior considerado é a envoltória dessas ondas secundárias*.



Fig. 2.4 Envoltória

A *envoltória*  $\Sigma$  de uma família de superfícies (fig. 2.4) é uma superfície que em cada um de seus pontos é tangente a uma das superfícies da família, ou seja, tangencia todas elas. A idéia básica de Huygens é que cada onda secundária isoladamente é demasiado fraca para produzir efeitos perceptíveis. Só produzem efeitos na envoltória  $\Sigma$ , porque sobre ela muitas ondas secundárias vizinhas se reforçam.

Fig. 2.5 Frentes de ondas nos instantes  $t$  e  $t+dt$ 

Se tomarmos duas frentes de onda em instantes separados por  $dt$ , ou seja,  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$  (fig. 2.5), vemos então que a onda secundária emanada de  $P$  é tangente à envoltória em  $P'$ , ou seja,  $PP'$  é *normal* à envoltória, e

$$\overline{PP'} = v dt \quad (2.1)$$

onde  $v$  é a velocidade da onda no meio. Podemos então identificar  $PP'$  com a direção do *raio luminoso*, ou seja, *os raios são as trajetórias ortogonais das frentes de onda*.

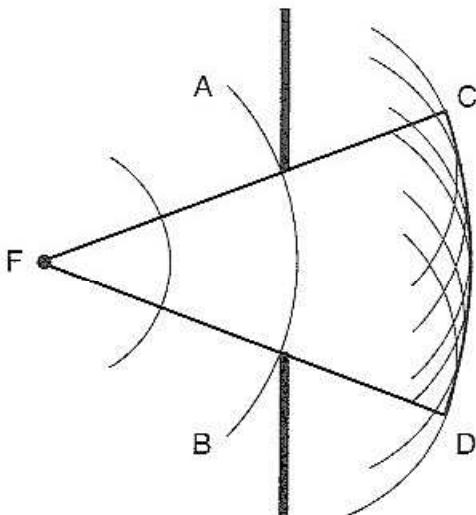


Fig. 2.6 Explicação de Huygens para a propagação retilínea

A explicação de Huygens para a propagação retilínea da luz e a formação de sombras está ilustrada na fig. 2.6, onde a frente de onda  $AB$ , proveniente da fonte pontiforme  $F$ , incide sobre uma abertura num anteparo opaco. A envoltória  $CD$  do outro lado da abertura é gerada apenas pelos pontos de  $AB$  não obstruídos, e por isto fica limitada pelos raios extremos  $FC$  e  $FD$  que passam pela abertura.

Embora exista penetração de ondas secundárias na região de sombra, a envoltória é interrompida em  $C$  e  $D$ , e ondas secundárias sem envoltória, segundo Huygens, são fracas demais para serem percebidas.

Na realidade, a luz penetra, embora muito fracamente, na região de sombra, o que constitui o fenômeno da *difração*, já descrito por Grimaldi em 1665.

Quão fortes são os efeitos de difração depende de um parâmetro que não foi levado em conta por Huygens: o *comprimento de onda*  $\lambda$ . As ondas descritas por ele não correspondem necessariamente a oscilações periódicas; ele as imaginava como uma série de pulsos.

Newton não só descobriu a decomposição espectral da luz branca em suas componentes monocromáticas, como percebeu que cada cor corresponde a um comprimento de onda bem definido e mediu  $\lambda$  com grande precisão: o valor que obteve para luz alaranjada é compatível com os resultados atuais.

Os comprimentos de onda típicos na região visível do espectro (do vermelho ao violeta) são inferiores a  $1\mu\text{m} = 10^{-3}\text{ mm}$ : vão de  $0,4\mu\text{m}$  (violeta) a  $0,7\mu\text{m}$  (vermelho). Os desvios da propagação retilínea e da ótica geométrica, conforme veremos mais adiante, são tanto maiores quanto maiores as razões  $\lambda/d$ , onde  $d$  representa dimensões típicas envolvidas na propagação das ondas: tamanho de obstáculos ou de orifícios, raio de curvatura de objetos ou frentes de onda, etc...

Para luz visível e situações quotidianas,  $\lambda/d$  é tipicamente  $\lesssim 10^{-3}$  e os desvios são muito pequenos. Já para ondas sonoras, os comprimentos de onda típicos são da ordem das dimensões macroscópicas (para a frequência sonora média da voz humana,  $\nu \sim 1\text{ kHz}$ , o período  $\tau \sim 10^{-3}\text{ s}$  e  $\lambda = \nu\tau \sim 3 \times 10^2\text{ m/s} \times 10^{-3}\text{ s} = 30\text{ cm}$ ). É por isso que a “acústica geométrica” não seria uma boa aproximação.

Do ponto de vista ondulatório, a *ótica geométrica é uma aproximação válida para comprimentos de onda muito pequenos em confronto com as dimensões típicas envolvidas*.

## 2.2 Reflexão e refração

Que acontece quando a luz passa de um meio homogêneo a outro? Na interface entre os dois, há uma descontinuidade das propriedades materiais (do ponto de vista macroscópico: microscopicamente, há uma região de transição através de várias camadas atômicas).

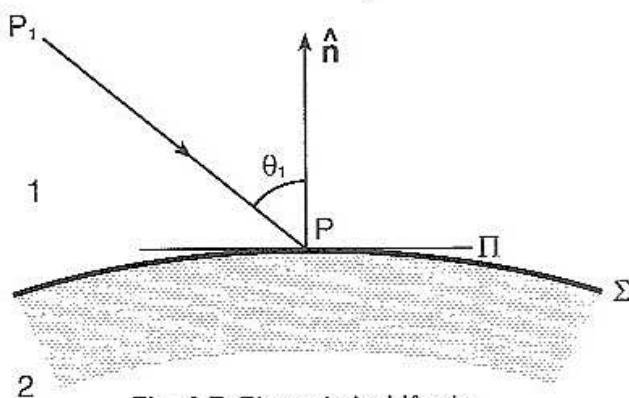


Fig. 2.7 Plano de incidência

Seja  $\Sigma$  a superfície de separação entre dois meios transparentes 1 e 2 (p. ex., ar e água, ou água e vidro), e consideremos um raio de luz incidente no meio 1 sobre um ponto  $P$  da interface  $\Sigma$  (fig. 2.7).

Do ponto de vista da ótica geométrica ( $\lambda \ll$  raio de curvatura em  $P$ ), podemos



substituir  $\Sigma$ , nas vizinhanças de  $P$ , pelo *plano tangente*  $\Pi$  a  $\Sigma$  no ponto  $P$  (fig. 2.7): tudo se passa como se a interface fosse plana, dada por  $\Pi$ . Seja  $\hat{n}$  o vetor unitário da normal a  $\Sigma$  (e a  $\Pi$ ) em  $P$ . Chama-se *plano de incidência* o plano que contém o raio incidente  $P_1P$  e a normal  $\hat{n}$ , e *ângulo de incidência* o ângulo  $\theta_1$  entre  $P_1P$  e  $\hat{n}$  (fig. 2.7).

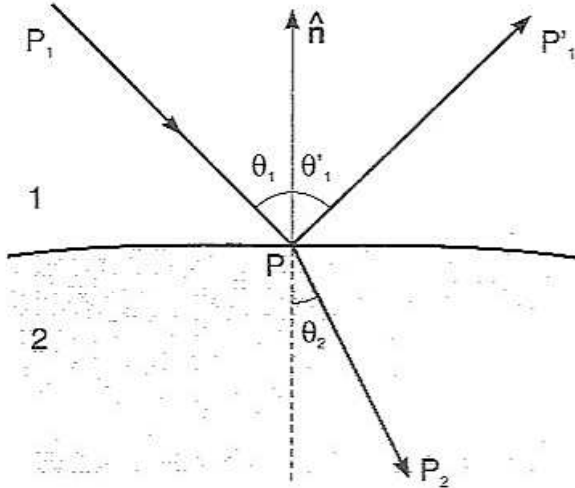


Fig. 2.8 Ângulos de reflexão e refração

A experiência mostra que o raio incidente dá origem geralmente a um *raio refletido*  $PP_1'$  que volta para o meio 1 e forma com a normal o *ângulo de reflexão*  $\theta_1'$  e a um *raio refratado*  $PP_2$  transmitido para o meio 2, que forma com a direção da normal um ângulo  $\theta_2$ , o *ângulo de refração* (fig. 2.8).

A *lei da reflexão*, já conhecida na Grécia antiga, diz que *o raio refletido permanece ao plano de incidência, e o ângulo de reflexão é igual ao de incidência*:

$$\theta_1' = \theta_1 \quad (2.2)$$

A *lei da refração*, descoberta por Willebrord Snell em 1621 e reencontrada por Descartes em 1637, diz que *o raio refratado também permanece no plano de incidência, e*

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = n_{12} \quad (2.3)$$

onde  $n_{12}$  é uma constante que se chama *índice de refração do meio 2 relativo ao meio 1*. Se  $n_{12} > 1$ , como p. ex. ao passar do ar para a água, diz-se que o meio 2 é *mais refringente* que 1, e o raio refratado se *aproxima* da normal; se  $n_{12} < 1$  (ao passar do vidro para a água, p. ex.), o meio 2 é *menos refringente*, e o raio refratado se *afasta* da normal.

Convém observar que a constância do índice de refração relativo vale para *luz monocromática*:  $n_{12}$  varia com a cor, o que constitui o fenômeno da *dispersão*, responsável pela separação das cores nas experiências de Newton com prismas.

Como se explicam as leis da reflexão e da refração nas teorias corpuscular e ondulatória?

É fácil explicar a reflexão pela teoria corpuscular: se uma bola de tênis sofre uma reflexão elástica no solo, a componente vertical de sua velocidade se inverte, sem que a componente horizontal se altere, o que implica na igualdade entre o ângulo de reflexão e o de incidência.

A explicação corpuscular da refração está ilustrada na fig. 2.9, adaptada da figura original de Descartes. Uma bola de tênis que penetra do ar na água no ponto B desvia-se da sua trajetória original BD para BI, pois perde parte da componente vertical de sua velocidade ao penetrar na água, onde se desloca com velocidade menor.\*

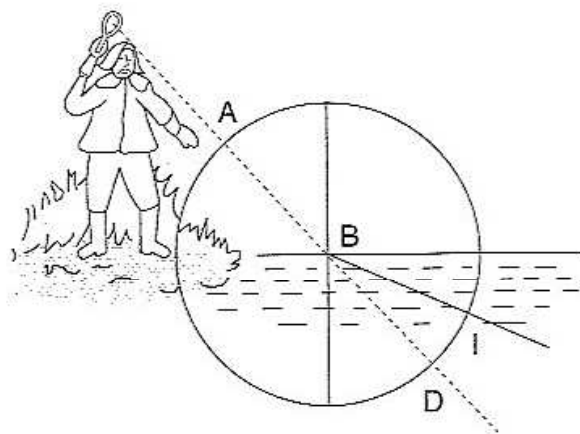


Fig. 2.9 Explicação corpuscular da refração

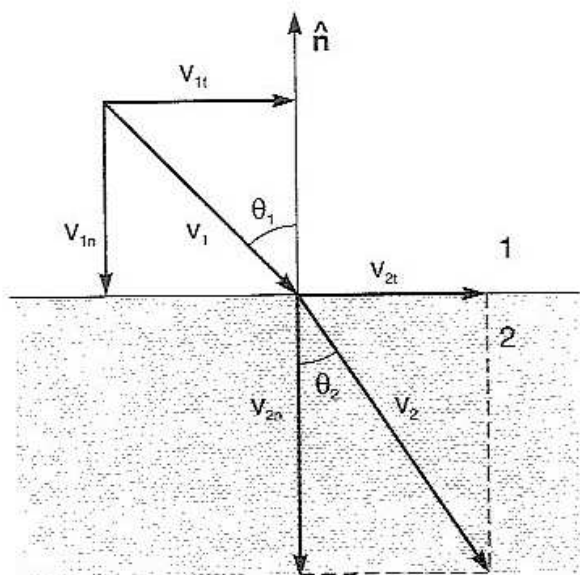


Fig. 2.10 Efeito da descontinuidade normal

Se  $v_1$  e  $v_2$  são as magnitudes das velocidades dos corpúsculos nos dois meios, a descontinuidade na interface muda a componente *normal* da velocidade ( $v_{2n} \neq v_{1n}$ ), sem alterar a componente *tangencial* (fig. 2.10):

$$v_{2t} = v_2 \text{ sen } \theta_2 = v_{1t} = v_1 \text{ sen } \theta_1 \quad (2.4)$$

o que dá

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \boxed{n_{12} = \frac{v_2}{v_1}} \quad (2.5)$$

ou seja, a velocidade da luz deveria ser *maior* na água do que no ar ( $n_{12} > 1$ ).

\* Na realidade, a velocidade na água iria diminuindo, devido à viscosidade. Uma analogia mais adequada seria a penetração através de uma lâmina delgada, alterando apenas a componente normal.

O que a teoria corpuscular não explica é por que *parte* da luz se reflete e parte se refrata. Quando um corpúsculo de luz chega à interface, o que decide se ele vai se refletir ou se refratar? Newton tinha plena consciência dessa dificuldade, e para resolvê-la propôs sua teoria dos “acessos”. Os corpúsculos teriam “acessos de fácil reflexão”, quando se refletiriam, e “acessos de fácil transmissão”, quando seriam refratados. Esses acessos seriam periódicos, regulados por uma onda que se propagaria juntamente com o raio de luz. Essa teoria é até certo ponto remanescente da atual teoria quântica da luz.

Na teoria ondulatória, não há qualquer dificuldade para explicar a reflexão e transmissão parciais. Se prendermos uma à outra duas cordas de densidades diferentes, p. ex., uma onda que chega à junção é parcialmente refletida e parcialmente refratada, em proporções determinadas pelas “condições de contorno” na junção (veja *Fís. Bás. 2*, Probl. 5.11).

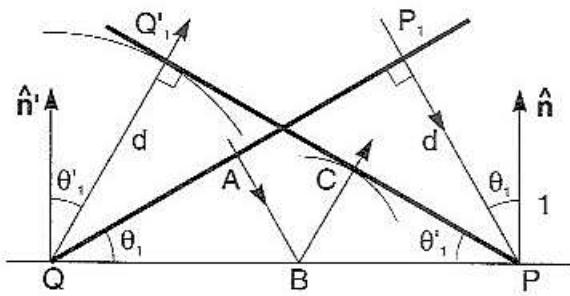


Fig. 2.11 Explicação ondulatória da reflexão

O Princípio de Huygens permite obter facilmente a lei da reflexão. Seja  $QP_1$  (fig. 2.11) uma frente de onda incidente sobre a interface segundo o ângulo  $\theta_1$  (que é também o ângulo entre o raio incidente  $P_1P$  e a normal  $\hat{n}$ ).

O ponto  $P_1$  da frente incidente atinge a interface após um tempo  $d/v_1$ , onde  $d = \overline{P_1P}$  e  $v_1$  é a velocidade da onda no meio 1. Nesse instante, a onda secundária gerada por  $Q$  já terá atingido o ponto  $Q'_1$ , com  $\overline{QQ'_1} = d$ ; a frente de onda refletida (envoltória das ondas secundárias geradas na interface) é  $\overline{PQ'_1}$  (a figura mostra outro ponto de contato  $C$  com a envoltória, correspondente ao raio  $ABC$ ).

Os triângulos retângulos  $QP_1P$  e  $PQ'_1Q$  são iguais, pois têm a hipotenusa  $QP$  comum e os catetos iguais  $\overline{QQ'_1} = d = \overline{P_1P}$ . Logo,  $\theta'_1 = \theta_1$ .

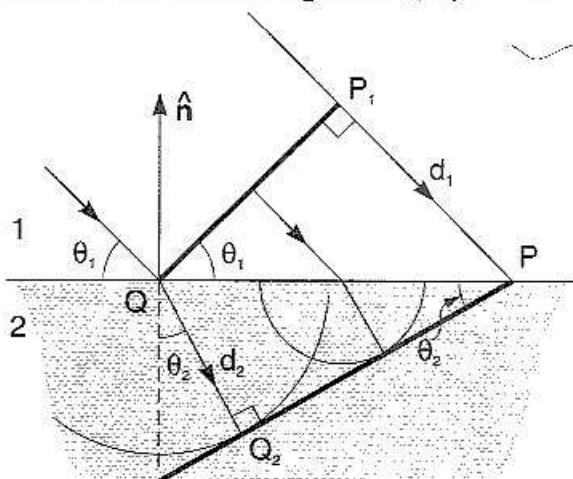


Fig. 2.12 Explicação ondulatória da refração

A explicação da lei da refração é análoga. A frente de onda incidente  $QP_1$  dá origem à frente de onda refratada  $Q_2P$ , pela construção de Huygens (fig. 2.12). O tempo necessário para que a luz percorra a distância  $d_1 = \overline{P_1P}$  no meio 1 é o mesmo levado para percorrer  $d_2 = \overline{QQ_2}$  no meio 2. Logo, se  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades de propagação das ondas nos meios



1 e 2 respectivamente, e  $t$  é esse tempo, temos

$$t = \frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} \quad (2.6)$$

Os triângulos retângulos  $Q P_1 P$  e  $Q Q_2 P$  dão:

$$d_1 = \overline{QP} \operatorname{sen} \theta_1 \quad ; \quad d_2 = \overline{QP} \operatorname{sen} \theta_2$$

Logo, usando a (2.6),

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{12} = \frac{v_1}{v_2}} \quad (2.7)$$

Comparando as (2.5) e (2.7), vemos que as previsões das teorias corpuscular e ondulatória são inversas: segundo a teoria ondulatória, a velocidade da luz na água deve ser *menor* do que no ar.

Em 1850, Foucault e Fizeau mediram as velocidades da luz no ar e na água, e mostraram que a velocidade na água é menor do que no ar, o que foi considerado como um argumento decisivo em favor da teoria ondulatória.

O índice de refração  $n$  de um meio em relação ao vácuo é chamado seu *índice de refração absoluto*. Como  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, a velocidade da luz num meio de índice de refração (absoluto)  $n$  é

$$\boxed{v = \frac{c}{n}}$$

Alguns índices de refração absolutos para luz amarela de sódio ( $\lambda = 5.890 \text{ \AA} = 0,589 \mu\text{m}$ ): Ar: 1,000293 (condições NTP); água (20°C): 1,33; álcool etílico (20°C): 1,36; dissulfeto de carbono: 1,63; quartzo fundido: 1,46; vidros: variam entre 1,52 para o mais comum a perto de 2,0 para o mais pesado; diamante: 2,42.

As (2.7) e (2.8) dão:

$$n_{12} = \frac{c / n_1}{c / n_2} \quad \left\{ \quad \boxed{n_{12} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (2.9)$$

ou seja, o índice de refração relativo do meio 2 em relação ao meio 1 é o quociente de seus índices absolutos.

Pela (2.8), o tempo que uma frente de onda luminosa leva para percorrer uma distância  $d$  num meio de índice de refração  $n$  é

$$t = \frac{d}{v} = \frac{nd}{c} \quad (2.10)$$

O produto  $nd$  do índice de refração do meio pela distância  $d$  nele percorrida chama-se *caminho ótico* associado a este percurso.

### 2.3 O Princípio de Fermat

Em 1657, Pierre de Fermat encontrou um novo método para determinar a trajetória dos raios luminosos, baseado na sua idéia de que “a Natureza sempre atua pelo caminho mais curto”. O enunciado do *Princípio de Fermat* é: *de todos os caminhos possíveis para ir de um ponto a outro, a luz segue aquele que é percorrido no tempo mínimo.*

Como  $c$  é uma constante, decorre da (2.10) que tempo mínimo também é equivalente a *caminho ótico mínimo*.

Para a propagação da luz num único meio homogêneo ( $n = \text{constante}$ ), o caminho ótico mínimo também corresponde à *distância mínima*, ou seja, o Princípio de Fermat leva à *propagação retilínea* da luz entre dois pontos.

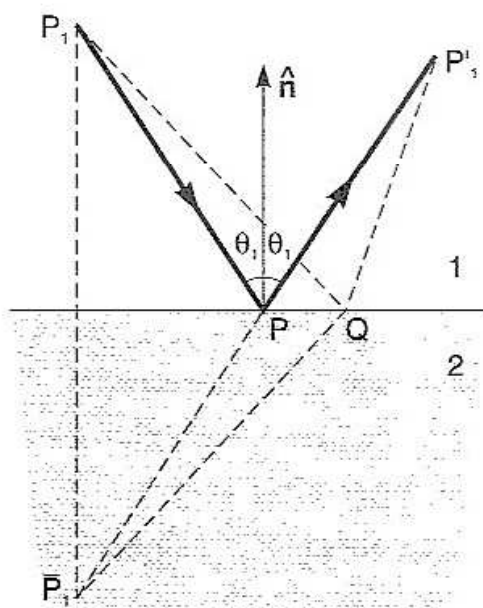


Fig. 2.13 Princípio de Fermat na reflexão

Consideremos agora dois meios homogêneos diferentes, separados por uma interface plana. Qual é o caminho ótico mínimo para ir de  $P_1$  a  $P'_1$  (fig. 2.13), passando por um ponto da interface?

Como os caminhos mais curtos para ir e voltar da interface são retas, o caminho procurado consiste num par de segmentos de reta, ligando  $P_1$  à interface e a interface a  $P'_1$ . Por que ponto da interface deve passar?

Seja  $\bar{P}_1$  o ponto simétrico de  $P_1$  com relação à interface. O ponto da interface procurado é então a intersecção de  $\bar{P}_1 P'_1$  com a interface (ponto  $P$  na fig. 2.13).

Com efeito, se compararmos o caminho  $P_1 P P'_1$  a outro, como  $P_1 Q P'_1$ , vemos pela figura que  $P_1 P = \bar{P}_1 P$  e  $P_1 Q = \bar{P}_1 Q$ , e que o caminho ótico via  $P$  equivale ao segmento de reta  $\bar{P}_1 P'_1$ , menor do que o caminho  $\bar{P}_1 Q + Q P'_1$  associado a qualquer outro ponto  $Q$  da interface.

Logo, o *Princípio de Fermat* leva à *lei da reflexão*. Vamos mostrar agora que também leva à lei de Snell (fig. 2.14).

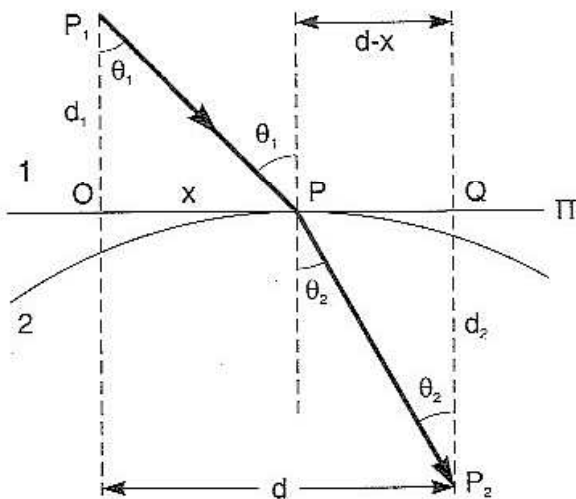


Fig. 2.14 Princípio de Fermat na refração

Para isso, consideremos os pontos  $P_1$  e  $P_2$  e procuremos o ponto  $P$  da interface que minimiza o caminho ótico  $n_1 \overline{P_1 P} + n_2 \overline{P P_2}$ . Seja  $\Pi$  o plano tangente à interface em  $P$ ,  $O$  e  $Q$  as projeções de  $P_1$  e  $P_2$  sobre  $\Pi$  e  $\overline{P_1 O} = d_1$ ,  $\overline{P_2 Q} = d_2$ ,  $\overline{OQ} = d$  e  $\overline{OP} = x$ , onde queremos determinar  $x$ .

A fig. 2.14 dá

$$([P_1 P P_2] \equiv \text{caminho ótico})$$

$$[P_1 P P_2] \equiv n_1 \overline{P_1 P} + n_2 \overline{P P_2} = n_1 \left( d_1^2 + x^2 \right)^{1/2} + n_2 \left[ d_2^2 + (d - x)^2 \right]^{1/2}$$

Para obter o mínimo, derivamos em relação a  $x$ :

$$0 = n_1 \cdot \frac{x}{\left( d_1^2 + x^2 \right)^{1/2}} - n_2 \cdot \frac{(d - x)}{\left[ d_2^2 + (d - x)^2 \right]^{1/2}} = n_1 \cdot \frac{x}{\overline{P_1 P}} - n_2 \cdot \frac{(d - x)}{\overline{P P_2}}$$

$$= n_1 \text{ sen } \theta_1 - n_2 \text{ sen } \theta_2$$

Logo, o caminho ótico mínimo é aquele que corresponde à lei da refração. O caminho “quebrado” minimiza o tempo porque aproveita melhor o caminho no meio 1, onde a velocidade é maior, reduzindo-o no meio 2, onde ela é menor.

Na realidade, o Princípio de Fermat tem de ser corrigido: o caminho ótico não é necessariamente *mínimo*. No exemplo acima, a anulação da primeira derivada não garante que seja um mínimo: poderia ser um máximo ou ponto de inflexão. Um

ponto onde a primeira derivada se anula é um ponto onde a função considerada é *estacionária* com respeito a pequenas variações:

$$\delta f \equiv f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0} \delta x + \frac{1}{2} f''(x_0) (\delta x)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \delta f \equiv f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0) (\delta x)^2 + \dots \quad (2.11)$$

ou seja, os desvios de  $f$  em relação a seu valor estacionário são de *segunda ordem* no desvio  $\delta x$ : o termo de 1.<sup>a</sup> ordem se anula.

O enunciado correto do Princípio de Fermat é que *o caminho ótico é estacionário* em relação a *pequenas* variações: quando comparado com caminhos *próximos*, os desvios são de 2.<sup>a</sup> ordem.

Uma conseqüência importante do Princípio de Fermat é que, se existem diversos caminhos óticos do mesmo tipo (por exemplo, passando por um ponto qualquer da interface) ligando dois pontos, todos eles estacionários, eles têm de ser iguais.

Isso sucede, em particular, se todos os raios emanados de um ponto  $P_1$  são “focalizados” no mesmo ponto  $P_2$ , que seria uma *imagem* perfeita de  $P_1$ . O Princípio de Huygens leva à mesma conclusão, pois o foco é um caso limite de uma frente de onda, com raio de curvatura nulo, e o mesmo vale para o ponto fonte  $P_1$ . Logo, o tempo de percurso entre essas duas “frentes de onda” puntiformes deve ser o mesmo ao longo de todos os raios que ligam uma à outra.

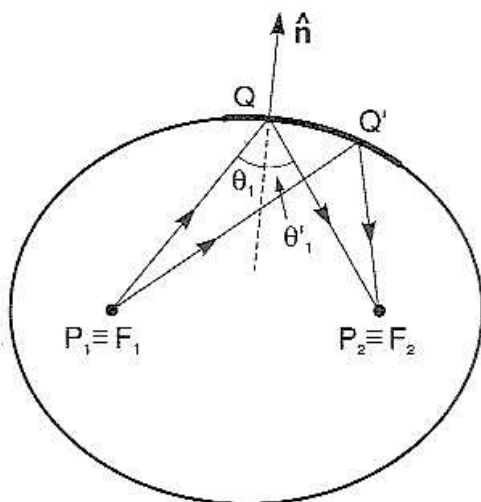


Fig. 2.15 Elipsóide refletor

Um caso em que isso ocorre (fig. 2.15) é o de uma fonte puntiforme  $P_1$  situada num dos focos de um espelho cuja superfície é um elipsóide de revolução (ou uma porção dele). A imagem  $P_2$  é o outro foco. Com efeito, pela geometria do elipsóide, a normal  $\hat{n}$  é a bissetriz do ângulo entre os raios focais  $\overline{QP_1}$  e  $\overline{QP_2}$ ; além disso,  $\overline{QP_1} + \overline{QP_2} = \overline{Q'P_1} + \overline{Q'P_2} = \text{constante}$ . Por outro lado, se a fonte de luz não estiver no foco do elipsóide, deixa de existir a focalização perfeita.



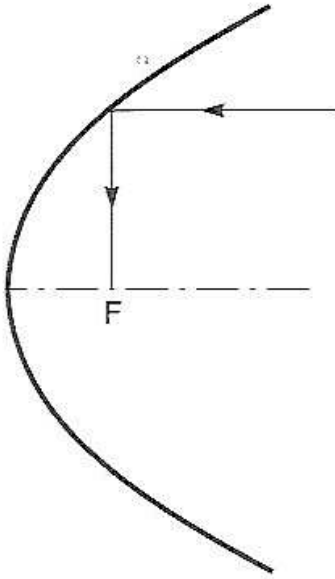


Fig. 2.16 Parabolóide refletor

Se fizermos um dos focos afastar-se ao  $\infty$ , o elipsóide se transforma num *parabolóide*, e raios paralelos ao eixo são focalizados no foco  $F$ , propriedade usada no telescópio refletor do Monte Palomar e em antenas parabólicas (fig. 2.16).

Podemos também usar o Princípio de Fermat para uma primeira discussão qualitativa do problema da formação de imagens. Suponhamos que se queira fabricar um objeto de vidro que produza uma imagem pelo menos aproximadamente puntiforme de uma fonte puntiforme colocada diante dele.

Logo, para que todos os caminhos óticos sejam iguais, é preciso que a espessura  $\overline{QQ'}$  de vidro diminua à medida que o ângulo  $\theta$  com o eixo  $P_1P_2$  aumenta, para compensar o crescimento das distâncias  $\overline{P_1Q}$  e  $\overline{Q'P_2}$ .

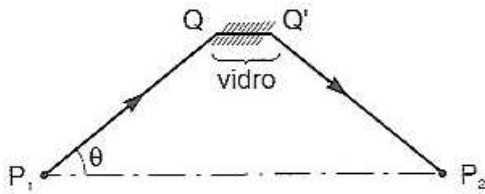


Fig. 2.17 Trajetória típica

Ao penetrar no vidro e ao sair dele, os raios são desviados pela refração, de modo que uma trajetória típica será da forma  $P_1 Q Q' P_2$ , correspondendo ao caminho ótico  $\overline{P_1 Q} + n \overline{Q Q'} + \overline{Q' P_2}$ , onde  $n > 1$  é o índice de refração do vidro.

Logo, para que todos os caminhos óticos sejam iguais, é preciso que a espessura  $\overline{QQ'}$  de vidro diminua à medida que o ângulo  $\theta$  com o eixo  $P_1P_2$  aumenta, para compensar o crescimento das distâncias  $\overline{P_1Q}$  e  $\overline{Q'P_2}$ .

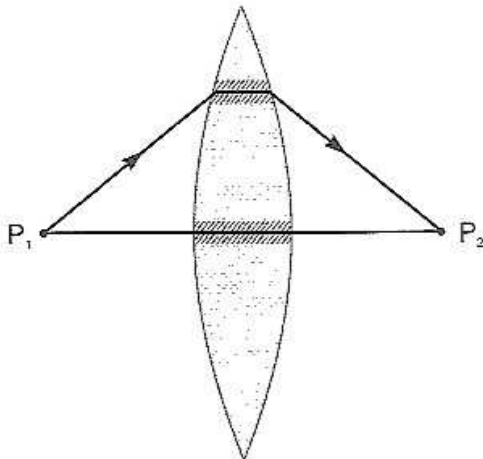


Fig. 2.18 Lente convergente

O objeto em questão deve portanto ter qualitativamente a forma indicada na fig. 2.18, com a espessura máxima no eixo e diminuindo gradualmente à medida que nos afastamos dele. Acabamos de inventar uma lente convergente! Mais adiante discutiremos em detalhe a formação da imagem pela lente.

## 2.4 Reflexão total

Embora tenhamos mencionado que, ao encontrar a interface entre dois meios transparentes distintos, um raio de luz é parcialmente refletido e parcialmente transmitido, não discutimos até aqui a divisão da intensidade entre as partes refletida e transmitida: que fração vai para cada uma?

Experimentalmente, verifica-se que as porcentagens de reflexão e de transmissão variam com o ângulo de incidência  $\theta_1$ . Quando olhamos para baixo da superfície de um lago em repouso, podemos ver o fundo: a maior parte da luz é transmitida, com  $\theta_1$  perto de  $0^\circ$ . Por outro lado, margens distantes são vistas refletidas na água como num espelho: para incidência próxima da rasante ( $\theta_1 \approx 90^\circ$ ), a maior parte da luz é refletida. Voltaremos a discutir estes efeitos ao tratar da teoria eletromagnética da luz (na Seç. 5.7, há gráficos da porcentagem de reflexão em função de  $\theta_1$ ).

Consideremos agora o que acontece quando a luz passa de um meio mais refringente, como a água, para um menos refringente, como o ar. Neste caso, pela lei de Snell (2.7),

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{\text{sen}\theta_1}{n_{12}} \quad (2.12)$$

onde  $n_{12} < 1$  (o raio refratado se *afasta* mais da normal).

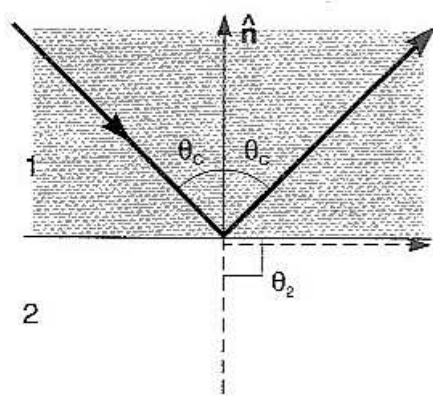


Fig. 2.9 Ângulo crítico

Sendo  $n_{12} < 1$ , existirá (Fig. 2.19) um ângulo  $\theta_c$ , chamado *ângulo crítico*, para o qual

$$\text{sen}\theta_c = n_{12} \quad (2.13)$$

Se o meio 1 é a água e o meio 2 o ar, p. ex., é  $\text{sen}\theta_c \approx 3/4 = 0,75$ , o que dá  $\theta_c \approx 49^\circ$ .

Que acontece se o ângulo de incidência  $\theta_1$  é  $> \theta_c$ ? Se aplicássemos a lei de Snell (2.12), isso daria  $\text{sen}\theta_1 > n_{12}$ , ou seja,  $\text{sen}\theta_2 > 1$ , o que não pode ser satisfeito quando  $\theta_2$  é um ângulo real.

A experiência mostra que, nessas condições, ocorre a *reflexão total* da luz incidente. A transição para a reflexão total é contínua: para  $\theta_1$  inferior a  $\theta_c$ , a fração

da luz que se reflete aumenta rapidamente à medida que  $\theta_1$  se aproxima de  $\theta_c$ , tendendo a 100% na incidência crítica e permanecendo em 100% para  $\theta_1 > \theta_c$ .

Para uma interface vidro/ar, o ângulo crítico é  $\theta_c \approx \sin^{-1}(2/3) \approx 41,5^\circ$ , e uma aplicação importante é o *prisma de reflexão total*, empregado em vários instrumentos óticos.

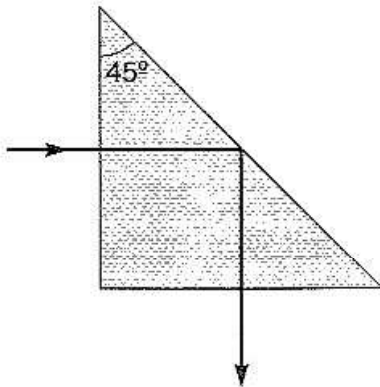


Fig. 2.20 Prisma de reflexão total

O prisma de reflexão total é um prisma de vidro com ângulo de abertura de  $45^\circ$ . Luz que incide perpendicularmente a uma face (fig. 2.20) tem  $\theta_1 > \theta_c$  e é totalmente refletida, o que desvia o feixe de  $90^\circ$ .

É o índice de refração elevado do diamante ( $n = 2,42$ ), juntamente com as facetas prismáticas talhadas em ângulos apropriados, que faz um brilhante *faiscar*: raios incidentes sobre ele em qualquer ângulo são totalmente refletidos. A refração e dispersão da luz emergente produzem as cores observadas.

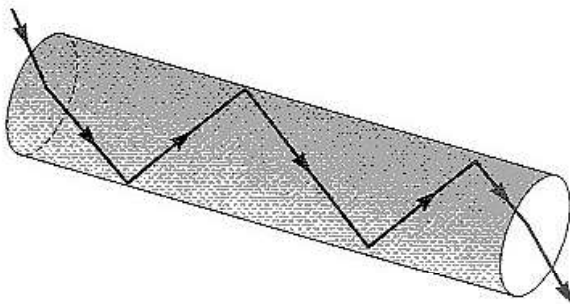


Fig. 2.21 Propagação da luz numa fibra ótica

Outra aplicação extremamente importante da reflexão total é a propagação da luz em *fibras óticas*. O exemplo mais simples seria um cilindro transparente de vidro: como ilustrado na fig. 2.21, para ângulos de incidência nas paredes superiores ao ângulo crítico, a luz propaga-se dentro da fibra por reflexões totais suces-

sivas. A fibra funciona como um *guia de ondas* para a luz, permitindo transmiti-la a grandes distâncias com perdas extremamente pequenas, o que é usado em telefonia. Fibras óticas são também usadas em vários instrumentos médico-cirúrgicos.

## 2.5 Espelho plano

Um dos elementos óticos mais simples é um *espelho plano*. Vejamos como se forma a imagem de um objeto nesse caso.

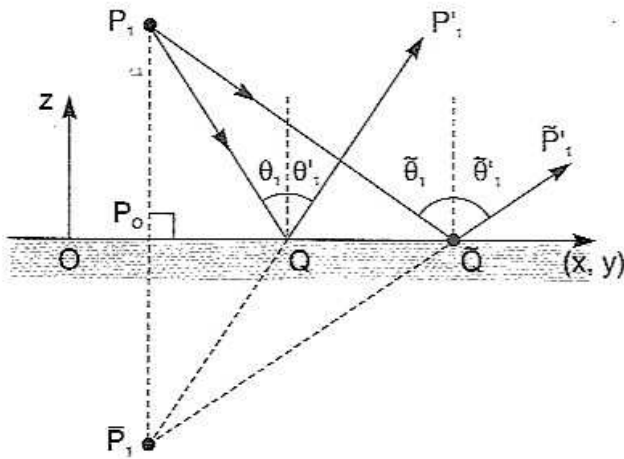


Fig. 2.22 Imagem de um ponto  $P_1$  num espelho plano

Para isso, basta seguir as trajetórias de dois raios emanados de um ponto  $P_1$  do objeto, p. ex.,  $P_1 Q P'_1$  e  $P_1 \tilde{Q} \tilde{P}'_1$  (fig. 2.22). Seja  $\bar{P}_1$  a intersecção dos prolongamentos dos raios refletidos  $Q P'_1$  e  $\tilde{Q} \tilde{P}'_1$ . Decorre então das leis da reflexão que os triângulos retângulos  $P_1 P_0 Q$  e  $\bar{P}_1 P_0 Q$  são iguais, bem como os triângulos retângulos  $P_1 P_0 \tilde{Q}$  e  $\bar{P}_1 P_0 \tilde{Q}$ . Logo,  $P_1 P_0 = \bar{P}_1 P_0$  ou seja, o ponto  $\bar{P}_1$  é o simétrico de  $P_1$  em relação ao plano do espelho. Daí segue que os prolongamentos de *todos* os raios refletidos se encontram em  $\bar{P}_1$ , que é uma *imagem* perfeita de  $P_1$ . Isso também decorre do Princípio de Fermat (Seç. 2.3).

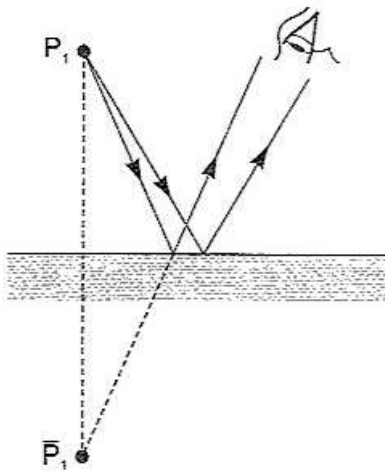


Fig. 2.23 Caráter virtual da imagem

Para um observador em cuja vista penetram raios refletidos divergentes (fig. 2.23), eles não diferem em nada de um feixe divergente originário de  $\bar{P}_1$ , de forma que a sensação visual é idêntica à que se teria se os raios emanassem de  $\bar{P}_1$ . Diz-se então que  $\bar{P}_1$  é uma *imagem virtual* do ponto objeto  $P_1$ . De modo geral, diz-se que uma imagem é virtual quando não há raios luminosos emanando *dela*: ela está no *prolongamento* de raios luminosos.

Conforme vemos pela fig. 2.22, se tomarmos um sistema de coordenadas com origem no plano do espelho e plano  $(x, y)$  coincidente com ele, a relação entre as coordenadas de um ponto objeto e de seu ponto imagem é dada pela transformação

$$\begin{array}{ccc} P_1(x, y, z) & \rightarrow & \bar{P}_1(x, y, -z) \\ \text{(Objeto)} & & \text{(Imagem)} \end{array} \quad (2.14)$$

que se chama uma *reflexão espacial* com respeito ao plano  $(x, y)$  do espelho.



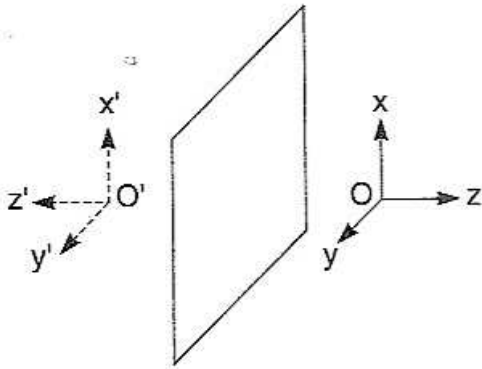


Fig. 2.24 Caráter reverso da imagem

Essa transformação preserva o *tamanho* dos objetos (distâncias). A imagem da seta vertical  $Ox$  (fig. 2.24) é  $O'x'$ , com a mesma orientação, ou seja, a imagem é *ereta* (não invertida, como na câmara escura). Entretanto ela inverte o sentido na direção perpendicular ao espelho ( $Oz \rightarrow O'z'$ ). Um triedro direto (dextrorso) transforma-se num triedro reverso

(sinistrorso). Diz-se por isso que a imagem é *reversa*: não pode ser superposta ao objeto através de uma rotação espacial.

## 2.6 Espelho esférico

As superfícies dos elementos que se empregam nos instrumentos óticos são quase exclusivamente planas ou esféricas. A razão é de ordem prática: é muito mais fácil fabricar superfícies esféricas do que qualquer outra superfície curva: no processo de polimento, uma superfície esférica côncava e outra convexa de mesmo raio permanecem sempre em contato quando uma desliza sobre a outra.

Vamos analisar agora a formação de imagens por superfícies curvas, começando com um *espelho esférico côncavo*.

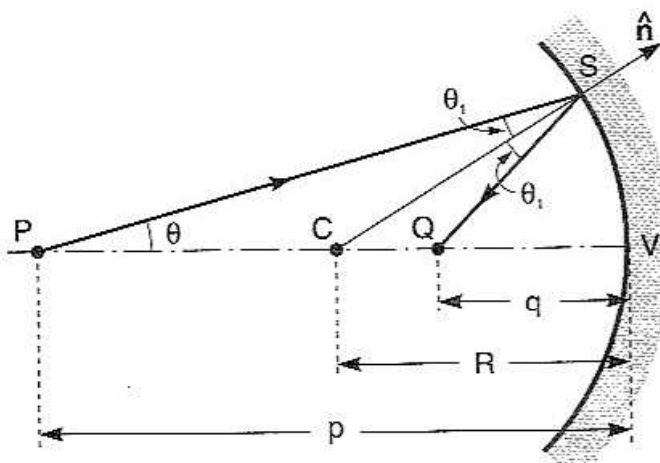


Fig. 2.25 Espelho esférico côncavo

O *raio de curvatura* do espelho é  $\overline{CV} = R$ ;  $C$  é seu *centro de curvatura* e  $V$  o *vértice*, em relação ao qual mediremos as distâncias (fig. 2.25).

Consideremos um ponto objeto  $P$  no eixo e um raio  $PS$  que forma um ângulo  $\theta$  com o eixo e incide sobre o espelho em  $S$ , com ângulo de incidência  $\theta_1$ , sendo refletido com o mesmo ângulo e cruzando o eixo em  $Q$ . Queremos

relacionar a distância  $\overline{QV} \equiv q$  com  $\overline{PV} = p$  e com  $\theta$ .

Usando a lei dos senos no  $\Delta CSP$ , vem:

$$\frac{p - R}{\sin \theta_1} = \frac{R}{\sin \theta} \quad (2.15)$$

No  $\Delta S Q P$ , temos  $\angle S \hat{Q} P = \pi - (\theta + 2\theta_1)$ . Logo,

$$\frac{R - q}{\text{sen } \theta_1} = \frac{R}{\text{sen } (\theta + 2\theta_1)} \quad (2.16)$$

A partir das (2.15) e (2.16), é possível em princípio eliminar  $\theta_1$  e relacionar  $q$  com  $p$  para cada valor de  $\theta$ . O resultado depende de  $\theta$ , ou seja, ao contrário de um espelho plano, o espelho esférico *não* forma uma imagem perfeita de um objeto puntiforme P: raios incidentes com diferentes inclinações  $\theta$  cruzam o eixo em pontos Q *diferentes* após a reflexão. Dizemos que há *aberração esférica*.

Entretanto, vamos ver que se formará uma imagem nítida se nos limitarmos a utilizar apenas uma *pequena abertura angular* do espelho (p. ex., diafragmando os raios). Isso restringe os raios admitidos a *raios paraxiais*, que formam com o eixo ângulos  $\theta$  (medidos em radianos) suficientemente pequenos para que possamos empregar as aproximações:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \approx \theta \\ \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \approx 1 \\ \text{tg } \theta &= \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots \approx \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Essa situação é geral, para todos os instrumentos óticos onde se empregam superfícies esféricas: formam imagens nítidas na *aproximação paraxial*, e geralmente são usados nessas condições.

Para um espelho de pequena abertura,  $\theta_1$  também será pequeno, e as (2.15) e (2.16) ficam

$$\frac{p - R}{R} \cong \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \frac{R - q}{R} \approx \frac{\theta_1}{\theta + 2\theta_1} = \frac{\theta_1 / \theta}{1 + 2 \frac{\theta_1}{\theta}}$$

Substituindo a primeira dessas equações na segunda, vem

$$\frac{q}{R} = \frac{\frac{p}{R}}{-1 + 2 \frac{p}{R}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

mostrando que, na aproximação paraxial, a posição de Q é independente de  $\theta$ : todos os raios refletidos paraxiais convergem para o mesmo ponto Q, que é a imagem de P.

A *distância imagem*  $q$  está relacionada com a *distância objeto*  $p$  e com o raio de curvatura  $R$  do espelho pela (2.18).

A *simetria* em  $p$  e  $q$  da (2.18) mostra que, se Q é a imagem de P, P é a imagem de Q, o que decorre da *reversibilidade* dos raios luminosos.

Se fizermos  $p \rightarrow \infty$  na (2.18), obtemos a imagem de um ponto objeto infinitamente distante, que pode ser interpretado como um raio *paralelo ao eixo*:

$$p \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} q \rightarrow \boxed{f \equiv \frac{R}{2}} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

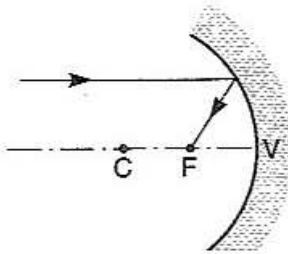


Fig. 2.26 Foco de um espelho esférico

A imagem é o *foco* F do espelho, situado a meio caminho entre o vértice e o centro (fig. 2.26). Reciprocamente, um objeto no foco tem sua imagem no infinito (raio paralelo ao eixo).

A (2.18) pode portanto ser reescrita:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}} \quad (2.20)$$

onde  $f$  chama-se *distância focal*. Esta equação tem uma interpretação intuitiva muito simples. Vemos pela fig. 2.25 que, na aproximação paraxial,  $\overline{PS} \approx \overline{PV}$ , de modo que  $p$  é o *raio de curvatura* da frente de onda associada aos raios divergentes que partem de P, quando atingem o espelho. O inverso do raio de curvatura de uma superfície é chamado de *curvatura* dessa superfície, de forma que  $1/p$  é a curvatura da frente da onda divergente que atinge o espelho, ou sua *divergência*.

O espelho transforma essa onda divergente numa onda convergente, que converge para a imagem  $Q$ , e  $1/q$  é a *convergência* (curvatura) dessa frente refletida. O inverso da distância focal  $1/f$  é o *poder de convergência* do espelho. Logo, a (2.20) significa que o poder de convergência do espelho deve ser suficiente para *compensar a divergência* da onda incidente e ademais *produzir a convergência* necessária para a formação da imagem.

Uma das principais aplicações de um espelho esférico é aumentar ou diminuir o tamanho da imagem. Para calcular esse efeito, precisamos determinar a imagem de um ponto objeto situado fora do eixo de simetria do espelho.

Um procedimento simples e geral para fazer isso é o *traçado de raios*, utilizando as propriedades do foco.

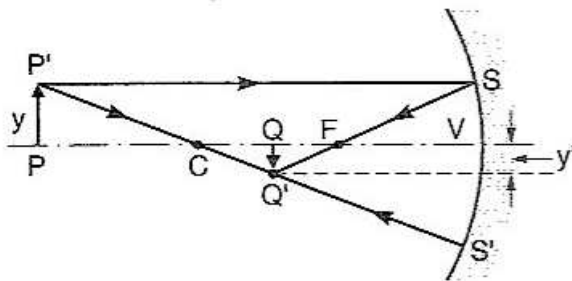


Fig. 2.27 Traçado de raios

Consideremos (fig. 2.27) o objeto vertical orientado  $\overline{PP'} = y$  (seta). O raio  $P'S$  paralelo ao eixo produz um raio refletido que passa pelo foco  $F$ . O raio  $P'S'$  que passa pelo centro de curvatura  $C$  é normal ao espelho, de forma que é refletido na mesma direção e em sentido oposto. A

intersecção  $Q'$  desses dois raios é a imagem  $Q'$  do ponto  $P'$  (também poderíamos ter tomado um raio incidente  $P'F$  passando pelo foco, que seria refletido paralelamente ao eixo).

Vemos que a imagem  $\overline{QQ'} = y'$  é *invertida* ( $y' < 0$ ). Os triângulos semelhantes  $PP'C$  e  $QQ'C$  dão:

$$-\frac{y'}{y} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}} = \frac{R - q}{p(-R)} = +\frac{q}{p} \left( \frac{\frac{R}{q} - 1}{1 - \frac{R}{p}} \right)$$

Decorre da (2.18) que a expressão entre parênteses no último membro é  $= 1$ . Logo, o *aumento lateral*  $m$  do espelho é dado por

$$\boxed{m \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}} \quad (2.21)$$

cujo valor negativo significa que a imagem é invertida.



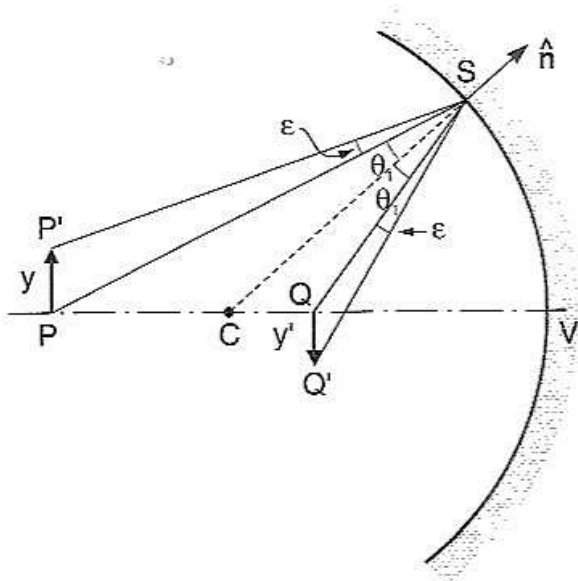


Fig. 2.28 Formação da imagem

Para mostrar que se trata efetivamente de uma imagem do ponto  $P'$  (na aproximação paraxial), ou seja, que raios formando outros ângulos com o eixo também vão cruzar-se em  $Q'$ , consideremos (fig. 2.28) o raio  $PS$  que forma a imagem em  $Q$  e um raio  $P'S$ , proveniente de  $P'$ , que atinge o mesmo ponto  $S$  do espelho.

O ângulo de incidência do raio  $P'S$  é  $\theta_1 + \varepsilon$  (fig. 2.28), onde  $\theta_1$  é o ângulo de incidência de  $PS$ . Logo, o ângulo de reflexão também é  $\theta_1 + \varepsilon$ .

Na aproximação paraxial,  $\overline{PP'}$  se confunde com um arco de círculo de centro  $S$  e abertura  $\varepsilon$ ; logo, no  $\Delta P P'S$ ,

$$\varepsilon \approx \frac{\overline{PP'}}{\overline{PS}} \approx \frac{y}{p} = \frac{y}{p}$$

Analogamente, no  $\Delta Q Q'S$  (na fig. 2.28, os ângulos estão exagerados)

$$\varepsilon \approx \frac{\overline{Q'Q}}{\overline{QS}} \approx \frac{y'}{q} = -\frac{y'}{q}$$

Identificando esses dois resultados, obtemos novamente a expressão (2.21) do aumento lateral,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}$$

Como o resultado é independente de  $\varepsilon$ , ele mostra que, na aproximação paraxial, todos os raios que emergem de  $P'$  produzirão raios refletidos que se cruzam em  $Q'$ , ou seja,  $Q'$  é a imagem de  $P'$ .

O espelho plano pode ser pensado como um caso limite de um espelho esférico com  $R \rightarrow \infty$ . A (2.18) mostra que, nesse caso,  $q = -p$ , o que concorda com a (2.14): o sinal negativo de  $q$  significa que a imagem é *virtual*, e a (2.21) dá  $m = 1$ :

como vimos, para um espelho plano, o tamanho da imagem é igual ao do objeto, e ela é *ereta*.

No caso da fig. 2.27, a imagem é *real*, uma seta luminosa na posição indicada, visível por um observador cuja vista seja atingida pelos raios refletidos. Para um objeto como  $PP'$ , situado à esquerda do centro  $C$ , a imagem é *menor* que o objeto e está entre  $C$  e  $F$ . Trocando os papéis de imagem e objeto, vemos que um objeto entre  $C$  e  $F$  tem imagem *invertida e aumentada*, situada à esquerda de  $C$  e *real*.

Que acontece se o objeto estiver entre  $F$  e  $V$ ?

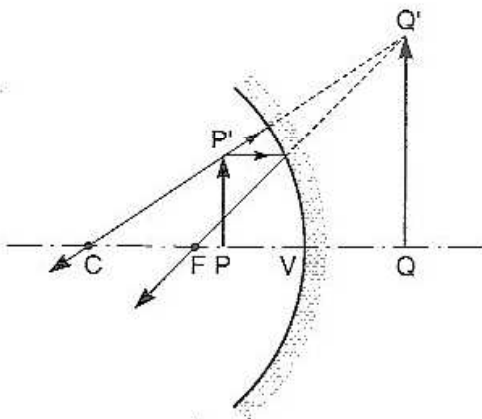


Fig. 2.29 Imagem de um objeto entre  $F$  e  $V$

Isso significa que,  $p < R/2$  e a (2.18) implica então ser  $q < 0$ .

Conforme mostra a fig. 2.29, a imagem  $Q'Q'$  é então *virtual*, mas a (2.21) permanece válida, com  $|q| > p$ : a imagem é *ereta e maior* que o objeto.

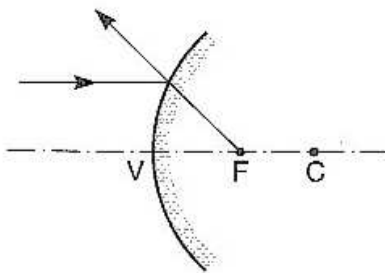


Fig. 2.30 Espelho convexo

O tratamento se estende facilmente à reflexão por um espelho *convexo*. Deixamos ao leitor verificar que se obtêm as mesmas fórmulas anteriores, desde que se tome o raio de curvatura  $R$  como *negativo* (o centro de curvatura  $C$  está à direita de  $V$ ). P. ex., conforme mostra a fig.

2.30, o foco  $F$  é *virtual*, e a distância focal continua sendo  $f = R/2 < 0$ .

É importante para evitar erros na resolução de problemas de ótica geométrica adotar uma *convenção de sinais* bem definida. As convenções que adotamos aqui são as seguintes:

1. A luz incide da esquerda para a direita; a luz refletida viaja da direita para a esquerda.

2. As distâncias objeto e imagem são medidas de  $P$  para  $V$  e  $Q$  para  $V$ , respectivamente, sendo positivas (objeto e/ou imagem *reais*) quando  $P$  e/ou  $Q$  estão à esquerda de  $V$ , e *virtuais* (negativas) quando à direita.

3. A distância focal é  $\overline{FV}$  (positiva para  $F$  à esquerda de  $V$ ).

4. O raio de curvatura é  $\overline{C\bar{V}}$  (positivo para um espelho côncavo).
5. Distâncias verticais são positivas acima do eixo e negativas abaixo.

## 2.7 Superfície refratora esférica

Consideremos agora um par de meios transparentes homogêneos, de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ , separados por uma superfície esférica convexa.

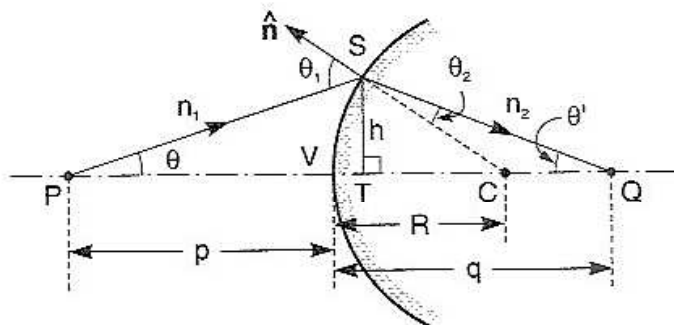


Fig. 2.31 Superfície refratora esférica

As convenções adotadas agora são diferentes, com  $p$ ,  $q$  e  $R$  positivos na situação da fig. 2.31. A lei dos senos, aplicada aos triângulos SCP e SCQ, dá

$$\frac{R}{\text{sen } \theta} = \frac{p + R}{\text{sen } \theta_1} \quad (2.22)$$

e

$$\frac{R}{\text{sen } \theta'} = \frac{q - R}{\text{sen } \theta_2} \quad (2.23)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  estão ligados pela lei de Snell,

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \quad (2.24)$$

Novamente, eliminando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  entre essas relações, é possível, em princípio, encontrar  $q$  em função de  $p$  para cada valor de  $\theta$ . Dividindo membro a membro a (2.23) pela (2.22), vem

$$\frac{q - R}{p + R} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta'} \quad (2.25)$$

onde usamos a lei de Snell.

Mais uma vez, o resultado depende de  $\theta$ , exceto para *raios paraxiais*, aos quais vamos nos limitar, admitindo que,  $\theta$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são todos  $\ll 1$ , e usando as aproximações (2.17). Nesse caso, a fig. 2.31 dá, com  $\overline{S\bar{T}} \equiv h$ ,

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta'} \approx \frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \theta'} \approx \frac{h/p}{h/q} = \frac{q}{p} \quad (2.26)$$

e a (2.25) fica

$$\frac{q-R}{p+R} = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{q}{p} \left( \frac{1 - \frac{R}{q}}{1 + \frac{R}{p}} \right) \quad (2.27)$$

É fácil mostrar (verifique!) que isso equivale a

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}} \quad (2.28)$$

que independe de  $\theta$  e dá a relação objeto-imagem.

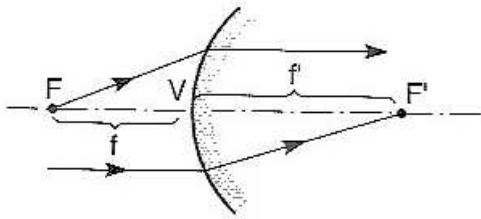


Fig. 2.32 Focos objeto e imagem

Para um raio incidente paralelo ao eixo ( $p \rightarrow \infty$ ), obtemos (fig. 2.32) um *foco imagem*  $F'$ , com  $q = f'$ ,

$$\frac{n_2}{f'} = \frac{(n_2 - n_1)}{R} \quad (2.29)$$

A imagem se forma no infinito (raio emergente paralelo ao eixo,  $q \rightarrow \infty$ ) quando o objeto está no *foco objeto*  $F$ , com

$$\frac{n_1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)}{R} \quad (2.30)$$

Logo, temos duas distâncias focais distintas, com

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_1}{f} = \frac{n_2}{f'} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}} \quad (2.31)$$

Para calcular o *aumento lateral*  $m$ , podemos usar as propriedades dos focos e do raio central (que passa pelo centro  $C$  e não é desviado), juntamente com o caráter paraxial dos raios.



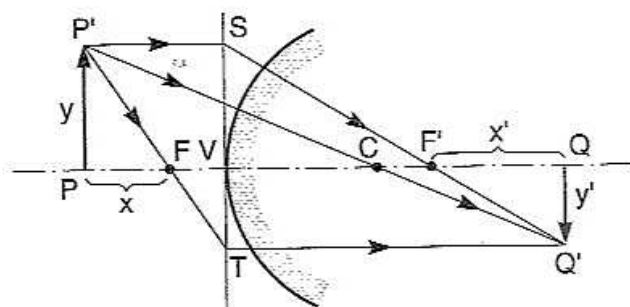


Fig. 2.33 Aumento lateral

Como raios paraxiais passam perto do vértice V, podemos aproximar a superfície do espelho na vizinhança de V pelo plano tangente ST em V (fig. 2.33). Os triângulos semelhantes P'CP e Q'CQ dão então [cf.(2.27)]

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} = -\frac{q-R}{R+p} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p} \quad (2.32)$$

No caso da fig. 2.33,  $m < 0$  e a imagem é invertida.

Sejam  $x$  e  $x'$  as distâncias do objeto e da imagem respectivamente aos pontos focais objeto e imagem, ambas positivas na fig. 2.33, ( $x \equiv \overline{PF}$  ;  $x' \equiv \overline{F'Q}$ ). Os triângulos semelhantes FVT e FPP', por um lado, e F'VS e F'QQ', por outro, dão então:

$$\frac{y}{x} = -\frac{y'}{f} \quad , \quad \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{f'}$$

o que dá

$$\boxed{m = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}} \quad (2.33)$$

Comparando os dois resultados, obtemos a *fórmula de Newton*

$$\boxed{xx' = ff'} \quad (2.34)$$

As convenções de sinais adotadas para a superfície refratora esférica são as seguintes:

1. Luz incidente da esquerda para a direita.
2. Distâncias objeto positivas à esquerda de V; distâncias imagem positivas à direita de V; valores negativos correspondem a imagem ou objeto virtuais.

3. Raio de curvatura positivo quando C está à direita de V (superfície *convexa*), negativo para superfície *côncava*.

4. Distâncias verticais positivas acima do eixo.

Com essas convenções, os resultados se generalizam para superfícies refratoras côncavas ( $R < 0$ ) e para quaisquer sinais de  $p$  e  $q$ , correspondendo a uma grande variedade de casos possíveis.

Um caso limite interessante é o de uma interface plana ( $R \rightarrow \infty$ ), quando a (2.28) dá

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p = -n_{12} p \quad (2.35)$$

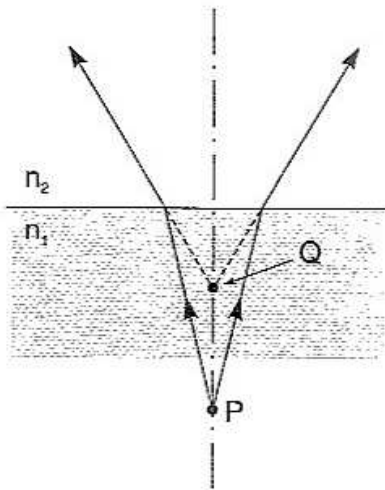


Fig. 2.34 Interface refratora plana

Se  $n_2 < n_1$ , um objeto  $P$  visto em condições paraxiais parecerá estar (fig. 2.34) na posição da imagem virtual  $Q$ , mais próximo da interface por um fator  $n_{12}$ . Se o meio 1 é a água e 2 o ar,  $n_{12} \approx 3/4$ : o fundo de uma piscina, visto de cima, parece menos profundo por esse fator. É por isso que um lápis mergulhado num copo com água parece “quebrado”.

## 2.8 Lentes delgadas

Uma lente tem duas superfícies refratoras, de raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente na ordem em que são encontradas pela luz incidente, e com sinais definidos pela mesma regra acima (Seç. 2.7). O material da lente tem índice de refração  $n_2$ , e só vamos considerar a situação em que os meios de ambos os lados da lente são idênticos, com índice de refração  $n_1$ . É fácil generalizar.

Vamos discutir apenas *lentes delgadas*, em que a espessura máxima da lente é muito pequena em confronto com as demais distâncias relevantes (distâncias objeto e imagem, distâncias focais, raios de curvatura).

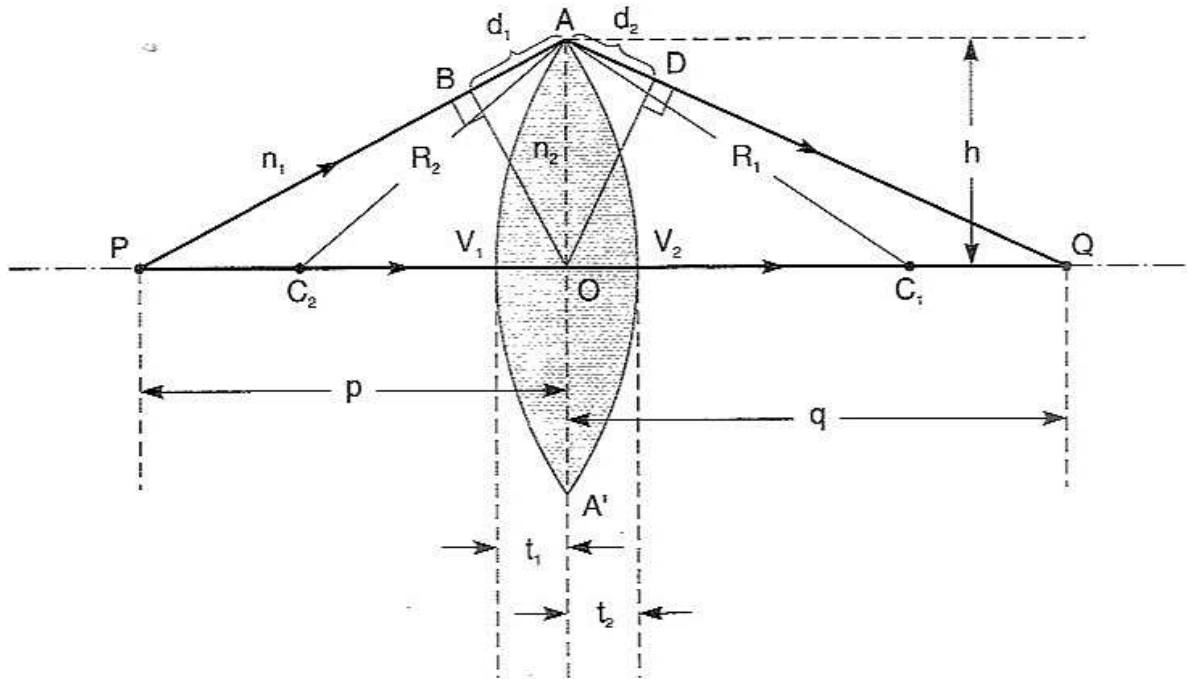


Fig. 2.35 Lente delgada biconvexa

Para fixar as idéias, vamos usar um diagrama (fig. 2.35) baseado numa lente *biconvexa*, em que, pelas convenções adotadas, temos

$$R_1 > 0 \quad , \quad R_2 < 0 \quad (2.36)$$

mas os resultados têm validade geral. A aproximação de lente delgada significa que podemos referir as distâncias objeto e imagem ao ponto O (em lugar dos vértices).

Uma forma possível de obter a relação entre  $p$  e  $q$  seria usar os resultados da Seção 2.7, determinando primeiro a imagem formada pela superfície anterior, que é real no caso da fig. 2.35, e depois tomando essa imagem como objeto (virtual no caso da fig. 2.35!) para a superfície posterior da lente, para calcular a imagem final por ela produzida (cf. Probl. 2.14).

Entretanto, vamos ilustrar a aplicação de um método diferente, baseado no Princípio de Fermat e na idéia apresentada no final da Seç. 2.3, impondo a condição de que o caminho ótico [PAQ], passando pelo topo da lente, tem de ser igual ao caminho ótico [POQ], ao longo do eixo, ou seja, a diferença de caminho ótico [PAQ] - [POQ] deve ser = 0.

Essa diferença tem duas componentes. A primeira (ignorando a diferença entre  $n_1$  e  $n_2$ ) é devida à diferença das *distâncias* percorridas. Com  $\overline{OB} \perp \overline{AP}$  e  $\overline{OD} \perp \overline{AQ}$ , a aproximação de lente delgada e *raios paraxiais* permite tomar  $\overline{PB} \approx \overline{PO}$  e  $\overline{DQ} \approx \overline{OQ}$  (a fig. 2.35 está muito exagerada), de forma que esta primeira componente é  $n_1 d_1 + n_1 d_2$ . A segunda componente vem da substituição

de  $n_1$  por  $n_2$  ao longo do trajeto  $\overline{V_1 V_2}$  (espessura da lente), e é dada por  $+ (n_2 - n_1) \overline{V_1 V_2} = + (n_2 - n_1) (t_1 + t_2)$  (fig. 2.35). Logo, o Princípio de Fermat dá

$$0 = [\text{PAQ}] - [\text{POQ}] = n_1 (d_1 + d_2) - (n_2 - n_1) (t_1 + t_2) \quad (2.37)$$

No triângulo retângulo AOP, temos, dentro das aproximações feitas, com  $\overline{AO} \equiv h$ ,

$$h^2 \equiv (p + d_1)^2 - p^2 = 2 p d_1 + \underbrace{d_1^2}_{\text{desprezível}} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 \equiv \frac{h^2}{2p} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Analogamente, no triângulo AOQ,

$$d_2 \equiv \frac{h^2}{2q} \quad (2.39)$$

Notando que  $\overline{C_1 V_1} = \overline{C_1 A} = R_1$ , o triângulo retângulo AOC<sub>1</sub> dá

$$h^2 = R_1^2 - (R_1 - t_1)^2 = 2 R_1 t_1 + \underbrace{t_1^2}_{\text{desprezível}} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 \equiv \frac{h^2}{2R_1} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Analogamente, lembrando que  $R_2 < O$ , o triângulo AOC<sub>2</sub> dá

$$t_2 \equiv -\frac{h^2}{2R_2} \quad (2.41)$$

Substituindo as (2.38) a (2.41) na (2.37), vem

$$n_1 \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - (n_2 - n_1) \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

o que dá, dividindo por  $n_1$  e usando a (2.9),

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n_{12} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} = \frac{1}{f'}} \quad (2.42)$$

que é a equação básica das lentes delgadas, na *forma gaussiana* (obtida pelo matemático Karl Friedrich Gauss). O resultado só depende do índice de refração relativo  $n_{12} = n_2 / n_1$ . A distância focal objeto  $f$  (valor de  $p$  para  $q \rightarrow \infty$ ) é igual à distância focal imagem  $f'$  (valor de  $q$  para  $p \rightarrow \infty$ ), por termos tomado índices de refração  $n_1$  idênticos dos dois lados da lente.

Para calcular o *aumento lateral*  $m$ , podemos usar as propriedades dos focos para traçar os raios, de forma análoga ao que foi feito na Sec. 2.7.

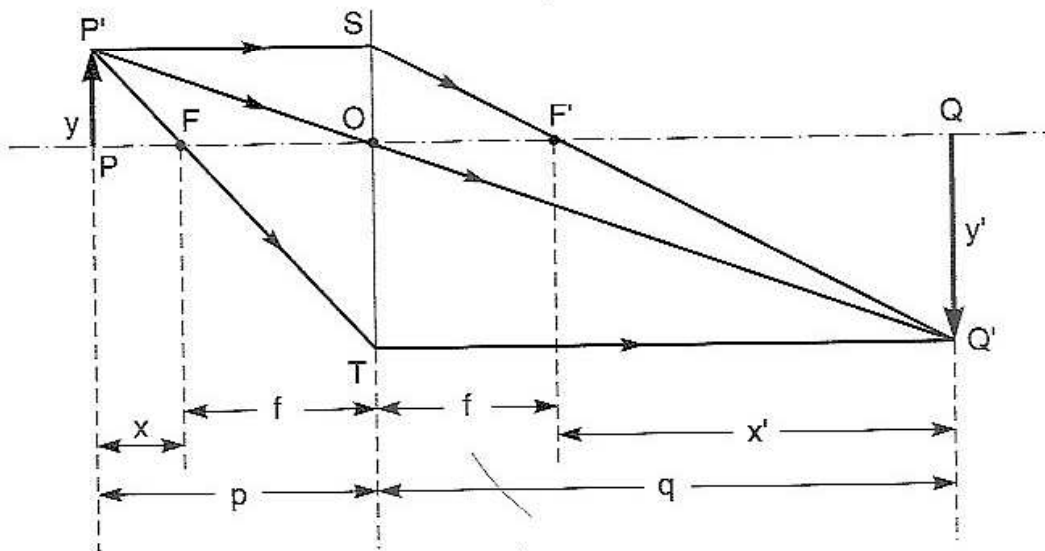


Fig. 2.36 Aumento lateral

Para a lente biconvexa, em que ambos os focos são reais, a fig. 2.36 dá, por semelhança dos triângulos  $P'P'O$  e  $Q'Q'O$ ,

$$\boxed{m = +\frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}} \quad (2.43)$$

e, indicando novamente por  $x$  e  $x'$  as distâncias  $\overline{PF}$  e  $\overline{F'Q}$  do objeto e da imagem aos respectivos *focos*,

$$\boxed{m = +\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}} \quad (2.44)$$

o que implica [cf. (2.34)]



$$x x' = f^2 \quad (2.45)$$

resultado devido a Newton, que é a *forma newtoniana* da equação das lentes delgadas [cf.(2.34)].

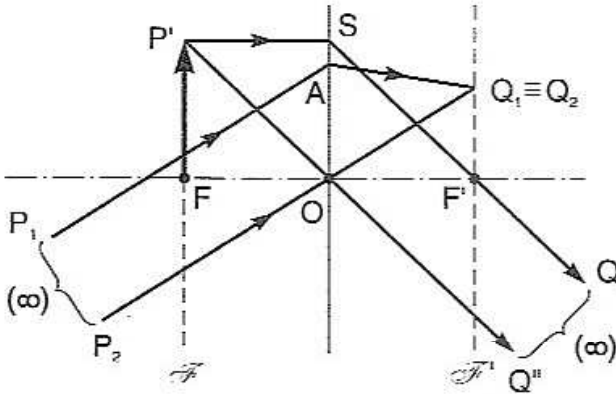


Fig. 2.37 Planos focais objeto e imagem

Uma consequência importante da (2.45) é que, para  $x \rightarrow 0$ , resulta  $x' \rightarrow \infty$ , e  $x' \rightarrow 0$  implica  $x \rightarrow \infty$ . A fig. 2.37 mostra a interpretação desses resultados, em termos do *plano focal objeto*  $\mathcal{F}$ , plano  $\perp$  ao eixo que passa por  $F$ , e do correspondente *plano focal imagem*  $\mathcal{F}'$ : a imagem de um ponto  $P'$  do plano  $\mathcal{F}$  está no  $\infty$ , na direção  $\overline{SQ'} \parallel \overline{P'O}$  ( $\overline{FO} = \overline{OF'}$ ).

Analogamente, um raio proveniente do  $\infty$  numa direção  $\overline{P_1A}$  (não  $\parallel$  ao eixo) tem sua imagem  $Q_1$  num ponto do plano focal  $\mathcal{F}'$ . Para encontrar esse ponto basta traçar o raio  $\overline{P_2O} \parallel \overline{P_1A}$ , que não é desviado: sua intersecção com o plano  $\mathcal{F}'$  dá a imagem  $Q_1$  ( $\equiv Q_2$ ), a mesma para qualquer raio incidente na mesma direção (feixe de raios paralelos).

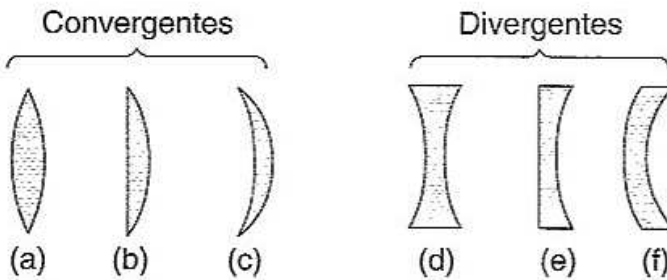


Fig. 2.38 Classificação das lentes: (a) Biconvexa; (b) Plano-convexa; (c) Menisco positivo; (d) Bicôncava; (e) Plano-côncava; (f) Menisco negativo

A fig. 2.38 mostra vários tipos de lentes, conforme os sinais e valores relativos dos raios  $R_1$  e  $R_2$ . As lentes mais espessas no centro do que nas extremidades são convergentes; em caso contrário, são divergentes, como decorre imediatamente do Princípio de Fermat.

Já vimos que, quando admitimos raios não-paraxiais, um objeto puntiforme não dará origem a uma imagem puntiforme, e sim a uma mancha menos nítida. Esse efeito, para pontos no eixo, é a *aberração esférica*, parte de um conjunto de aberrações que prejudicam a nitidez da imagem. Há várias outras que aparecem para pontos fora do eixo.

Além disso, as posições das imagens nos resultados obtidos acima dependem dos índices de refração, que variam com a cor (comprimento de onda). Se a luz

incidente é branca, formam-se imagens em pontos diferentes para as diferentes cores que a compõem, o que constitui a *aberração cromática*.

Vários artifícios são empregados para compensar ou reduzir essas aberrações: lentes compostas (sistema de lentes com o mesmo eixo), combinações de materiais diferentes, etc.

## 2.9 Noções sobre instrumentos óticos

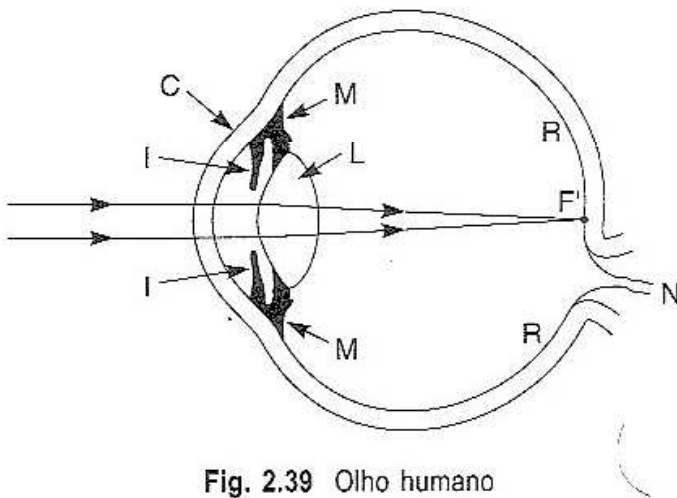


Fig. 2.39 Olho humano

O olho humano (fig. 2.39) contém, imersas em fluidos transparentes com índice de refração aproximadamente igual ao da água, uma “lente” fixa, a *córnea* (C), formada de material duro e transparente, e outra flexível, o *cristalino* (L), que pode ser comprimida ou distendida (mudando seu foco) pelo músculo ciliar (M) (Este processo chama-se *acomodação*). A *íris* (I) é um diafragma cuja abertura, a pupila,

se contrai ou dilata conforme a intensidade da iluminação. Num olho normal, luz incidente paralela é focalizada num ponto  $F'$  da *retina* (fundo de olho) (R). Nesta estão as células (cones e bastonetes) que transmitem sinais ao *nervo óptico* (N), o qual está ligado ao cérebro. Para uma pessoa míope (hipermétrope),  $F'$  cai antes (depois) da retina, o que se corrige usando lentes divergentes (convergentes).

Há uma pequena região da retina, a *fóvea*, onde a acuidade visual é máxima, e geralmente procuramos girar os globos oculares para que a imagem do objeto que queremos “olhar” caia sobre ela.

A *acomodação* do cristalino, mudando sua distância focal, permite que um olho normal de uma pessoa jovem possa ver com nitidez desde uma distância muito grande (“ $\infty$ ”) até um *ponto próximo*, localizado a cerca de 15 cm do olho. A distância  $d_0$  em que a visão é mais nítida é de  $\sim 25$  cm. Ambos variam com a idade; tomaremos  $d_0 = 25$  cm.

Para examinar um pequeno objeto, procuramos trazê-lo o mais perto possível dos olhos, a fim de que a imagem na retina seja a maior possível, mas, para que ela permaneça nítida, não podemos vir mais perto do que o ponto próximo. O tamanho da imagem na retina é proporcional ao *ângulo visual*, o ângulo subtendido no olho pelo tamanho  $y$  do objeto.

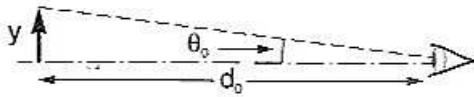


Fig. 2.40 Ângulo visual

Para a visão “a olho nú”, esse ângulo (fig. 2.40) é da ordem de

$$\theta_0 \approx y / d_0 \quad (2.46)$$

onde  $d_0$  é a distância de visão mais nítida ( $d_0 \sim 25 \text{ cm}$ ) e supusemos  $y \ll d_0$ , de forma que  $\text{tg } \theta_0 \approx \theta_0$ .

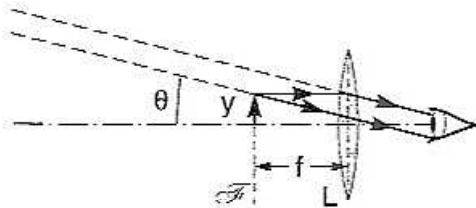


Fig. 2.41 Lupa

Se usarmos (fig. 2.41) uma *lupa* (lente de aumento), a lente convergente L, com o olho próximo de L e o objeto no plano focal  $\mathcal{F}$  de L, a “imagem” (virtual) subtenderá um ângulo  $\theta$  (raios paralelos) dado por

$$\theta \approx y / f \quad (2.47)$$

ou seja, o *aumento angular* produzido (que é também o aumento da imagem na retina) é

$$M = \frac{\theta}{\theta_0} \approx \frac{d_0}{f} \quad (2.48)$$

[A vantagem de colocar o objeto no plano focal é que o olho normal, quando relaxado, permanece focalizado no  $\infty$ ]. Convém portanto usar uma lente L de distância focal  $f$  a menor possível. Como as aberrações aumentam quando  $f$  diminui, isto limita o aumento máximo da lupa a valores menores que 10. Valores típicos são da ordem de 3.

Para obter aumentos maiores, podemos usar um *microscópio composto*, cuja forma esquemática mais simples está ilustrada na fig. 2.42.

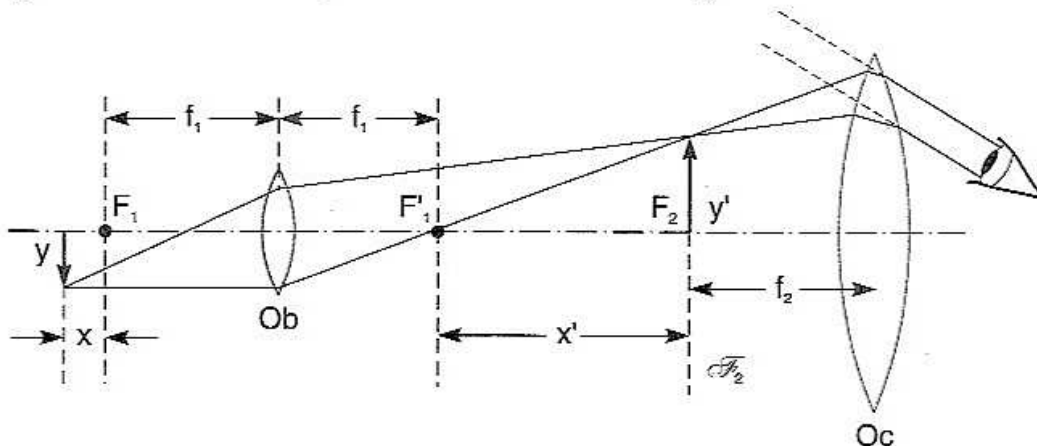


Fig. 2.42 Microscópio composto

O objeto, de tamanho  $y$ , é colocado perto do foco objeto  $F_1$  de uma lente de pequena distância focal  $f_1$ , a *objetiva*, de forma a produzir, como na (2.44), uma imagem real invertida de tamanho  $y'$  à distância  $x'$  do foco imagem  $F_1$  da objetiva. O *aumento linear*, dado pela (2.44),

$$m \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{f_1}{x} = -\frac{x'}{f_1} \tag{2.49}$$

é grande, porque  $x \ll f_1$  (o objeto é colocado perto de  $F_1$ ).

A imagem  $y'$  passa a funcionar como *objeto real* para outra lente, a *ocular* (fig. 2.42), cuja função é aumentar seu ângulo visual, funcionando como lupa. Se  $y'$  é projetado no plano focal da ocular, de distância focal  $f_2$ , o *aumento angular* produzido pela ocular é dado pela (2.48):

$$M = \frac{d_0}{f_2} \tag{2.50}$$

e o *aumento total* do microscópio composto é o produto dos dois, ou seja, é dado por

$$\boxed{m M = -\frac{x' d_0}{f_1 f_2}} \quad \left[ \begin{array}{l} d_0 \approx 25 \text{ cm} \\ x' \approx \text{comprimento do} \\ \text{tubo do microscópio} \end{array} \right] \tag{2.51}$$

Na prática, tanto a objetiva como a ocular são lentes compostas, bastante complicadas, projetadas de forma a minimizar as aberrações.

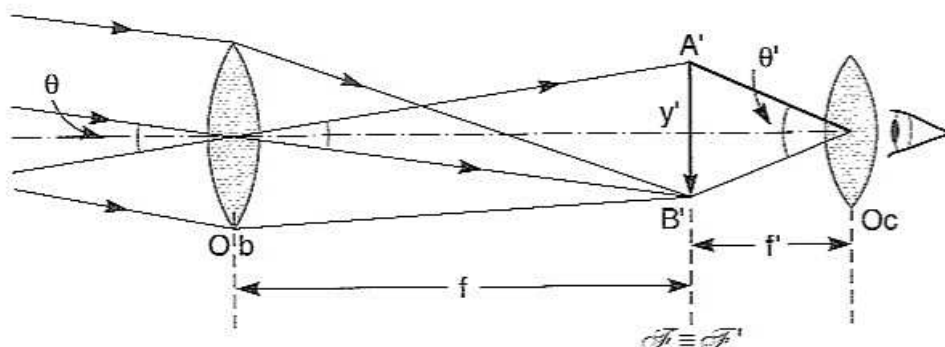


Fig. 2.43 Telescópio refrator

A finalidade do *telescópio refrator* mais simples, ilustrado na fig. 2.43, é aumentar o ângulo visual, e por conseguinte a imagem observada, de objetos muito distantes (distâncias astronômicas).

A *objetiva* do telescópio recebe raios praticamente paralelos do objeto, focalizando-os em seu plano focal imagem  $\mathcal{F}$ . Raios vindos do objeto dentro de um cone de direções de abertura  $\theta$  produzem a imagem real  $A'B'$  no plano focal  $\mathcal{F}$ , que também subtende um ângulo  $\theta$  vista da objetiva; pela aproximação paraxial,

$$\theta \approx y' / f \quad (2.52)$$

onde  $y'$  é o tamanho  $\overline{A'B'}$  da imagem e  $f$  a distância focal da objetiva.

A posição da ocular é escolhida de tal forma que  $\mathcal{F}$  também coincide com seu plano focal objeto, como no caso da lupa, de forma que o ângulo subtendido pela imagem final de  $\overline{A'B'}$  é dado pela (2.47):

$$\theta' \approx y' / f' \quad (2.53)$$

onde  $f'$  é a distância focal da ocular.

Decorre das (2.52) e (2.53) que o *aumento angular* do telescópio é

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f}{f'} \quad (2.54)$$

a razão da distância focal da objetiva para a distância focal da ocular (geralmente  $f \gg f'$ ). A imagem, nesse caso, é invertida, mas podem-se empregar diversos dispositivos para obter uma imagem ereta.

Os telescópios de observatórios astronômicos são usualmente *refletores*, pois é mais fácil fabricar espelhos de grande diâmetro do que lentes de boa qualidade (veremos mais adiante as vantagens de uma objetiva de grande diâmetro); além disso, a aberração cromática é eliminada.

## 2.10 Propagação num meio inhomogêneo

Até agora consideramos apenas a propagação de raios luminosos em meios homogêneos e os efeitos de reflexão e refração na interface entre dois meios homogêneos diferentes. Que acontece num meio inhomogêneo, cujo índice de refração varia continuamente de um ponto a outro? [ $n = n(\mathbf{x})$ ]



Um exemplo de um tal meio é a *atmosfera*. O índice de refração de um gás aumenta com a densidade. Assim, na atmosfera terrestre, ele é mais elevado na vizinhança da superfície da Terra do que a grandes altitudes — numa escala de dezenas de quilômetros.

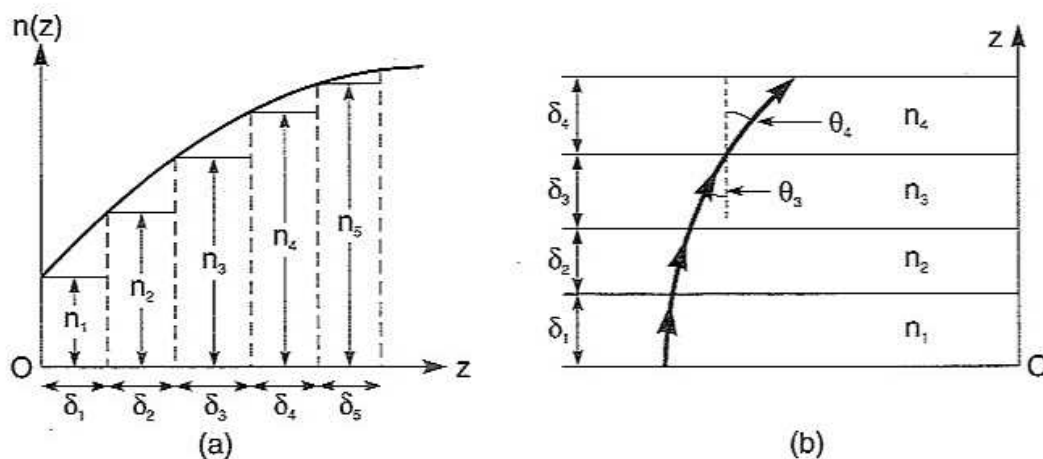


Fig. 2.44 Meio inhomogêneo

Para ver o que acontece no caso mais simples em que  $n$  varia apenas numa direção, que tomamos como sendo  $z$ , podemos substituir a variação contínua de  $n$  por uma “escada” [fig. 2.44(a)], ou seja, por um *meio estratificado*, em que  $n$  varia apenas de camada para camada: no limite em que a espessura das camadas  $\rightarrow 0$ , reproduzimos a variação contínua.

Aplicando a lei da refração a cada interface, teríamos [fig. 2.44(b)]

$$\dots = n_3 \operatorname{sen} \theta_3 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 = n_1 \operatorname{sen} \theta_1$$

ou seja, o ângulo  $\theta$  entre o raio e a direção  $z$  vai variando, e no limite podemos escrever

$$\boxed{n \operatorname{sen} \theta = \text{constante}} \quad (2.55)$$

que leva a uma variação contínua de  $\theta$  com  $n$ : *num meio inhomogêneo, os raios luminosos são curvos*. Se  $n$  decresce de baixo para cima, eles se encurvam como na fig. 2.44(b); se  $n$  cresce [como na fig. 2.44(a)], a curvatura seria em sentido oposto, aproximando-se da normal.

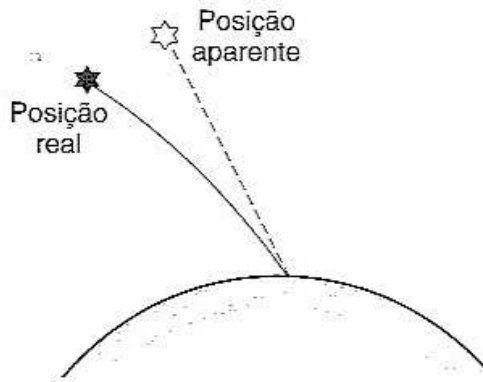


Fig. 2.45 Posição aparente de uma estrela

chega, “vendo” a estrela numa posição aparente  $0,5^\circ$  mais elevada do que a posição real.

Como o diâmetro angular aparente do Sol visto da Terra é  $\approx 0,5^\circ$ , “vemos” o Sol, pela mesma razão, com seu disco logo acima do horizonte, quando nasce ou se põe: é quando ele está, justamente, logo abaixo do horizonte.

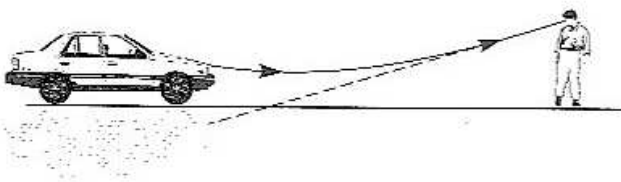


Fig. 2.46 Miragem

Num dia muito quente, em que camadas de ar junto do asfalto estão mais quentes do que as que ficam acima,  $n$  cresce com a altitude e os raios se encurvam em sentido oposto, fazendo-nos ver simultaneamente (fig. 2.46) luz vinda diretamente de um carro e luz “refletida” pelo asfalto, como se ele fosse a superfície de um lago. Essa é também a origem das miragens num deserto.

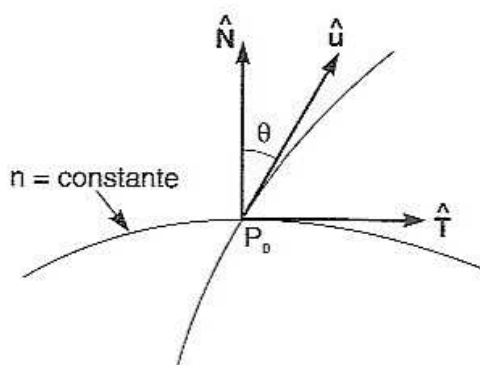


Fig. 2.47 Vetores unitários

Dado  $n$  como função da posição, podemos generalizar a (2.55) estratificando o meio através de superfícies  $n = \text{constante}$ , com valores próximos umas das outras. O ângulo  $\theta$  é então o ângulo entre a direção  $\hat{\mathbf{u}}$  do raio ( $\hat{\mathbf{u}} \equiv$  vetor unitário da tangente ao raio) e a direção de  $\hat{\mathbf{N}}$ , vetor unitário da normal à superfície  $n = \text{constante}$ , e a fig. 2.47 dá

$$\text{sen } \theta = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{T}}$$

onde  $\hat{\mathbf{T}}$  é um vetor unitário [no plano de incidência  $(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}})$ ] tangente à superfície  $n = \text{constante}$ . A generalização da (2.55) é então\*

$$\Delta (n \hat{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{T}} = 0 \quad (\Delta = \text{variação ao longo do raio}) \quad (2.56)$$

Partindo de um ponto inicial  $P_0$  e de uma direção inicial do raio  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , podemos então ir traçando a trajetória do raio no meio, com o auxílio da (2.56).

Vamos ver que é possível obter uma *equação diferencial* para o raio, tomando como parâmetro o *arco de curva*  $s$  descrito ao longo do raio (comprimento do arco) a partir de uma dada origem. A equação da curva,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ , chama-se *equação intrínseca*.

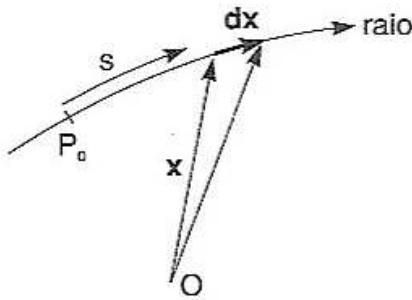


Fig. 2.48 Deslocamento  $d\mathbf{x}$  ao longo de um raio

Sabemos que (fig. 2.48)

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad (|d\mathbf{x}| = ds) \quad (2.57)$$

Partimos da identidade

$$(n \hat{\mathbf{u}})^2 = n^2 \quad (2.58)$$

e diferenciamos ambos os membros, obtendo

$$(n \hat{\mathbf{u}}) \cdot d(n \hat{\mathbf{u}}) = n dn \quad \left\{ \quad \hat{\mathbf{u}} \cdot d(n \hat{\mathbf{u}}) = dn \right.$$

Se  $dn$  é a variação de  $n$  para um deslocamento  $d\mathbf{x}$  ao longo do raio, temos, pela definição do gradiente,

$$dn = \text{grad } n \cdot d\mathbf{x} = \text{grad } n \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} ds = \hat{\mathbf{u}} \cdot \text{grad } n ds$$

\* Numa superfície de descontinuidade entre dois meios 1 e 2, temos

$$\Delta (n \hat{\mathbf{u}}) = n_2 \hat{\mathbf{u}}_2 - n_1 \hat{\mathbf{u}}_1$$

e a (2.56) é equivalente à lei de Snell, pois  $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_j = \text{sen } \theta_j$  ( $j = 1, 2$ )

e, substituindo na equação acima, vem

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{d(n \hat{\mathbf{u}})}{ds} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \text{grad } n \quad (2.59)$$

O vetor  $\text{grad } n$  é, como sabemos, perpendicular às superfícies  $n = \text{constante}$ , ou seja, é  $\parallel \hat{\mathbf{N}}$  (fig. 2.47). Mas o mesmo vale para  $d(n \hat{\mathbf{u}}) / ds$ , pois, pela (2.56),  $n \hat{\mathbf{u}}$  só pode mudar ao longo de  $\hat{\mathbf{N}}$  (não muda na direção tangencial  $\hat{\mathbf{T}}$ ). Logo, decompondo  $\hat{\mathbf{u}}$  nas direções  $\hat{\mathbf{N}}$  e  $\hat{\mathbf{T}}$ , vemos que a (2.59) equivale a

$$\boxed{\frac{d}{ds}(n \hat{\mathbf{u}}) = \frac{d}{ds} \left( n \frac{d \mathbf{x}}{ds} \right) = \text{grad } n} \quad (2.60)$$

que se chama de *equação diferencial dos raios*.

Em particular, num meio *homogêneo*, onde  $n = \text{constante}$  ( $\therefore \text{grad } n = 0$ ), a (2.60) fica

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} = 0 \quad (2.61)$$

cuja solução geral é

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} s + \mathbf{b}$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores constantes:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \hat{\mathbf{u}}_0 & (\text{direção inicial do raio}) \\ \mathbf{b} = \mathbf{x}_0 & (\text{posição inicial}) \end{cases} \quad (2.62)$$

Recuperamos assim a *propagação retilínea* num meio homogêneo.

## 2.11 A analogia ótico-mecânica

Em 1831, William Rowan Hamilton descobriu uma analogia extremamente bonita entre a *ótica geométrica* e a *mecânica clássica*. Foi com base nessa analogia que ele reformulou as leis da mecânica clássica em termos das *equações de Hamilton*,

que são discutidas em cursos de mecânica analítica; a *equação de Hamilton-Jacobi*, geralmente apresentada nesses cursos de forma muito abstrata, tem uma interpretação física muito simples e intuitiva quando formulada em termos dessa analogia.

A analogia compara a trajetória segundo a ótica geométrica de um raio luminoso num meio inhomogêneo, de índice de refração  $n(\mathbf{x})$ , com a trajetória de uma partícula num campo de forças conservativas, de acordo com as leis da mecânica clássica. A motivação estava relacionada com a teoria corpuscular da luz; já vimos, p. ex., na interpretação corpuscular da reflexão e da refração, que os desvios da direção de propagação nestes casos são atribuídos a forças que atuam sobre os corpúsculos na interface entre dois meios.

Num meio ótico inhomogêneo, como vimos, a trajetória de um raio luminoso fica determinada quando damos sua *posição inicial*  $\mathbf{x}_0$  e sua *direção inicial*, definida pelo vetor unitário  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , tangente ao raio em  $\mathbf{x}_0$ . Na mecânica clássica, para uma partícula de massa  $m$  num campo de forças conservativo em que a energia potencial é  $V(\mathbf{x})$ , não basta dar  $\mathbf{x}_0$  e a *direção inicial*  $\hat{\mathbf{u}}_0$  do movimento: é preciso dar a *velocidade inicial*  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{u}}_0$ , que contém, como informação adicional, a *magnitude*  $v_0$  da velocidade.

Entretanto, se a *energia total*  $E$  da partícula for *fixada*,  $v_0$  fica totalmente determinada pela posição inicial  $\mathbf{x}_0$ . Com efeito, a conservação da energia dá

$$\boxed{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) = E = \frac{1}{2} m v_0^2(\mathbf{x}_0) + V(\mathbf{x}_0)} \quad (2.63)$$

onde  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  é o momento linear da partícula. A (2.63) dá então

$$v_0 = |\mathbf{v}_0| = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\mathbf{x}_0)]} = v_0(\mathbf{x}_0) \quad (2.64)$$

ou seja, a *magnitude*  $v_0$  da velocidade em cada ponto  $\mathbf{x}_0$  fica inteiramente determinada para  $E$  dado; só resta arbitrar a *direção inicial*  $\hat{\mathbf{u}}_0$  da trajetória, como no caso dos raios luminosos.

Temos então, em cada ponto  $\mathbf{x}$ , um valor bem definido da magnitude  $p(\mathbf{x})$  do momento linear de uma partícula que passe por esse ponto:

$$\boxed{p(\mathbf{x}) = m v(\mathbf{x}) = \sqrt{2m [E - V(\mathbf{x})]}} \quad (2.65)$$



Seja  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  a equação paramétrica de uma trajetória, em função do arco de curva  $s$  ao longo da trajetória. Se  $s = s(t)$  é a lei horária do movimento ao longo da trajetória, temos então  $ds/dt = v$ , e

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{x}}{ds} = v \hat{\mathbf{u}} \quad (2.66)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}$ , vetor unitário na direção da velocidade, é tangente à trajetória.

Para determinar a trajetória, aplicamos a 2.<sup>a</sup> lei de Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = -\text{grad } V \quad (2.67)$$

onde

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{p}}{ds} = m v \frac{d\mathbf{v}}{ds} = v \frac{d}{ds} \left( p \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) \quad (2.68)$$

em que foi usada a (2.66).

Por outro lado, a (2.65) dá, pela regra da cadeia,

$$\text{grad } p = \frac{dp}{dV} \text{grad } V = -\frac{1}{2} \sqrt{2m} \left[ E - V(\mathbf{x}) \right]^{-1/2} \text{grad } V = -\frac{m}{p} \text{grad } V \quad (2.69)$$

$$\therefore -\text{grad } V = \frac{p}{m} \text{grad } p = v \text{grad } p \quad (2.70)$$

Substituindo a (2.68) e a (2.70) na (2.67), obtemos finalmente a *equação diferencial das trajetórias*:

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left[ p(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right]} = \text{grad } p(\mathbf{x}) \quad (2.71)$$

que tem exatamente a mesma forma que a equação diferencial dos raios na ótica geométrica, com  $n(\mathbf{x})$  substituído por  $p(\mathbf{x})$  [cf.(2.60)]. Como  $n(\mathbf{x})$  é um número (adimensional), para completar a analogia basta dividir os dois membros da (2.71) pela constante

$$p_0 = \sqrt{2mE} \quad (2.72)$$

que é o momento de uma partícula *livre* de energia  $E$ , definindo:

$$n(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{p_0} = \sqrt{1 - \frac{V(\mathbf{x})}{E}} \quad (2.73)$$

que é real para  $E > V(\mathbf{x})$  (região acessível ao movimento).

A (2.71) dá então

$$\frac{d}{ds} \left[ n(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right] = \text{grad } n \quad (2.74)$$

que é *exatamente* a equação diferencial dos raios, (2.60).

Logo, a trajetória clássica de uma partícula de energia  $E$  num campo de forças de energia potencial  $V(\mathbf{x})$  é idêntica à trajetória de um raio luminoso num meio inhomogêneo de índice de refração dado pela (2.73), de acordo com as leis da ótica geométrica. Essa é analogia ótico-mecânica descoberta por Hamilton.

*Exemplo:* Consideremos o movimento de uma partícula no campo gravitacional uniforme próximo à superfície da Terra, para o qual

$$V(z) = m g z$$

tomando origem no solo ( $z = 0$ ). Seja

$$E = m g h$$

( $h$  = altura máxima atingível pela partícula). Temos então, pela (2.73),

$$n = \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$$

que diminui quando  $z$  aumenta, como na fig. 2.44(b).

Se tomarmos a origem como ponto inicial da trajetória, com  $\hat{\mathbf{u}}_0$  no plano  $(x, z)$ , e

$$\hat{\mathbf{u}}_0 = (\alpha_0, \beta_0) \quad (\alpha_0, \beta_0 = \text{cosenos diretores})$$

a trajetória permanece nesse plano, e a componente  $x$  da (2.74) fica

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \left\{ \quad n \frac{dx}{ds} = \text{constante} = \left( n \frac{dx}{ds} \right)_0 \right.$$

onde, para,  $x = z = 0$ ,  $(dx/ds)_0 = u_{0x} = \alpha_0$ , e  $n(z=0) = 1$ . Logo

$$n \frac{dx}{ds} = \alpha_0 \quad \left\{ \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 - (z/h)}} \right.$$

Como  $(dx)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$ , isto dá

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - \left( \frac{dx}{ds} \right)^2} = \sqrt{\beta_0^2 - \frac{z}{h}}$$

onde o sinal decorre de  $(dz/ds)_0 = u_{0z} = \beta_0$ .

Dividindo membro a membro uma dessas relações pela outra, vem

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\beta_0^2 - \frac{z}{h}} \quad \left\{ \quad \frac{dz}{\sqrt{\beta_0^2 - \frac{z}{h}}} = \frac{dx}{\alpha_0} \right.$$

Integrando ambos os membros entre (0,0) e (x,z), vem

$$\frac{x}{\alpha_0} = 2h \left( \beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - \frac{z}{h}} \right)$$

e, resolvendo em relação a  $z$ ,

$$\boxed{z = \frac{\beta_0}{\alpha_0} x - \frac{x^2}{4h \alpha_0^2}} \quad \left( h = \frac{E}{mg} \right)$$

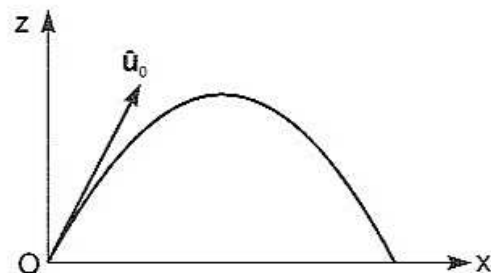


Fig. 2.49 Trajetória parabólica

equação da *parábola* (fig. 2.49) que passa pela origem, com direção inicial  $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\alpha_0, \beta_0)$  no plano  $(x, z)$ , que é a trajetória prevista pela mecânica clássica para a velocidade inicial  $v_0 \hat{\mathbf{u}}_0 = \sqrt{2E/m} (\alpha_0, \beta_0)$  (verifique!).

Uma das aplicações importantes da analogia ótico-mecânica é a *ótica eletrônica*, ou, mais geralmente, a ótica de feixes de partículas. Trata-se de manipular um feixe de partículas, tratado pela mecânica clássica, como se fosse um feixe de luz na aproximação de ótica geométrica, usando campos de forças para desviar ou focalizar o feixe, construindo elementos análogos a espelhos, prismas, lentes, etc..

No caso dos elétrons, por exemplo, podem ser usados campos eletrostáticos para esse fim. Um campo elétrico uniforme entre placas paralelas, que produz uma trajetória parabólica, como vimos no exemplo acima, é usado para desviar um feixe de elétrons, funcionando como um prisma na ótica. Isso se faz num tubo de osciloscópio ou de TV, por exemplo.

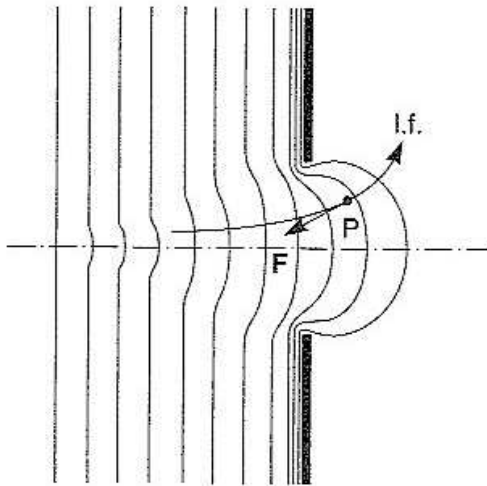


Fig. 2.50 Lente eletrostática; l.f. = linha de força

Um exemplo de uma *lente eletrostática* (fig. 2.50) é uma placa com um pequeno orifício circular, com uma diferença de potencial em relação a outra placa distante. As superfícies equipotenciais (fig. 2.50) formam protuberâncias para fora do orifício, e a força  $\mathbf{F}$  sobre um elétron num ponto P tem uma componente radial que aponta para o eixo, exercendo um efeito de focalização. Lentes análogas a essa são empregadas no *microscópio eletrônico*, que permite obter aumentos muito mais elevados do que um microscópio ótico, por razões que serão discutidas mais adiante (Seç. 4.8).

Existem também *lentes magnéticas* para partículas carregadas. A focalização desempenha um papel importante para os feixes de aceleradores de partículas.

Existem também *lentes magnéticas* para partículas carregadas. A focalização desempenha um papel importante para os feixes de aceleradores de partículas.

A analogia ótica-mecânica também teve um papel fundamental na formulação da mecânica quântica, conforme veremos.

#### Observações:

Na ótica geométrica, como vimos, o caminho ótico entre dois pontos  $P_0$  e  $P_1$  é estacionário, ou seja,

$$\text{Princípio de Fermat: } \delta \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = 0$$

Pela analogia ótico-mecânica, o análogo dessa propriedade para trajetórias na mecânica clássica é:

$$\text{Princípio de Maupertuis: } \delta \int_{P_0}^{P_1} p ds = 0$$

Uma vez obtida a trajetória, a lei horária sobre ela resulta da relação

$$dt = \frac{ds}{v(\mathbf{x})} \text{ ; basta integrar}$$

## PROBLEMAS

1. O ângulo de incidência  $\theta_1$  para o qual o raio refletido é *perpendicular* ao raio refratado chama-se *ângulo de Brewster*. (a) Obtenha o ângulo de Brewster  $\theta_{1B}$  em função do índice de refração relativo  $n_{12}$  do meio 2 em relação ao meio 1; (b) Calcule  $\theta_{1B}$  para as seguintes interfaces: ar/água; ar/vidro comum.

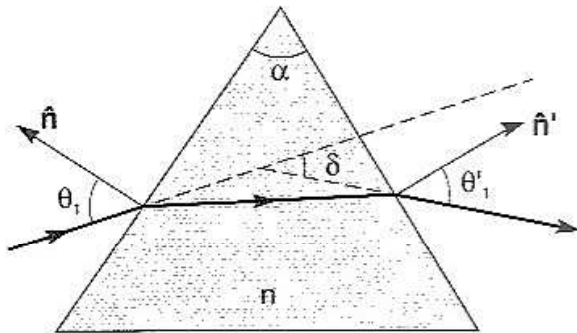
2. Num galvanômetro sensível, a deflexão do fio de torção produzida pelo campo magnético da corrente é medida pela deflexão de um feixe de luz refletido por um pequeno espelho plano preso ao fio. Se o espelho gira de um ângulo  $\theta$ , de quanto gira o feixe de luz refletido?

3. Quantas imagens de uma fonte puntiforme situada entre dois espelhos que formam entre si um ângulo  $\theta = 90^\circ$  são produzidas? E se  $\theta$  for  $= 120^\circ$ ? Generalize para  $\theta = 2\pi/n$ , com  $n$  inteiro.

4. Uma pessoa tem 1,75 m de altura, e a distância de seus olhos ao solo é de 1,60 m. Para que ela possa ver a sua imagem completa num espelho plano de porta de armário: (a) qual deve ser a altura mínima do espelho? (b) a que distância do chão deve estar a borda inferior do espelho?



5. Uma lâmina de vidro de faces planas paralelas tem um índice de refração  $n$  e espessura  $h$ . Um raio de luz incide sobre ela com ângulo de incidência  $\theta_1$ . Mostre que o raio transmitido através da lâmina é paralelo ao raio incidente. A distância perpendicular  $d$  entre o raio transmitido e o prolongamento do raio incidente chama-se *desvio lateral*. Calcule  $d$  em função de  $n$ ,  $h$  e  $\theta_1$ .

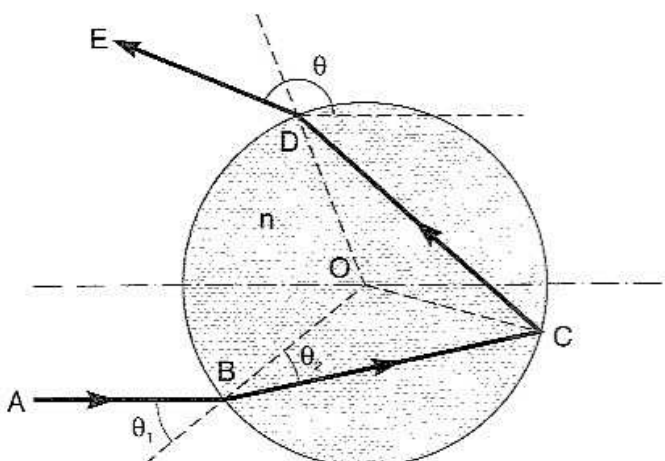


6. Considere um prisma de ângulo de abertura  $\alpha$  e um raio incidente sobre uma face com ângulo de incidência  $\theta_1$ : seja  $n$  o índice de refração do prisma. Chama-se *desvio*  $\delta$  o ângulo entre as direções do raio emergente e do raio incidente (fig.). Mostre que, para pequenos ângulos de abertura ( $\alpha \ll 1$ ) e pequenos ângulos de incidência ( $\theta_1 \ll 1$ ), o desvio é independente de  $\theta_1$  e é dado por  $\delta = (n - 1)\alpha$ .

7. Relacione  $\delta$  no Probl. 6 com  $n$  e  $\theta_1$  no caso geral (sem supor  $\alpha$  e  $\theta_1$  pequenos), e mostre que  $\delta$  é *mínimo* quando o ângulo de emergência  $\theta'_1$  (fig. acima) é igual a  $\theta_1$ . Mostre que, quando isso acontece, vale a relação

$$n = \frac{\text{sen} \left[ \frac{1}{2} (\delta + \alpha) \right]}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

onde  $\delta$  é o ângulo de desvio mínimo. Essa relação é empregada para medições precisas do índice de refração  $n$ .



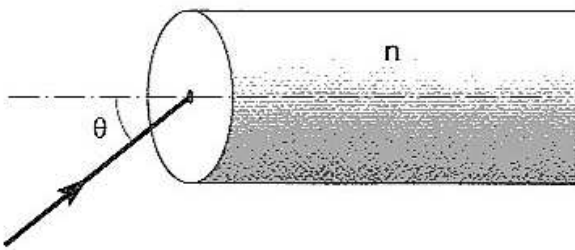
8. Quando um raio de sol penetra numa gota de água, ele sofre reflexões múltiplas internas acompanhadas de transmissões parciais para fora. Considere um raio ABCDE que sofre uma única reflexão interna antes de emergir da gota (fig.). (a) Mostre que o desvio  $\theta$  do raio emergente DE em relação à direção de incidência AB é dado por

$$\theta = \pi + 2\theta_1 - 4\theta_2$$

onde  $\theta_2$  é o ângulo de refração associado ao ângulo de incidência  $\theta_1$  (trate a gota como uma esfera de índice de refração  $n$ ). O *arco-íris primário* se forma quando o desvio  $\theta$  é *mínimo*. (b) Mostre que isso acontece para um ângulo de incidência  $\theta_{1R}$  tal que

$$\text{sen } \theta_{1R} = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

(c) Calcule o ângulo  $\theta$  correspondente (ângulo do arco-íris primário) para luz amarela.



9. No modelo simplificado de fibra ótica discutido na Seção 2.4 (cilindro circular de vidro), calcule o ângulo de incidência  $\theta$  máximo na face de entrada (fig.) para o qual a luz será guiada dentro da fibra por reflexões totais sucessivas, em função do índice de refração  $n$  da fibra.

10. Repita a dedução vista na Seção 2.6 para um espelho esférico *convexo*, mostrando que se obtém a mesma relação distância-imagem (2.18), mas com  $R < 0$ . Mostre que a expressão (2.21) do aumento lateral também permanece válida nesse caso.

11. Para um espelho esférico, também podemos tomar a origem no foco  $F$ , em lugar do vértice do espelho. Sejam  $\overline{PF} = x$  e  $\overline{QF} = x'$  as distâncias objeto e imagem, respectivamente, referidas ao foco. Demonstre a *fórmula de Newton*  $xx' = f^2$  [cf. (2.34)].

12. Justifique os seguintes métodos rápidos para determinar se um espelho esférico é côncavo ou convexo: (a) Olhando para a própria imagem desde um ponto próximo ao espelho: se a imagem é aumentada, o espelho é côncavo; se é diminuída, é convexo. (b) Olhando de uma grande distância: se a imagem é invertida, o espelho é côncavo; se é ereta, é convexo.

13. Repita a dedução da Seção 2.7 para uma superfície refratora esférica côncava, mostrando que a (2.28) permanece válida (com  $R < 0$ ), bem como a última expressão na (2.32) para o aumento lateral.

14. A partir da (2.20), trace um gráfico de  $(q/f)$  em função de  $(p/f)$ , tomando para  $(p/f)$  os pontos  $\pm 0,5$ ,  $\pm 1,0$ ,  $\pm 1,5$ ,  $\pm 2,0$  e  $\pm 3,0$ . Para cada um desses pontos calcule o aumento lateral. Interprete os resultados em termos de objetos reais ou virtuais, imagens reais/virtuais, eretas ou invertidas, para cada um dos pontos acima, fazendo o traçado de raios correspondente, (a) para um espelho côncavo; (b) para um espelho convexo.

15. O diâmetro médio da Lua é  $\approx 3,48 \times 10^3$  km e a distância Terra-Lua é  $\approx 3,82 \times 10^5$  km. Se empregarmos um telescópio refletor esférico de 5 m de diâmetro para observar a Lua, qual será o diâmetro da imagem da Lua vista pelo telescópio?

16. Deduza a equação (2.42) para uma lente delgada construindo a imagem por duas refrações sucessivas, nas superfícies esféricas dianteira e traseira da lente.

17. Deseja-se projetar um espelho de toalete côncavo que aumente a imagem 2 vezes, para jovens de visão normal, com distância de visão mais nítida  $d_1 = 25$  cm. (a) Qual deve ser o raio de curvatura? (b) Qual é a distância ideal de uso?

18. Um espelho esférico tem distância focal  $f$ . Ache duas posições de um objeto para as quais o tamanho da imagem é  $A$  vezes maior que o tamanho do objeto. Discuta todos os casos possíveis, conforme o espelho seja côncavo ou convexo e a imagem (objeto) seja real ou virtual; em cada caso, desenhe o traçado de raios mostrando as posições de objeto e imagem em relação ao vértice e ao foco do espelho.

19. O raio de curvatura de uma lente plano-côncava de vidro ( $n = 1,5$ ) é de 0,5 m. Calcule sua distância focal (a) no ar; (b) quando imersa num líquido ( $S_2C$ ) de índice de refração absoluto 1,63. Comente o resultado.

20. Sem fazer a aproximação paraxial, calcule a distância  $q$  da “imagem” produzida por uma superfície refratora esférica convexa de raio de curvatura  $R$  para um raio incidente paralelo ao eixo, em função do índice de refração relativo  $n_{12}$  e do ângulo de incidência  $\theta_1$ . Mostre que o resultado depende de  $\theta_1$ , mas, na aproximação paraxial, reduz-se à distância focal imagem, independente de  $\theta_1$ .

21. Uma lente delgada convergente de distância focal  $f$  é colocada entre um objeto e um anteparo fixos, a uma distância  $d > 4f$  um do outro. Desloca-se a lente até que ela forme uma imagem nítida do objeto no anteparo. (a) Mostre que existem duas posições diferentes da lente para as quais isso acontece. (b) Sejam  $y'$  e  $y''$  os tamanhos da imagem correspondentes a essas duas posições. Demonstre que o tamanho do objeto é a média geométrica de  $y'$  e  $y''$ .

22. Demonstre que a distância focal de uma lente delgada biconvexa pode ser expressa em função do diâmetro  $D$  da lente, de sua espessura  $t$  e do seu índice de refração  $n_{12}$  relativo ao meio.

23. Obtenha a equação das lentes delgadas para uma lente de índice de refração  $n_2$  situada entre dois meios de índices  $n_1$  e  $n_3$ . Verifique que o resultado se reduz ao que foi obtido, quando  $n_1 = n_3$ .

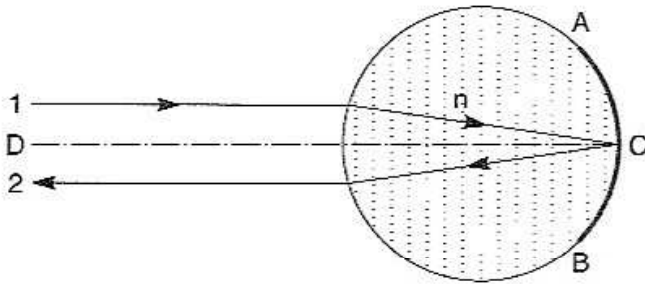
24. Chama-se *potência*  $P$  de uma lente, o inverso de sua distância focal  $f$  (se  $f$  for medida em m,  $P$  se mede em *dioptrias*). Considere duas lentes delgadas de potências  $P_1$  e  $P_2$  em contato uma com a outra. Mostre que equivalem a uma única lente de potência  $P = P_1 + P_2$  (soma algébrica).

25. Se dermos um pequeno deslocamento  $\Delta p$  à posição de um objeto, ao longo do eixo de uma lente delgada, a imagem desse objeto se desloca de  $\Delta q$ . A razão  $\Delta q / \Delta p$  chama-se *aumento longitudinal*. Demonstre que

$$\Delta q / \Delta p = -m^2$$

onde  $m$  é o aumento lateral: podemos considerar  $\Delta q$  como a imagem de um pequeno objeto situado ao longo do eixo. Se esse objeto é uma seta, a imagem aponta no mesmo sentido ou em sentido oposto?

26. O índice de refração de um meio inhomogêneo, em função da altitude  $z$ , é dado por  $n = n_0 + n' z$ , onde  $n_0$  e  $n'$  são constantes. Um raio luminoso no plano  $(x, z)$  parte da origem numa direção de cossenos diretores  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Obtenha a equação da trajetória desse raio.



27. Uma esfera transparente de índice de refração  $n$ , espelhada numa calota AB da sua superfície, com centro em C (fig.), é usada como *retro-refletor*: qualquer raio 1 paralelo ao eixo CD e *paraxial* (próximo ao eixo) é refletido em C e volta em sentido inverso (raio 2, fig.)

Calcule o índice  $n$ .

28. Uma lente delgada biconvexa tem distância focal  $f$ . (a) Demonstre que a distância mínima entre um objeto e sua imagem *real* é igual a  $4f$ . Para que distância  $p$  do objeto à lente esse mínimo é atingido? (b) Qual é o aumento lateral na situação do mínimo? (c) Desenhe o traçado de raios correspondente à situação do mínimo, tomando como objeto uma seta perpendicular ao eixo.



# 3

## INTERFERÊNCIA

### 3.1 Interferência de ondas

Um experimento fundamental para demonstrar a natureza ondulatória da luz foi realizado em 1801 por Thomas Young. Young, formado em medicina, deu contribuições fundamentais à teoria da elasticidade (módulo de Young), à anatomia (mecanismo da acomodação no olho) e à egiptologia (ajudou a decifrar a pedra de Roseta), além das suas contribuições à ótica.

Um efeito caracteristicamente ondulatório, encontrado quando ondas se superpõem, é o efeito de *interferência*, que já discutimos para ondas sonoras (*Fís.Bás.* 2, cap. 6). Foi Young quem primeiro chamou a atenção para esse efeito, dando o exemplo de dois conjuntos de ondas na água que chegam juntos a um canal estreito, observando: “se entrarem no canal de tal forma que as elevações de um coincidem com as do outro, produzirão como resultado elevações maiores; mas se as elevações de um coincidem com as depressões do outro, preencherão exatamente essas depressões, e a superfície da água permanecerá em repouso. Afirmo agora que resultados semelhantes ocorrem quando duas porções de luz se juntam, e é o que chamo a lei geral da *interferência* da luz”.

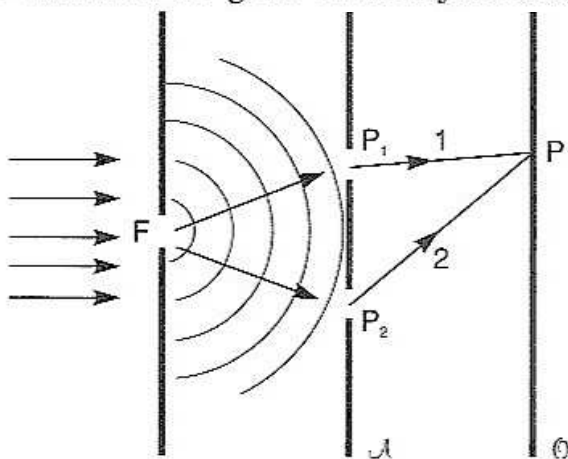


Fig. 3.1 Experimento de Young

Para demonstrar esse efeito, Young usou uma fonte puntiforme de luz  $F$  (fig. 3.1) para iluminar um anteparo opaco  $A$  onde havia dois buraquinhos de alfinete  $P_1$  e  $P_2$  muito próximos entre si, e observou o resultado sobre outro anteparo  $O$ , cada ponto  $P$  do qual é atingido por dois caminhos diferentes 1 ( $\overline{P_1 P}$ ) e 2 ( $\overline{P_2 P}$ ). Em lugar do resultado ser a soma das iluminações

dos dois orifícios, apareciam franjas brilhantes e escuras, as *franjas de interferência*.

Para analisar efeitos como esse, precisamos de uma representação do sinal luminoso. Vimos no curso de eletromagnetismo que a luz é uma *onda eletromagnética*, descrita através dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Entretanto, para entender os efeitos de interferência e difração da luz, não é necessário, na maior parte dos casos, levar em conta o seu caráter vetorial. Simplifica muito o tratamento empregar, como faremos, uma função de onda *escalar*  $E(\mathbf{x}, t)$ , que poderia ser pensada como um análogo escalar do campo elétrico da onda. Discutiremos a ótica eletromagnética no Cap. 5.

As experiências de interferência mais simples são feitas com *luz monocromática* (p. ex., luz amarela de vapor de sódio), correspondendo a uma *frequência angular* de oscilação  $\omega$  fixa. Para simplificar a análise de oscilações harmônicas, convém adotar, como sempre temos feito (*Fís.Bás. 2 e 3*), a *notação complexa*, escrevendo

$$E(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[ v(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right] \quad (3.2)$$

Na representação de uma *onda plana*, p. ex.,

$$v(\mathbf{x}) = A e^{i\delta} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \left\{ \quad E(\mathbf{x}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) \right. \quad (3.3)$$

$A \equiv$  amplitude (real) da onda ( $A e^{i\delta} \equiv$  amplitude complexa)

$\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta \equiv$  fase da onda

$\mathbf{k} \equiv k \hat{\mathbf{u}} \equiv$  vetor de onda ;  $k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c} = n k_0$   $\left\{ \begin{array}{l} v = \text{velocidade de fase} \\ n = \text{índice de refração} \end{array} \right.$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} =$  número de onda ;  $\lambda =$  comprimento de onda no meio

$\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T}$  ;  $\nu =$  frequência ;  $T =$  período  $\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \text{número de onda reduzido} \\ \lambda_0 = \text{comprimento de onda no vácuo} \end{array} \right.$

$\hat{\mathbf{u}}$  = versor da *direção de propagação*

$\delta$  = *constante de fase.*

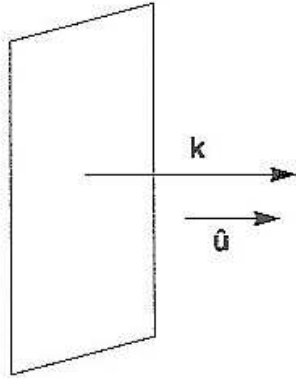


Fig. 3.2 Onda plana

As frentes de onda (superfícies de fase  $\psi = \text{constante}$ ) são planos perpendiculares à direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$  (fig. 3.2).

Analogamente, para uma *onda esférica*, proveniente de uma fonte puntiforme, como o oscilador de Hertz (*Fís. Bás. 3*),

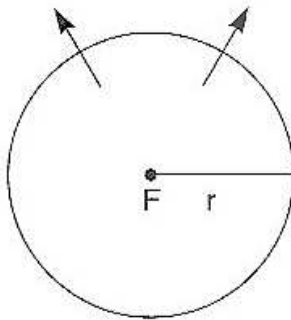


Fig. 3.3 Onda esférica

$$v(\mathbf{x}) = A e^{i\delta} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Rightarrow E(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \delta)$$

(3.4)

onde  $r = |\mathbf{x}|$ .

A amplitude cai com  $(1/r)$ , e as frentes de onda são esferas  $r = \text{constante}$  (fig. 3.3).

Como relacionamos a *intensidade* da luz com a função de onda associada  $E(\mathbf{x}, t)$ ? A intensidade está relacionada com a energia por unidade de tempo e de área que atravessa um elemento de área perpendicular à direção de propagação (cf. *Fís. Bás. 3*).

Para uma onda monocromática, o valor instantâneo da intensidade oscila no tempo, numa dada posição  $\mathbf{x}$ , como  $\cos^2(\omega t + \alpha)$ , onde  $\alpha$  é uma constante

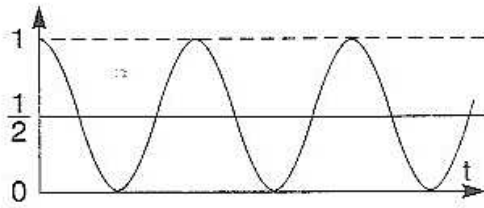


Fig. 3.4 Valor médio

[cf.(3.3), (3.4)]. Para luz visível,  $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , essa oscilação é tão rápida que um detetor só registra o *valor médio temporal*, com (fig. 3.4)

$$\boxed{\langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

valores médios

Por conseguinte, podemos dizer que o *valor médio da intensidade é proporcional a*

$$\boxed{I(\mathbf{x}) = |v(\mathbf{x})|^2} \quad (3.6)$$

que é constante para uma onda plana e cai com o inverso do quadrado da distância à fonte para uma onda esférica.

No experimento de Young com luz monocromática, a função de onda resultante num ponto P é a soma de duas contribuições, uma proveniente do orifício P<sub>1</sub> e outra de P<sub>2</sub> :

$$E(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[ v_1(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} + v_2(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right] \quad (3.7)$$

Logo, a *intensidade resultante* em P é

$$\boxed{I(\mathbf{x}) = |v_1(\mathbf{x}) + v_2(\mathbf{x})|^2} \quad (3.8)$$

Como  $|e^{-i\omega t}| = 1$ , o fator temporal não afeta o resultado. Por essa razão, *em todo o tratamento de ondas monocromáticas daqui por diante o fator temporal  $e^{-i\omega t}$  será omitido*; trabalharemos diretamente com a função de onda resultante  $v(\mathbf{x})$ , ficando subentendido que o resultado completo, dependente do tempo, é dado pela (3.2).

A (3.8) pode ser escrita

$$I(\mathbf{x}) = \left| |v_1| e^{i\phi_1} + |v_2| e^{i\phi_2} \right|^2 \quad (3.9)$$

onde indicamos separadamente o módulo e a fase (argumento) de cada número complexo. Resulta

$$I(\mathbf{x}) = \left( |v_1| e^{-i\varphi_1} + |v_2| e^{-i\varphi_2} \right) \left( |v_1| e^{i\varphi_1} + |v_2| e^{i\varphi_2} \right)$$

$$= |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_1| |v_2| \left[ e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right]$$

$$I(\mathbf{x}) = |v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2|v_1| |v_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.10)$$

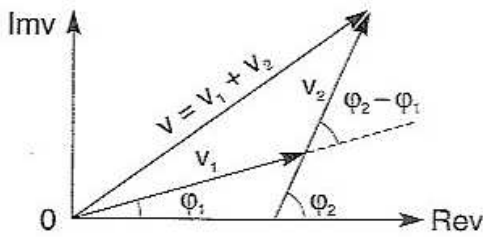


Fig. 3.5 Soma de dois números complexos

cuja interpretação geométrica em termos do diagrama de Argand no plano complexo (fig. 3.5) é relacionar o módulo da resultante de dois vetores com cada um deles. Como  $|v_1|^2$  é a intensidade  $I_1$  devida somente à onda  $v_1$  (analogamente para  $I_2$ ), o resultado pode ser reescrito:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\Delta \quad (3.11)$$

onde

$$\Delta \equiv \varphi_2 - \varphi_1 \equiv \text{DIFERENÇA de FASE entre as 2 ondas} \quad (3.12)$$

O último termo da (3.11) chama-se *termo de interferência*, e a (3.11) é a *lei básica da interferência* entre duas ondas.

Temos *interferência construtiva* quando  $\Delta = 2n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\cos\Delta = 1$ , e *interferência destrutiva* quando  $\Delta = (2n + 1)\pi$ ,  $\cos\Delta = -1$ :

$$\Delta = 2n\pi \Rightarrow I = \left( \sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} \right)^2 \text{ (construtiva)}$$

$$\Delta = (2n + 1)\pi \Rightarrow I = \left( \sqrt{I_1} - \sqrt{I_2} \right)^2 \text{ (destrutiva)}$$
(3.13)

Em particular, se as duas ondas têm a mesma intensidade ( $I_1 = I_2$ ), resulta



$$I_1 = I_2 \left\{ \begin{array}{l} I = 4 I_1 \text{ (construtiva)} \\ I = 0 \text{ (destrutiva)} \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Efeitos de interferência como esses são característicos de ondas, e inexplicáveis numa teoria corpuscular da luz, quando esperaríamos que a intensidade resultante fosse a soma das intensidades, sem termos de interferência. É particularmente intrigante que “luz mais luz” possa resultar em escuridão!

### 3.2 Análise do experimento de Young

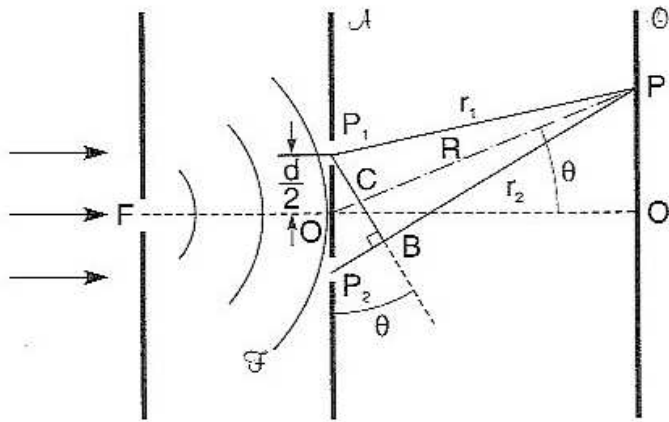


Fig. 3.6 Experimento de Young

No experimento de Young (fig.3.6), tipicamente, a distância  $d$  entre as aberturas é muito pequena em confronto com a distância entre os anteparos  $\mathcal{A}$  e  $\Theta$ . Vamos tomar como orifícios *fendas* longas (perpendiculares ao plano da fig. 3.6), de modo que a figura de interferência observada terá a mesma simetria (tomamos a fonte  $F$  sobre o eixo).

De conformidade com o Princípio de Huygens, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  funcionarão como fontes puntiformes, gerando ondas esféricas. Como são excitados pela mesma frente de onda incidente  $\mathcal{F}$ , oscilarão na mesma fase (tomamos a origem das fases sobre  $\mathcal{A}$ , para simplificar) de forma que podemos representar a função de onda no ponto de observação  $P$  (contribuições de  $P_1$  e  $P_2$ ) por

$$v(P) = v_1 + v_2 = \frac{A}{r_1} e^{ikr_1} + \frac{A}{r_2} e^{ikr_2} \quad (3.15)$$

pois, devido à excitação simétrica, as amplitudes  $A$  também serão as mesmas; na (3.15),  $r_1 \equiv \overline{P_1 P}$  e  $r_2 \equiv \overline{P_2 P}$ .

Seja  $R \equiv \overline{P O}$ . Como  $d \ll R$ , vemos na fig. 3.6 que

$$r_1 \approx R - \frac{d}{2} \text{sen } \theta$$

$$r_2 \approx R + \frac{d}{2} \text{sen } \theta \quad (3.16)$$

Nos denominadores da (3.15), podemos substituir  $r_1$  e  $r_2$  por  $R$ , com erro desprezível. Entretanto, isso não se aplica aos *expoentes* das exponenciais, pois

$$k d \equiv 2 \pi \frac{d}{\lambda} \gg 1 \quad (3.17)$$

Com efeito, a distância  $d$  entre as fendas é tipicamente muito maior que o comprimento de onda no visível.

Logo,

$$v(P) \approx \frac{A}{R} \exp \left( i k R - \frac{i k d}{2} \text{sen } \theta \right) + \frac{A}{R} \exp \left( i k R + \frac{i k d}{2} \text{sen } \theta \right) \quad (3.18)$$

A intensidade resultante é da forma (3.11) com

$$I_1 = I_2 = \frac{A^2}{R^2} \quad (3.19)$$

e

$$\Delta = \varphi_2 - \varphi_1 = k d \text{sen } \theta \quad (3.20)$$

cuja interpretação física é imediata:

$$d \text{sen } \theta \approx r_2 - r_1 \quad (3.21)$$

é a *diferença de caminho* entre as contribuições de  $P_2$  e  $P_1$ .

A (3.11) fica então

$$I = 2 I_1 (1 + \cos \Delta) = 4 I_1 \cos^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right) \quad (3.22)$$

onde  $I_1$  é a intensidade que resultaria se uma única fenda estivesse aberta.

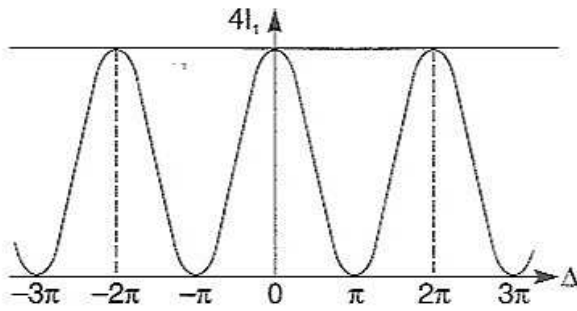


Fig. 3.7 Intensidade em função da defasagem

A intensidade é máxima em  $O'$  (fig. 3.6), onde  $\theta = 0$  (contribuições em fase), e oscila periodicamente entre  $4I_1$  e 0, conforme indicado na fig. 3.7, correspondendo a *franjas de interferência* claras e escuras.

O espaçamento angular entre dois mínimos (ou máximos), como  $\text{sen } \theta \approx \theta$  nas condições consideradas, é

$$\Delta \theta \approx \frac{2\pi}{kd} = \frac{\lambda}{d} \quad (\ll 1) \quad (3.23)$$

e o espaçamento correspondente, no plano de observação  $\mathcal{O}$ , é  $\sim R \Delta \theta$ .

Para  $\lambda = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ,  $d = 0,5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-2} \text{ cm}$ , temos  $\Delta \theta \sim 10^{-3} \text{ rad}$  e, se  $R \sim 2 \text{ m} = 2 \times 10^2 \text{ cm}$ , o espaçamento das franjas é  $R \Delta \theta \sim 2 \text{ mm}$ .

Pelas (3.20) e (3.21), as condições de interferência construtiva e destrutiva se interpretam facilmente:

$$(n = 0, \pm 1, \dots) \left\{ \begin{array}{l} r_2 - r_1 = n\lambda \Rightarrow \Delta = 2n\pi \text{ (construtiva)} \\ r_2 - r_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow \Delta = (2n + 1)\pi \text{ (destrutiva)} \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Nas palavras de Young, “O centro ... é sempre brilhante, e as faixas brilhantes de ambos os lados estão a distâncias tais que a luz, chegando a elas de uma das aberturas, terá percorrido uma distância maior do que a que vem da outra, de um intervalo igual à largura de uma, duas, três ou mais das ondulações, ao passo que as escuras correspondem a uma diferença de meia ondulação, uma e meia, duas e meia, ou mais.” Young usou os resultados para estimar, com razoável precisão, os comprimentos de onda associados aos extremos violeta e vermelho do espectro.

Para pontos  $P$  entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{O}$  no plano da fig. 3.6, as equações (3.24) definem uma família de *hipérbolas*  $r_2 - r_1 = \text{constante}$  com focos em  $P_1$  e  $P_2$ , que são os

lugares geométricos das linhas *nodais* e *antinodais*, intersecções de cristas com vales ou, respectivamente, de cristas (vales) com cristas (vales), para frentes de ondas secundárias emanadas de  $P_1$  e  $P_2$ . Essas hipérbolas são visíveis em experiências com tanques de água e ondas bidimensionais na superfície da água.

Poderia parecer à primeira vista que intensidades duplas das que resultariam da soma das intensidades devidas a cada abertura isoladamente violariam a conservação de energia, mas há uma compensação entre interferência destrutiva e construtiva.

Com efeito, se calcularmos a intensidade média das franjas sobre uma região que contém várias franjas, o *valor médio* de  $\cos^2(\Delta / 2)$  na (3.22) é  $1/2$  [cf.(3.5)], o que dá para a intensidade média

$$\langle I \rangle = 2 I_1 \quad (3.25)$$

que é a soma das intensidades devidas às duas aberturas. A figura de interferência corresponde apenas a uma *redistribuição* dessa intensidade média.

As franjas também podem ser observadas (o que Young fez) com luz incidente branca, como a luz solar. Nesse caso, a franja central é branca mas as laterais são coloridas: cada cor do espectro produz uma figura com espaçamento diferente, e as cores observadas resultam da superposição dessas figuras. Só aparece um número limitado de franjas nesse caso, pois longe do centro muitas figuras desigualmente espaçadas, e de cores diferentes, se superpõem.

Para que se observe interferência, porém, é essencial, na expressão de Young, “que as duas porções de luz assim combinadas... sejam originárias da mesma fonte”, isto é, que provenham da mesma frente de onda incidente  $\mathcal{F}$  na fig. 3.6 (devida à fonte puntiforme  $F$ , que pode ser produzida com luz solar). Essa condição foi empregada quando admitimos, na (3.15), que  $P_1$  e  $P_2$  oscilam em fase. Ela está associada à idéia de *coerência*, que voltaremos a discutir mais adiante (Seç. 3.6).

### 3.3 Interferência em lâminas delgadas

Algumas das cores mais belas observadas na Natureza, como as cores das asas de borboletas e da plumagem de beija-flores, resultam de efeitos de interferência da luz ao atravessar lâminas delgadas de materiais transparentes — é o caso também das bolhas de sabão.

Nesse caso, a luz sofre reflexões múltiplas entre as faces da lâmina, e a interferência não envolve apenas dois feixes, como no experimento de Young: é uma *interferência de feixes múltiplos*.

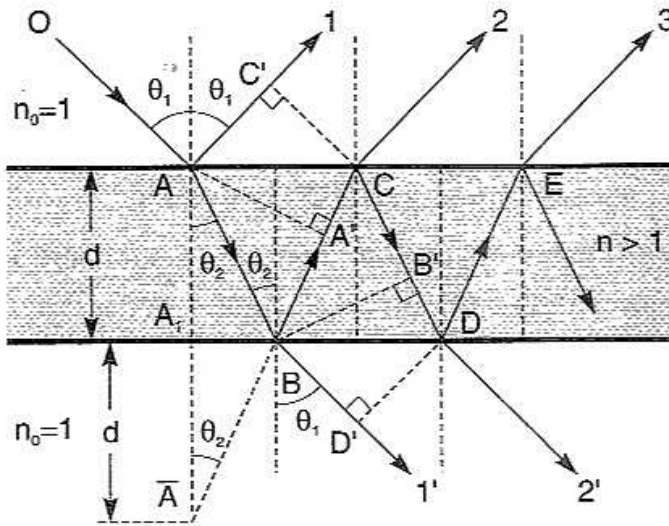


Fig. 3.8 Interferência de feixes múltiplos

Com efeito, consideremos uma lâmina de índice de refração  $n$  e espessura  $d$  situada no ar ( $n_0 = 1$ ), e um raio incidente  $\overline{OA}$  (fig. 3.8). Ele dá origem a um raio 1 parcialmente refletido e um raio  $\overline{AB}$  refratado. Em B, há nova reflexão e nova refração parcial (raio transmitido  $1'$ ). Este processo continua a se repetir, embora a intensidade vá diminuindo a cada reflexão. Temos assim raios refletidos 1, 2, 3, ... e raios transmitidos  $1', 2', \dots$  (fig. 3.8).

Os efeitos de interferência na luz refletida (soma das contribuições de  $1 + 2 + 3 + \dots$ ) ou transmitida (raios  $1' + 2' + \dots$ ) dependem da *diferença de caminho ótico* entre dois raios consecutivos refletidos ou transmitidos.

Com efeito, como vimos na (3.3), o fator de fase associado a um percurso  $l$  de uma onda num meio de índice de refração  $n$  é

$$\exp(ikl) = \exp(ik_0 nl) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0} nl\right) \quad (3.26)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo (ar) e  $nl$  o *caminho ótico* correspondente ao percurso  $l$ .

Para calcular a diferença de caminho ótico entre os raios 2 e 1, notemos que  $CC'$  ( $\perp$  ao raio 2) pode ser considerada como frente de onda transmitida associada à frente de onda  $AA'$  ( $\perp$  ao raio BC). Logo, os caminhos óticos  $[AC']$  e  $[A'C]$  são iguais (compare com a fig. 2.12).

A diferença de caminho ótico entre os raios 2 e 1 seria então

$$n(\overline{AB} + \overline{BA'}) = n(\overline{AA'} + \overline{A'C}) = n\overline{AA'} = n\overline{AA} \cos \theta_2$$

onde  $\overline{AA_1} = \overline{A_1A} = d$  ( $\overline{A}$  é a imagem especular de A).

Finalmente, representando a *diferença de caminho ótico* por  $[2] - [1]$ , viria (veja a fig. 3.8)

$$[2] - [1] = 2nd \cos \theta_2 \quad [\text{veja porém a (3.28)}] \quad (3.27)$$



Essa é também, pela simetria da figura, a diferença de caminho ótico  $[2'] - [1']$  entre dois raios transmitidos consecutivos.

Pareceria então que, quando há interferência construtiva para a luz transmitida, a interferência é também construtiva para a luz refletida. Isso seria incompatível com a conservação da energia, pois um máximo da intensidade total transmitida deveria corresponder a um mínimo da intensidade total refletida.

A origem dessa dificuldade está em termos admitido tacitamente que não há mudança de fase na reflexão. Isso não é sempre verdade.

Já vimos para outros tipos de ondas que, quando uma onda se reflete na interface entre dois meios, pode refletir-se sem mudança de fase ou com mudança de fase de  $\pi$  (troca de sinal:  $e^{i\pi} = -1$ ), dependendo das *condições de contorno*, ou seja, do que acontece na interface.

Assim, um pulso que se reflete na extremidade *fixa* de uma corda vibrante volta invertido (defasagem de  $\pi$ ), ao passo que não muda de fase ao refletir-se numa extremidade livre (*Fís. Bás.* 2, Seç. 5.6). Analogamente, uma onda acústica de deslocamento se reflete com mudança de fase de  $\pi$  numa extremidade fechada de um tubo de órgão, mas sem defasagem numa extremidade aberta (*idem*, Seç. 6.4).

Na fig. 3.8, vemos que a onda refletida 1 corresponde à reflexão vindo de um meio *menos* refringente ( $n_0 = 1$ ) ao encontrar outro *mais* refringente ( $n > 1$ ), ao passo que a reflexão de 2 no ponto B é de um meio mais refringente para um menos refringente.

Para ver que tem de existir uma defasagem adicional de  $\pi$  (mudança de sinal) num desses dois casos, consideremos o que acontece quando a *espessura d da lâmina*  $\rightarrow 0$ . Nesse limite, não pode haver reflexão: toda a luz deve ser transmitida. Logo, tem de haver uma defasagem adicional de  $\pi$  numa das interfaces (de  $n_0$  para  $n$  ou de  $n$  para  $n_0$ ), para que as contribuições de 2 e 1 tenham sinais contrários. A (3.27) deve ser então substituída por

$$\boxed{[2] - [1] = 2 n d \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \lambda_0} \quad (3.28)$$

pois uma diferença de caminho de  $\frac{1}{2} \lambda_0$  no ar corresponde a uma defasagem de  $\pi$ .

Por outro lado, o raio 3 sofre *duas* reflexões adicionais em relação ao raio 2 (nos pontos C e D da fig. 3.8), *ambas* de  $n$  para  $n_0$ , de modo que sua contribuição, bem como as de 4, 5, ... tem *o mesmo sinal* que a de 2. Assim, quando  $d \rightarrow 0$  devemos ter,

$$\text{contribuição de } \underbrace{2 + 3 + 4 + \dots}_{\text{todas em fase}} \text{ CANCELA a } \underbrace{\text{contribuição de } 1}_{\text{fase oposta}} \text{ (} d \rightarrow 0 \text{)}$$

(3.29)

Pode-se demonstrar explicitamente que é isto que acontece (cf. Seç. 3.4).

Por outro lado, para os raios *transmitidos*, duas contribuições consecutivas, como as de 1' e 2', diferem por *duas* reflexões adicionais, ambas de  $n$  para  $n_0$  (em B e em C), de forma que todas entram com o mesmo sinal e se reforçam, quando  $d \rightarrow 0$ , levando à *transmissão total* neste limite, conforme esperado.

Veremos mais tarde, na teoria eletromagnética da luz (Seç. 5.6), como consequência das condições de contorno, que a defasagem adicional de  $\pi$  ocorre quando o raio vem de um meio menos refringente (como o ar) para um mais refringente (como o vidro), nas condições usuais em que a interferência é observada.

A expressão (3.28) para a diferença de caminho permite encontrar as condições de interferência construtiva ou destrutiva para a luz refletida, que, pelo que acabamos de ver, são complementares às que prevalecem para a luz transmitida: quando uma delas é construtiva, a outra é destrutiva. Máximos de reflexão correspondem a mínimos de transmissão, e vice-versa. Obtemos assim:

$$2nd \cos \theta_2 = m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow \begin{cases} \text{MÍNIMO de reflexão} \\ \text{MÁXIMO de transmissão} \end{cases}$$

$$2nd \cos \theta_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow \begin{cases} \text{MÁXIMO de reflexão} \\ \text{MÍNIMO de transmissão} \end{cases}$$

(3.29)

Como no caso limite  $d \rightarrow 0$ , demonstra-se que os mínimos de reflexão correspondem a reflexão *nula*, ou seja, à transmissão total.\*

Para observação próxima da direção normal ao filme ( $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 0$ ), se formos aumentando a espessura do filme a partir de 0, o 1.º máximo de reflexão ( $m = 0$ ) ocorre para

---

\* Isso corresponde ao fato de que a intensidade varia *periodicamente* com a defasagem  $\Delta = k_0 (2nd \cos \theta_2)$ , com período  $2\pi$  (veja a fig. 3.12 abaixo).

$$d \approx \frac{1}{4} \frac{\lambda_0}{n} = \frac{\lambda}{4} \quad (3.30)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda no interior do meio ( $k = n k_0 \rightarrow \lambda = \lambda_0/n$ ): diz-se que se tem um “filme de um quarto de onda”.

Se tivéssemos considerado uma situação em que a lâmina separa dois meios de índices diferentes,  $n_0$  e  $n_1$ , e o índice de refração da lâmina é intermediário,  $n_0 < n < n_1$ , haveria defasagens de  $\pi$  tanto para o raio refletido 1 como para 2, e a diferença de caminho óptico correta seria dada pela (3.27). Nesse caso, a (3.30) define a condição para o 1.º *mínimo* de reflexão.

Isso é aplicado em *filmes anti-refletores*. A luz que atravessa um sistema de lentes, numa máquina fotográfica, p. ex., sofre reflexão parcial na superfície de cada lente. Embora a perda de intensidade associada seja pequena para raios paraxiais, a perda total após várias interfaces pode ser apreciável, além dos efeitos indesejáveis da luz difusa.

Para eliminar a reflexão, deposita-se nas superfícies de todas as lentes em contato com o ar um filme dielétrico de 1/4 de onda, de índice intermediário entre os do ar e do vidro. Como o índice de refração varia com  $\lambda$ , escolhe-se  $\lambda$  na região mais luminosa do espectro visível, entre o amarelo e o verde. Por isso, lentes com tais depósitos refletem a cor complementar, de tom púrpura (lentes “azuladas”).

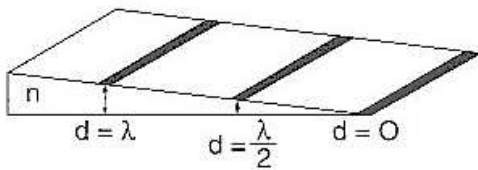


Fig. 3.9 Franjas de igual espessura

Se tivermos um meio de espessura variável (no ar), observado com  $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 0$ , a condição de interferência destrutiva, com luz incidente monocromática, será satisfeita para espessuras  $d = 0$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $d = \lambda$ , ... onde aparecem *franjas escuras* na luz refletida, conhecidas como *franjas de igual espessura* (fig. 3.9).

Numa lâmina de água de sabão formada sobre um aro e colocada num plano vertical, a água escorre para baixo, formando uma cunha. Observando com luz branca, as franjas escuras aparecem em alturas diferentes para diferentes  $\lambda$ ; a luz refletida tem a cor complementar, formando as cores de interferência típicas de *bolhas de sabão*. No topo da lâmina ou de uma bolha antes de estourar, aparece uma mancha preta, mostrando que a espessura da lâmina tornou-se menor que  $\lambda/4$  para todos os  $\lambda$  no visível.

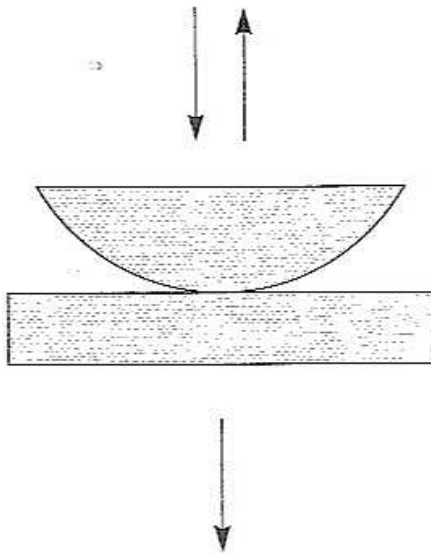


Fig. 3.10 Anéis de Newton

Se colocarmos uma lente plano-convexa sobre uma placa de vidro plana (fig. 3.10), forma-se entre elas uma lâmina de ar de espessura variável, permitindo observar, tanto na luz refletida como na transmitida, franjas de interferência de igual espessura, sob a forma de anéis concêntricos, que são os *anéis de Newton*. Eles já haviam sido observados por Robert Boyle em 1663, mas Newton determinou com grande precisão a relação entre seus raios e a espessura da camada

onde se formam, e deu uma explicação ondulatória da sua origem, em termos das ondas que associava aos “acessos de fácil reflexão e fácil transmissão”. Além disso, usou-os para medidas altamente precisas de comprimentos de onda da luz!

Uma aplicação prática importante das franjas de igual espessura é testar até que ponto uma superfície ótica é plana, colocando-a em contato com uma superfície plana padrão e observando as franjas de interferência formadas na lâmina de ar entre as duas superfícies, que indicam as linhas de nível da superfície testada. A superfície testada pode ir sendo polida até tornar-se “oticamente plana”.

Outros exemplos de cores de interferência são as cores das manchas de óleo sobre asfalto molhado, e as da plumagem de beija-flores ou de asas de borboletas. Numa asa de borboleta azul, por exemplo, a interferência se produz em lâminas delgadas que recobrem a asa formando “terraços”: há um máximo de reflexão no azul para incidência perpendicular; o tom de azul varia com o ângulo de observação, correspondendo à variação com  $\theta_2$  do comprimento de onda associado à interferência construtiva. Placas transparentes análogas existem na plumagem dos beija-flores.

### 3.4 Discussão das franjas de interferência

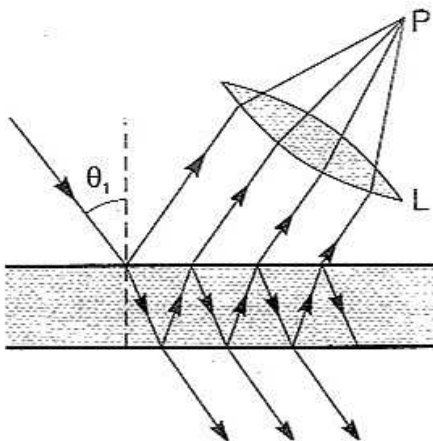


Fig. 3.11 Imagem de interferência

Se a luz refletida por uma lâmina for coletada por uma lente  $L$  (fig. 3.11), formar-se-á num ponto  $P$  do seu plano focal uma imagem puntiforme brilhante ou escura conforme o ângulo  $\theta_1$  corresponde a um máximo ou mínimo de reflexão (a lente pode representar também o olho de um observador).



Isso vale para raios incidentes numa só direção  $\theta_1$ . Entretanto, se tivermos uma *fonte de luz extensa* iluminando a placa, haverá raios incidentes em toda uma faixa de ângulos  $\theta_1$ , e a intensidade das imagens correspondentes variará conforme o valor correspondente da defasagem, correspondendo a um valor bem definido para cada inclinação  $\theta_1$ . Observam-se nesse caso *franjas de interferência de igual inclinação*.

Até aqui discutimos apenas os valores de  $\theta_1$  para os quais a intensidade refletida (ou transmitida) é máxima ou mínima, sem analisar como varia a intensidade entre os máximos e os mínimos.

A variação depende da *refletividade*  $r$  das interfaces, que é a *porcentagem de reflexão*, ou seja, a fração da intensidade incidente que se reflete. Como vimos na Seç. 2.4,  $r$  varia com o ângulo de incidência (cf. Seç. 5.7): em geral, é pequena (alguns %) na incidência perpendicular ( $\theta_1 = 0$ ) e tende a aumentar com  $\theta_1$ . Na passagem para um meio mais refringente,  $r \rightarrow 1$  (100% de reflexão) para  $\theta_1 \rightarrow \pi/2$  (incidência rasante).

A refletividade também aumenta com o índice de refração relativo  $n_{12}$ : quanto mais forte a descontinuidade entre os dois meios, maior é  $r$ . Pode-se aumentar  $r$  depositando na interface um filme composto de uma ou mais camadas delgadas de meios transparentes de índices convenientemente escolhidos (efeito oposto a um filme anti-refletor). Também se pode depositar um filme metálico fino: tem-se então uma lâmina *semi-espeelhada*, como as que são usadas em alguns óculos de sol; neste caso, uma fração da intensidade é absorvida no interior do metal.

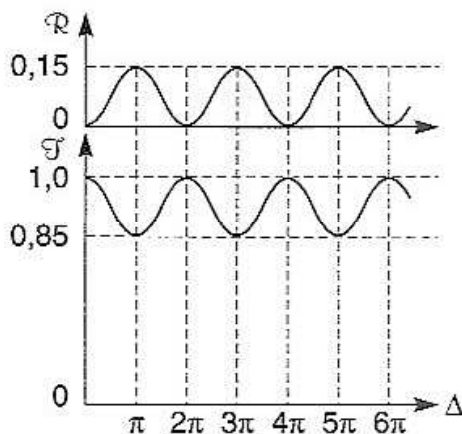


Fig. 3.12 Refletividade e transmissividade em função da defasagem

A fig. 3.12 [baseada na (3.35) abaixo] mostra a variação da refletividade *total*  $R$  da lâmina e de sua *transmissividade total*  $T$  (frações da intensidade incidente sobre a lâmina que se refletem ou transmitem, respectivamente), em função da *defasagem*\* entre dois raios sucessivos,

\* A defasagem  $\Delta$ , pela (3.26), é o produto de  $k_0$  pela diferença de caminho ótico (3.27).



$$\Delta = 2 n k_0 d \cos \theta_2 = \frac{2 \pi}{\lambda_0} \cdot 2 n d \cos \theta_2 \quad (3.31)$$

para incidência perpendicular do ar sobre o vidro, com  $r = 0,04$ . A conservação da energia dá

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1 \quad (3.32)$$

de modo que os dois gráficos são complementares: refletividade  $\mathcal{R} = 0$  corresponde à transmissão total pela lâmina,  $\mathcal{T} = 1$ . As expressões para  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{T}$  decorrem da (3.35) abaixo.

A *visibilidade* ou *contraste* das franjas na luz transmitida é definida por

$$v = \frac{\mathcal{T}_{\max} - \mathcal{T}_{\min}}{\mathcal{T}_{\max} + \mathcal{T}_{\min}} \quad (3.33)$$

que neste caso é  $(1,0 - 0,85) / (1,0 + 0,85) \approx 0,08$ : as franjas são pálidas, com pouco contraste de intensidades.

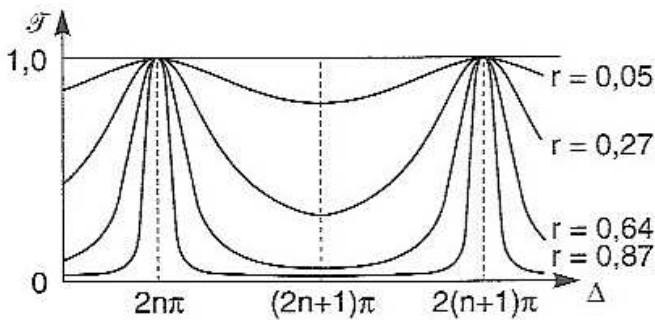


Fig. 3.13 Variação de  $\mathcal{T}$  com  $r$

O gráfico da fig. 3.13 mostra como  $\mathcal{T}$  varia à medida que  $r$  aumenta: as franjas vão ficando cada vez mais nítidas e mais estreitas, com um contraste crescente entre máximos e mínimos. Por que isso acontece?

Para compreender esse efeito, notemos que  $r$  é a razão das *amplitudes* de dois raios consecutivos na fig. 3.8 (como  $2'$  e  $1'$ ). Com efeito, essas amplitudes diferem por *duas* reflexões adicionais na interfaces (nos pontos B e C), em cada uma das quais a *amplitude* é reduzida por um fator  $\sqrt{r}$  ( $r$  é a razão da *intensidade* refletida à incidente).

Por outro lado, a diferença de fase entre dois raios consecutivos é  $\Delta$ . Usando notação complexa, concluímos que a contribuição do raio  $2'$  difere da de  $1'$  por um fator  $r e^{i\Delta}$ . Logo, a soma das amplitudes complexas de todas as contribuições transmitidas  $1', 2', 3', \dots$  é proporcional a

$$1 + r e^{i\Delta} + (r e^{i\Delta})^2 + \dots = \frac{1}{1 - r e^{i\Delta}} \quad (3.34)$$

(soma de uma progressão geométrica de magnitude da razão  $r < 1$ ). Na realidade, há um n.º finito de contribuições, mas, se o n.º total  $N$  de reflexões é grande,  $(r e^{i\Delta})^N$  é desprezível, por ser  $r < 1$ .

Por que razão a magnitude da soma (3.34) varia muito mais rapidamente com  $\Delta$  para  $r$  próximo da unidade do que para  $r \ll 1$ , como ilustrado na fig. 3.13?

Se representarmos os termos da soma no plano complexo, obtemos uma soma de vetores, em que cada termo difere do anterior por ter sua magnitude multiplicada por  $r$  e seu ângulo de fase acrescido de  $\Delta$  (rotação por um ângulo  $\Delta$ ). Vamos comparar as resultantes tomando 4 termos e  $\Delta = 0, \frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , com  $r = 0,25$  num caso e  $r = 0,8$  no outro (fig. 3.14). Vemos que a resultante  $R$  decresce muito mais rapidamente, quando  $\Delta$  aumenta, no 2.º caso do que no 1.º (o comprimento de  $R$  foi ajustado para ser o mesmo nos 2 casos, para  $\Delta = 0$ , quando  $\mathcal{F} = 1$ ). Quando  $r$  é pequeno, a resultante é praticamente a soma dos 2 ou 3 primeiros termos, sendo pouco afetada pelas defasagens; quando  $r$  é próximo de 1, os vetores “espiralam” rapidamente com o aumento de  $\Delta$  e  $R$  decresce logo.

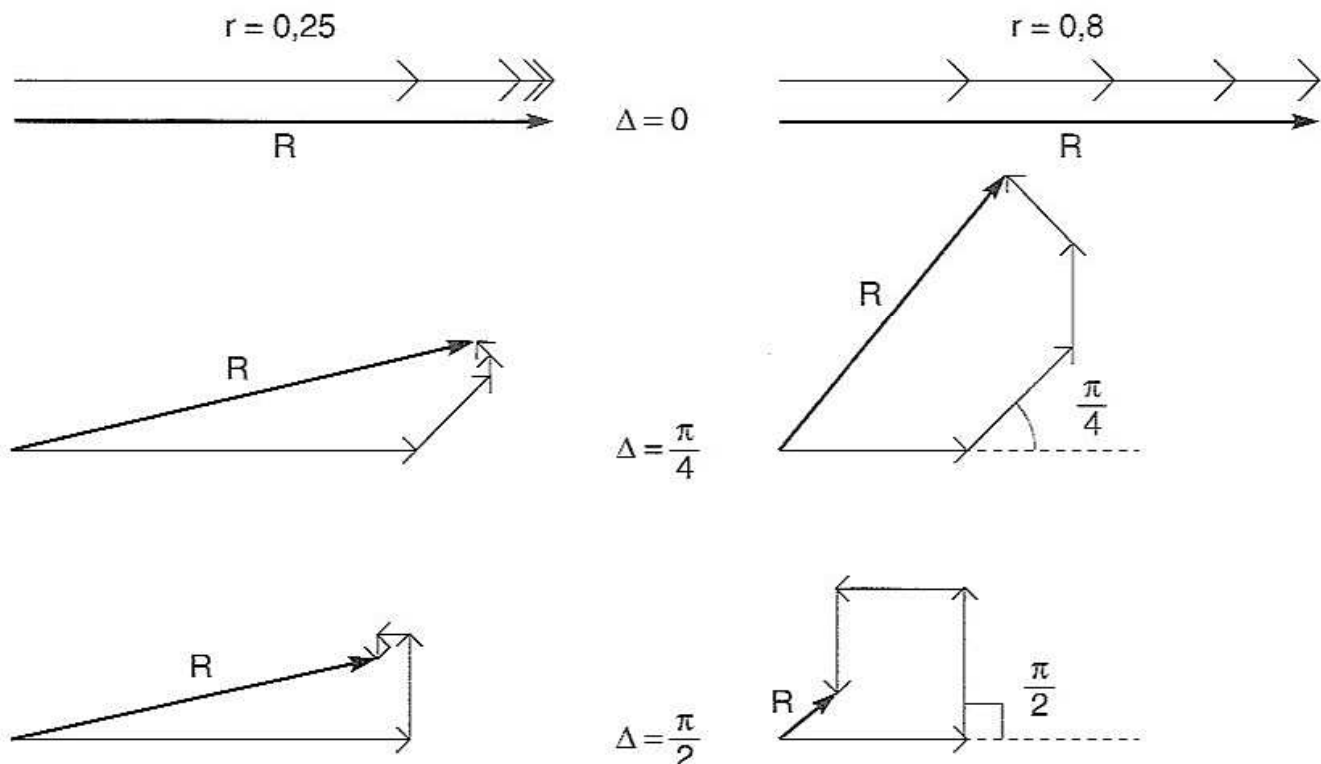


Fig. 3.14 Variação da resultante com  $r$

Assim, para  $r$  próximo da unidade, as franjas de interferência na luz transmitida adquirem o aspecto de riscas brilhantes e muito estreitas (máximos de transmissão) num fundo escuro.

A largura (em termos da defasagem  $\Delta$ ) das franjas de interferência é da ordem de  $t = 1 - r$ , a transmissividade de uma das interfaces. Com efeito, em cada reflexão interna, uma fração  $r$  da intensidade é refletida e uma fração  $t$  é transmitida. Logo, o número de reflexões sofridas por um raio antes que a maior parte de sua intensidade tenha sido transmitida é da ordem de  $1/t$ . Para  $\Delta = 2m\pi$ , os raios interferem em fase. Para  $\Delta = 2m\pi + \varepsilon$ , a defasagem acumulada após  $1/t$  reflexões é da ordem de  $\varepsilon/t$ , e a interferência começa a se tornar destrutiva quando esta defasagem é  $\sim 1$ , confirmando que a largura das franjas corresponde a  $\varepsilon \sim t$ .

A razão por que  $t$  tem de ser pequena para que as franjas sejam estreitas é portanto que, quando o número médio de reflexões sofridas antes da emergência do raio é grande, uma variação muito pequena da defasagem, devido ao efeito cumulativo, já é suficiente para levar da interferência construtiva à destrutiva.

Para uma discussão mais quantitativa da largura das franjas, calculemos a intensidade associada à amplitude complexa (3.34), que é proporcional à transmissividade total  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 - r e^{i\Delta}} \right|^2 &= \frac{1}{(1 - r e^{-i\Delta})(1 - r e^{i\Delta})} = \frac{1}{1 + r^2 - r(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta})} \\ &= \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos \Delta} = \frac{1}{\underbrace{(1 - r)^2}_{=t} + 2r \underbrace{(1 - \cos \Delta)}_{=2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)}} = \frac{1}{t^2 + 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)} \end{aligned}$$

(3.35)

Como deve ser  $\mathcal{T} = 1$  para  $\Delta = 0$ , resulta

$$\mathcal{T} = \frac{t^2}{t^2 + 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)}$$

e  $\mathcal{R} = 1 - \mathcal{T}$ . As figs. 3.12 e 3.13 baseiam-se nesses resultados.

Com  $t \ll 1$  ( $r \approx 1$ ), consideremos um pequeno deslocamento de fase  $\varepsilon$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) a partir de um máximo de interferência,  $\Delta = 2m\pi + \varepsilon$ . Temos então,

$$\text{sen}^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \text{sen}^2\left(m\pi + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \text{sen}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{\varepsilon^2}{4}$$

e

$$\frac{1}{t^2 + 4r \text{sen}^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \approx \frac{1}{t^2 + \varepsilon^2} \quad (3.36)$$

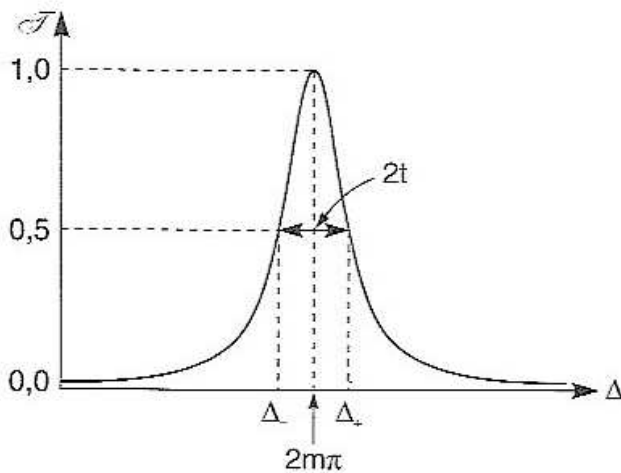


Fig. 3.15 Semilargura

A distância entre os pontos nos quais a transmissividade total  $\mathcal{T}$  cai à metade do seu valor máximo (fig. 3.15) define a *semilargura* do pico. Vamos na (3.36) que esses pontos correspondem a  $\varepsilon = \pm t$ , de forma que a semilargura das franjas na variável  $\Delta$  é

$$\boxed{\Delta_+ - \Delta_- = 2t} \quad (3.37)$$

o que concorda com a discussão qualitativa anterior.

### 3.5 Interferômetros

A condição (3.29) para um máximo de transmissão, escrita em termos da defasagem  $\Delta$  [cf. (3.31)],

$$\boxed{\Delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n d \cos \theta_2 = 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)} \quad (3.38)$$

depende do comprimento de onda  $\lambda_0$  incidente. Assim, se a luz incidente contém dois comprimentos de onda diferentes superpostos, as posições dos máximos de interferência correspondentes na luz transmitida serão diferentes.

Se as franjas brilhantes forem suficientemente estreitas, isto permite separar comprimentos de onda, mesmo que sejam muito próximos. É nesse princípio que se baseiam os *interferômetros*, instrumentos empregados em espectroscopia para analisar a estrutura fina e hiperfina das linhas espectrais, para comparar comprimentos de onda entre si ou com o metro padrão (medida absoluta de  $\lambda_0$ ).

A principal qualidade de um interferômetro para análise é o seu *poder separador*, definido como o inverso da menor variação fracionária  $\delta\lambda/\lambda$  que ele permite determinar, ou seja

$$\text{Poder separador} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad (3.39)$$

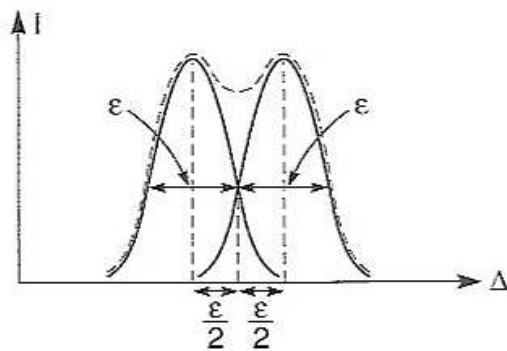


Fig. 3.16 Limite do poder separador

A fig. 3.16 mostra dois picos de intensidade, associados aos comprimentos de onda  $\lambda_0$  e  $\lambda_0 + \delta\lambda$ , cujos centros distam, na variável  $\Delta$ , de uma defasagem igual à *semilargura*  $\varepsilon$  de cada pico. Costuma-se adotar como critério que esse é o menor valor de  $\delta\lambda$  que ainda permite distinguir as duas franjas de interferência.

Com efeito, a intensidade resultante (em linha interrompida na fig. 3.16) tem uma pequena depressão central que permite detetar o pico duplo, mas que já não apareceria se os centros estivessem mais próximos.

Suponhamos que o pico associado a  $\lambda_0$  corresponda à ordem  $2m$  de interferência, ou seja, que satisfaça a (3.38). A mesma direção  $\theta_2$  deve então corresponder a uma defasagem  $2m\pi - 2\varepsilon$  para  $\lambda_0 + \delta\lambda$ , ou seja

$$\Delta(\lambda_0 + \delta\lambda) = \frac{4\pi}{\lambda_0 + \delta\lambda} n d \cos \theta_2 = \underbrace{\frac{4\pi}{\lambda_0} n d \cos \theta_2}_{2m\pi} \left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right) = 2m\pi - 2\varepsilon$$

$= \lambda_0 \left(1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right) \leftarrow \left|\frac{\delta\lambda}{\lambda}\right| \ll 1$

o que dá



$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{2 m \pi}{2 \varepsilon} = \frac{m \pi}{t} \quad (3.40)$$

onde usamos a expressão (3.37) para a semilargura devida a uma lâmina de faces paralelas.

Por conseguinte, a semilargura é diretamente proporcional à ordem de interferência e inversamente proporcional à transmissividade da interface da lâmina.

Para estimar  $m$ , podemos tomar  $n \cos \theta_2$  da ordem da unidade. Pela (3.38), temos então

$$m \sim 2d / \lambda_0 \quad (3.41)$$

Assim, com  $\lambda_0 \sim 5 \times 10^{-5}$  cm, uma placa de espessura  $d \sim 1$  cm corresponde a  $m \sim 4 \times 10^4$ . Se a refletividade  $r$  da interface for 0,9, a (3.40) dá

$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} \sim \frac{4\pi \times 10^4}{10^{-1}} \sim 10^6$$

o que permite separar duas linhas espectrais com  $\delta \lambda / \lambda \sim 10^{-6}$  (variação fracionária de  $\sim 1$  ppm = 1 parte por milhão).

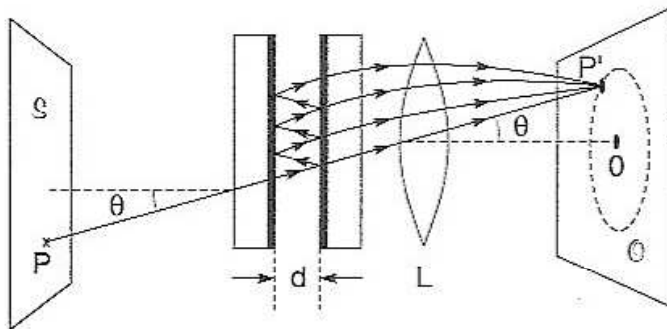


Fig. 3.17 Interferômetro de Fabry-Perot

O interferômetro de Fabry-Perot (fig. 3.17) é um par de placas paralelas de vidro ou quartzo, na face interna das quais são depositados filmes de refletividade elevada.

Para observar as franjas, coletam-se os feixes transmitidos paralelos por meio de uma lente  $L$ , que os focaliza num ponto  $P'$  do anteparo de observação  $\mathcal{O}$ . A fonte de luz é uma fonte extensa  $\mathcal{S}$ , que envia raios incidentes em diferentes direções.

Pela simetria do dispositivo em torno do eixo da lente, são observadas franjas de igual inclinação  $\theta$  de forma circular (interseção do plano  $\mathcal{O}$  com um cone de abertura  $\theta$  e eixo no eixo de simetria da lente).

A lâmina de faces paralelas nesse caso é a lâmina de ar de espessura  $d$  (= separação entre as placas), de forma que  $n = 1$ , e a condição que dá o máximo de interferência de ordem  $m$ , pela (3.38), é

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} d \cos \theta_m = 2m\pi \quad (3.41)$$

que dá o ângulo de abertura  $\theta_m$  do cone correspondente a cada ordem  $m$ .

O poder separador do interferômetro de Fabry-Perot é dado pela (3.40), e atinge valores extremamente elevados, permitindo detetar a *estrutura hiperfina* de raias espectrais, separando comprimentos de onda muito próximos. Tomam-se cuidados especiais para assegurar o paralelismo (o padrão resultante chama-se étalon) e manter constante a distância  $d$ .

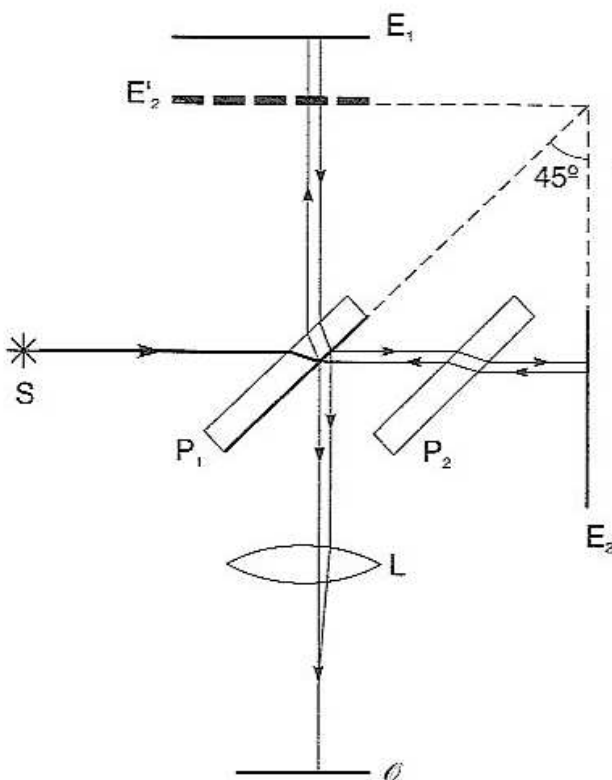


Fig. 3.18 Interferômetro de Michelson

No *interferômetro de Michelson*, luz de uma fonte  $S$  é subdividida (fig. 3.18) em dois feixes perpendiculares por uma lâmina semi-espelhada depositada sobre uma placa de vidro  $P_1$ , a  $45^\circ$  do feixe incidente. O feixe refletido vai a um espelho  $E_1$ , que o manda de volta e para a lente  $L$ , depois de atravessar novamente  $P_1$ . O feixe transmitido pela lâmina semi-espelhada vai para outro espelho  $E_2$  (fig. 3.18) e, depois de refletir-se na lâmina, vai também para  $L$  (a placa  $P_2$ , idêntica a  $P_1$  mas não-espelhada, é inserida para compensar a diferença de caminho óptico correspondente ao duplo atravessamento de  $P_1$  pelo feixe que se reflete em  $E_1$ ).

Os dois feixes interferem no plano de observação  $\mathcal{O}$ , onde são focalizados pela lente  $L$ . Se  $E'_2$  é a imagem especular de  $E_2$  na lâmina semi-espelhada (fig. 3.18), as condições de interferência construtiva ou destrutiva são as mesmas que para a

lâmina de faces paralelas formada por  $E_1$  e  $E'_2$ , para o par de raios (aqui não há reflexões múltiplas).

Como o raio que vai para  $E_1$  sofre reflexão *interna* na camada espelhada, e o que vai para  $E_2$  é refletido externamente, há uma defasagem adicional de  $\pi$ , e a (3.29), com  $n = 1$ , dá  $2d \cos \theta_m = m \lambda_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) para interferência *destrutiva*, onde  $d = |l_2 - l_1|$  é a diferença de caminho (anéis escuros).

O interferômetro de Michelson permite detetar diferenças extremamente pequenas de caminho ótico entre os dois braços perpendiculares do percurso dos raios. Uma diferença de caminho  $\lambda_0 (\Delta m)$  representa um deslocamento de  $\Delta m$  franjas. É possível estimar visualmente deslocamentos até de  $\Delta m \sim \frac{1}{20}$  de franja.

### 3.6 Coerência

No final da Seç. 3.2 foi reproduzida a observação original de Young, de que é essencial, para observar efeitos de interferência entre diferentes trajetos da luz, que eles se originem da mesma fonte.

Para ver por que motivo isso é importante, consideremos primeiro um problema análogo ao que acabamos de discutir, uma superposição de muitos feixes de luz, todos monocromáticos e de mesma frequência angular  $\omega$ , propagando-se na mesma direção, mas com *defasagens relativas distribuídas ao acaso*. Isso sucederia, p. ex., se eles provêm todos de *fontes de luz diferentes*, cujas fases de oscilação são independentes entre si.

Num dado ponto do espaço, a onda luminosa é então da forma (em notação complexa)

$$E = \sum_{j=1}^N A_j e^{i\varphi_j} \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.42)$$

onde  $A_j$  é a amplitude real da  $j$ -ésima contribuição e  $\varphi_j$  sua constante de fase no ponto considerado.

A intensidade correspondente é proporcional a

$$|E|^2 = \left| \sum_{j=1}^N A_j e^{i\varphi_j} \right|^2 \quad (3.43)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 |E|^2 &= \sum_{j=1}^N A_j e^{-i\varphi_j} \sum_{k=1}^N A_k e^{i\varphi_k} = \sum_{j=1}^N |A_j|^2 + \sum_{j \neq k} A_j A_k e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} \\
 &= \sum_{j=1}^N |A_j|^2 + \sum_{j < k} A_j A_k \underbrace{\left[ e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} + e^{-i(\varphi_k - \varphi_j)} \right]}_{2 \cos(\varphi_k - \varphi_j)}
 \end{aligned}$$

onde explicitamos, na soma sobre  $j \neq k$ , os termos  $(j, k)$  e  $(k, j)$  (daí somarmos só sobre  $j < k$ ). Finalmente, como a intensidade  $I_j$  é proporcional a  $|E_j|^2$ ,

$$I = \sum_{j=1}^N I_j + 2 \sum_{j < k} \sqrt{I_j I_k} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \quad (3.44)$$

que é uma generalização da lei de interferência de 2 feixes (3.11). O último termo, que é o termo de interferência, depende das *diferenças de fase*  $\Delta_{jk} \equiv \varphi_k - \varphi_j$ .

Como as fases  $\varphi_k$  estão distribuídas ao acaso, o mesmo vale para as diferenças  $\Delta_{jk}$ . Para  $N$  grande, os valores de  $\cos(\varphi_k - \varphi_j)$  na (3.44) tendem então a estar *equidistribuídos*, com valores positivos e negativos igualmente prováveis. Supondo as intensidades comparáveis, vemos que o termo de interferência tende a se cancelar [como num passeio ao acaso no plano (*Fís. Bás.* 2, Seç. 12.4)]. Desprezando pequenas flutuações, temos então

$$I = \sum_{j=1}^N I_j \quad (3.45)$$

ou seja, *a intensidade resultante é a soma das intensidades devidas às diferentes fontes*, sem termos de interferência. Dizemos que *as fontes são incoerentes*.

Que relevância tem esse resultado, onde tomamos um grande número de fontes diferentes, para o experimento de Young ou para o interferômetro de Michelson, onde apenas dois feixes interferem? Poderíamos pensar que as franjas de interferência ainda apareceriam mesmo com feixes originários de duas fontes diferentes, p. ex., dois filamentos de lâmpadas incandescentes, desde que a luz de cada fonte fosse devidamente filtrada (um filtro vermelho deixa passar predominantemente luz vermelha), para torná-la tão monocromática quanto possível. Entretanto, se fizermos a experiência dessa forma, com duas fontes de luz diferentes, a interferência não é observada: elas se comportam como fontes incoerentes. Por que?

A razão é que uma fonte de luz usual, como um filamento incandescente ou o Sol, é formada de um grande número de fontes microscópicas independentes (não correlacionadas), cada uma das quais atua durante um tempo muito curto e, se volta a atuar, sua fase inicial não guarda a memória da fase de oscilação anterior, o que produz uma situação análoga à da (3.43).

A duração típica de um processo de emissão de luz por um átomo excitado é da ordem de  $10^{-8}$  s. Assim, mesmo para *uma única* fonte de luz térmica que se faz passar por um filtro de frequência, a luz emitida não oscila no tempo como uma senóide ininterrupta: podemos representá-la como uma sucessão de trens de onda sinusoidais *finitos*, cada um com duração média associada a um processo de emissão, mas interrompido, e as fases iniciais de cada um deles variando ao acaso.

Essa imagem pode ser testada experimentalmente usando o interferômetro de Michelson. Com efeito, se a fonte de luz S na fig. 3.18 é uma fonte de luz térmica, verifica-se que a visibilidade das franjas de interferência tende a diminuir à medida que a diferença de tempo de percurso entre os dois braços,  $\tau \equiv 2|l_2 - l_1|/c$ , vai aumentando, e as franjas desaparecem para  $\tau$  apreciavelmente maior que um intervalo de tempo  $\Delta\tau$  característico da fonte de luz, chamado *tempo de coerência*.

A interpretação desse resultado em termos da imagem de trens de onda independentes é imediata: um trem incidente de duração típica  $\Delta\tau$  é dividido em dois trens de mesma duração pela lâmina semi-espelhada. Para que possam interferir após os percursos nos dois braços, é necessário que o atraso  $\tau$  seja inferior à largura temporal  $\Delta\tau$  de cada trem: caso contrário, não há *superposição* dos dois trens. Trens de ondas diferentes não interferem porque as defasagens entre eles variam ao acaso.

A duração finita  $\Delta\tau$  de um trem de ondas também está associada com seu caráter *não-monocromático*: em lugar de uma única frequência angular  $\omega_0$ , ele cobre uma faixa de frequências de largura  $\Delta\omega$ .

Com efeito, consideremos uma superposição de ondas de frequências  $\omega$  variáveis *continuamente* entre  $\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega$  e  $\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega$ , admitindo, para simplificar, que todas tenham a mesma amplitude  $A$  num dado ponto do espaço, e vejamos como varia com o tempo a onda resultante:

$$E(t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.46)$$

Pensando na integral como limite de uma soma, vemos que isso representa efetivamente uma *superposição contínua* de ondas.

Com a mudança de variável  $\omega = \omega_0 + u$ , e notando que  $A$  é uma constante, fica

$$E(t) = A e^{-i\omega_0 t} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} e^{-iut} du = A e^{-i\omega_0 t} \frac{e^{-iut}}{(-it)} \Bigg|_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}}$$

$$= A e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{2}{t} \underbrace{\left( \frac{e^{i\frac{\Delta\omega}{2}t} - e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}t}}{2i} \right)}_{\text{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)} \left\{ \boxed{E(t) = A e^{-i\omega_0 t} \frac{\text{sen}\left(\Delta\omega \frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)} \right. \quad (3.47)$$

A intensidade média correspondente é

$$\boxed{I(t) = |E(t)|^2 = (A \Delta\omega)^2 \cdot \frac{\text{sen}^2 v}{v^2}, \quad v \equiv \frac{\Delta\omega}{2} t} \quad (3.48)$$

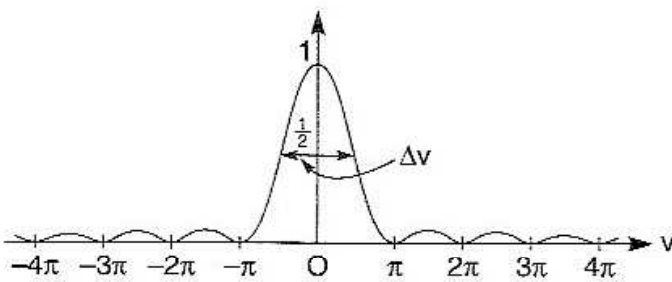


Fig. 3.19 A função  $\frac{\text{sen}^2 v}{v^2}$

A fig. 3.19 é um gráfico da função  $(\text{sen}^2 v)/v^2$ , que é  $= 1$  para  $v = 0$  e se anula nos pontos

$$v_m = m\pi \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Temos  $(\text{sen}^2 v)/v^2 \leq 1/v^2$ , função que cai rapidamente quando  $v$  cresce. Cerca de 91% da área sob a curva caem debaixo do pico central, na região entre  $v = -\pi$  e  $v = \pi$ , ou seja,

$$\frac{\Delta\omega}{2} t = \pm \pi \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \pm \frac{2\pi}{\Delta\omega} \end{array} \right.$$

Logo, a *largura temporal* do trem de ondas (3.46) (também chamado “*pacote de ondas*”) é



$$\Delta \tau \sim \frac{2\pi}{\Delta \omega} = \frac{1}{\Delta \nu} \quad (\omega = 2\pi \nu) \quad (3.49)$$

correspondendo à ordem de grandeza da largura do pico central da figura.

Vemos nesse exemplo que o *tempo de coerência*  $\Delta \tau$  é da ordem do *inverso* da largura  $\Delta \nu$  em frequência do pacote de ondas de luz considerado, também chamado de *largura espectral* do pacote. Para o caso ideal de luz perfeitamente monocromática,  $\Delta \nu \rightarrow 0$ , teríamos  $\Delta \tau \rightarrow \infty$ .

A relação (3.49) entre largura espectral e largura temporal de um pacote de ondas é *geral*. Para ver por que, notemos que os valores muito pequenos da função de onda fora da largura temporal são um efeito de *interferência destrutiva* entre as ondas monocromáticas de que o pacote é composto.

Com efeito, vemos na (3.46) que todas elas interferem em fase para  $t = 0$ , o *centro* (máximo) do pacote (se quiséssemos ter o pico do pacote em  $t_0$ , bastaria substituir  $t$  por  $t - t_0$ ). Para que a interferência comece a passar de construtiva a destrutiva, é preciso que a defasagem entre a componente central, de frequência  $\omega_0$ , e as “asas”  $\omega_0 \pm \frac{\Delta \omega}{2}$ , seja pelo menos de  $\pi$ , o que dá  $t \frac{\Delta \omega}{2} \sim \pi$ , mostrando que o resultado é independente da forma particular escolhida para o pacote neste exemplo.

É por essa razão que uma estação transmissora de rádio ou TV precisa de uma largura mínima de faixa de frequências para transmitir seus sinais. No caso da TV, p. ex., o feixe de elétrons tem de varrer  $\sim 5 \times 10^2$  linhas da tela, cada uma com  $\sim 5 \times 10^2$  pontos (pixels), a cada  $\frac{1}{30}$  de segundo, com um sinal transmitindo a informação de se ele deve acender-se ou apagar-se. Logo, o número de pulsos de voltagem por segundo é  $\sim 30 \times 25 \times 10^4 = 7,5 \times 10^6$ , e a duração de cada pulso é  $\sim \Delta t = 10^{-7}$  s. Para transmitir um sinal tão curto, a largura da faixa de frequências necessária é  $\Delta \nu \sim 10^7 \text{ s}^{-1} = 10 \text{ MHz}$ , que é a largura típica associada a um “canal” de TV, e é a razão pela qual há um número limitado de canais.

Chama-se *comprimento de coerência* de um sinal luminoso a distância  $\Delta l$  percorrida pela luz durante o tempo de coerência  $\Delta \tau$ ; para propagação no vácuo, é

$$\Delta l = c \Delta \tau \sim \frac{c}{\Delta \nu} \quad (3.50)$$

A condição para que dois feixes de luz originários de mesma fonte possam interferir é que a *diferença de caminho entre eles não exceda o comprimento de coerência da luz*. Quando essa condição deixa de ser satisfeita, as franjas de interferência desaparecem (sua visibilidade  $\rightarrow 0$ ).

Para luz “branca”, tem-se  $\Delta \nu \sim 0,3 \times 10^{15}$  Hz, o que dá  $\Delta \tau \sim 3 \times 10^{-15}$  s e  $\Delta l \sim 10^{-6}$  m = 1  $\mu$ m  $\sim \bar{\lambda}$ , o comprimento de onda médio da luz.

Para luz de uma fonte térmica, tornada (com o uso de filtros) tão monocromática quanto possível,  $\Delta \tau$  é da ordem da vida média de um átomo excitado, da ordem de  $10^{-8}$  s, como já foi mencionado. Logo,  $\Delta l \leq 10^2$  cm = 1 m.

Já para a luz de um *laser* estabilizado, pode-se ter  $\Delta \tau \geq 10^{-2}$  s, o que corresponde a  $\Delta l \geq 10^8$  cm!

A diferença fundamental entre a luz do laser e luz térmica (luz solar, luz de uma lâmpada) é exatamente esta: a *coerência* elevada da luz do laser. Experiências de interferência tornam-se muitíssimo mais fáceis quando se emprega luz de laser.

Quando giramos o botão de sintonia de um rádio entre duas estações, o altofalante transmite apenas *ruído*. A luz térmica é análoga ao ruído; a luz de laser, nesta analogia, corresponderia a sintonizarmos uma estação que está transmitindo uma nota musical pura.

O comprimento de coerência mede a correlação de fase entre duas frentes de onda distantes uma da outra, no sentido longitudinal da propagação da luz, mas também é preciso considerar a coerência numa direção *transversal*, ao longo de uma frente de onda.

Se formos aumentando a distância ( $\perp$  = transversal)  $d_{\perp}$  entre os dois orifícios no experimento de Young, a visibilidade das franjas também tende a diminuir, e a interferência desaparece para  $d_{\perp} \gg \Delta d_{\perp}$ , onde  $\Delta d_{\perp}$  depende do grau de *colimação* do feixe incidente: seria  $\infty$  no caso ideal de uma onda plana (raios paralelos), mas um feixe de luz real tem uma *abertura angular*  $\Delta \theta > 0$ . Para luz térmica, tem-se

$$\boxed{\Delta d_{\perp} \sim \frac{\bar{\lambda}}{\Delta \theta}} \quad (3.51)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é o comprimento de onda médio da luz. Como  $\bar{\lambda} \sim 2\pi/\bar{k}$  ( $\bar{k}$  = número de onda médio), a (3.51) também se escreve

$$\boxed{\Delta d_{\perp} \cdot (\bar{k} \Delta \theta) \sim \Delta d_{\perp} \cdot \Delta k_{\perp} \sim 2\pi} \quad (3.52)$$

onde  $\Delta k_{\perp}$  é a “abertura transversal” dos diferentes vetores de onda  $\mathbf{k}$  da luz incidente, associada à abertura angular  $\Delta \theta$ .

A relação (3.52) é um análogo espacial da (3.49), e voltaremos a discuti-la na teoria da difração (Seç. 4.6). Para luz solar, p. ex.,  $\bar{\lambda} \sim 5 \times 10^{-5}$  cm e  $\Delta \theta \sim 0,5^{\circ}$ ,

o diâmetro angular aparente do Sol, que corresponde a  $\sim 10^{-2}$  rad, o que dá  $\Delta d_{\perp} \sim 10^2 \bar{\lambda} \sim 0,05$  mm, razão pela qual o experimento de Young com luz solar torna-se difícil para um espaçamento  $d \geq 0,1$  mm. Esta é uma forma indireta de medir  $\Delta \theta$  para o Sol.

Analogamente, podemos usar a (3.51) para estimar o diâmetro angular de uma estrela, usando luz da estrela para produzir franjas tipo Young e verificando para que separação  $\Delta d_{\perp}$  as franjas tendem a desaparecer (veremos na teoria da difração que há um critério quantitativo para não só estimar, como medir  $\Delta \theta$  por este método).

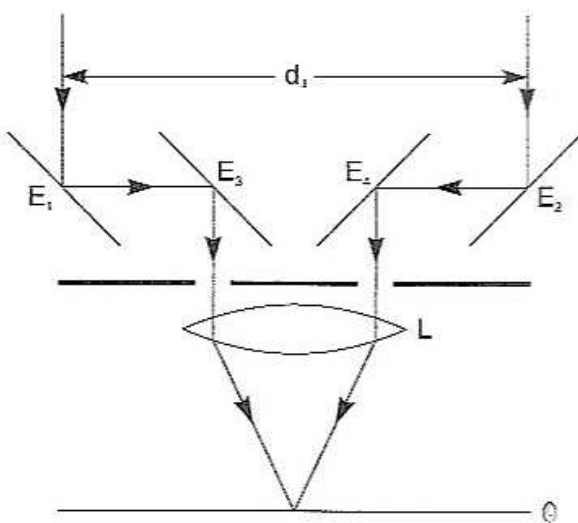


Fig. 3.20 Interferômetro estelar de Michelson

É o que foi feito por Michelson com seu *interferômetro estelar*, ilustrado na fig. 3.20. Luz da estrela incide sobre os espelhos móveis  $E_1$  e  $E_2$  e, depois de refletida nos espelhos fixos  $E_3$ ,  $E_4$ , é focalizada pela objetiva  $L$  no plano de observação  $\Theta$ . Varia-se a distância  $d_{\perp}$  entre  $E_1$  e  $E_2$  e verifica-se como varia a visibilidade das franjas de interferência devidas aos dois raios. Com o auxílio de uma relação análoga à (3.51), deduz-se daí o diâmetro angular  $\Delta \theta$  da estrela.

Para a primeira estrela cujo diâmetro angular foi medido por esse método, Betelgeuse ( $\alpha$  Orionis), a separação  $d_{\perp}$  foi  $\sim 3$  m e Michelson obteve  $\Delta \theta = 0,047''$  (segundos de arco). Conhecendo a distância de Betelgeuse à Terra, através de sua paralaxe (*Fís.Bás.* 1, Seç.1.5), foi possível concluir que o diâmetro de Betelgeuse é cerca de 300 vezes maior que o do Sol. É difícil aumentar  $d_{\perp}$  muito além desse valor: o menor  $\Delta \theta$  medido por Michelson, o de Arcturus, que é de  $0,02''$ , exigiu  $d_{\perp} \sim 8$  m.

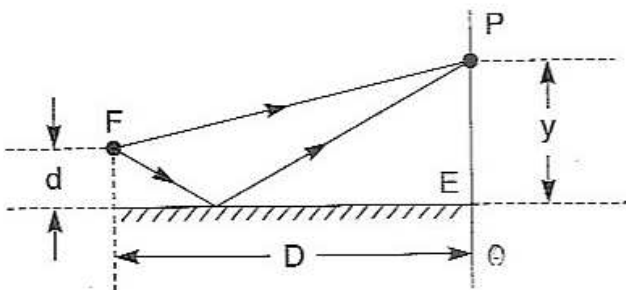
Em 1954, R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss mostraram que era possível detectar interferências entre *flutuações de intensidade* entre dois detetores, mesmo para separações  $d_{\perp} \sim 200$  m, o que permitiu medir diâmetros angulares de  $0,0005''$ ! A explicação está relacionada com *coerência de ordem superior*, e a experiência teve um forte impacto no desenvolvimento da ótica quântica.

A área de um círculo de raio  $\Delta d_{\perp}$  em torno de um ponto num feixe de luz (transversal à direção de propagação) chama-se *área de coerência*  $\Delta A$ , e o volume

$$\Delta V \sim \Delta A \Delta l \quad (3.53)$$

onde  $\Delta l$  é o comprimento de coerência, chama-se *volume de coerência*. Podemos interpretá-la como a região do espaço em torno de um ponto P do feixe da qual é possível extrair amostras capazes de interferir com a luz em P, ou seja, exibindo propriedades de *coerência* em relação a P.

## PROBLEMAS



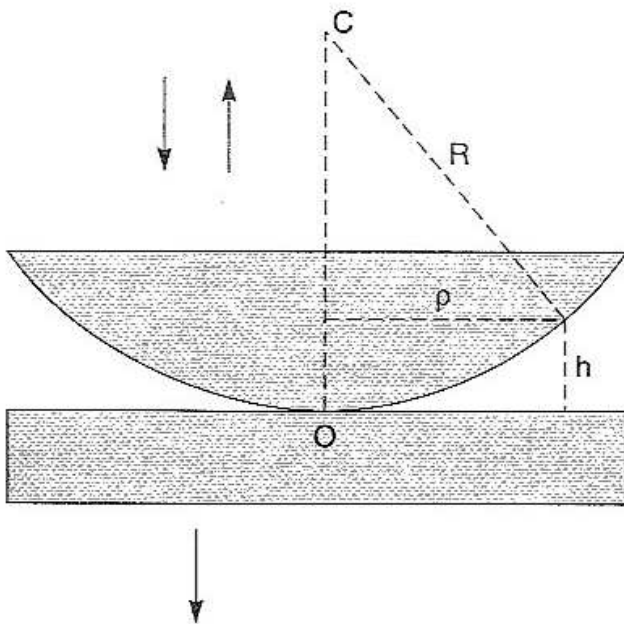
1. Na experiência do *espelho de Lloyd*, observa-se num anteparo  $\Theta$  a interferência entre a luz que vai diretamente de uma fonte puntiforme F para um ponto P do anteparo  $\Theta$  e a luz que vai de F para P refletindo-se numa placa plana de vidro E (fig.). A distância de F ao plano da placa é  $d$  e a distância de F a  $\Theta$  é  $D \gg d$ . Observa-se a primeira franja brilhante (máximo) de interferência num ponto P a uma distância  $y$  do plano da placa, usando luz monocromática de comprimento de onda  $\lambda$ . Calcule  $y$  em função de  $\lambda$ ,  $d$  e  $D$ .

*Sugestão:* Considere a imagem especular de F e a defasagem na reflexão.

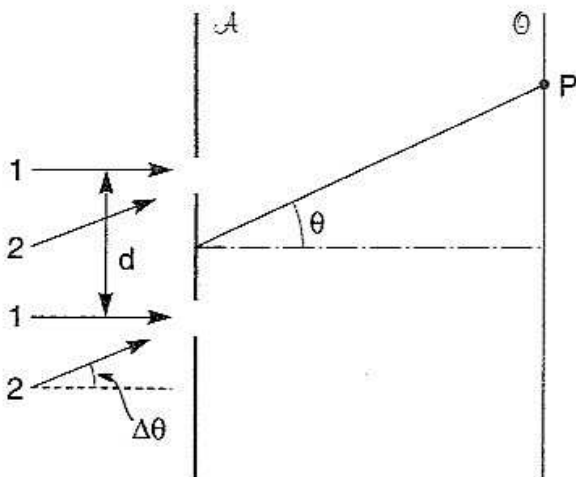
2. No experimento de Young, com a luz incidindo perpendicularmente sobre o anteparo onde estão os dois orifícios, coloca-se uma lâmina delgada transparente de faces paralelas e índice de refração  $n$  sobre um dos dois orifícios. Isso produz um deslocamento de  $m$  franjas na figura de interferência (a franja central brilhante desloca-se para a posição que era ocupada pela franja brilhante de ordem  $m$ ). O comprimento de onda da luz é  $\lambda$ . Qual é a espessura  $d$  da lâmina?

3. Para explicar as cores das manchas de óleo no asfalto molhado, considere uma camada de óleo, de índice de refração 1,5, boiando sobre a água (o asfalto absorve a luz transmitida através do óleo e da água). Suponha que a espessura da camada de óleo é igual ao comprimento de onda  $\lambda_1$  da luz violeta no ar, e que se observa a luz refletida na incidência perpendicular. (a) Mostre que há um *mínimo* de reflexão para luz violeta. (b) O comprimento de onda  $\lambda_2$  da luz vermelha é aproximadamente o dobro:  $\lambda_2 \approx 2 \lambda_1$ . Mostre que para luz vermelha há um *máximo* de reflexão.

4. Uma lâmina de água de sabão (índice de refração igual ao da água), colocada num aro vertical, escorre para baixo formando uma cunha. Observada por reflexão com luz de sódio ( $\lambda = 5.890 \text{ \AA}$ ) incidente perpendicularmente, verifica-se que há uma franja escura no topo e 4 franjas escuras por cm na lâmina. Qual é o ângulo de abertura da cunha (em radianos)?



5. Considere a experiência dos anéis de Newton, descrita na Seção 3.3. Uma lente plano-convexa de raio de curvatura  $R$  é colocada em contato com uma placa plana de vidro e iluminada na incidência perpendicular (fig. ao lado). (a) Calcule a relação entre as distâncias  $\rho$  e  $h$  da figura na vizinhança do ponto de contato  $O$  ( $h \ll R$ ). (b) Calcule o raio  $\rho_m$  do  $m$ -ésimo anel escuro, visto na luz refletida, com luz monocromática de comprimento de onda  $\lambda$ .



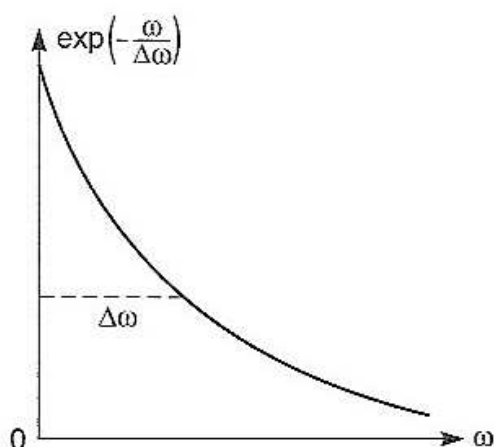
6. Considere o experimento de Young com um feixe incidente 1 perpendicular ao anteparo  $\mathcal{A}$  e um ponto  $P$  na direção  $\theta$  do anteparo de observação  $\Theta$ , onde a interferência é *construtiva*. Se agora acrescentamos outro feixe incidente 2 que forma um ângulo  $\Delta \theta$  com o feixe 1, e se formos aumentando  $\Delta \theta$ , chegaremos a uma situação onde a interferência em  $P$  é



*destrutiva* para o feixe 2, ou seja, os mínimos de 2 caem sobre os máximos de 1 e, se os dois feixes têm a mesma intensidade (e frequência), as franjas de interferência desaparecem. Mostre que isso acontece para  $\Delta \theta = 0,5 \lambda/d$ , onde  $d$  é a separação das aberturas. Isso permite medir  $\Delta \theta$ . Relacione esse resultado com o interferômetro estelar de Michelson (Seç. 3.6).

7. Para construir outro exemplo da relação entre largura temporal  $\Delta t$  e largura espectral  $\Delta \omega$ , considere o pacote de ondas [cf. (3.46)]

$$E(t) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega}{\Delta\omega}} \cos(\omega t) d\omega$$



em que a amplitude da contribuição de frequência  $\omega$  é  $\exp[-\omega/(\Delta\omega)]$ , ou seja, tem largura espectral  $\Delta\omega$  (fig.). Calcule  $E(t)$  e a largura temporal correspondente  $\Delta t$ . Comente o resultado.

*Sugestão:* Para calcular a integral, integre por partes duas vezes.



# 4

# DIFRAÇÃO

## 4.1 O conceito de difração

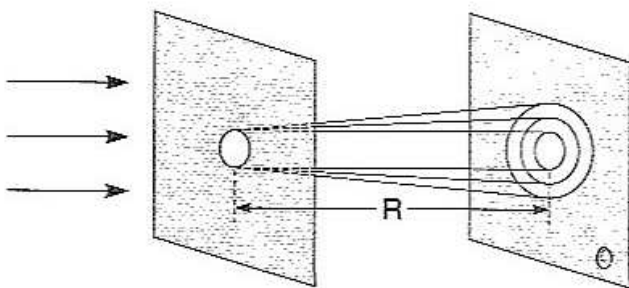


Fig. 4.1 Difração por um orifício circular

Consideremos (fig. 4.1) um pequeno orifício circular num anteparo opaco, iluminado por um feixe paralelo de luz monocromática.

Segundo a lei da propagação retilínea da ótica geométrica, o feixe transmitido através do orifício seria um cilindro circular, e formaria uma imagem

brilhante idêntica ao orifício num anteparo de observação: fora desta região, a escuridão seria completa (sombra geométrica).

Já havia sido observado por Francesco Maria Grimaldi, num livro publicado postumamente em 1665, que, quando o orifício é muito pequeno, como um buquinho de alfinete, e a distância  $R$  ao anteparo de observação é suficientemente grande, verifica-se que a luz penetra na região de sombra geométrica, com o aparecimento de franjas claras e escuras na vizinhança do limite da sombra.

Esses desvios da propagação retilínea da luz foram chamados de *difração*, nome ligado à “deflexão” dos raios luminosos. Nesse sentido genérico, tanto pode aplicar-se à passagem através de uma abertura como ao “espalhamento” por um obstáculo.

Os fenômenos de difração, como os de interferência, aos quais estão estreitamente ligados, são característicos de uma teoria ondulatória. Quanto maior o comprimento de onda em relação às dimensões da abertura ou obstáculo, mais fortes

devem ser os efeitos de difração: na experiência acima, luz vermelha sofre desvios maiores do que luz azul. Na acústica, onde os comprimentos de onda são da mesma ordem de grandeza que o tamanho dos objetos encontrados na propagação, os efeitos de difração são muito fortes.

É costume classificar os fenômenos de difração em duas categorias, conforme a distância  $R$  entre o “objeto difratante” e o anteparo de observação  $\mathcal{O}$ . Para distâncias não excessivamente grandes (veremos depois os critérios), a “imagem” observada preserva semelhança com a forma geométrica do objeto, embora apareça rodeada ou entremeada por franjas claras e escuras.

Para  $R$  suficientemente grande (formalmente  $R \rightarrow \infty$ ), o resultado passa a depender somente da *direção* de observação, e não guarda mais semelhança com a forma geométrica do objeto. Por exemplo, para um feixe paralelo incidente sobre uma abertura, a ótica geométrica prediz que a intensidade para  $R \rightarrow \infty$  só é  $\neq 0$  na *direção do feixe incidente*, qualquer que seja a forma da abertura (circular, retangular ou irregular). Na teoria ondulatoria, veremos que há uma dependência da forma da abertura, mas a *figura de difração* observada não é semelhante à forma geométrica da abertura, ao contrário do que sucede à distância finita.

No primeiro caso, em que há uma semelhança perceptível, dizemos que se trata de *difração de Fresnel*; no segundo ( $R \rightarrow \infty$ ), de *difração de Fraunhofer*.

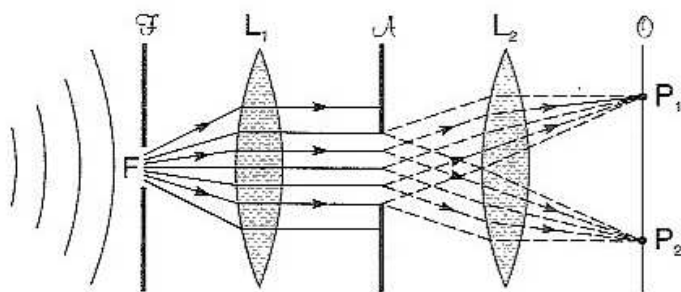


Fig. 4.2 Observação da difração de Fraunhofer

A fig. 4.2 ilustra uma forma de observar na prática a difração de Fraunhofer. Uma fonte de luz *coerente*  $F$  no plano focal objeto da lente  $L_1$  produz um feixe incidente paralelo, que atinge uma abertura num anteparo plano  $\mathcal{A}$ . Os feixes difratados em diferentes direções são coletados por outra lente  $L_2$ , que os focaliza em seu plano focal imagem, coincidente com o anteparo de observação  $\mathcal{O}$ . Os diferentes pontos  $P_1, P_2, \dots$  representam imagens de *direções* diferentes, de forma que se observa sobre  $\mathcal{O}$  a figura de difração de Fraunhofer.

$L_2$ , que os focaliza em seu plano focal imagem, coincidente com o anteparo de observação  $\mathcal{O}$ . Os diferentes pontos  $P_1, P_2, \dots$  representam imagens de *direções* diferentes, de forma que se observa sobre  $\mathcal{O}$  a figura de difração de Fraunhofer.

Vamos concentrar a atenção principalmente na difração de Fraunhofer, que tem as aplicações mais importantes, limitando-nos a uma discussão qualitativa da difração de Fresnel.

## 4.2 O Princípio de Huygens-Fresnel

Vimos como Huygens deu uma explicação qualitativa da propagação retilínea baseada em ondas secundárias e na sua construção geométrica, sem considerar

ondas monocromáticas. Vimos também, na Seção 3.2, como tratar o experimento de Young considerando cada orifício como fonte de ondas esféricas e fazendo-as interferir.

A idéia básica de Augustin Fresnel foi justamente combinar o princípio de Huygens com o conceito de interferência, aplicando-o à propagação de *ondas monocromáticas*. As modificações básicas introduzidas por Fresnel no Princípio de Huygens foram então as seguintes:

(i) As ondas esféricas secundárias oriundas dos diferentes pontos de uma frente de onda são *coerentes*, pois a frente de onda é uma superfície de fase constante.

(ii) A onda num ponto ulterior é a *resultante da interferência* de todas as ondas secundárias, levando em conta suas diferenças de fase associadas a percursos diferentes.

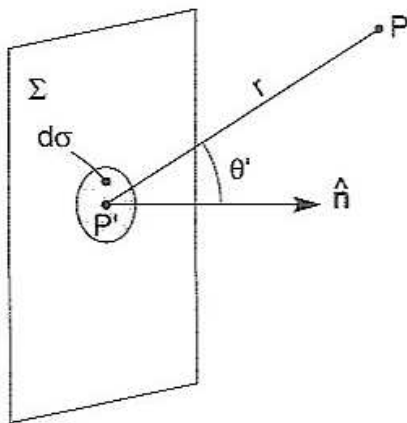


Fig. 4.3 Princípio de Huygens-Fresnel

(iii) A amplitude das ondas secundárias provenientes (fig. 4.3) de um elemento de superfície  $d\sigma$  de uma frente de onda  $\Sigma$  não é a mesma em todas direções: é máxima na direção  $\hat{n}$  normal à frente de onda (direção do raio) e decresce lentamente e monotonicamente com o ângulo  $\theta' \equiv \angle(P'P, \hat{n})$ , caindo a 0 para  $\theta' = \frac{\pi}{2}$  (ao longo da frente de onda).

Assim, a contribuição de  $d\sigma$  à onda no ponto P seria, segundo Fresnel, proporcional a  $d\sigma$  e a  $v(P')$ , a função de onda no ponto P' do qual  $d\sigma$  é um entorno, contendo além disso um *fator de obliquidade*  $F(\theta')$ , máximo para  $\theta' = 0$  e caindo lentamente e monotonicamente para zero quando  $\theta' \rightarrow \pi/2$ .

A contribuição  $dv(P)$  do elemento  $d\sigma$  no ponto P é portanto, segundo Fresnel,

$$dv(P) = F(\theta') v(P') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (4.1)$$

onde  $r \equiv |P'P|$ .

A onda resultante em P é então\*

$$v(P) = \int_{\Sigma} d v(P) = \int_{\Sigma} F(\theta') v(P') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (4.2)$$

onde a integral é estendida a toda a *porção não-obstruída* de  $\Sigma$ : porções da frente de onda obstruídas por anteparos ou outros obstáculos opacos não contribuem.

A (4.2) é a expressão analítica do *Princípio de Huygens-Fresnel*. Kirchhoff mostrou mais tarde que uma expressão desta forma pode ser obtida diretamente a partir da equação de ondas satisfeita por  $v$ , determinando assim a forma explícita do fator de obliquidade  $F(\theta)$ . Entretanto, isto não será necessário por enquanto.

### 4.3 O método das zonas de Fresnel

Segundo o Princípio de Huygens-Fresnel (4.2), a função de onda em P é a resultante da *interferência* de todas as ondas esféricas secundárias provenientes dos pontos  $P'$  de  $\Sigma$ . Sendo  $\Sigma$  uma frente de onda, a fase de  $v(P')$  é constante sobre  $\Sigma$ . Logo, a fase de cada onda secundária é dada unicamente pelo fator de fase  $\exp(ikr)$ , correspondendo à defasagem  $kr$ . Tipicamente,  $kr \gg 1$  e  $\exp(ikr)$  varia rapidamente com  $P'$ .

As contribuições dominantes nessa superposição de ondas devem então ser aquelas para as quais a *interferência é a mais construtiva possível*. Isto acontece num entorno de um ponto O de  $\Sigma$  no qual a *fase seja estacionária*, ou seja, varie o mínimo possível com a variação de  $P'$ . Este é um resultado geral na superposição (interferência) de ondas, conhecido como o *Princípio da Fase Estacionária*.

---

\* Conforme a convenção adotada anteriormente, estamos omitindo o fator temporal  $e^{-i\omega t}$  sempre associado a ondas monocromáticas de frequência angular  $\omega$ .

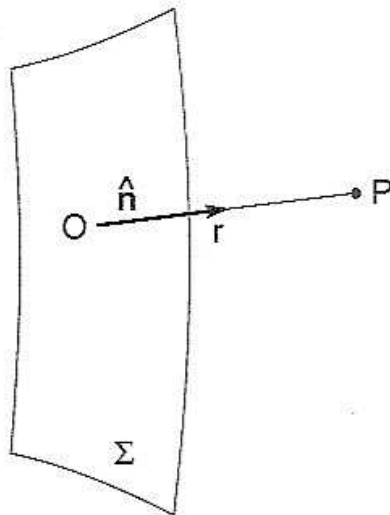


Fig. 4.4 O pólo

No caso,  $kr$  é estacionário quando  $r = \overline{OP}$  é mínimo, isto é, quando  $r$  é a *distância* do ponto de observação  $P$  à frente de onda  $\Sigma$ :  $O$  é portanto o pé da perpendicular traçada (fig. 4.4) de  $P$  a  $\Sigma$ , e  $\overline{OP}$  tem a direção da normal  $\hat{n}$  a  $\Sigma$  em  $O$ . Isto significa que  $OP$  corresponde ao *raio luminoso* oriundo de  $\Sigma$  que passa por  $P$ , estabelecendo assim uma conexão com a ótica geométrica. O “ponto de fase estacionária”  $O$  chama-se o *pólo* da frente de onda  $\Sigma$  relativo ao ponto  $P$ .

Vejamos agora de que forma o Princípio de Huygens-Fresnel explica a propagação retilínea da luz no espaço livre, aplicando-o à *propagação de uma onda plana*, com o auxílio de uma construção geométrica, o *método das zonas de Fresnel*.

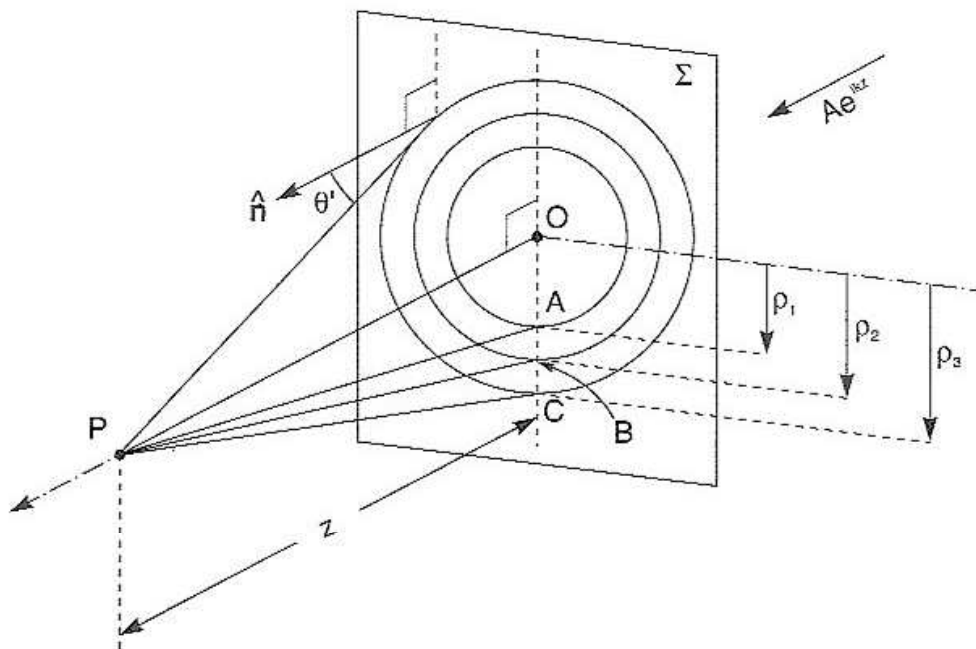


Fig. 4.5 Zonas de Fresnel

Suponhamos então que  $v(P')$  é uma onda plana que se propaga na direção  $z$  no espaço livre,

$$v = A e^{ikz}$$

(4.3)

e tomemos como frente de onda  $\Sigma$  o plano  $z = 0$ , onde  $v(P') = A$ . A (4.2) fica

$$v(P) = A \int_{\Sigma} F(\theta') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \tag{4.4}$$

onde  $\Sigma$  é todo o plano  $z = 0$ .

O pólo  $O$  de  $\Sigma$  relativo a  $P$  é o pé da perpendicular de  $P$  a  $\Sigma$  (fig. 4.5), que tomaremos como origem das coordenadas. Seja  $z \equiv \overline{OP}$ . Com centro em  $P$ , consideremos uma série de esferas de raios

$$\underbrace{\overline{PO}}_{r_0} = z \quad \underbrace{\overline{PA}}_{r_1} = z + \frac{\lambda}{2}, \quad \underbrace{\overline{PB}}_{r_2} = z + \lambda, \quad \underbrace{\overline{PC}}_{r_3} = z + \frac{3}{2}\lambda, \dots \tag{4.5}$$

que cortam a frente de onda em círculos de raios (fig. 4.5)

$$\overline{OA} = \rho_1, \quad \overline{OB} = \rho_2, \quad \overline{OC} = \rho_3, \dots \tag{4.6}$$

cujos valores podemos calcular nos triângulos retângulos  $POA$ ,  $POB$ ,  $POC$ , ...

$$\overline{OA}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PO}^2 \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_1^2 &= \left(z + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - z^2 = \lambda z + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ \rho_2^2 &= (z + \lambda)^2 - z^2 = 2\lambda z + \lambda^2 \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

e, para o círculo de raio  $\rho_n$

$$\rho_n^2 = \left(z + n \frac{\lambda}{2}\right)^2 - z^2 = n \lambda z + \left(n \frac{\lambda}{2}\right)^2 \tag{4.7}$$

Vamos tomar

$$z \gg \lambda \tag{4.8}$$



Nesse caso, o último termo da (4.7) pode ser desprezado, o que dá

$$\boxed{\rho_n \approx \sqrt{n \lambda z}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.9)$$

ou seja, os raios crescem como as raízes quadradas de números inteiros.

Os círculos dividem o plano  $\Sigma$  numa série de anéis circulares concêntricos, que se chamam *zonas de Fresnel*. Por construção, sendo  $k = 2\pi/\lambda$ ,

$$k r_1 = k \left( z + \frac{\lambda}{2} \right) = k z + \pi$$

$$k r_2 = k (z + \lambda) = k z + 2 \pi$$

.....

$$\boxed{k r_n - k z = n \pi \quad (n = 1, 2, \dots)} \quad (4.10)$$

ou seja, a contribuição do ponto A à integral (4.4) está defasada de  $\pi$  em relação à do pólo O, a de B de  $2\pi$ , a de C de  $3\pi$  ... . *Em média*, a contribuição da 1.<sup>a</sup> zona de Fresnel interfere *construtivamente* com as da 3.<sup>a</sup>, 5.<sup>a</sup>, ... e *destrutivamente*, com as da 2.<sup>a</sup>, 4.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup>, ... .

A área da  $n$ -ésima zona de Fresnel é

$$\boxed{\pi (\rho_n^2 - \rho_{n-1}^2) \approx \pi \lambda z} \quad (4.11)$$

ou seja, *todas as zonas circulares têm aproximadamente a mesma área*.

Como tomamos  $z \gg \lambda$ , o fator de obliquidade  $F(\theta)$  varia muito pouco sobre a  $n$ -ésima zona, e podemos tomá-lo sobre ela como tendo um valor constante  $F_n$ , onde, pelas hipóteses de Fresnel,  $F_n$  é máximo para  $n = 1$  e decresce lenta e monotonicamente quando  $n$  cresce, com

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 0} \quad (4.12)$$

pois neste limite  $\theta \rightarrow \pi/2$ .

Decompondo a integral numa série de integrais sobre as zonas sucessivas, a (4.4) dá então:

$$v(P) = A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{\text{zona } n} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (4.13)$$

Tomando coordenadas polares  $(\rho, \varphi)$  no plano  $\Sigma$ , com origem em  $O$ , a integral sobre a zona  $n$  vai de  $\rho_{n-1}$  a  $\rho_n$ . Como o integrando não depende de  $\varphi$ ,

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad (\text{área do anel entre } \rho \text{ e } \rho + d\rho)$$

Mas  $r^2 = \rho^2 + z^2$ , com  $z$  fixo, implica

$$\rho d\rho = r dr \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma}{r} = 2\pi dr \end{array} \right. \quad (4.14)$$

e a (4.13) fica

$$\begin{aligned} v(P) &= A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{r_{n-1}}^{r_n} e^{ikr} \cdot 2\pi dr \\ &= 2\pi A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \frac{e^{ikr}}{ik} \Bigg|_{r_{n-1}}^{r_n} = \frac{\lambda A}{i} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{ikr_n} - e^{ikr_{n-1}}) F_n \end{aligned}$$

Mas, pela (4.10),  $kr_n = kz + n\pi$ , e  $e^{in\pi} = (-1)^n$ .

Logo,

$$v(P) = -i\lambda A e^{ikz} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n - (-1)^{n-1} \right] F_n$$

Finalmente,

$$v(P) = 2i\lambda A e^{ikz} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \quad (4.15)$$

confirmando que as zonas de Fresnel ímpares interferem entre si construtivamente, e destrutivamente com as pares. Esse era o objetivo da construção de Fresnel: todas as zonas têm a mesma área e há diferenças de caminho médias  $\lambda/2$  entre duas zonas sucessivas.

Para calcular a soma da série (4.15), o mais simples é usar um método gráfico, representando-a como uma soma de vetores colineares, cujos módulos decrescem lenta e monotonicamente para zero [cf.(4.12)], e que apontam sucessivamente em sentidos opostos (*série alternada*).

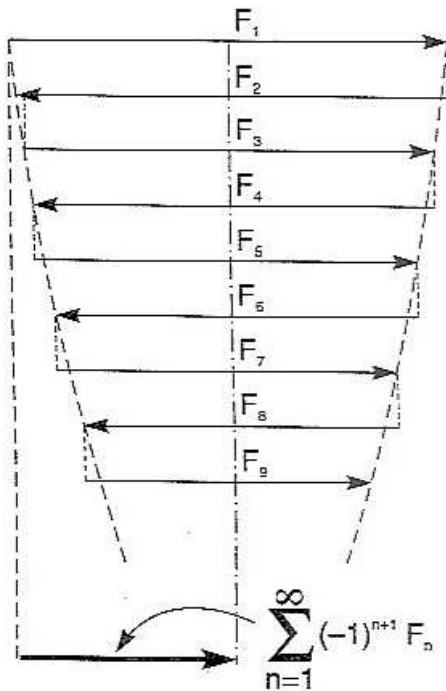


Fig. 4.6 Soma gráfica da série alternada

Para maior clareza, na fig. 4.6, os vetores foram deslocados sucessivamente na vertical. A resultante

$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^N F_N$  aponta da origem de  $F_1$  para a extremidade de  $(-1)^N F_N$  e vemos pela simetria da figura que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n = \frac{1}{2} F_1 \quad (4.16)$$

A (4.15) fica portanto

$$v(P) = i \lambda F_1 A e^{ikz} \quad (4.17)$$

e o resultado, obtido por Fresnel, é que a interferência entre as contribuições das zonas sucessivas tem como efeito final em P a metade da contribuição da 1.ª zona. Como a (4.17) deve ser igual à (4.3), concluímos que

$$F_1 = \frac{1}{i\lambda} = F(\theta' = 0) \quad (4.18)$$

e o Princípio de Huygens-Fresnel (4.2) assume a forma mais explícita

$$v(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} f(\theta') v(P') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (4.19)$$

onde  $f(\theta')$  é agora um fator adimensional,  $=1$  para  $\theta' = 0$ , e que  $\rightarrow 0$  lenta e monotonicamente para  $\theta' \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Uma função com essas propriedades é

$$f(\theta') = \cos \theta' \tag{4.20}$$

o que daria

$$v(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} \cos \theta' v(P') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \tag{4.21}$$

onde  $r \equiv |\overline{PP'}|$ ,  $\theta \equiv \angle (\overline{PP'}, \hat{n})$  e  $\hat{n}$  é o versor da normal a  $\Sigma$  em  $P'$ , no sentido da propagação.

A (4.21) é a forma explícita do PRINCÍPIO de HUYGENS-FRESNEL. Quando  $\Sigma$  é uma superfície plana, foi *demonstrado* por Rayleigh que este resultado decorre diretamente da equação de ondas escalares, a única aproximação sendo que a distância  $r$  é muito maior que o comprimento de onda  $\lambda$ .

Na prática, porém, isso só permite calcular  $v(P)$  se já conhecermos seus valores  $v(P')$  sobre  $\Sigma$ , o que em geral não acontece.

Entretanto, na teoria clássica da difração, estuda-se em geral a difração por uma ou mais aberturas num anteparo plano opaco, nas seguintes condições:

(i) As dimensões das aberturas são muito maiores que  $\lambda$ .

(ii) As distâncias do ponto de observação  $P$  e da fonte  $F$  ao plano do anteparo são muito maiores do que  $\lambda$  e usualmente também muito maiores que as dimensões das aberturas.

Nessas condições (fig. 4.7), a onda incidente tem uma frente de onda aproximadamente plana ao atingir o anteparo, e a maior parte da intensidade deve ser projetada na direção dianteira. Se tomarmos então para  $\Sigma$  uma superfície plana situada logo após o anteparo, e chamarmos de  $S$  as porções de  $\Sigma$  situadas na sombra geométrica e de  $A$  (abertura) as demais porções, esperamos que  $v(P')$  sobre  $\Sigma$  não difira muito da distribuição que seria prevista pela ótica geométrica, ou seja,

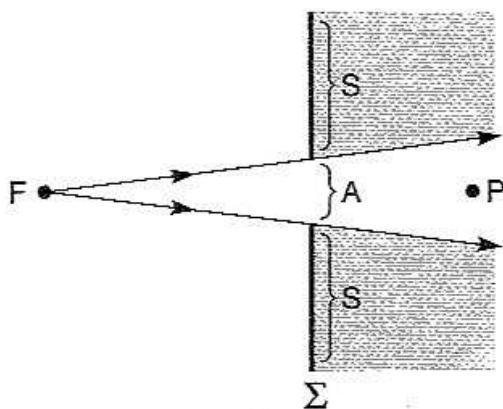


Fig. 4.7 Justificativa da aproximação de Kirchhoff

a maior parte da intensidade deve ser projetada na direção dianteira. Se tomarmos então para  $\Sigma$  uma superfície plana situada logo após o anteparo, e chamarmos de  $S$  as porções de  $\Sigma$  situadas na sombra geométrica e de  $A$  (abertura) as demais porções, esperamos que  $v(P')$  sobre  $\Sigma$  não difira muito da distribuição que seria prevista pela ótica geométrica, ou seja,

$$\begin{array}{l} v(P') \approx v_0(P') \quad (\text{onda incidente}) \text{ sobre } A \\ v(P') \approx 0 \quad (\text{sombra geométrica}) \text{ sobre } S \end{array} \quad (4.22)$$

Essa foi a aproximação empregada por Kirchhoff em seu tratamento da difração. Levando-a na (4.21), obtemos um resultado inteiramente determinado:

$$v(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos \theta' v_0(P') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (4.23)$$

onde a integral se estende *somente à abertura A* e  $v_0(P')$  é a *onda incidente sobre A*.

Os resultados da *teoria de Kirchhoff da difração*, baseados na (4.23), estão em bom acordo com a experiência, na região onde os efeitos de difração se observam usualmente, ou seja, desde que o ponto observação P esteja na vizinhança do limite da sombra geométrica. Quando P penetra muito profundamente na sombra, a intensidade se torna muito pequena e em geral não é observada.

#### 4.4 Difração de Fresnel: discussão qualitativa

O método das zonas de Fresnel permite compreender de forma qualitativa a formação da sombra geométrica e o aparecimento das franjas de difração que se observam na vizinhança do limite entre a sombra geométrica e a região iluminada (figura de difração de Fresnel).

Para ver isso, consideremos uma abertura A de forma qualquer num anteparo plano opaco, iluminada por uma fonte puntiforme F situada a uma distância finita, e procuremos estimar o comportamento da intensidade em diferentes pontos de observação, somando as contribuições das zonas de Fresnel a eles associadas, como método de cálculo da (4.23) análogo ao que empregamos para uma onda plana no espaço livre.

O caminho de fase estacionária entre a fonte F e o ponto de observação é a reta que une esses dois pontos, e a intersecção dessa reta com o plano do anteparo é o *pólo* relativo ao ponto de observação, que é também o centro do sistema de zonas de Fresnel correspondente.

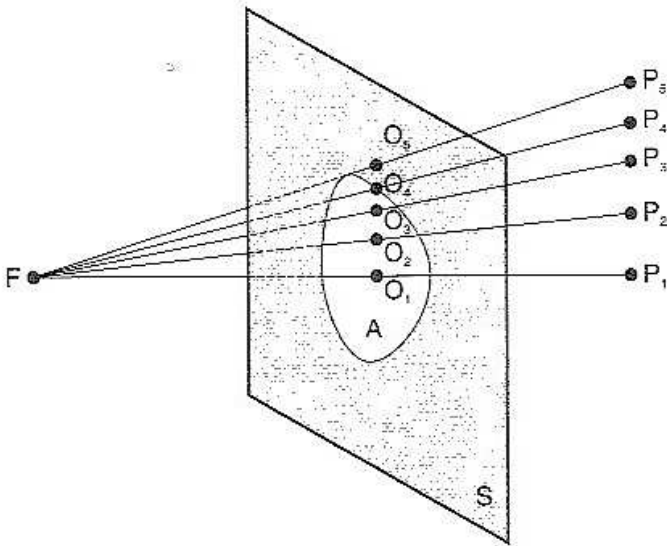


Fig. 4.8 Pólos relativos a diferentes pontos de observação

A fig. 4.8 mostra a fonte  $F$  e cinco pontos de observação  $P_1, \dots, P_5$ , com  $P_1$  próximo à parte central da região iluminada,  $P_5$  já bem dentro da sombra geométrica,  $P_4$  no limite da sombra e  $P_3$  perto desse limite, para uma abertura  $A$  de forma qualquer. Os pontos  $O_1, \dots, O_5$  são os pólos correspondentes, intersecções de  $FP_1, \dots, FP_5$  com o plano  $S + A$ .

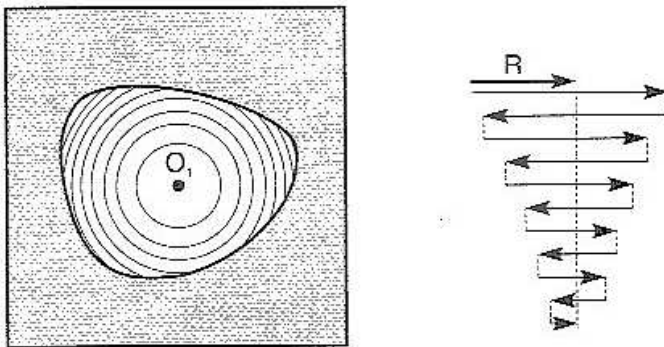


Fig. 4.9(a) Zonas de Fresnel para  $P_1$

a intensidade em  $P_1$  (parte central da região iluminada) é praticamente a mesma que se o anteparo não existisse

A fig. 4.9(a) mostra o sistema de zonas de Fresnel não obstruídas com centro em  $O_1$ , na região central de  $A$ , e a soma de vetores correspondentes. A única mudança com respeito ao espaço livre é que as últimas zonas de Fresnel descobertas dão uma contribuição irregular, mas já muito pequena, de modo que a resultante  $R$  é ainda muito próxima de  $\frac{1}{2} F_1$ , como na (4.16). Logo,

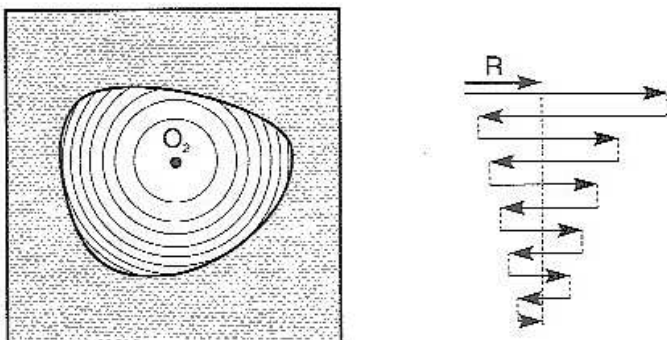
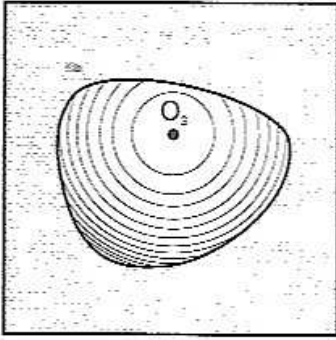
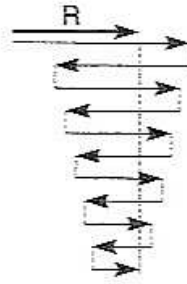


Fig. 4.9(b) Zonas de Fresnel para  $P_2$

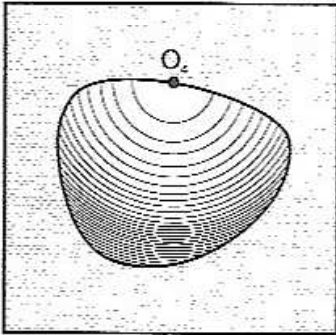
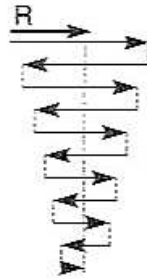
Para  $P_2$ , o pólo  $O_2$  já se aproxima da beirada de  $A$ . Na fig. 4.9(b), as duas primeiras zonas estão descobertas, mas as seguintes já vão sendo obstruídas, e  $R$  é bastante  $< \frac{F_1}{2}$ .

Logo, temos uma franja escura, embora  $P_2$  ainda esteja na região iluminada da ótica geométrica.

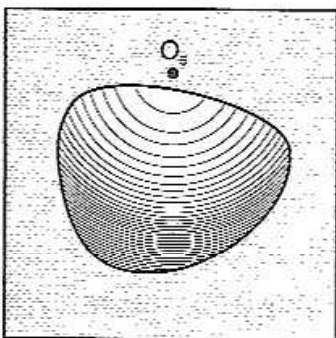
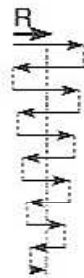


Fig. 4.9(c) Zonas de Fresnel para  $P_3$ 

Em  $P_3$  [fig. 4.9(c)], o pólo  $O_3$  é tal que a 1.<sup>a</sup> zona está descoberta, mas as seguintes já vão sendo cada vez mais obstruídas. A resultante  $R$  é  $> \frac{1}{2} F_1$ , de forma que se tem uma franja clara na região iluminada (perto da transição para a sombra) *mais intensa* do que existiria na propagação livre.

Fig. 4.9(d) Zonas de Fresnel para  $P_4$ 

O ponto  $P_4$  está no limite da sombra geométrica, de forma que o pólo correspondente  $O_4$  cai no contorno da abertura [fig. 4.9(d)]. A resultante é da ordem de uma parte da fração exposta da primeira zona. Logo, a intensidade não cai descontinuamente para zero no limite da sombra, como prevê a ótica geométrica: há um decréscimo *gradual* da intensidade.

Fig. 4.9(e) Zonas de Fresnel para  $P_5$ 

Finalmente, em  $P_5$ , já bem dentro da sombra geométrica, o pólo  $O_5$  cai sobre o anteparo opaco, longe da abertura  $A$  [fig. 4.9(e)]. A primeira e a última frações de zona expostas contribuem muito pouco, e a resultante é muito pequena (a intensidade varia com  $R^2$ !). Logo, temos escuridão quase completa, aproximando o resultado da ótica geométrica.

Para pontos como  $P_1$  e  $P_5$ , os resultados dependem muito pouco da forma da abertura, justificando a validade da propagação retilínea (ótica geométrica) como muito boa aproximação. Para pontos como  $P_2, P_3, P_4$ , mais próximos da transição luz/sombra, aparecem franjas claras e escuras que dependem mais da forma da

abertura, correspondendo à oscilação periódica com as porções de zonas que vão sendo obstruídas.

Admitimos na discussão acima que a abertura contém muitas zonas de Fresnel, e vimos que os resultados guardam uma relação de semelhança com a forma geométrica da abertura, o que, na classificação da Seção 4.1, caracteriza a região de difração de Fresnel.

Conforme vimos no exemplo da (4.1), os raios das zonas de Fresnel crescem à medida que o ponto de observação  $P$  se afasta da abertura. Quando a distância se torna suficientemente grande para que a abertura toda esteja contida dentro de uma zona de Fresnel, entramos na região de difração de Fraunhofer e a figura de difração, conforme veremos, deixa de ter semelhança geométrica com a forma da abertura  $A$ .

Outra condição que admitimos no tratamento acima foi que a primeira e a última zona expostas no contorno de  $A$  dão contribuições muito pequenas. Isso pode não ser válido para formas especialmente simétricas de  $A$  e/ou para posições especiais do ponto de observação  $P$ , conforme ilustrado pelos exemplos seguintes.

*Exemplo 4.1: Difração de Fresnel no eixo de uma abertura circular*

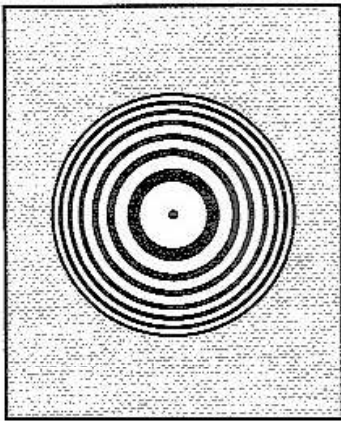
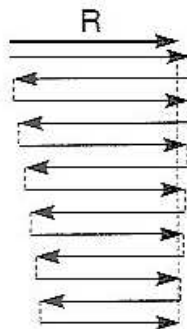


Fig. 4.10 Zonas de Fresnel no eixo de uma abertura circular



Este é um caso de exceção devido à simetria especial. Conforme mostra a fig. 4.10, para um ponto de observação  $P$  sobre o eixo de uma abertura circular (e uma onda incidente plana perpendicular ao anteparo), o pólo  $O$  coincide com o centro da abertura, de forma que o contorno da abertura pode coincidir com o contorno de uma zona de Fresnel, dependendo da distância  $\overline{OP} \equiv z$  [cf. (fig. 4.9)].

Se o número de zonas de Fresnel que caem dentro da abertura é um inteiro ímpar, como na fig. 4.10, a resultante  $R$  é muito próxima de  $F_1$ , de modo que a intensidade em  $P$  é da ordem de 4 vezes a intensidade da onda incidente. Por outro lado, se é um inteiro par, a resultante é  $\approx 0$ , de forma que a intensidade praticamente se anula, embora o ponto de observação esteja dentro da região iluminada.

Se  $a$  é o raio da abertura, o número de zonas de Fresnel nela contido é o maior inteiro contido em

$$\left( \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \right) \equiv n_0 \quad (4.24)$$

que varia com a distância  $z$ . Portanto, a intensidade ao longo do eixo *oscila* entre os valores extremos acima:  $\sim 4 I_0$  (onde  $I_0$  é a intensidade incidente) e 0.

Se o ponto de observação P se afasta do eixo, este efeito se torna rapidamente menos pronunciado (verifique!); a figura de difração, por simetria, tem a forma de anéis concêntricos.

#### Exemplo 4.2. Lente de Fresnel

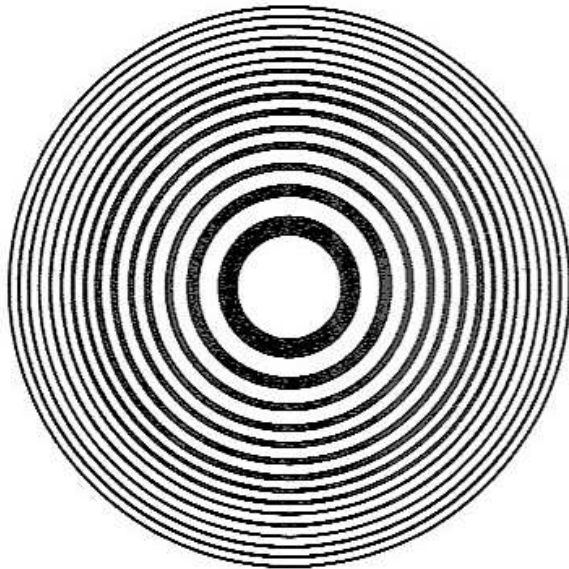


Fig. 4.11 Lente de Fresnel

Para um dado ponto de observação, que acontece se bloquearmos (tornando-as opacas) todas as zonas de Fresnel pares (fig. 4.11), deixando desobstruídas apenas as ímpares?

Conforme resulta da fig. 4.6, as contribuições de todas as zonas descobertas interferem então *construtivamente*. Se o número delas é  $N$ , a resultante é  $\approx N F_1$ , e a intensidade é  $\approx 4 N^2 I_0$ , onde  $I_0$  é a intensidade incidente. Para  $N$  grande, podemos obter assim uma forte concentração de intensidade em P, onde P está

no eixo de simetria; para P fora do eixo, a intensidade cai rapidamente, mostrando que se trata de um efeito de *focalização*.

Um efeito correspondente ocorre para uma onda incidente *esférica*, originária de uma fonte F puntiforme, definindo de forma análoga as zonas de Fresnel. Existe nesse caso uma fórmula semelhante à das lentes delgadas, relacionando as distâncias da fonte e do “ponto imagem” P ao pólo O. A demonstração será deixada para os problemas (Probl.4.3).

Na prática, a “lente” de Fresnel é uma réplica fotográfica reduzida de uma figura como a fig. 4.11.

*Exemplo 4.3. Difração no eixo de um disco circular*

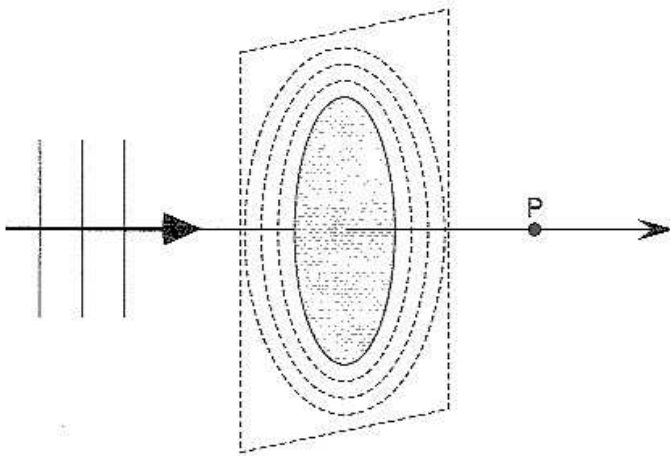


Fig. 4.12 Ponto no eixo de um disco circular

Consideremos agora um pequeno disco circular opaco iluminado por uma onda plana incidente perpendicularmente sobre ele, e um ponto de observação  $P$  situado sobre o eixo de simetria (fig. 4.12).

A partir da primeira zona de Fresnel que estiver descoberta, as contribuições são as mesmas que na propagação livre de uma onda plana (Seç. 4.3). Como o disco é suposto pequeno,

o fator de inclinação não afeta substancialmente essas primeiras contribuições. Logo, o resultado quase não difere do que se obtém para uma onda plana, no espaço livre. Numa pequena vizinhança do ponto  $P$ , quando nos afastamos do eixo, a intensidade continua próxima da da onda incidente, mas tende a cair rapidamente por razões análogas às que vimos ao explicar a formação da sombra geométrica.

Logo, *bem no centro da sombra geométrica de um disco opaco circular, deve existir uma pequena mancha brilhante, com a intensidade da onda incidente.* A razão é que, devido à especial simetria, há interferência construtiva das ondas secundárias num tal ponto.

A teoria de Fresnel da difração foi primeiro apresentada numa memória encaminhada à Academia de Ciências de Paris para concorrer a um prêmio, destinado a quem melhor conseguisse explicar os efeitos de difração. Um dos membros da comissão julgadora era o matemático Siméon Denis Poisson, partidário da teoria corpuscular.

Poisson percebeu que uma das consequências da teoria de Fresnel seria a existência dessa mancha brilhante no centro da sombra de um disco circular, o que lhe pareceu absurdo, e levantou esta objeção ao trabalho apresentado.

Com a ajuda do físico François Arago, Fresnel conseguiu realizar a experiência, mostrando que a mancha brilhante efetivamente aparecia. Fresnel ganhou o prêmio. Entretanto, a mancha brilhante passou a ser conhecida como a *mancha de Poisson!*

## 4.5 Difração de Fraunhofer

Vimos na Seç. 4.1 que, para uma distância  $R$  “suficientemente grande” do ponto de observação  $P$  à abertura  $A$ , entra-se na região de *difração de Fraunhofer*,

onde a figura de difração corresponde à variação da intensidade com a *direção* de observação; vimos também como ela pode ser observada, com o auxílio de lentes.

O que é “suficientemente grande”? É uma distância para a qual não mais se observam os efeitos de difração de Fresnel, por ser o *diâmetro máximo*  $D$  da abertura  $A$  muito menor que o raio da primeira zona de Fresnel, de modo que a abertura compreende apenas uma fração de uma zona de Fresnel.

A condição para que isso aconteça [cf.(4.24)] é que seja

$$\frac{D^2}{\lambda R} \ll 1 \quad \left\{ \quad R \gg \frac{D^2}{\lambda} \quad R \gg D \Rightarrow \frac{R}{D} \gg \frac{D}{\lambda} \gg 1 \quad (4.25) \right.$$

Por exemplo, para  $D \sim 0,5 \text{ mm}$  e  $\lambda \sim 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ , isto dá  $R \gg 0,5 \text{ m}$ . Na prática, a observação no plano focal imagem de uma lente (fig. 4.2) equivale a fazer  $R \rightarrow \infty$ , de forma que esta condição é satisfeita.

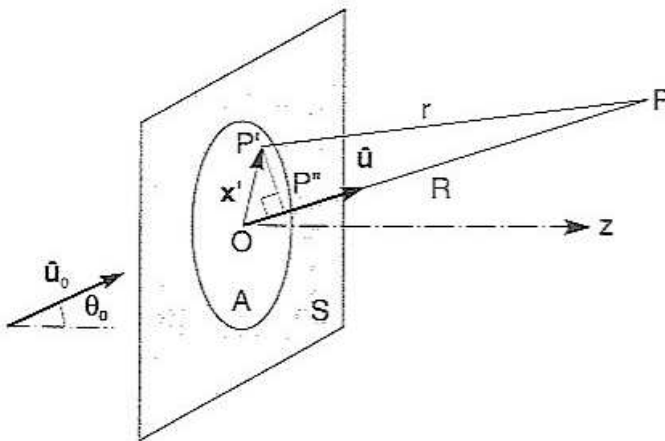


Fig. 4.13 Difração de Fraunhofer

Vamos agora (fig. 4.13) tomar a origem num ponto  $O$  *fixo* da abertura  $A$ . Se  $\hat{u}_0$  é o versor da direção de propagação da onda plana incidente, e  $P'$  um ponto de  $A$ , com  $\overline{OP'} \equiv \mathbf{x}$ , temos, na (4.23),

$$v_0(P') = a_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'}, \quad \mathbf{k}_0 \equiv k \hat{u}_0$$

Amplitude incidente

(4.26)

Por outro lado, com  $\overline{OP} \equiv R$  e  $\overline{P'P} \equiv r$ , a fig. 4.13 dá, para  $R \rightarrow \infty$ ,

$$r \approx \overline{OP} - \overline{OP'} = R - \hat{u} \cdot \mathbf{x}' \quad (4.27)$$

Projeção de  $\overline{OP'}$  sobre  $\overline{OP}$

onde  $\hat{u}$  é o versor da *direção de observação*  $\overline{OP}$ .

Como na Seç. 3.2, podemos substituir  $r$  por  $R$  no denominador de  $\exp(ikr)/r$  (onda esférica que se propaga de  $P'$  a  $P$ ), mas *não* no numerador, pois a fase  $kr$  da



exponencial varia bastante dentro da abertura, cujo diâmetro  $D$  é  $\gg \lambda$ . Logo, a (4.27) dá

$$\boxed{\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{R} \exp \left[ ik (R - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}') \right]} \quad (4.28)$$

Substituindo as (4.26) e (4.28) na expressão (4.23) do Princípio de Huygens-Fresnel-Kirchhoff, obtemos

$$v(\mathbf{P}) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos \theta' \cdot a_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'} \cdot \frac{e^{ik(R - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}')}}{R} \underbrace{d^2 x'}_{=d\sigma}$$

onde usamos a notação  $d^2 x'$  para o elemento  $d\sigma$  de superfície sobre  $A$ .

O fator de obliquidade  $\cos \theta'$  também varia muito pouco sobre  $A$ : como a maior parte da intensidade irá para direções próximas de  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , podemos substituí-lo por  $\cos \theta_0$ , onde  $\theta_0$  é o ângulo entre a direção incidente e a normal ao plano de  $A$  (fig. 4.13). Finalmente, fica

$$\boxed{v(\mathbf{P}) = \frac{a_0}{i\lambda} \cos \theta_0 \frac{e^{ikR}}{R} \int_A e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} d^2 x'} \quad (4.29)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{k} \equiv k \hat{\mathbf{u}}} \quad (4.30)$$

seria o vetor de onda de uma onda plana que se propagasse na direção de observação  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Podemos reescrever a (4.29) da seguinte forma:

$$\boxed{v(\mathbf{P}) = a_0 f(k, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_0) \frac{e^{ikR}}{R}} \quad (4.31)$$

onde

$$\boxed{f(k, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_0) = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \int_A e^{ik(\hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{x}'} d^2 x'} \quad (4.32)$$



A interpretação física desses resultados é simples. A (4.31) representa uma *onda esférica* emanada da abertura, cuja única dependência da distância é dada pelo fator  $\exp(ikR)/R$  de propagação da onda esférica. Isso concorda com a expectativa de que, vista desde uma distância suficientemente grande, a abertura deve aparecer como uma *fonte puntiforme*.

Entretanto, a amplitude da onda esférica (proporcional à amplitude  $a_0$  da onda incidente) *depende* das *direções de incidência*  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e de *observação*  $\hat{\mathbf{u}}$ , através do fator  $f(k, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_0)$ , que representa a *amplitude de difração* na direção  $\hat{\mathbf{u}}$ . Isso também concorda com o que foi dito na Seç. 4.1: a *figura de difração de Fraunhofer* só depende das *direções*, embora a intensidade caia com  $1/R^2$ .

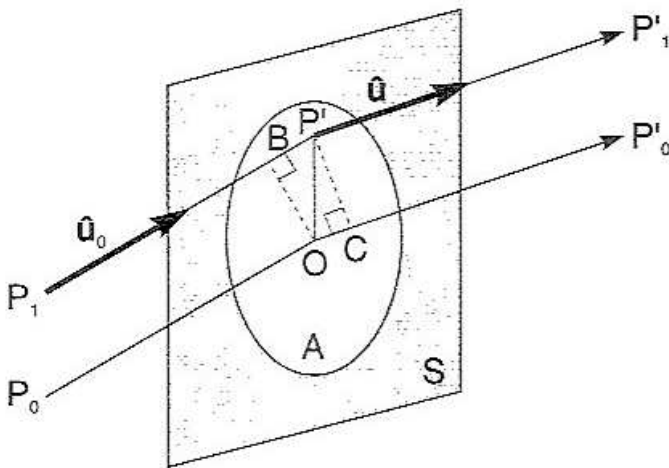


Fig. 4.14 Diferença de caminho

A (4.32) também tem uma interpretação física imediata. Com efeito (fig. 4.14), seja  $P_1P'P_1'$  um percurso com incidência segundo  $P_1P'$  ( $//\hat{\mathbf{u}}_0$ ) e difratado na direção  $P'P_1'$  ( $//\hat{\mathbf{u}}$ ), o que dá origem a uma contribuição à integral (4.32). Consideremos o percurso paralelo  $P_0OP_0'$  (fig. 4.14), passando pela origem  $O$  (fixa).

A *diferença de caminho* entre esses dois percursos é

$$\overline{BP'} - \overline{OC} = \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x}' - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}' = (\hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{x}' \quad (4.33)$$

e a *diferença de fase* correspondente é  $k(\hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{x}'$ .

Logo, a integral na (4.32) é o *fator de interferência*, que leva em conta as diferenças de fase na superposição das contribuições dos diferentes pontos  $P'$  da abertura. Note que as lentes  $L_1$  e  $L_2$  no dispositivo de observação da fig. 4.2 não introduzem defasagens adicionais nos trajetos até os focos, pois, pelo Princípio de Fermat, os caminhos óticos entre as frentes de onda  $\overline{OB}$  e  $\overline{CP'}$  da fig. 4.14 e os focos são iguais.

A intensidade máxima se obtém na direção  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_0$ , para a qual a interferência é *construtiva* (direção de propagação geométrica), e é dada por

$$\boxed{f(k, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0) = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \int_A d^2 x' = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \sigma_A} \quad (4.34)$$

onde  $\sigma_A$  é a área da abertura  $A$ .

Em geral, interessa-nos a distribuição *relativa* da amplitude, comparada com seu máximo para  $\hat{\mathbf{u}} \equiv \hat{\mathbf{u}}_0$ , que, pelas (4.32) e (4.34), é dada por

$$\boxed{\frac{f(k, \hat{\mathbf{u}})}{f(k, \hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{1}{\sigma_A} \int_A e^{ik(\hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{x}'} d^2 x'} \quad (4.35)$$

onde simplificamos a notação. A razão das intensidades é o módulo ao quadrado da razão das amplitudes:

$$\boxed{\frac{I(\hat{\mathbf{u}})}{I(\hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{1}{(\sigma_A)^2} \left| \int_A e^{ik(\hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{x}'} d^2 x' \right|^2} \quad (4.36)$$

Podemos simplificar ainda mais o resultado limitando-nos ao caso da incidência *perpendicular* ao anteparo, em que

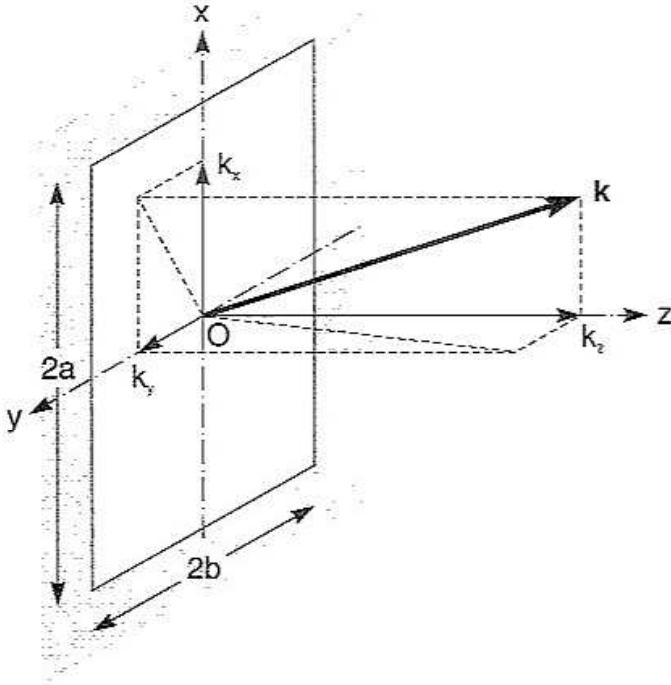
$$\boxed{\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x}' = 0} \quad (4.37)$$

Nesse caso, vem

$$\boxed{\frac{I(\hat{\mathbf{u}})}{I(\hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{1}{(\sigma_A)^2} \left| \int_A e^{-ik\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}'} d^2 x' \right|^2} \quad (4.38)$$

bastando levar em conta as defasagens associadas aos raios difratados na direção  $\hat{\mathbf{u}}$  [compare com a (4.28)]. O caso geral obtém-se substituindo  $\hat{\mathbf{u}} \rightarrow \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0$ .

### 4.6 Abertura retangular



Consideremos uma abertura retangular de lados  $2a$  e  $2b$  num anteparo opaco, iluminada perpendicularmente por uma onda plana. Tomemos a origem  $O$  no centro do retângulo (plano  $z = 0$ , fig. 4.15). Sejam  $(\alpha, \beta, \gamma)$  os cosenos diretores da direção de observação:  $\hat{\mathbf{u}} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{u}}$ . Temos então, com  $\mathbf{x}' = (x', y', 0)$  na (4.38),

Fig. 4.15 Abertura retangular

$$\begin{aligned} \int_A e^{-ik \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}'} d^2 x' &= \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b dy' e^{-ik(\alpha x' + \beta y')} \\ &= \int_{-a}^a e^{-ik\alpha x'} dx' \int_{-b}^b e^{-ik\beta y'} dy' = \frac{e^{-ik\alpha x'}}{-ik\alpha} \Big|_{-a}^a \cdot \frac{e^{-ik\beta y'}}{-ik\beta} \Big|_{-b}^b \\ &= \left( \frac{e^{ik\alpha a} - e^{-ik\alpha a}}{ik\alpha} \right) \left( \frac{e^{ik\beta b} - e^{-ik\beta b}}{ik\beta} \right) = \frac{4}{k^2 \alpha \beta} \text{sen}(k\alpha a) \text{sen}(k\beta b) \end{aligned}$$

e  $\sigma_A = (2a)(2b) = 4ab$ , de forma que

$$\boxed{\frac{1}{\sigma_A} \int_A e^{-ik \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}'} d^2 x' = \frac{\text{scn}(k\alpha a)}{(k\alpha a)} \cdot \frac{\text{sen}(k\beta b)}{(k\beta b)}} \tag{4.39}$$

e resulta [cf.(4.38)]

$$\boxed{\frac{I(\hat{\mathbf{u}})}{I(\hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{\text{sen}^2 X}{X^2} \cdot \frac{\text{sen}^2 Y}{Y^2}} \quad (4.40)$$

onde

$$\boxed{X = \underbrace{k \alpha a}_{k_x}, \quad Y = \underbrace{k \beta b}_{k_y}} \quad (4.41)$$

Se tivéssemos incidência numa direção qualquer,  $\hat{\mathbf{u}}_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ , a única diferença seria a substituição:  $\alpha \rightarrow \alpha - \alpha_0$ ,  $\beta \rightarrow \beta - \beta_0$ , na (4.41) [cf.(4.36)].

O gráfico da função  $\text{sen}^2 v/v^2$  foi representado na fig. 3.19. É uma função par de  $v$ , que se anula nos pontos  $v_n = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e é = 1 (máximo principal) em  $v = 0$ .

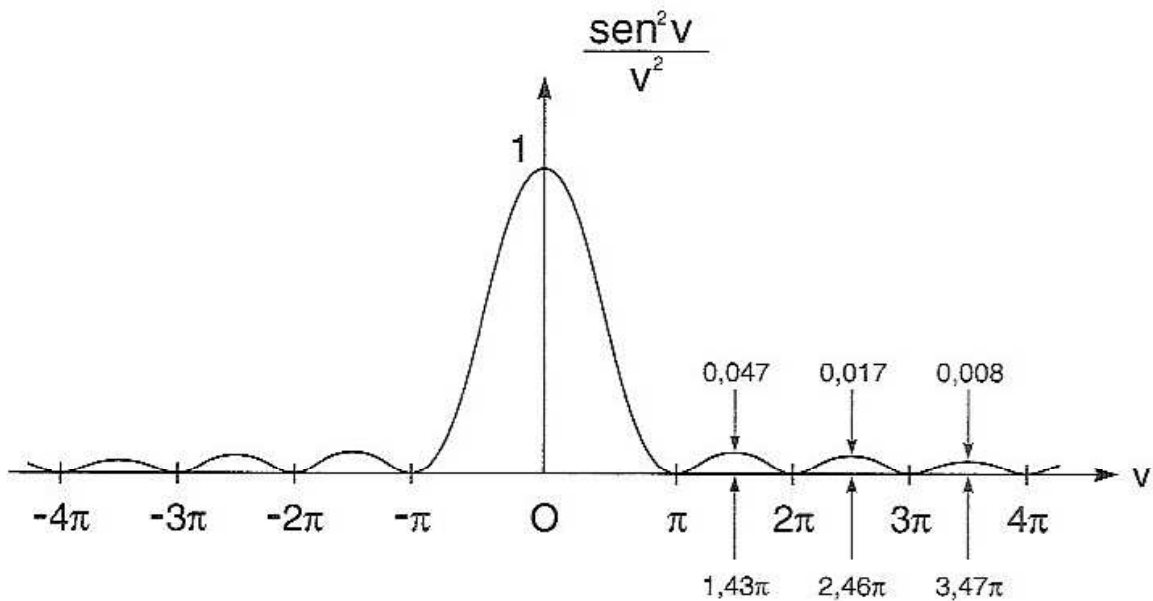


Fig. 4.16 A função  $\frac{\text{sen}^2 v}{v^2}$

Ele está novamente reproduzido na fig. 4.16, onde foram indicadas as posições dos máximos secundários, que vão se aproximando de  $(n + \frac{1}{2})\pi$ , e os valores da função nesses máximos, que caem rapidamente, devido ao fator  $1/v^2$ .

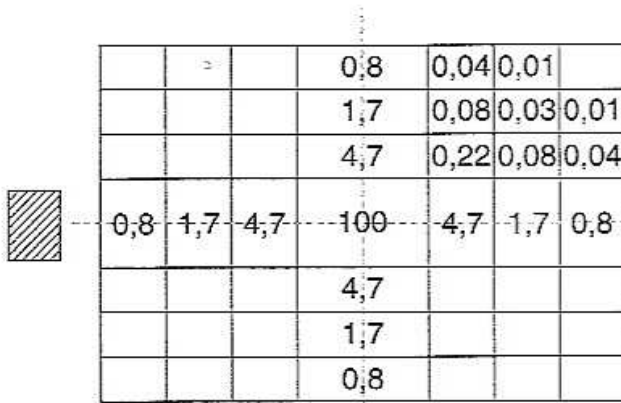


Fig. 4.17 Figura de difração de uma abertura retangular

Pela (4.40), a figura de difração é o produto de dois fatores desse tipo. A intensidade se anula em

$$\alpha_n = n \pi / (k a) = n \lambda / (2a) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e

$$\beta_m = m \pi / (k b) = m \lambda / (2b) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

o que define uma rede de retângulos de dimensões *inversamente proporcionais* às da abertura (fig. 4.17, onde

a abertura é o retângulo hachurado à esquerda).

Usando os valores de  $\sin^2 v/v^2$  nos máximos, foram colocados nos centros de retângulos da fig. 4.17 os valores máximos da intensidade em cada retângulo, normalizados ao valor 100 no centro da figura ( $\alpha = \beta = 0$ ); na ótica geométrica, a intensidade só seria  $\neq 0$  neste ponto central, que representa a direção de incidência.

Os valores decrescem rapidamente fora dos braços da cruz central: a figura de difração tem o aspecto de uma *cruz luminosa*, com os braços sulcados por franjas escuras.

A *semi-abertura angular* de cada braço da cruz é inversamente proporcional ao lado do retângulo que lhe deu origem:

$$\Delta \alpha \approx \lambda / (2a) \quad , \quad \Delta \beta \approx \lambda / (2b) \quad (4.42)$$

Assim, quanto mais estreito for um lado do retângulo, mais largo o feixe difratado na direção correspondente, o que concorda com a idéia de que os efeitos de difração crescem com a razão  $\lambda / (\text{dimensões})$ .

Pela fig. 4.15, vemos que as (4.42) também definem os leques de valores de  $k_x$  e  $k_y$  encontrados na onda difratada (domínio varrido pelo vetor  $\mathbf{k}$ ), e temos

$$\Delta k_x \approx k \Delta \alpha \approx \frac{\pi}{a} \quad , \quad \Delta k_y \approx k \Delta \beta \approx \frac{\pi}{b} \quad (4.43)$$

ou ainda, usando as notações  $\Delta x \equiv 2a$  ,  $\Delta y \equiv 2b$  para as larguras da abertura,

$$\Delta k_x \Delta x \approx 2\pi \quad ; \quad \Delta k_y \Delta y \approx 2\pi \quad (4.44)$$

o que justifica a relação  $\Delta k_{\perp} \Delta d_{\perp} \sim 2\pi$  empregada na discussão da coerência transversal [cf. (3.52)].

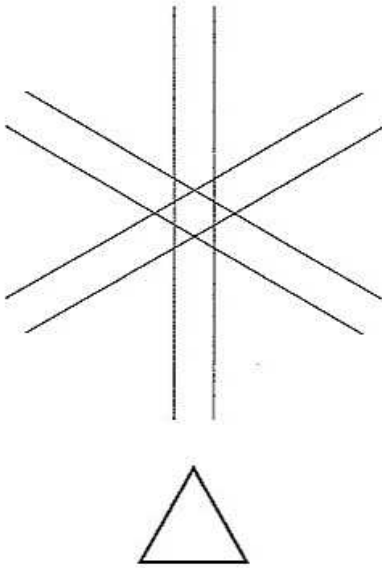


Fig. 4.18 Figura de difração de uma abertura triangular

Não é apenas uma abertura retangular que produz “leques” de luz difratada. Isso vale para qualquer abertura de forma poligonal, com os braços dos leques perpendiculares aos lados do polígono. Assim, uma abertura triangular produz um leque de 6 braços (fig. 4.18).

É devido a pequenas irregularidades nas íris dos nossos olhos que vemos as estrelas com “pontas”. Sem essas irregularidades, veríamos a figura de difração de um orifício circular, formada de anéis concêntricos (cf. Seç. 4.8).

## 4.7 Difração de Fraunhofer por uma fenda

Uma fenda é um retângulo em que um dos lados é  $\gg$  que o outro, de forma que sua figura de difração é um caso particular da que foi discutida na Seç. 4.6, com (p. ex.)

$$b \gg a \quad (4.45)$$

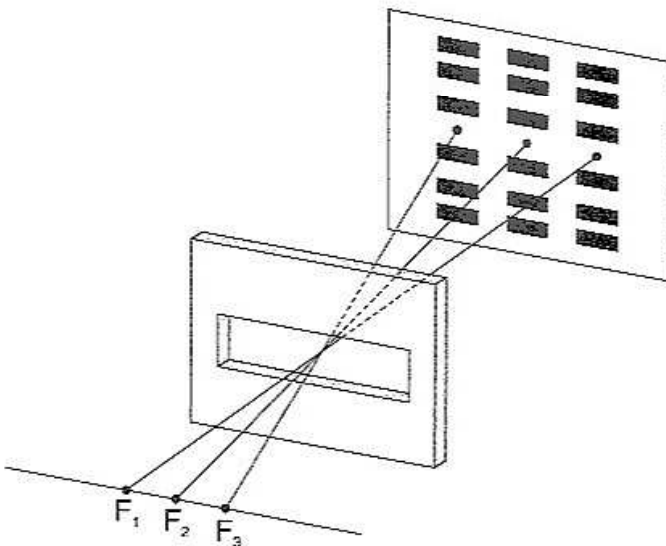


Fig. 4.19 Difração por uma fenda

Na figura de difração da abertura retangular, se formos aumentando  $b$ , a figura de difração na direção  $\beta$  vai-se contraindo, até reduzir-se praticamente ao máximo principal  $\beta = 0$  (ou  $\beta = \beta_0$  se  $\beta_0 \neq 0$  para a direção de incidência). Assim, a figura de difração da fenda é uma *linha luminosa* orientada na direção  $\perp$  à fenda e modulada em  $\alpha$  pelo fator  $\text{sen}^2 X/X^2$ .



Em lugar de uma única direção de incidência  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , costuma-se iluminar a fenda por um feixe de direções, em que (p. ex.)  $\beta_0$  varia entre 2 limites,  $\pm \beta_1$ , bastante amplos, constituindo uma *fonte linear*.

Para isto, no dispositivo ilustrado na fig. 4.2, basta substituir a fonte puntiforme  $F$  no plano focal objeto da lente  $L_1$  por uma fenda paralela à fenda objeto, iluminada de forma *incoerente* (fenda-fonte extensa). Cada ponto dela produz uma figura de difração tipo linha luminosa (fig. 4.19, onde as lentes não foram representadas), e a incoerência das fontes  $F_1, F_2, F_3, \dots$  implica que as *intensidades* das figuras de difração respectivas se somam. Figuras oriundas de pontos-fonte adjacentes se justapõem, dando origem a uma série de faixas claras e escuras paralelas ao lado maior da fenda.

Analiticamente, isso equivale a integrar (somar) as intensidades obtidas para o retângulo, onde  $\beta \rightarrow \beta - \beta_0$ , em relação a  $\beta_0$ , entre os limites  $\pm \beta_1$ , o que, para  $Y = k b (\beta - \beta_0)$ , leva a [cf.(4.40)]

$$\int_{-Y_1}^{Y_1} \frac{\text{sen}^2 Y}{Y^2} dY$$

onde supomos  $Y_1$  suficientemente grande para abarcar o pico central da curva (fig. 4.16) e vários picos laterais. O resultado é uma constante praticamente independente de  $\beta$ , de forma que se obtém, da (4.40),

$$\boxed{\frac{I(\hat{\mathbf{u}})}{I(\hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{\text{sen}^2 X}{X^2}} \quad (4.46)$$

onde  $X = k a \alpha$  [ou  $k a (\alpha - \alpha_0)$ , para  $\alpha_0 \neq 0$ ].

Esse resultado também poderia ter sido obtido de uma versão simplificada da (4.35), válida para uma fonte linear incoerente do tipo descrito acima:

$$\boxed{\frac{f(k, \alpha)}{f(k, \alpha_0)} = \frac{1}{2a} \int_A e^{-ik(\alpha - \alpha_0)x'} dx' = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-ik(\alpha - \alpha_0)x'} dx'} \quad (4.47)$$

onde a área  $\sigma_A$  da abertura é substituída pela largura  $2a$  da fenda.

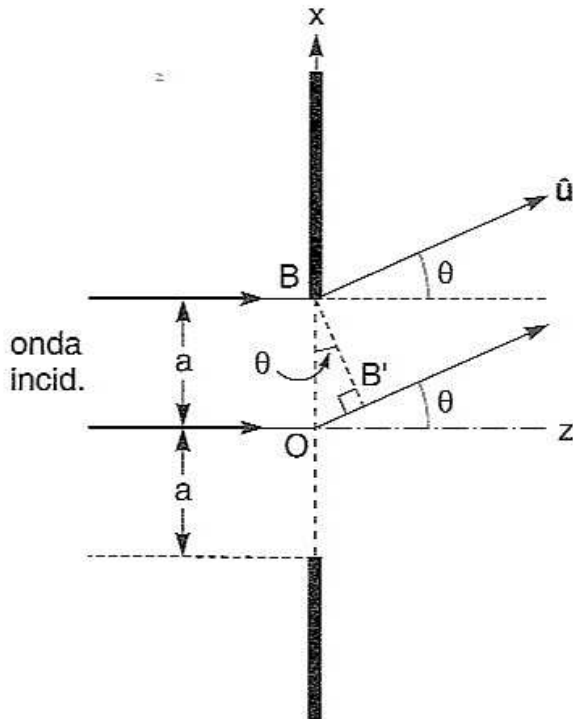


Fig. 4.20 Diferença de fase

Vemos na fig. 4.20 que o coseno diretor do ângulo entre  $\hat{u}$  e  $Ox$  é

$$\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen } \theta \quad (4.48)$$

de modo que (tomando  $\alpha_0 = 0$ )

$$X = k a \alpha = k a \text{sen } \theta = k \cdot (\overline{OB'}) \quad (4.49)$$

é a *diferença de fase* entre um raio difratado que passa pelo centro  $O$  da fenda e outro que passa pelo extremo superior  $B$ .

Se essa diferença for  $= \pi$ , as contribuições de  $B$  e de  $O$  se cancelam por interferência destrutiva, e o mesmo acontece com cada par de elementos  $dx'$  distantes de  $a$  um do outro na metade superior e na metade inferior da fenda. Isso explica por que  $X = k a \alpha = \pm \pi$  é uma linha nodal (franja escura) da figura de difração.

Se a diferença de fase for  $= n\pi$ , basta subdividir a fenda em  $2n$  partes iguais e repetir o raciocínio para cada par de partes adjacentes. Interpretam-se assim os zeros de intensidade da figura de difração da fenda.

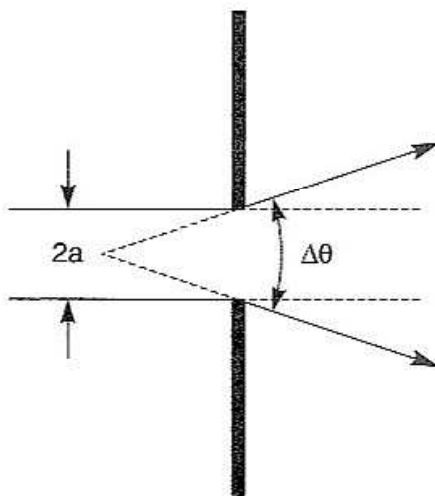


Fig. 4.21 Abertura angular

O pico central de difração contém  $\sim 91\%$  da intensidade, de forma que sua abertura angular define a abertura angular do feixe difratado. Para

$2a \sim 1 \text{ mm}$  e  $\lambda \cong 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$   
 é  $\lambda/(2a) \cong 5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ , de modo que podemos tomar  $\text{sen } \theta \approx \theta$  e concluir que, após passar pela fenda, um feixe incidente paralelo adquire (na região de Fraunhofer) uma abertura angular (fig. 4.21)

$$\Delta \theta \approx \frac{\pi}{k a} = \frac{\lambda}{2 a} \quad (4.50)$$

## 4.8 Abertura circular. Poder separador

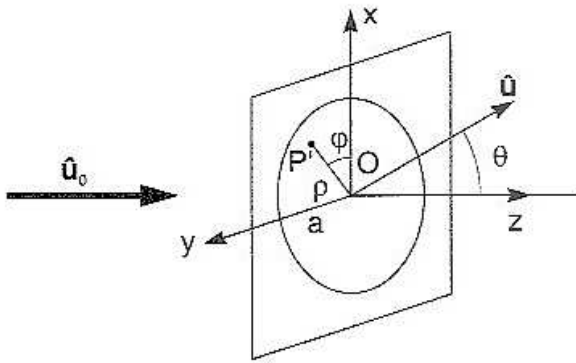


Fig. 4.22 Abertura circular

Para uma abertura circular de raio  $a$ , com incidência perpendicular, a figura de difração é simétrica em torno de  $Oz$  (fig. 4.22), de modo que podemos, sem restrição da generalidade, tomar  $\hat{u}$  no plano  $xz$ , e tomar coordenadas polares com origem no centro da abertura para  $\mathbf{x}'$ , na (4.38):

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &= (\text{sen } \theta, 0, \text{cos } \theta) \\ \mathbf{x}' &= (\rho \text{cos } \varphi, \rho \text{sen } \varphi, 0) \end{aligned} \right\} \hat{u} \cdot \mathbf{x}' = \rho \text{sen } \theta \text{cos } \varphi$$

$$d^2 x' = \rho d\rho d\varphi$$

o que dá

$$\int_A e^{-ik\hat{u}\cdot\mathbf{x}'} d^2 x' = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ik\rho \text{sen } \theta \text{cos } \varphi} \quad (4.51)$$

e  $\sigma_A = \pi a^2$  na (4.38).

A integral (4.51) não se reduz a uma função elementar, como aconteceu com a (4.47). Ela se exprime em termos de uma função  $J_1(u)$  chamada “função de Bessel de ordem um”, levando a

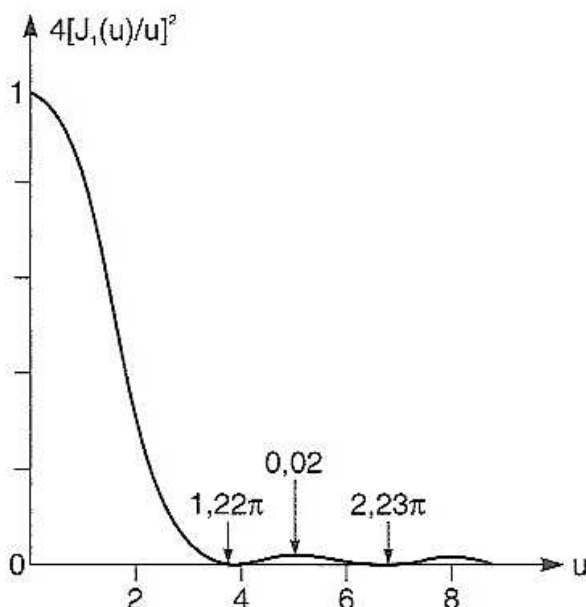


Fig. 4.23 Gráfico da (4.52)

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = 4 \left[ \frac{J_1(ka \text{sen } \theta)}{ka \text{sen } \theta} \right]^2 \quad (4.52)$$

Entretanto, não será necessário conhecer mais do que as propriedades qualitativas dessa função, que são muito semelhantes às da função  $\text{sen}^2 u / u^2$ , como se vê pelo gráfico da fig. 4.23.

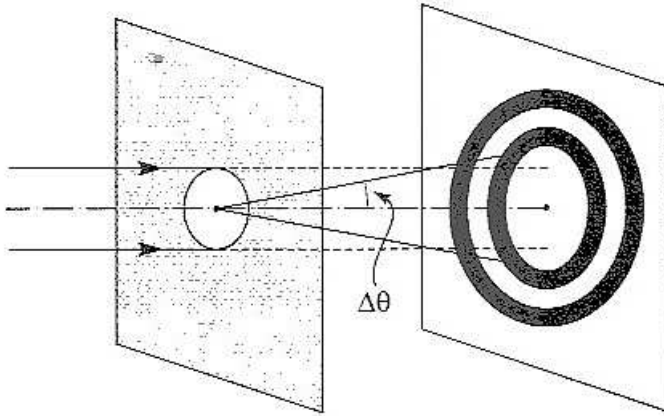


Fig. 4.24 Figura de difração de uma abertura circular

A maior parte da intensidade vai para o pico central ( $\sim 84\%$ ), que corresponde ao *disco central* brilhante da figura de difração, rodeado de anéis concêntricos (fig. 4.24) escuros e claros (mas bem mais pálidos).

O *pico de difração dianteiro* tem uma abertura angular dada por (cf. fig. 4.23)

$$k_a \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen} \theta \approx 1.22 \pi$$

o que dá

$$\operatorname{sen} \theta \sim \Delta \theta \approx 0,61 \frac{\lambda}{a} \quad (4.53)$$

resultado devido a Airy, que tem aplicações importantes no cálculo do *poder separador* de instrumentos óticos.

Num instrumento ótico, a luz proveniente de um ponto do objeto atravessa em geral uma série de aberturas circulares: diafragmas, lentes, etc.. Mesmo corrigindo da melhor forma possível as aberrações, a imagem de um ponto não é puntiforme, devido à limitação fundamental imposta pela *difração* nas aberturas circulares atravessadas.

Podemos tomar como imagem de um ponto fonte o *disco central de difração*, de abertura angular dada pela (4.53).

Se dois pontos do objeto estiverem muito próximos, os discos centrais de difração nas imagens dos dois pontos se sobrepõem: vemos então uma só mancha luminosa, não conseguindo distingui-los. Não adianta nesse caso ampliar a imagem: por mais que se amplie, não separaremos um ponto do outro.

O *critério de Rayleigh*, empregado na definição do poder separador, é análogo ao da fig. 3.16: para que as imagens de dois pontos *incoerentes* possam ser separadas, basta que o *máximo central de difração associado a uma delas coincida com o 1.º mínimo da outra*.

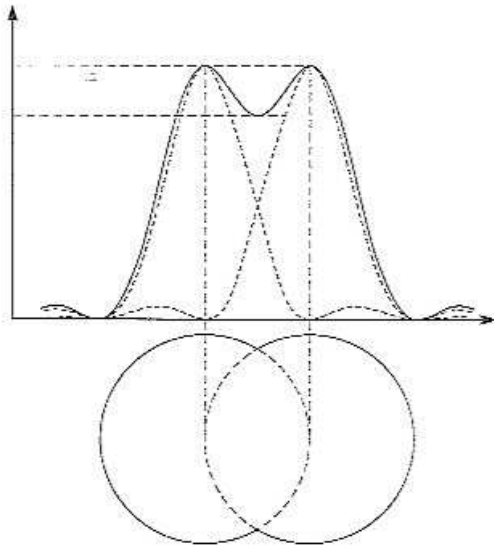


Fig. 4.25 Limite do poder separador

A fig. 4.25 mostra, em termos dos gráficos de intensidade e dos discos de difração, as imagens de dois pontos que estão no limite do poder separador.

No caso do *telescópio*, o que interessa é a separação angular mínima entre dois pontos luminosos (estrela dupla, p. ex.) que ainda permite distingui-los. Essa separação  $\Delta\theta$  é dada pela fórmula de Airy (4.53), onde  $a$  é o raio da *objetiva* do telescópio, que produz a imagem. A função da ocular, como vimos na Seq. 2.9, é

apenas produzir um *aumento angular* suficiente da imagem. É por essa razão que se constróem telescópios com objetivas de raio grande.

Vemos também que o poder separador é diretamente proporcional ao comprimento de onda. Essa é a principal limitação de um microscópio ótico. A razão pela qual se conseguem aumentos bem mais elevados com um microscópio eletrônico é a redução do comprimento de onda; discutiremos na física quântica como associar um comprimento de onda aos elétrons.

#### O Princípio de Babinet

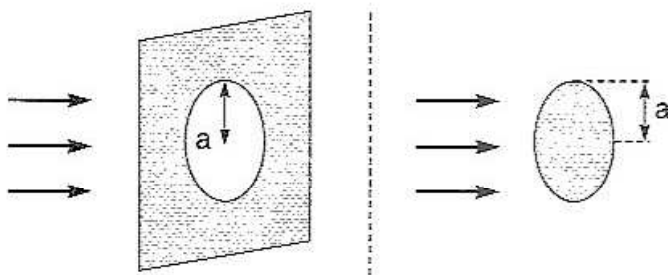


Fig. 4.26 Dispositivos complementares

Dizemos que dois dispositivos de difração associados a um anteparo plano são *complementares* quando o que é abertura num deles é parte do anteparo opaco no outro. Exemplo: a difração por uma *abertura circular* de raio  $a$  num anteparo plano e a difração por um *disco circular opaco* de raio  $a$  (fig.

4.26). Se chamarmos de  $S$  a parte opaca do anteparo e  $A$  a abertura, como na fig. 4.7, os dois dispositivos diferem pela troca  $S \leftrightarrow A$ .

Se chamarmos de  $v_A$  a função de onda difratada pela abertura e de  $v_S$  aquela correspondente ao arranjo complementar, o princípio de Huygens-Fresnel *na aproximação de Kirchhoff* (4.23) mostra que

$$v_A(\mathbf{P}) + v_S(\mathbf{P}) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos \theta' v_0(\mathbf{P}') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{i\lambda} \int_S \cos \theta' v_0(\mathbf{P}') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma = \frac{1}{i\lambda} \int_{S+A} (\dots) d\sigma$$

Mas  $S + A$  é o plano  $\Sigma$  completo. Logo, pela (4.21),

$$\boxed{v_A(\mathbf{P}) + v_S(\mathbf{P}) = v_0(\mathbf{P})} \quad (4.54)$$

ou seja, a soma das ondas difratadas em  $P$  por dois dispositivos complementares é igual à onda incidente em  $P$  propagada livremente (sem anteparo). Esse é o princípio de Babinet.

Uma consequência importante desse princípio é sua aplicação à difração de Fraunhofer. Nesse caso, o ponto  $P$  está a grande distância, numa direção  $\hat{\mathbf{u}}$ , e temos

$$\boxed{v_0(\mathbf{P}) = 0 \quad (\hat{\mathbf{u}} \neq \hat{\mathbf{u}}_0) \quad (R \rightarrow \infty)} \quad (4.55)$$

pois a onda plana incidente só contribui na sua direção de propagação (ponto central da figura de difração).

Logo, a (4.54) dá

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} v_S(\mathbf{P}) = -v_A(\mathbf{P}) \\ \therefore I_S(\mathbf{u}) = +I_A(\mathbf{u}) \end{array} \right\} (\hat{\mathbf{u}} \neq \hat{\mathbf{u}}_0)} \quad (4.56)$$

pois a intensidade  $I = |v|^2$ .

Portanto, exceto na direção de propagação, as figuras de difração de Fraunhofer associadas a dois dispositivos complementares são iguais.

A figura de difração de Fraunhofer de um disco circular é portanto a mesma que a de uma abertura circular de mesmo raio, ou seja, é formada de anéis circulares concêntricos.



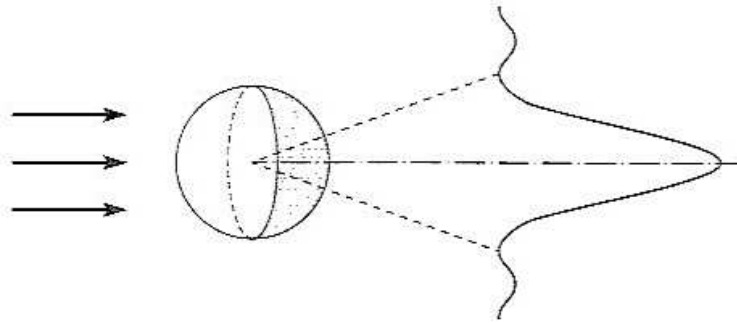


Fig. 4.27 Difração por uma esfera

Ainda dentro do domínio de aplicabilidade da aproximação de Kirchhoff, a figura de difração de Fraunhofer de um disco circular de raio  $a$  também coincide com aquela associada a uma *esfera* (fig. 4.27) de raio  $a$ , pois ambas bloqueiam a mesma porção circular da onda incidente.

Logo, uma partícula esférica também produz um *pico de difração dianteiro*, de abertura angular dada pela (4.53), rodeado de anéis concêntricos. Ao longo do eixo de simetria, esse pico é um prolongamento da mancha brilhante de Poisson encontrada na região de Fresnel.

As *coroas de difração* vistas em torno da Lua são devidas à difração por gotículas de água esféricas nas nuvens. Cada gotinha produz sua figura de difração e as intensidades se superpõem (fontes incoerentes). O diâmetro angular típico é algumas vezes o diâmetro angular da Lua, que é de  $\approx 0,5^\circ$ . Tomando  $\Delta\theta \sim 3' \sim \frac{1}{20}$  rad, e  $\lambda \sim 5 \times 10^{-5}$  cm =  $0,5 \mu\text{m}$ , a (4.53) mostra que o raio médio das gotinhas é da ordem de uma dezena de  $\mu\text{m}$ . A beirada *externa* das coroas é avermelhada, mostrando que se trata de um efeito de difração: o vermelho é mais fortemente desviado do que o azul.

## 4.9 Par de fendas e rede de difração

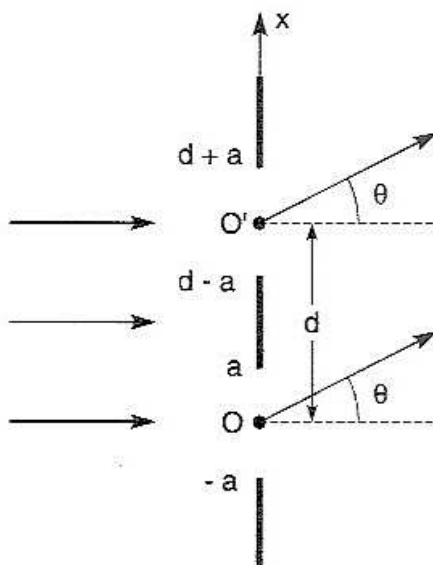


Fig. 4.28 Par de fendas

Consideremos agora a difração de Fraunhofer por um *par* de fendas (fig. 4.28) de mesma largura  $2a$ , cujos centros  $O$  e  $O'$  estão separados por uma distância  $d$  (tomamos  $O$  como origem).

Vamos tomar como dispositivo de iluminação uma *fonte linear incoerente*, obtida iluminando por uma fonte extensa uma fenda paralela às consideradas, como na fig. 4.19.

Nesse caso, podemos aplicar a versão simplificada, análoga à (4.47), dos resultados anteriores:

$$f(k, \alpha) = C \int_{\Lambda} e^{-ik\alpha x'} dx' = C \left\{ \int_{-a}^a e^{-ik\alpha x'} dx' + \int_{d-a}^{d+a} e^{-ik\alpha x'} dx' \right\} \quad (4.57)$$

onde, para simplificar, tomamos incidência  $\perp$  e  $C$  é a constante de normalização.

Com a mudança de variável  $x' = d + x$  na 2.<sup>a</sup> integral, vem

$$\int_{d-a}^{d+a} e^{-ik\alpha x'} dx' = e^{-ik\alpha d} \int_{-a}^a e^{-ik\alpha x} dx \quad (4.58)$$

e a (4.57) fica

$$f(k, \alpha) = f_1(k, \alpha) \left[ 1 + e^{-ik\alpha d} \right] \quad (4.59)$$

onde  $f_1(k, \alpha)$  é a *amplitude de Fraunhofer* devida a uma só fenda, dada pela (4.47) (com  $\alpha_0 = 0$ ).

A interpretação física da (4.59) é imediata: a contribuição da 2.<sup>a</sup> fenda só difere da 1.<sup>a</sup> pelo fator de fase  $\exp(-ik\alpha d)$ , que resulta da defasagem associada à diferença de caminho entre as contribuições de pontos correspondentes das duas fendas.

Reconhecemos na expressão entre colchetes da (4.59) o mesmo *fator de interferência* já encontrado na discussão do experimento de Young; como vimos na (4.48),  $\alpha \equiv \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção de observação e a normal ao plano do anteparo. De fato, o arranjo experimental coincide com o do experimento de Young de duas fendas, observado na região de Fraunhofer.

A distribuição de intensidade é então dada pela (3.22):

$$I(\alpha) = I_1(\alpha) \cdot 4 \cos^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right) \quad (4.60)$$

onde

$$\Delta = k d \alpha = \Delta = k d \text{sen } \theta \quad (4.61)$$

é a defasagem entre pontos correspondentes das duas fendas e  $I_1(\alpha)$  a intensidade que teríamos se apenas uma fenda estivesse aberta, dada explicitamente pela (4.46).

A função  $\cos^2(\Delta/2)$  é uma função *periódica* da defasagem  $\Delta$ , de período  $2\pi$ , cujos máximos correspondem às direções de *interferência construtiva*:

$$\Delta_m = 2m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha d = d \text{sen } \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.62)$$

A função  $I_1(\alpha)$  é proporcional a  $\text{sen}^2 X/X^2$ , e seu pico central está compreendido entre os pontos

$$X \equiv k \alpha a = \pm\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha a = a \text{sen } \theta = \pm\lambda / 2 \quad (4.63)$$

Temos, necessariamente,  $d > 2a$  (por que?), e vamos supor que *o espaçamento  $d$  entre as duas fendas é algumas vezes maior que a largura  $2a$  de cada fenda.*

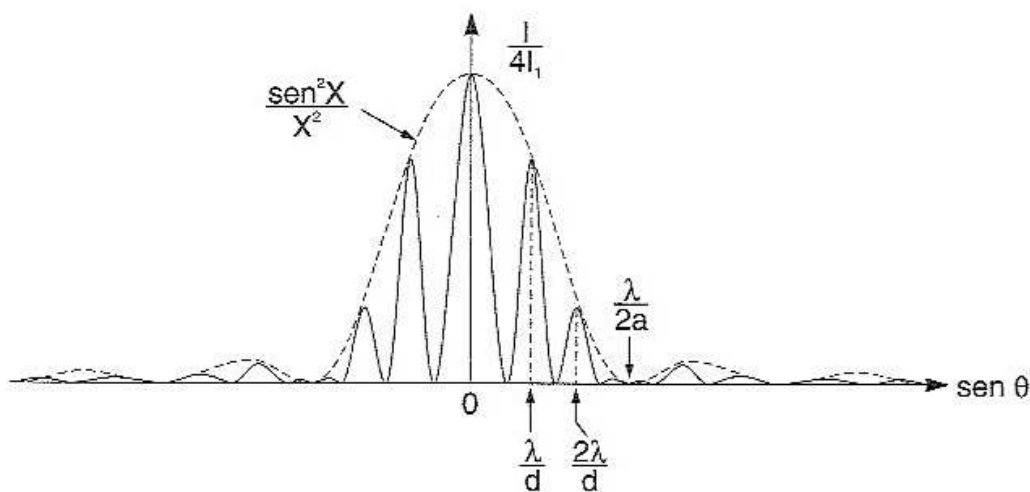


Fig. 4.29 Figura de difração de um par de fendas

Nesse caso, o fator  $I_1(\alpha)$  de difração por uma só fenda *varia lentamente* com  $\alpha$ , em confronto com o fator de interferência  $4 \cos^2(\Delta/2)$ , e seu efeito é produzir

uma *modulação* do fator de interferência, conforme ilustrado na fig. 4.29. Os máximos de interferência dados pela (4.62), que se chamam *máximos principais*, variam lentamente de intensidade devido ao produto por  $I_1(\alpha)$ .

### *N fendas*

É fácil agora generalizar esses resultados ao caso em que temos  $N$  fendas idênticas, de largura  $2a$ , com seus centros igualmente espaçados de uma distância  $d$ , dispositivo conhecido como *rede de difração*.

O fator de defasagem entre as contribuições da 1.<sup>a</sup> fenda e as de pontos correspondentes da fenda de ordem  $p + 1$  é agora aquele associado à distância  $p d$  entre seus centros, ou seja,  $\exp[-i k \alpha (p d)]$ , de forma que obtemos, no lugar da (4.59),

$$f(k, \alpha) = f_1(k, \alpha) \underbrace{\left[ 1 + e^{-i k \alpha d} + e^{-2i k \alpha d} + \dots + e^{-(N-1)i k \alpha d} \right]}_{\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i n k \alpha d}} \quad (4.64)$$

A expressão entre colchetes é a soma de uma progressão geométrica de razão  $\exp(-i k \alpha d)$  e  $N$  termos, dada por

$$\frac{1 - e^{-i N k \alpha d}}{1 - e^{-i k \alpha d}} = \frac{1 - e^{-i N \Delta}}{1 - e^{-i \Delta}} \quad (4.65)$$

onde  $\Delta$  é a defasagem (4.61) entre duas fendas consecutivas. Logo,

$$I(\alpha) = I_1(\alpha) \cdot \left| \frac{1 - e^{-i N \Delta}}{1 - e^{-i \Delta}} \right|^2 \quad (4.66)$$

Temos

$$\begin{aligned} |1 - e^{-i \Delta}|^2 &= (1 - e^{i \Delta})(1 - e^{-i \Delta}) = 1 - \overbrace{(e^{i \Delta} + e^{-i \Delta})}^{2 \cos \Delta} + 1 \\ &= 2(1 - \cos \Delta) = \text{sen}^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

de forma que, finalmente,

$$I(\alpha) = I_1(\alpha) \cdot \frac{\text{sen}^2\left(N \frac{\Delta}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \quad (4.68)$$

Para  $N = 2$ , como  $\text{sen}^2(2x) = 4 \text{sen}^2 x \cos^2 x$ , a (4.68) se reduz à (4.60), conforme deveria ser.

Veamos agora como se comporta o *fator de interferência de N fendas*  $\text{sen}^2(N\Delta/2) / \text{sen}^2(\Delta/2)$  como função de  $\Delta$  e de  $N$ .

Notemos primeiro que ele continua sendo uma *função periódica de  $\Delta$ , com período  $2\pi$* , conforme seria de se esperar, pois efeitos de interferência não se alteram se acrescentarmos à defasagem um múltiplo de  $2\pi$ . Logo, basta estudar a função dentro de um período, p. ex., em  $-\pi \leq \Delta \leq \pi$ , e basta tomar  $\Delta > 0$ , pois é uma função par.

Para  $\Delta = 0$  a função vale  $N^2$ . Isso porque temos *interferência construtiva* entre as  $N$  fendas: a *amplitude* da resultante é  $N$  vezes a de uma só fenda, e a *intensidade* é amplificada por  $N^2$ . Por outro lado, para  $\Delta = \pi/2$ , o numerador e o denominador são da ordem da unidade, e a função é  $\sim N^2$  vezes menor do que para  $\Delta = 0$ . Para  $N$  grande, caso que nos interessa, basta considerar portanto a região  $|\Delta| \ll 1$ , onde  $\text{sen}^2(\Delta/2) \approx (\Delta/2)^2$ , e por conseguinte

$$\frac{\text{sen}^2(N\Delta/2)}{\text{sen}^2(\Delta/2)} \approx N^2 \cdot \frac{\text{sen}^2(N\Delta/2)}{(N\Delta/2)^2} \quad (|\Delta| \ll 1) \quad (4.69)$$

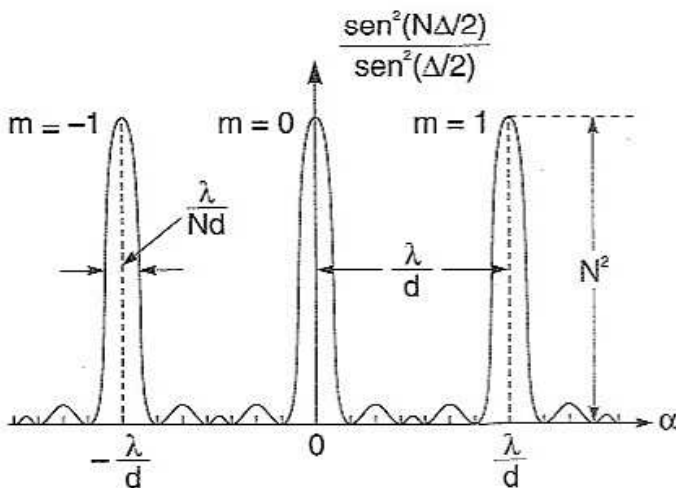


Fig. 4.30 A função (4.69)

Nesta região, recaímos assim na função  $\text{sen}^2 v/v^2$ , multiplicada por  $N^2$ .

A fig. 4.30 mostra o gráfico da função. Os pontos onde  $\Delta_m = m\pi$ , ou seja,  $\alpha = m\pi/d$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ) chamam-se *máximos principais*;  $m$  é a *ordem de interferência*. A largura de um pico (máximo principal) é dada por

$$N \Delta / 2 = \pm \pi \quad \Rightarrow \quad \Delta / 2 = \pm \pi / N \quad (4.70)$$

ou seja, é da ordem de  $\lambda / (Nd)$ ,  $N$  vezes menor que o espaçamento entre os máximos principais. Assim, à medida que  $N$  aumenta, os picos em torno dos máximos principais vão-se tornando cada vez mais estreitos.

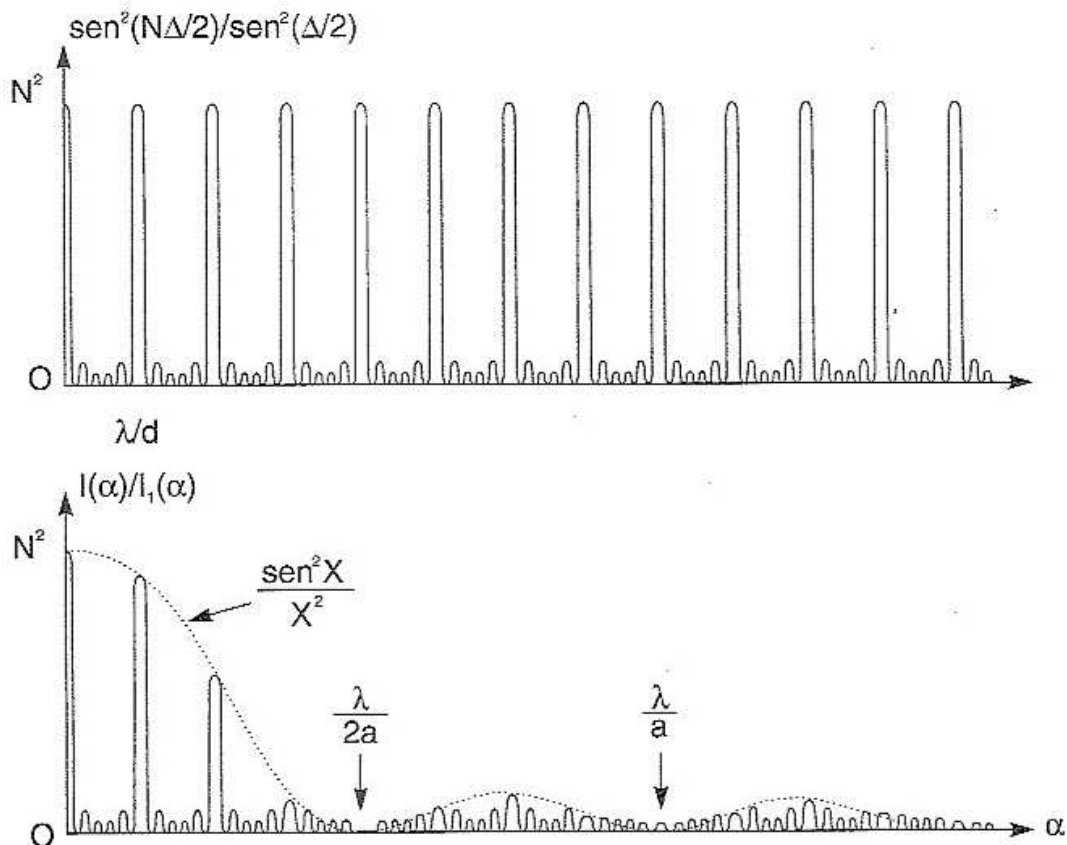


Fig. 4.31 Figura de difração da rede

A figura de difração da rede, como no caso de duas fendas, resulta da modulação da figura de interferência pelo fator lentamente variável  $I_1(\alpha)$ , figura de difração de uma fenda única. O aspecto da figura resultante está ilustrado na fig. 4.31.

## 4.10 Dispersão e poder separador da rede

Resulta da Seç. 4.9 que uma rede de difração com um número  $N$  muito grande de fendas produz uma figura de difração formada por uma série de raias brilhantes, nas direções dos *máximos principais*,

$$\boxed{\alpha_m = \text{sen } \theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \dots)} \quad (4.71)$$

Os máximos secundários, muito menos intensos, podem ser desprezados.



A *semilargura* de cada raia é dada por [cf.(4.70)]:

$$\delta \alpha = \delta (\text{sen } \theta) \approx \cos \theta \delta \theta = \frac{\lambda}{N d} \quad (4.72)$$

onde  $\theta$  não se afasta muito da direção  $\theta_0 = 0$  de incidência, de forma que  $\cos \theta \approx \cos \theta_0 = 1$ , ou seja,

$$\delta \theta \approx \frac{\lambda}{N d} \quad (4.73)$$

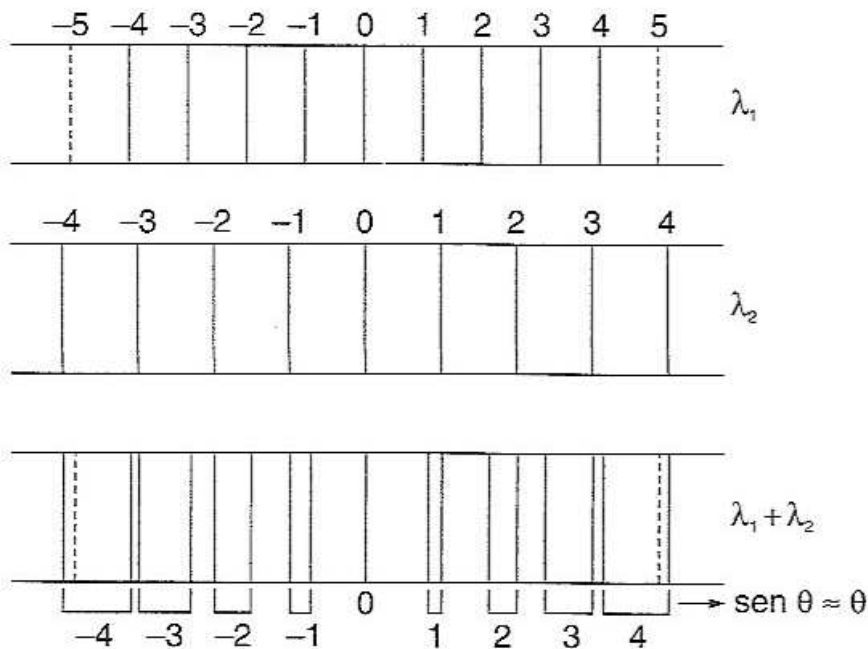


Fig. 4.32 Superposição de dois comprimentos de onda

Até agora supusemos que a luz incidente é monocromática. Se iluminarmos a fenda-fonte (fenda do *colimador* que produz o feixe incidente) com luz não-monocromática, a (4.71) mostra que os máximos principais associados a valores diferentes de  $\lambda$  caem em direções diferentes. A rede efetua portanto a *decomposição espectral* da luz incidente, produzindo uma *série* de espectros, um para cada ordem  $m$ , exceto para  $m = 0$  (direção de incidência), onde todas as imagens se superpõem. A fig. 4.32 mostra também que a separação entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  aumenta com a ordem  $m$  do espectro. Para ordens muito elevadas, porém, começa a haver *superposição de espectros* (acima,  $m = 5$  de  $\lambda_1$  com  $m = 4$  de  $\lambda_2$ ).

As principais qualidades de um instrumento para aplicação em espectroscopia são a sua *dispersão* e o seu *poder separador*.

A *dispersão*  $D$  é a taxa de variação  $d\theta/d\lambda$  do desvio com o comprimento de onda  $\lambda$ . Quando maior  $D$ , maior a separação angular associada a uma dada variação de  $\lambda$ , o que facilita a medida. Pela (4.71),

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \approx \frac{m}{d} \quad (4.74)$$

para uma rede.

Logo,  $D$  aumenta com  $m$ , como vimos na fig. 4.32, e varia inversamente com o espaçamento  $d$  entre as fendas: a difração abre tanto mais o feixe difratado quanto menor for  $d$ .

A qualidade mais importante para análise espectral é o *poder separador*,  $S \equiv \lambda/\delta\lambda$ , já definido na discussão do interferômetro de Fabry-Perot [cf. (3.39)]. Pelo critério de Rayleigh, duas linhas  $\lambda$  e  $\lambda + \delta\lambda$  estarão no limite do poder separador num espectro de ordem  $m$  dada quando estiverem separadas pela semilargura do máximo principal correspondente.

Isso significa que o máximo principal de ordem  $m$  para  $\lambda + \delta\lambda$ , dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{m}{d} (\lambda + \delta\lambda)$$

coincide com o 1.º zero depois do máximo principal de ordem  $m$  para  $\lambda$ , dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{m\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd}$$

ou seja, identificando,

$$\frac{m\delta\lambda}{d} = \frac{\lambda}{Nd} \quad \left\{ \begin{array}{l} S \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN \end{array} \right. \quad (4.75)$$

O *poder separador da rede* é o produto da ordem do espectro pelo número total de fendas. A razão da proporcionalidade com  $N$  é que a largura de cada raia é inversamente proporcional a  $N$ . Note que  $S$  é independente de  $d$ , porque a diminuição de  $d$  aumenta proporcionalmente a dispersão e a largura de cada raia.

Pela (4.71),  $m = d \sin \theta / \lambda$ , de forma que a (4.75) também se escreve

$$S = \frac{N d \sin \theta}{\lambda} \quad (4.76)$$

ou seja, o poder separador é igual ao número de comprimentos de onda contidos em  $N d \sin \theta$ , que é a diferença de caminho, medida em unidades de  $\lambda$ , entre os raios difratados pelas duas fendas extremas da rede ( $Nd$  é a largura total da rede).

Em resumo:

Aumentando $\left\{ \begin{array}{c} N \\ m \\ 1/d \end{array} \right\}$	aumenta	$\left\{ \begin{array}{l} S (\propto N), I (\propto N^2) = \text{intensidade} \\ S (\propto m), D (\propto m) \\ D (\propto 1/d) \end{array} \right.$
--	---------	---

Portanto, convém sempre tornar  $d$  tão pequeno e  $N$  tão grande quanto possível; para uma dada largura  $Nd$ , aumentar  $N$  ao máximo. Também convém observar em ordem  $m$  tão alta quanto possível. O problema aqui vem da superposição de espectros para  $m$  elevado, mas ele se reduz quando se observa uma região muito pequena do espectro. As primeiras redes de difração foram construídas por Fraunhofer em 1819, usando uma malha de fios de prata, com 10 fios/mm. Posteriormente, ele construiu redes riscando uma série de linhas paralelas equidistantes numa placa de vidro, com uma ponta de diamante (as fendas eram as partes não riscadas).

A análise anterior requer essencialmente que a estrutura da rede seja *periódica*; não é preciso que  $I_1(\alpha)$  corresponda à transmissão através de uma fenda: pode corresponder à *reflexão regular*. As redes mais usadas em espectroscopia são redes de reflexão, obtidas riscando uma placa refletora (os riscos difundem a luz em todas as direções, correspondendo aos intervalos opacos).

Rowland, no final do século passado, construiu em Baltimore redes com  $\sim 5.500$  linhas/cm numa distância de  $\sim 15$  cm, totalizando  $\sim 80.000$  linhas, e atingindo um poder separador  $\sim 160.000$  em 2.<sup>a</sup> ordem. O espaçamento  $d$  nesse caso já atinge ordens de grandeza comparáveis a  $\lambda$  no visível! Como ele tem de ser extremamente uniforme, a construção envolve problemas técnicos difíceis. Redes de difração comerciais são réplicas, usando redes padrão como moldes.

Quando olhamos para uma luz distante com os olhos semicerrados, as pestanas atuam como uma rede de difração (irregular!) e vemos cores.

Os sulcos de um disco LP ou CD, regularmente espaçados, funcionam como uma rede de difração, que permite ver, por reflexão, uma série de espectros.

Nos anos 70, foi desenvolvida uma nova técnica de fabricação de redes chamadas *holográficas*, que permite atingir milhares de linhas/mm em distâncias de até  $\sim 50$  cm, com poder separador superior a  $10^6$  (cf. Seq. 4.12).

## 4.11 Difração de raios X

As redes de difração consideradas acima são *unidimensionais*: a periodicidade dos elementos da rede (fendas) é em uma única direção. Uma *rede bidimensional* é uma estrutura duplamente periódica, isto é, com dois períodos em direções diferentes. Exemplos são duas redes unidimensionais cruzadas, ou uma cortina de gaze.

Uma *rede tridimensional* (triplamente periódica) seria muito difícil de construir na região visível do espectro, devido à regularidade necessária, que já é difícil de atingir em uma dimensão, como vimos. Entretanto, a Natureza fornece estruturas triplamente periódicas regulares: os cristais. Para observar efeitos de difração com eles, porém, a radiação incidente precisa ter um comprimento de onda  $\lambda$  comparável ao espaçamento  $d$  entre os elementos da rede.

No caso de um cristal,  $d$  é da ordem das distâncias interatômicas,  $\sim 10^{-8}$  cm ( $= 1 \text{ \AA}$ ). Radiação eletromagnética com comprimento de onda dessa ordem está no domínio dos *raios X*.

Os raios X foram descobertos em 1895, por Wilhelm Röntgen, quando fazia experiências com raios catódicos (feixes de elétrons acelerados); os raios X eram produzidos quando os elétrons colidiam com as paredes do tubo evacuado, e Röntgen mostrou que se propagavam em linha reta e tinham um grande poder de penetração. Por vários anos, procurou-se descobrir a natureza dos raios X. Eram partículas neutras, e foi sugerido que poderiam ser ondas eletromagnéticas (como a luz) de comprimento de onda da ordem de  $\text{\AA}$ .

Em 1912, Max von Laue teve a idéia de testar essa hipótese procurando detectar a *difração de raios X* pela rede tridimensional dos cristais.

Um cristal ideal é formado por átomos distribuídos sobre uma *rede periódica tridimensional*. A rede pode ser gerada a partir de três *vetores de base* não-coplanares  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , que representam períodos de translação da rede. A escolha desses vetores não é unívoca.

O vetor de posição de um ponto arbitrário da rede é da forma

$$\mathbf{x}_1 = n\mathbf{a} + p\mathbf{b} + q\mathbf{c} \quad (4.77)$$



onde a  $\sum_{\mathbf{l}}$  é uma soma *tripla* sobre  $\mathbf{l} \equiv (n, p, q)$ .

Suponhamos, para simplificar, que o cristal tenha a forma de um paralelepípedo [que pode ser oblíquo, como os eixos ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ )] com  $NPQ$  átomos, e que a origem é tomada num vértice. A (4.82) se escreve então

$$v(\mathbf{P}) = A \frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} f_1(\hat{\mathbf{u}}) \sum_{n=1}^{N-1} e^{-in\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}_0)\mathbf{a}} \sum_{p=1}^{P-1} e^{-ip\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}_0)\mathbf{b}} \times \sum_{q=1}^{Q-1} e^{-iq\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}} \quad (4.83)$$

que é a generalização tridimensional da (4.64).

Cada um dos somatórios é da forma da expressão entre colchetes na (4.64), de forma que a intensidade difratada na direção  $\hat{\mathbf{u}}$  pelo cristal todo é

$$I(\hat{\mathbf{u}}) = I_1(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}N\Delta_a\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\Delta_a\right)} \cdot \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}P\Delta_b\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\Delta_b\right)} \cdot \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}Q\Delta_c\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\Delta_c\right)} \quad (4.84)$$

onde  $I_1(\hat{\mathbf{u}})$ , a intensidade espalhada por um só átomo do cristal, chama-se o *fator de forma atômico*, e

$$\Delta_a = k(\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{a} \quad ; \quad \Delta_b = k(\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{b} \quad ; \quad \Delta_c = k(\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{c} \quad (4.85)$$

O resultado obtido é a generalização a três dimensões da (4.68), e o *fator de interferência* é o produto de 3 fatores análogos ao último fator da (4.68).

Os *máximos principais* são definidos por três condições *simultâneas* de interferência construtiva:  $\Delta_a = 2m_a\pi$  ;  $\Delta_b = 2m_b\pi$  e  $\Delta_c = 2m_c\pi$ , onde  $m_a$ ,  $m_b$ , e  $m_c$  são inteiros, o que equivale a

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{a} &= m_a \lambda \quad ; \quad (\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{b} = m_b \lambda \quad ; \quad (\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{c} = m_c \lambda \\ m_a &= (0, \pm 1, \dots) \quad ; \quad m_b = (0, \pm 1, \dots) \quad ; \quad m_c = (0, \pm 1, \dots) \quad ; \end{aligned} \quad (4.86)$$

As (4.86) chamam-se *condições de Laue*.



Num máximo principal, o fator de interferência reduz-se a  $(NPQ)^2$ , onde  $N$ ,  $P$  e  $Q$  são da ordem do número de átomos por aresta do cristal, ou seja, são extremamente grandes. Podemos então desprezar os máximos secundários, obtidos quando ao menos uma das condições de Laue não é satisfeita: a figura de difração reduz-se às direções dos máximos principais.

Dada a direção de incidência  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , a direção  $\hat{\mathbf{u}}$  do máximo principal de ordem  $(m_a, m_b, m_c)$  deve ser obtida como solução simultânea das (4.86), onde as incógnitas são as componentes de  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Entretanto, temos 3 equações para apenas 2 incógnitas, pois tem de ser satisfeita a condição

$$\hat{\mathbf{u}}^2 = 1 \quad (4.87)$$

Isso só acontece, em geral, para valores especiais de  $\lambda$ .

Para compreender melhor essa condição, consideremos um caso simples, em que os vetores de base  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , formam um triedro triretângulo, e tomemos uma onda incidente na direção de  $\mathbf{c}$ . Sejam  $(\alpha, \beta, \gamma)$  os cosenos diretores da direção  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $a = |\mathbf{a}|$ ,  $b = |\mathbf{b}|$ ,  $c = |\mathbf{c}|$ . As componentes de  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\mathbf{u}}_0$  são então:  $\hat{\mathbf{u}} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_0 = (0, 0, 1)$  e as condições de Laue ficam:

$$\begin{aligned} \alpha &= m_a \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = m_b \frac{\lambda}{b} \\ \gamma - 1 &= m_c \frac{\lambda}{c} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Para  $m_a$ ,  $m_b$  e  $m_c$  dados, essas equações definem, cada uma, um conjunto de direções que formam um ângulo constante (de coseno dado por  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$ ) com um dos eixos, ou seja, um *cone* em torno do eixo correspondente. A direção de um máximo principal teria de ser uma geratriz comum aos três cones.

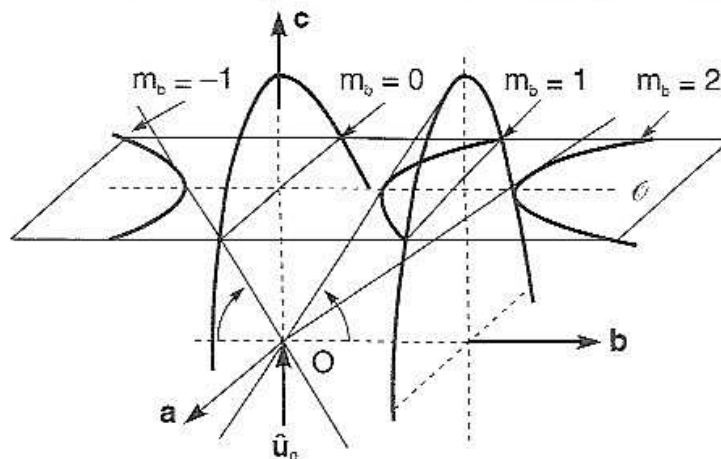


Fig. 4.34 Interpretação geométrica das condições de Laue

Na fig. 4.34, foram representados cones com eixo  $\mathbf{b}$  associados a  $m_b = 1, 0$  e  $-1$  [para  $m_b = 0$ , o cone degenera no plano  $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ]. Uma chapa fotográfica  $\mathcal{O} \perp \hat{\mathbf{u}}_0$  é cortada pelos cones segundo *hipérboles* com eixo  $\parallel \mathbf{a}$  [para  $m_b = 0$ , num segmento de reta].

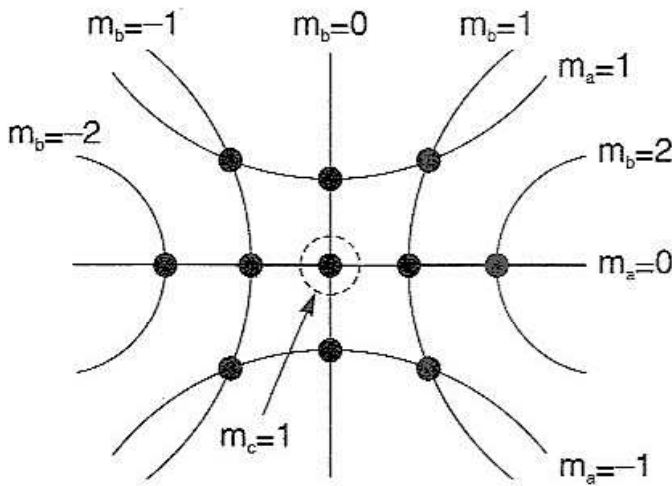


Fig. 4.35 Famílias de hipérboles

As famílias de hipérboles associadas aos pares  $(m_a, m_b)$ , representadas na fig. 4.35, têm pontos de intersecção  $\bullet$  que satisfazem às duas primeiras condições de Laue e representariam a *figura de difração de uma rede bidimensional* (aparecem, p. ex., quando se olha através de uma cortina de gaze para uma fonte de luz distante). A intersecção com a chapa fotográfica  $\mathcal{O}$  da terceira família de cones, de eixo  $\mathbf{c}$ , é uma família de *círculos*, um dos

quais ( $m_c = 1$ ) foi representado em linha interrompida na fig. 4.35. Vemos que, para um dado  $\lambda$ , como nesse caso, não haverá em geral pontos de intersecção comuns às três famílias de curvas: isto só ocorrerá para valores especiais de  $\lambda$ .

Entretanto, se fizermos incidir sobre o cristal um espectro *contínuo* de raios X, como o que resulta do freamento de um feixe de elétrons acelerados, o cristal selecionará os valores *discretos* de  $\lambda$  para os quais há intersecções comuns às 3 famílias de curvas (satisfazendo às 3 condições de Laue), e aparecerão na chapa fotográfica as “manchas de Laue” associadas a estas direções. Também resulta da análise acima que a disposição dessas manchas, ou seja, da figura de difração, reflete a simetria interna do cristal.

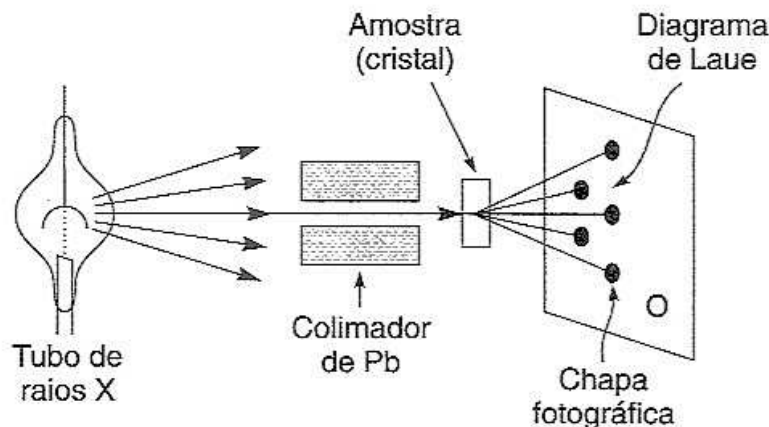


Fig. 4.36 Dispositivo para difração de raios X

A experiência foi realizada pela primeira vez por Friedrich e Knipping, ainda em 1912, usando o dispositivo experimental ilustrado na fig. 4.36. O resultado confirmou as previsões de Laue e o caráter de ondas eletromagnéticas dos raios X. Laue ganhou o Prêmio Nobel de 1914 pelo seu trabalho sobre difração dos raios X.

O Prêmio Nobel do ano seguinte, 1915, foi concedido a William Henry Bragg e a seu filho William Lawrence Bragg pela introdução de uma nova técnica de observação da difração de raios X. Os Bragg empregaram radiação X *monocromática*, variando os ângulos de incidência (por rotação do cristal) até obter máximos principais.

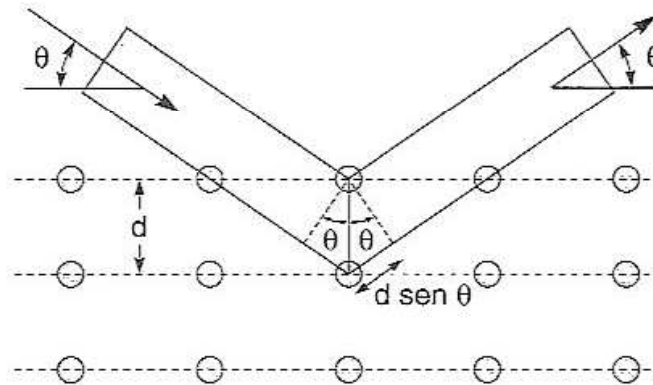


Fig. 4.37 Reflexão espacial

W. L. Bragg mostrou que as condições de Laue podem ser interpretadas como se se tratasse de uma *reflexão espacial* dos raios X, o que significa o seguinte: consideremos uma dada família de *planos reticulares* do cristal, ou seja, de planos paralelos e equidistantes que passam pelos átomos da rede.

Imaginemos que haja “reflexão” de um raio por um desses planos, isto é, que, ao incidir sobre um átomo desse plano numa direção que forma um ângulo  $\theta$  com o plano, o raio seja “refletido” segundo o mesmo ângulo ( $\theta$  é o complemento dos ângulos de incidência e reflexão). Para que haja *interferência construtiva* entre essa “reflexão” e a “reflexão” por um átomo correspondente do plano vizinho da família, à distância  $d$  (fig. 4.37), é preciso que a *diferença de caminho*  $2d \sin \theta$  seja um múltiplo inteiro de  $\lambda$ :

$$2d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.89)$$

Se essa condição é satisfeita, resulta que há interferência construtiva entre as “reflexões” pelos átomos de *todos* os planos da família, ou seja, temos uma *reflexão espacial*. Pode-se mostrar, o que não faremos aqui, que a *condição de Bragg* (4.89) é equivalente às condições de Laue, ou seja, define uma direção de máximo principal (a demonstração não é simples).

Num *espectrômetro de Bragg* para raios X, o cristal é montado sobre uma plataforma giratória que permite variar o ângulo de incidência  $\theta$ . Outra maneira de apresentar simultaneamente ao feixe de raios X toda uma gama de ângulos  $\theta$  é o *método dos pós microcristalinos* de Debye e Scherrer, em que o cristal é pulverizado, de modo a constituir um agregado de microcristais cujas faces estão orientadas ao acaso. Por simetria, a figura de difração correspondente é formada de anéis concêntricos.

## 4.12 Holografia

A figura de difração de raios X de um cristal contém informação sobre a estrutura tridimensional do cristal: por exemplo, a simetria da figura está diretamente ligada à simetria do cristal.

Em 1942, W. L. Bragg teve a idéia de procurar utilizar a *imagem* de difração de raios X de um cristal sobre uma chapa fotográfica como uma espécie de “rede de difração” ótica, iluminando essa imagem com luz visível e procurando, na luz difratada, ver até que ponto seria possível *reconstruir* através dela a estrutura do cristal.

Entretanto, essa idéia enfrentava uma dificuldade séria, conhecida como o “problema da fase”, na difração de raios X e em outras situações análogas. A chapa fotográfica registra a *intensidade* das ondas luminosas que a atingem, mas não preserva nenhuma informação sobre a *fase* das ondas. Como uma parte da informação estrutural está contida na fase, o registro das intensidades difratadas, por si só, é insuficiente para a reconstrução do cristal.

Em 1949, Dennis Gabor teve a idéia de um processo que permitiria registrar não só intensidades, mas também fases, convertendo informações de fase em informações de intensidade, através de interferência. Usando, como Bragg havia sugerido, um processo de duas etapas, Gabor propôs reconstruir integralmente, numa 2.<sup>a</sup> etapa, as *frentes de onda* provenientes do objeto, registradas na 1.<sup>a</sup>. Essas frentes de onda, atingindo a vista de um observador, produziriam a mesma sensação visual que o próprio objeto. A idéia do processo, chamado de “holografia” (do grego, “registro completo”), valeu a Gabor o Prêmio Nobel de 1971. Foi somente na década de 60 que a holografia ganhou maior impacto, graças a uma idéia de E. N. Leith e J. Upatnieks (descrita abaixo), que eliminou uma desvantagem séria da proposta inicial, e graças ao uso de lasers.

Ao contrário da fotografia, que reproduz sobre uma chapa uma imagem bidimensional de um objeto, usando um sistema de lentes, a holografia, sem utilizar

lentes, permite reconstruir a luz proveniente do objeto mantendo suas características tridimensionais. A idéia inicial é a seguinte:

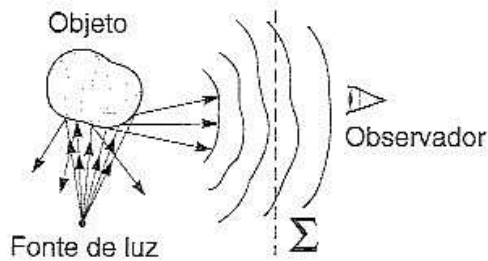


Fig. 4.38 Idéia básica da holografia

Vemos normalmente um objeto pela luz que ele *espalha*, proveniente de uma fonte de luz que o ilumina. Sobre um plano  $\Sigma$  intermediário entre o objeto e a vista do observador (fig. 4.38), as frentes de onda associadas à luz espalhada pelo objeto produzem uma certa distribuição da função de onda  $v(P')$ , em amplitude e fase. Decorre do Princípio de Huygens-Fresnel que, se conseguirmos *registrar e reproduzir* essa distribuição sobre  $\Sigma$ , as frentes de onda daí por diante serão as mesmas originalmente provenientes do objeto, produzindo portanto a mesma sensação visual para o observador. Daí a idéia de Gabor da holografia como um método de *reconstrução das frentes de onda*.

A 1.<sup>a</sup> etapa, o *registro*, incluindo amplitude e fase, se obtém pela interferência entre a luz vinda do objeto e um *feixe de referência*. Para que a interferência seja eficaz, é essencial que a luz utilizada seja *coerente*, com elevado grau de coerência tanto espacial como temporal. Por isto, a holografia só tornou-se viável graças à invenção do laser. Na 2.<sup>a</sup> etapa, a *reconstrução* das frentes de onda originais a partir do registro (holograma), a idéia foi utilizar o mesmo feixe de referência para iluminá-lo.

Vamos ilustrar o procedimento num exemplo extremamente simples, a reprodução de um objeto puntiforme muito distante, ou seja, de uma onda plana monocromática proveniente de uma direção  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , que faz um ângulo  $\theta$  com a normal ao plano  $\Sigma$ :

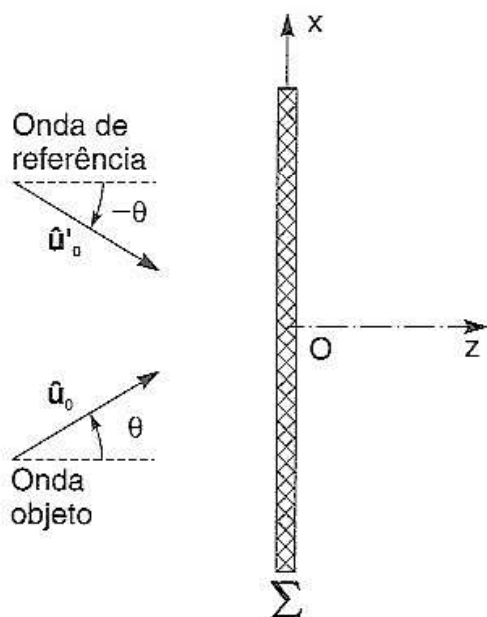


Fig. 4.39 Feixe de referência

$$v_0(\mathbf{x}) = A e^{ik\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x}} \quad (4.90)$$

onde

$$\hat{\mathbf{u}}_0 = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (4.91)$$

Vamos usar como *feixe de referência* uma onda plana análoga, mas que se propaga na direção  $(-\theta)$ :

$$v_R(\mathbf{x}) = A e^{ik\hat{\mathbf{u}}'_0 \cdot \mathbf{x}} \quad (4.92)$$



onde

$$\hat{\mathbf{u}}'_0 = (-\text{sen } \theta, 0, \text{cos } \theta) \quad (4.93)$$

As duas ondas *interferem* sobre a chapa  $\Sigma$ , onde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = (x', y', 0)$ , dando uma resultante

$$\begin{aligned} v_O(\mathbf{x}') + v_R(\mathbf{x}') &= A \left( e^{ik \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x}'} + e^{ik \hat{\mathbf{u}}'_0 \cdot \mathbf{x}'} \right) \\ &= A \left( e^{ik x' \text{sen } \theta} + e^{-ik x' \text{sen } \theta} \right) = 2A \cos(k \text{sen } \theta x') \end{aligned} \quad (4.94)$$

A chapa fotográfica registra a *intensidade*  $I$  da resultante, dada por

$$I(\mathbf{x}') = |v_O(\mathbf{x}') + v_R(\mathbf{x}')|^2 = 4A^2 \cos^2(k \text{sen } \theta x') \quad (4.95)$$

Note-se que, graças à interferência, a *fase* ( $k \text{sen } \theta x'$ ) da onda incidente vinda do objeto fica registrada numa distribuição de *intensidade* (enegrecimento) da chapa fotográfica.

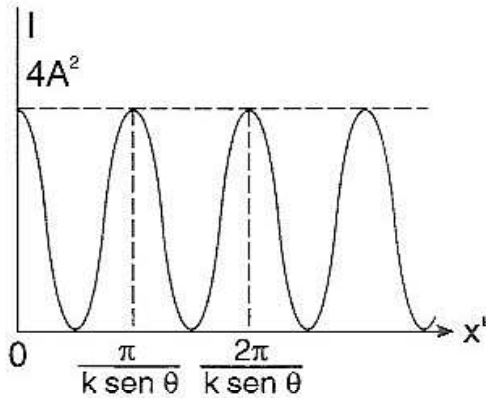


Fig. 4.40 Registro no holograma

Logo, revelando a chapa, ela conterá (fig. 4.40) uma distribuição de franjas de interferência (paralelas à direção  $y$ ) *periódica* com o período

$$d = \frac{\pi}{k \text{sen } \theta} = \frac{\lambda}{2 \text{sen } \theta} \quad (4.96)$$

como uma *rede de difração* unidimensional, em que os picos de  $I$  correspondem às partes opacas, e o entorno dos zeros (não enegrecidos) às fendas. Note que a escala de distâncias  $d$  é da ordem de  $\lambda$  (com luz visível, não se perceberia a olho nu; a chapa teria um aspecto uniforme). Vemos ao mesmo tempo que é possível construir uma “rede de difração holográfica” por esse processo.

Se agora iluminarmos esse “holograma” (rede de difração) com o *feixe de referência*, ou seja, tomando a (4.92) como *onda incidente*, os *máximos principais* de difração serão dados pelas direções  $\hat{\mathbf{u}}'$ , tais que [cf.(4.86)]



$$(\hat{\mathbf{u}}' - \hat{\mathbf{u}}'_0) \cdot \mathbf{d} = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (4.97)$$

onde  $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$  e  $\hat{\mathbf{u}}'_0 = (-\text{sen } \theta, 0, \text{cos } \theta)$ . Logo, se

$$\hat{\mathbf{u}}' \equiv (\text{sen } \theta', 0, \text{cos } \theta') \quad (4.98)$$

isto dá

$$(\text{sen } \theta' + \text{sen } \theta)d = (\text{sen } \theta' + \text{sen } \theta) \cdot \frac{\lambda}{2 \text{sen } \theta} = m \lambda$$

Para  $\theta$  e  $\theta'$  e suficientemente pequenos, com  $\text{sen } \theta \approx \theta$ ,  $\text{sen } \theta' \approx \theta'$ , vem então:

$$\frac{\theta'}{\theta} + 1 = 2m \quad \begin{cases} m = -1 \leftrightarrow \theta' = -3\theta \\ m = 0 \leftrightarrow \theta' = -\theta \\ m = 1 \leftrightarrow \theta' = \theta \end{cases} \quad (4.99)$$

← válido mesmo sem a aproximação  $\theta \ll 1$

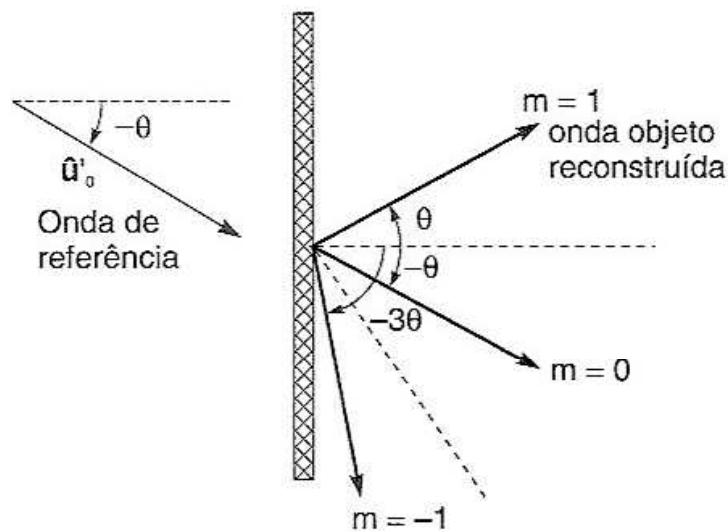


Fig. 4.41 Reconstrução da onda objeto

mostrando que, a partir do holograma, é *reconstruída*, em 1.<sup>a</sup> ordem ( $m = 1$ ), a onda plana *objeto* (fig. 4.41), na direção  $\theta$ .

Pode-se mostrar (Probl. 4.14) que, para uma rede com o perfil sinusoidal de transmissão dado pela (4.95) e a onda incidente de referência, *só existem* as ordens

$m = \pm 1, 0$ . A ordem 0, como sempre, é associada à onda incidente. A ordem  $-1$  chama-se *onda conjugada* e propaga-se numa direção que é a imagem especular da onda objeto reconstruída, em relação à direção  $m = 0$  da onda de referência.

No processo originalmente sugerido por Gabor, tomava-se  $\theta = 0$ , de forma que as três ondas viajavam na mesma direção, tornando difícil a separação da onda objeto. A idéia de usar  $\theta \neq 0$  foi de Leith e Upatnieks, permitindo a separação espacial da onda objeto reconstruída e contribuindo muito para tornar a holografia viável na prática.

Consideremos agora, de forma extremamente simplificada e esquemática, a generalização do procedimento acima a uma onda objeto arbitrária, proveniente da iluminação do objeto por luz coerente, como a de um laser. Seja  $v_O(\mathbf{x}')$  a *função de onda objeto* no ponto  $\mathbf{x}'$  da placa fotográfica,

$$v_O(\mathbf{x}') = |v_O(\mathbf{x}')| e^{i\varphi_O(\mathbf{x}')} \quad (4.100)$$

onde  $\varphi_O$  é a fase.

Seja  $v_R(\mathbf{x}')$  a *função de onda de referência* no mesmo ponto, coerente com  $v_O$ . Em geral,  $v_R$  se obtém, por subdivisão, do mesmo feixe de luz laser que ilumina o objeto:

$$v_R(\mathbf{x}') = |v_R(\mathbf{x}')| e^{i\varphi_R(\mathbf{x}')} \quad (4.101)$$

Analogamente à (4.95), a chapa fotográfica responde à *intensidade resultante* em  $\mathbf{x}'$ ,

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}') &= |v_O(\mathbf{x}') + v_R(\mathbf{x}')|^2 = (v_O^* + v_R^*)(v_O + v_R) \\ &= |v_O(\mathbf{x}')|^2 + |v_R(\mathbf{x}')| |v_O(\mathbf{x}')| e^{i[\varphi_O(\mathbf{x}') - \varphi_R(\mathbf{x}')] } \\ &\quad + |v_O(\mathbf{x}')| |v_R(\mathbf{x}')| e^{-i[\varphi_O(\mathbf{x}') - \varphi_R(\mathbf{x}')] } + |v_R(\mathbf{x}')|^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

onde a informação de fase está contida nos termos de interferência.

O fator (porcentagem) de transmissão *da amplitude*  $T$  da chapa fotográfica em cada ponto, uma vez revelada, depende da intensidade  $I(\mathbf{x}')$  naquele ponto (a transmissividade é  $|T|^2$ ):

$$T(\mathbf{x}') = f[I(\mathbf{x}')] \quad (4.103)$$

Como o enegrecimento, que reduz  $T$ , cresce com  $I$ , vamos admitir, para simplificar, que  $T$  é da forma

$$T(\mathbf{x}') = \bar{T} + K I(\mathbf{x}') \quad (4.104)$$

onde  $\bar{T}$  é a *amplitude de transmissão média* do holograma (placa revelada) e  $K < 0$  é uma constante.

Se iluminarmos agora o holograma com a onda de referência, a amplitude complexa transmitida  $v(\mathbf{x}')$ , pela definição de  $T$ , é a onda incidente multiplicada por  $T$ . Ignorando o termo constante  $\bar{T}$ , resulta então que  $v(\mathbf{x}')$  é dado por

$$v(\mathbf{x}') = K v_R(\mathbf{x}') I(\mathbf{x}') = K |v_R(\mathbf{x}')| e^{i\varphi_R(\mathbf{x}')} \\ \times \left[ |v_O|^2 + |v_R|^2 + |v_R| |v_O| \left( e^{i[\varphi_O(\mathbf{x}') - \varphi_R(\mathbf{x}')] } + e^{-i[\varphi_O(\mathbf{x}') - \varphi_R(\mathbf{x}')] } \right) \right]$$

ou seja,

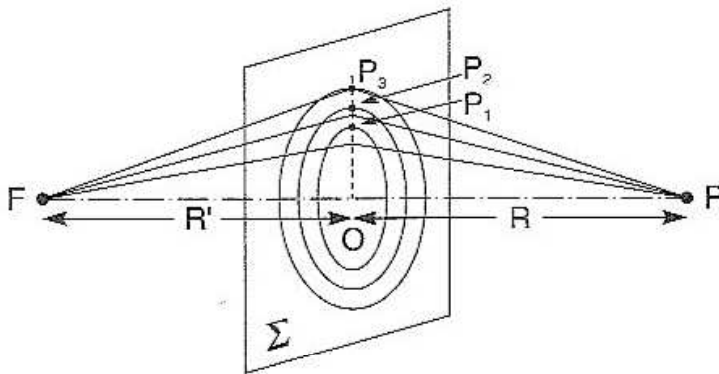
$$v(\mathbf{x}') = K |v_R| \left( |v_O|^2 + |v_R|^2 \right) e^{i\varphi_R(\mathbf{x}')} + \\ + K |v_R|^2 \underbrace{|v_O(\mathbf{x}')| e^{i\varphi_O(\mathbf{x}')}}_{v_O(\mathbf{x}')} \quad (4.105) \\ + K |v_R|^2 |v_O(\mathbf{x}')| e^{-i\varphi_O(\mathbf{x}')} \cdot e^{2i\varphi_R(\mathbf{x}')}$$

O primeiro termo, que se propaga na direção da onda de referência, corresponde a  $m = 0$  na (4.99). O segundo é a reconstrução da onda objeto ( $m = 1$ ) no plano  $\Sigma$  e portanto, pelo Princípio de Huygens-Fresnel, daí por diante. O fator  $|v_R|^2$  não afeta a reconstrução, porque usualmente  $|v_R|^2$  é praticamente constante sobre o holograma. Finalmente, o terceiro termo, que corresponde a  $m = -1$  na (4.99), se propaga em outra direção e não interfere no processo. É proporcional ao complexo conjugado da onda objeto (daí o nome de “onda conjugada”). Produz uma “imagem pseudoscópica” do objeto.

## PROBLEMAS

1. Uma onda plana monocromática incide perpendicularmente sobre um anteparo opaco com uma beirada retilínea, projetando a sua sombra sobre outro anteparo, paralelo ao primeiro, e situado dentro da região de Fresnel. Demonstre que a intensidade difratada, num ponto situado exatamente no *limite da sombra* geométrica da beirada, é igual a  $I_0/4$ , onde  $I_0$  é a intensidade incidente (não-obstruída).

2. Uma abertura circular de diâmetro igual a 3,1 mm num anteparo opaco é iluminada perpendicularmente por uma onda plana monocromática. Num outro anteparo paralelo ao primeiro, a uma distância de 1m, o centro da figura de difração é escuro. Afastando-se gradualmente o anteparo de observação, o centro torna-se brilhante, depois escurece de novo e se ilumina mais uma vez, permanecendo brilhante daí em diante, por mais que se afaste o anteparo de observação. Qual o comprimento de onda da luz?



3. A construção sobre um plano  $\Sigma$  das *zonas de Fresnel* pode ser estendida a uma onda incidente *esférica*, proveniente de um ponto fonte  $F$  (fig.). Nesse caso, o pólo  $O$  se obtém unindo o ponto de observação  $P$  à fonte puntiforme  $F$  e tomando a intersecção com  $\Sigma$ , e as zonas de Fresnel são definidas pelas condições (fig.):

$$\overline{FP_1} + \overline{P_1P} = R + R' + \frac{\lambda}{2}$$

$$\overline{FP_2} + \overline{P_2P} = R + R' + \lambda, \dots$$

Os raios das zonas são  $\rho_1 = \overline{OP_1}$ ,  $\rho_2 = \overline{OP_2}$ , ... Uma *lente de Fresnel* se define da mesma forma que para uma onda incidente plana. Demonstre que o raio da  $n$ -ésima zona de Fresnel é dado por

$$\rho_n = \sqrt{n\lambda f} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

onde

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

fórmula análoga à de uma lente, em que  $R'$  é a distância objeto e  $R$  a distância imagem. Verifique que, no caso limite de uma onda plana, o resultado se reduz ao anterior.

4. Considere a função  $f(X) = \text{sen}^2 X / X^2$  (figura de difração de uma fenda). Mostre que os máximos secundários são raízes da equação  $\text{tg } X_n = X_n$  e procure determinar seus valores, bem como os de  $f(X_n)$ , para  $n = 1, 2, 3$ , usando métodos gráficos ou numéricos (calculadora).

5. Um feixe paralelo de laser de argônio ( $\lambda = 4.880 \text{ \AA}$ ), colimado por um diafragma de 1 mm de raio, é dirigido para a Lua. Calcule um limite inferior para o raio do feixe ao atingir a Lua e compare o resultado com o raio da Lua.

6. (a) O telescópio refrator do observatório Yerkes tem uma objetiva com 1 m de raio. De que ordem de grandeza é a menor separação entre dois objetos na Lua que podem ser resolvidos com esse telescópio? (b) A objetiva do telescópio refletor do Monte Palomar tem 5m de diâmetro. Para observação com um filtro azul ( $\lambda = 4.000 \text{ \AA}$ ), qual é a menor separação angular entre duas estrelas que pode ser detetada?

7. Interprete geometricamente, em termos da representação dos números complexos por vetores no plano complexo, a condição para que se tenha o primeiro zero, após um máximo principal, do fator de interferência

$$F \equiv 1 + e^{-i\Delta} + (e^{-i\Delta})^2 + \dots + (e^{-i\Delta})^{N-1}$$

8. Demonstre que, para qualquer rede de difração, na incidência perpendicular, o vermelho do espectro de 2.<sup>a</sup> ordem se superpõe ao violeta do espectro de 3.<sup>a</sup> ordem.

9. Numa rede de difração, o espaçamento entre as fendas é igual ao dobro da largura de cada fenda. Mostre que todos os máximos principais de ordem par estão ausentes.

10. Uma linha espectral de comprimento de onda  $\lambda = 4.750 \text{ \AA}$  é na realidade um dubleto, de separação  $0,043 \text{ \AA}$ . (a) Qual é o menor número de linhas que uma rede de difração precisa ter para separar esse dubleto no espectro de 2.<sup>a</sup> ordem? (b) Se a rede tem 10 cm de comprimento, em que direção  $\theta$  será observada a linha nesse espectro? Qual será a separação angular  $\delta \theta$  entre as duas componentes?

11. Seja  $\delta \omega$  a diferença entre as freqüências angulares de duas raias espectrais que estão no limite do poder separador de uma rede de difração, e  $\delta t$  a diferença entre os tempos de percurso de dois raios difratados pelas extremidades da rede na direção de observação dessas raias. Demonstre que  $\delta \omega \delta t \sim 2 \pi$ .

12. Por um defeito de fabricação, as fendas 1, 4, 7, ...  $(3N + 1)$  de uma rede com  $(3N + 1)$  fendas ficam tapadas. (a) Calcule o *fator de interferência* para a intensidade dessa rede defeituosa. (b) Mostre que, entre cada par de máximos principais da rede perfeita, aparecem dois novos máximos da rede defeituosa, igualmente espaçados e de intensidade 4 vezes menor que os máximos principais.

13. Uma pessoa olha através de uma cortina de gaze para uma lâmpada de sódio ( $\lambda = 5.890 \text{ \AA}$ ) situada a 10m de distância, e vê uma rede aproximadamente quadrada de pontos brilhantes, com espaçamentos de 5 cm em ambas as direções. Quantos fios por cm tem a trama da gaze?

14. Conforme a Seç. 4.12, Eq. (4.95), a amplitude transmitida por um holograma de onda plana é proporcional a  $\cos^2(k \sin \theta x')$ . Mostre que, para uma rede de difração com esse perfil de "fendas", só se formam os máximos principais  $m = 0, \pm 1$ , para a onda incidente de referência, conforme foi afirmado após a (4.99).



# 5

## POLARIZAÇÃO

### 5.1 Equações de Maxwell num meio transparente

Na expressão de Newton “um raio de luz tem lados”, ou seja, propriedades distintas em diferentes direções transversais à direção de propagação. Para estudar essas propriedades de *polarização*, não podemos mais tratar as ondas de luz como escalares: temos de reconhecer seu caráter *transversal*, retomando a *teoria eletromagnética da luz* (Fís.Bás. 3, Cap. 12).

Vamos discutir a propagação de ondas eletromagnéticas em meios transparentes, que têm de ser isolantes, porque num condutor a energia eletromagnética é absorvida pelo efeito Joule (por isto os metais são opacos). A propagação é tratada na ausência de fontes de luz: não há cargas nem correntes livres (nem correntes ôhmicas).

Assim, o ponto de partida são as equações de Maxwell num meio dielétrico (Fís.Bás. 3, Cap. 12), com  $\rho = \mathbf{j} = 0$ .

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{(III)} \quad \text{div } \mathbf{D} = 0 \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{array} \quad (5.1)$$

onde

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.2)$$

é o vetor deslocamento ( $\mathbf{P}$  = densidade de polarização) e  $\kappa$  é a *constante dielétrica* do meio ( $\kappa = 1$  no vácuo).

Vimos (*Fís.Bás. 3*, Cap. 12), ao procurar soluções que *só dependem de uma coordenada* (tomada como  $z$ ) e do tempo  $t$ , que, para um vetor  $\mathbf{v} = v_x(z, t) \hat{\mathbf{x}} + v_y(z, t) \hat{\mathbf{y}}$ , tem-se

$$\text{rot } \mathbf{v}(z, t) = -\frac{\partial v_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}}$$

o que dá

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = -\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \hat{\mathbf{y}} \quad \text{para } \mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) \quad (5.3)$$

Logo, a (II) dá [sendo  $E_z = 0$  (transversalidade)]

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{B}) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\kappa \epsilon_0 \mu_0 \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \hat{\mathbf{y}} \right) \end{aligned}$$

ou seja,  $E_x$  e  $E_y$  satisfazem à *equação de ondas*

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \right] \quad (5.4)$$

onde, agora,

$$\left[ v = \frac{1}{\sqrt{\kappa \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}} \right] \quad (5.5)$$

A mesma equação é encontrada para  $B_x$  e  $B_y$ .

Sabemos, porém, que, num meio transparente de *índice de refração*  $n$ , a velocidade da luz é

$$v = \frac{c}{n} \quad (5.6)$$

Comparando com a (5.5), obtemos a **RELAÇÃO de MAXWELL**

$$n = \sqrt{\kappa} \quad (5.7)$$

ou seja, *o índice de refração de um meio transparente é igual à raiz quadrada de sua constante dielétrica*. Esse é um resultado típico da teoria eletromagnética da luz, relacionando uma constante ótica de um meio material ( $n$ ) com uma constante eletromagnética ( $\kappa$ ).

Entretanto, para testar o acordo com a experiência, é essencial lembrar que existe *dispersão*: o índice de refração de um meio varia com a frequência, e o mesmo acontece com  $\kappa$ : a comparação tem de ser feita à *mesma frequência*  $\omega$ .

Para muitas substâncias,  $n$  e  $\kappa$  não variam apreciavelmente até que  $\omega$  chegue à região do infravermelho distante ( $\lambda \sim 300 \mu\text{m}$ ), de modo que podemos testar a (5.7) tomando  $n$  nesta região e o valor estático de  $\kappa$ :

Substância	$n_{300\mu\text{m}}^2$	$\kappa$ (estático)
K Cl	4,8	4,75
K Br	5,1	4,66
NH <sub>4</sub> Cl	6,8	6,85

Vemos que há razoavelmente bom acordo nesses casos. O mesmo vale para *gases fracamente dispersivos*, até no visível (luz amarela):

Substância	$n^2$ (amarelo)	$\kappa$ (estático)
Ar	1,000294	1,000295
H <sub>2</sub>	1,000138	1,000132
CO	1,000346	1,000345

Já para substâncias mais fortemente dispersivas, as discrepâncias entre  $n^2$  (luz amarela) e  $\kappa$  (estático) podem ser grandes. Para a água,  $n$  (luz amarela)  $\approx 1,33$  e  $\sqrt{\kappa}$  (estático)  $\approx 9$ . Por outro lado, para comprimentos de onda  $\lambda \geq 1$  m, o índice de refração da água é  $\approx 9$ .

## 5.2 Vetor de Poynting real e complexo

No interior de um dielétrico, como vimos (*Fís. Bás. 3*, Cap.5), a densidade de energia elétrica aumenta por um fator  $\kappa$ , de forma que a *densidade total de energia eletromagnética* é dada por

$$U = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{D}^2}{\kappa \epsilon_0} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \quad (5.8)$$

o que dá, usando as equações de Maxwell (5.1),

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\mathbf{D}}{\kappa \epsilon_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\mathbf{E}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \mathbf{E}}_{=-\text{div} \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right)}$$

ou seja, como no caso do vácuo (*Fís. Bás. 3*, Cap.11),

$$\text{div } \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (5.9)$$

é a expressão local da conservação da energia, e

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \text{VETOR de POYNTING (REAL)} \quad (5.10)$$

continua representando a *densidade de corrente de energia*.

Ainda para uma solução das equações de Maxwell do tipo *onda plana na direção z*,

$$\mathbf{E} = E_x(z - vt) \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{B} = B_y(z - vt) \hat{\mathbf{y}} \quad (5.11)$$

com  $\zeta \equiv z - vt$ , as equações de Maxwell (I) e (II) dão

$$(I) \left\{ -\frac{\partial B_y}{\partial z} = -B'_y = \mu_0 \kappa \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = -(\kappa v / c^2) E'_x = -\frac{n^2 v}{c^2} E'_x = -\frac{E'_x}{v} \right.$$

$$(II) \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial z} = E'_x = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = v B'_y \right\} \left\{ B_y = \frac{1}{v} E_x \right.$$

ou seja,

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \quad \left( v = \frac{c}{n} \right)} \quad (5.12)$$

que generaliza o resultado obtido para o vácuo.

Para uma onda plana que se propaga numa direção  $\hat{\mathbf{u}}$  qualquer,

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} = \sqrt{\kappa \varepsilon_0 \mu_0} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}} \quad (5.13)$$

o que dá

$$\boxed{U_M = \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = U_E} \quad (5.14)$$

ou seja, continua valendo que, *numa onda eletromagnética plana, as densidades de energia elétrica e magnética são iguais.*

A (5.10) dá também, usando a (5.13),

$$\mathbf{S} = \frac{1}{v \mu_0} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\kappa \varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}^2 \hat{\mathbf{u}} = \frac{\overbrace{\kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}^2}^U}{\sqrt{\kappa \varepsilon_0 \mu_0}} \hat{\mathbf{u}}$$

ou, finalmente,

$$\boxed{\mathbf{S} = v U \hat{\mathbf{u}}} \quad (5.15)$$

análogo de  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ :  $\mathbf{S}$  é a densidade de corrente de energia, e  $U$  é a densidade de energia, que se propaga com velocidade  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{u}}$ .

### *Ondas monocromáticas*

Em notação complexa, uma onda monocromática é da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

e já vimos (*Fís.Bás. 2*, Cap.3) que podemos trabalhar diretamente com as grandezas complexas e tomar  $\operatorname{Re}$  só no fim, enquanto usamos só operações *lineares*. Mas isso não vale para o *produto* de dois números complexos  $A$  e  $B$ , porque

$$\operatorname{Re}(AB) \neq \operatorname{Re} A \operatorname{Re} B \quad (5.17)$$

Por conseguinte, é preciso tomar cuidado ao calcular expressões quadráticas, como as densidades de energia, ou produtos, como o vetor de Poynting. Na região do visível, porém,  $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$  e não podemos seguir a variação *instantânea* extremamente rápida destas grandezas; os detetores registram só seus *valores médios temporais* sobre um grande número de oscilações, que podem ser expressos de forma simples na notação complexa.

Para ver isto, calculemos

$$\left\langle \operatorname{Re} \left( a e^{-i\omega t} \right) \operatorname{Re} \left( b e^{-i\omega t} \right) \right\rangle$$

onde  $a$  e  $b$  são dois números *complexos* independentes do tempo, e

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} f(t) dt, \quad T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.18)$$

é a média temporal de  $f(t)$  sobre  $n$  períodos. Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( a e^{-i\omega t} \right) \operatorname{Re} \left( b e^{-i\omega t} \right) &= \frac{1}{2} \left( a^* e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t} \right) \\ &\times \frac{1}{2} \left( b^* e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} \right) = \frac{1}{4} \left( a^* b + a b^* + a^* b^* e^{2i\omega t} + a b e^{-2i\omega t} \right) \end{aligned}$$

Mas



$$\langle e^{\pm 2i\omega t} \rangle = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} e^{\pm 2i\omega t} dt = \frac{e^{\pm 2i\omega t_0}}{e^{\pm 2i\omega}} \left( e^{\pm 4in\pi} - 1 \right) = 0$$

de forma, que finalmente,

$$\langle \text{Re} (a e^{-i\omega t}) \text{Re} (b e^{-i\omega t}) \rangle = \frac{1}{4} (a^* b + a b^*) = \frac{1}{2} \text{Re} (a^* b) \quad (5.19)$$

Em particular, os valores médios temporais das densidades de energia elétrica e magnética associadas às (5.16) são

$$\begin{aligned} \langle U_E(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{4} \kappa \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \\ \langle U_M(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{4 \mu_0} |\mathbf{B}|^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

e, para o vetor de Poynting, obtemos

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right\rangle = \text{Re} \mathbf{S}^+ \quad (5.21)$$

onde

$$\mathbf{S}^+ = \frac{1}{2 \mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \quad (5.22)$$

chama-se o *vetor de Poynting complexo*.

Para uma onda plana na direção  $\hat{\mathbf{u}}$ , a (5.13) dá

$$\mathbf{S}^+ = \frac{1}{2 \mu_0 v} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa \epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{u}}$$

ou ainda [cf.(5.15) e (5.20)]

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{S}^+ = v \langle U \rangle \hat{\mathbf{u}} = v \cdot \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (5.23)$$

A *intensidade I* da onda eletromagnética é

$$I \equiv \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{u}} = v \langle U \rangle = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 v |\mathbf{E}|^2 \quad (5.24)$$

ou seja, é proporcional a  $|\mathbf{E}|^2$ ; vemos que  $\mathbf{E}$  representa a “função de onda” vetorial associada à luz.

### 5.3 Ondas planas monocromáticas. Polarização

A onda plana mais geral possível que se propaga na direção  $z$  é da forma

$$\begin{cases} E_x = f(z - vt) \\ E_y = g(z - vt) \end{cases} \quad (5.25)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias. O campo  $\mathbf{B}$  correspondente é dado pela (5.12):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{z}} \times (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{v} (-E_y \hat{\mathbf{x}} + E_x \hat{\mathbf{y}})$$

ou seja:

$$\begin{cases} B_x = -\frac{1}{v} g(z - vt) \\ B_y = \frac{1}{v} f(z - vt) \end{cases} \quad (5.26)$$

Para uma onda plana *monocromática* de frequência angular  $\omega$ , a dependência do tempo (em notação complexa) deve ser da forma  $\exp(-i\omega t)$ ; logo, como  $z - vt = -v(t - \frac{z}{v})$ , a dependência de  $z$  é da forma  $\exp(ikz)$ , onde

$$k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c} = n k_0 \quad k_0 = \text{número de onda reduzido (no vácuo)} \quad (5.27)$$

Logo, a onda plana monocromática mais geral possível que se propaga na direção  $\hat{\mathbf{u}} \equiv \hat{\mathbf{z}}$  é dada por

$$\begin{cases} E_x = a e^{i\delta_x} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = v B_y \\ E_y = b e^{i\delta_y} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = -v B_x \end{cases} \quad (5.28)$$

onde  $a$  e  $b$  ( $\geq 0$ ) são as *amplitudes reais* das duas componentes transversais e  $(\delta_x, \delta_y)$  as respectivas *constantes de fase*. Sem restrição de generalidade (por escolha adequada da origem de  $t$  ou de  $z$ ), podemos tomar  $\delta_x = 0$ . Passando para a notação real, teremos então

$$\left. \begin{aligned} E_x &= a \cos \Phi \\ E_y &= b \cos(\Phi + \delta) \end{aligned} \right\} \Phi = kz - \omega t \quad (5.29)$$

onde

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (5.30)$$

é a *diferença de fase* entre as duas componentes.

Consideremos um plano *fixo*, p. ex.,  $z = 0$ . Nesse plano, o vetor  $\mathbf{E}$  varia com o tempo ( $\Phi = -\omega t$ ), e sua extremidade descreve uma curva. Que curva é? Suas equações paramétricas (5.29) mostram que  $|E_x| \leq a$ ,  $|E_y| \leq b$ , de modo que a curva está inscrita num retângulo de lados  $2a$  e  $2b$ . É a “curva de Lissajous” associada à composição de duas oscilações em direções perpendiculares com defasagem  $\delta$ , já estudada no curso anterior (*Fís. Bás. 2*, Sec. 3.5).

Para obter a equação da curva, basta eliminar  $\Phi$  entre as (5.29):

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_y}{b} &= \cos(\Phi + \delta) = \cos \Phi \cos \delta - \sin \Phi \sin \delta \\ \frac{E_x}{a} &= \cos \Phi \left\{ \begin{aligned} \sin \Phi &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{b} - \frac{E_x}{a} \cos \delta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2} \sin \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{b}\right)\left(\frac{E_x}{a}\right) \cos \delta + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 \cos^2 \delta = \sin^2 \delta \left[1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2\right]$$

o que dá finalmente,

$$\left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{b}\right)\left(\frac{E_x}{a}\right)\cos\delta + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = \sin^2\delta \quad (5.31)$$

curva do 2.º grau que, por estar inscrita num retângulo, só pode ser uma *elipse* (podendo degenerar num círculo ou segmento de reta).

Logo, a curva descrita pela extremidade de  $\mathbf{E}$  num plano fixo é uma *elipse*. Decorre das (5.28) que  $\mathbf{B}$  também descreve uma elipse, mantendo-se sempre  $\perp \mathbf{E}$ . *A onda plana monocromática mais geral possível é elipticamente polarizada.*

A forma da elipse depende da defasagem  $\delta$ . Vejamos primeiro casos particulares.

(i) *Luz linearmente polarizada*

Corresponde a

$$\delta = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.32)$$

o que dá, na (5.31),

$$\left(\frac{E_y}{b}\right)^2 + 2(-1)^{n+1}\left(\frac{E_y}{b}\right)\left(\frac{E_x}{a}\right) + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = 0$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ par} \\ n \text{ impar} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{E_y}{b} - \frac{E_x}{a}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{E_y}{b} + \frac{E_x}{a}\right)^2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_y}{E_x} = \frac{b}{a} \quad (\delta = 0, \pm 2\pi, \dots) \\ \frac{E_y}{E_x} = -\frac{b}{a} \quad (\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots) \end{array} \right. \quad (5.33)$$

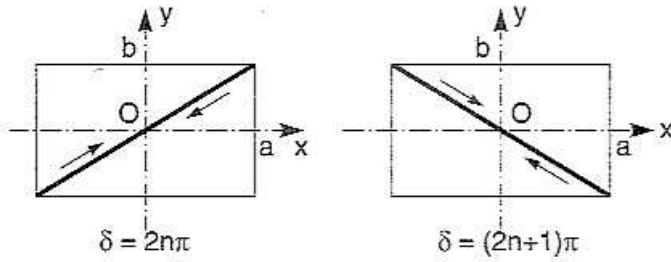


Fig. 5.1 Polarização linear

As duas situações estão representadas na fig. 5.1. Como  $\mathbf{E}$  permanece sempre numa mesma direção (idem para  $\mathbf{B}$ ), diz-se que a onda é *linearmente polarizada*. Convenciona-se chamar o plano  $(\mathbf{E}, \hat{\mathbf{u}})$  de *plano de vibração*, e o plano perpendicular  $(\mathbf{B}, \hat{\mathbf{u}})$ , de *plano de polarização*.

Em particular, se  $b = 0$  ou  $a = 0$ , temos as duas direções de polarização ortogonais (independentes)  $x$  e  $y$ .

(ii) *Luz circularmente polarizada*

Para que a (5.31) se reduza à equação de um círculo, duas condições devem ser satisfeitas:

$$a = b \quad \text{e} \quad \delta = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.34)$$

As (5.29) reduzem-se então às equações paramétricas de um círculo:

$$E_x = a \cos \Phi, \quad E_y = a \cos \left( \Phi + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{n+1} a \sin \Phi \quad (5.35)$$

ou ainda, como  $\Phi \equiv -\omega t$ ,

$$E_x = a \cos(\omega t), \quad E_y = (-1)^n a \sin(\omega t) \quad (5.36)$$

A diferença entre  $n$  par e  $n$  ímpar está no *sentido de percurso* do círculo (fig. 5.2). A extremidade de  $\mathbf{E}$  também pode ser representada no plano complexo por  $E_x + iE_y$ :

$$n \text{ par } \left\{ \begin{array}{l} E_x + iE_y = a e^{i\omega t} \\ \text{(anti-horário)} \end{array} \right. \quad n \text{ ímpar } \left\{ \begin{array}{l} E_x + iE_y = a e^{-i\omega t} \\ \text{(horário)} \end{array} \right. \quad (5.37)$$

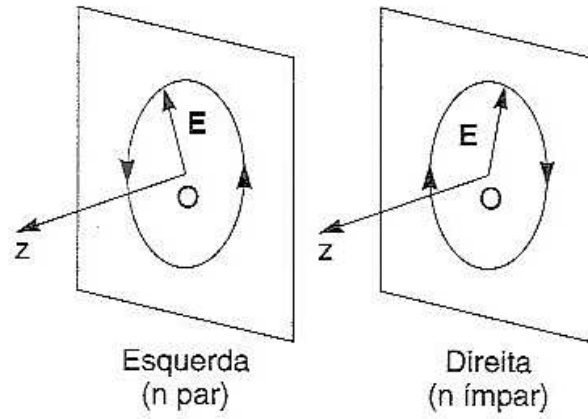


Fig. 5.2 Polarização circular

Voltando à notação complexa, as (5.35) se escrevem:

$$E_x = a e^{i\Phi}, E_y = a e^{i\left(\Phi + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = i a e^{in\pi} e^{i\Phi} = (-1)^n i a e^{i\Phi}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} &= a e^{i\Phi} (\hat{\mathbf{x}} \pm i \hat{\mathbf{y}}) && + (n \text{ par}) \\ & && - (n \text{ ímpar}) \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$(\Phi = k z - \omega t)$$

Sejam

$$\hat{\mathbf{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} + i \hat{\mathbf{y}}) \quad , \quad \hat{\mathbf{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} - i \hat{\mathbf{y}}) \tag{5.39}$$

Então,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_+ = a e^{i\Phi} \hat{\mathbf{e}}_+ = \text{luz circularmente polarizada esquerda} \\ \mathbf{E}_- = a e^{i\Phi} \hat{\mathbf{e}}_- = \text{luz circularmente polarizada direita} \end{cases} \tag{5.40}$$

Como

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{\mathbf{e}}_-) \quad , \quad \hat{\mathbf{y}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_+ - \hat{\mathbf{e}}_-) \tag{5.41}$$

a (5.38) pode ser reescrita:



$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x - i E_y) \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + i E_y) \hat{\mathbf{e}}_- \quad (5.42)$$

mostrando que *uma onda plana monocromática arbitrária pode ser representada como superposição de uma onda circularmente polarizada direita com uma onda circularmente polarizada esquerda*.

### (iii) Luz elípticamente polarizada

Voltando agora ao caso geral, vemos pela (5.31) que os eixos da elipse só coincidem com os eixos  $x$  e  $y$  quando  $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ; em outras situações, estão inclinados. Por argumentos de continuidade e analogia com polarização linear e circular, obtemos as seguintes representações gráficas (fig. 5.3) com a variação de  $\delta$ :

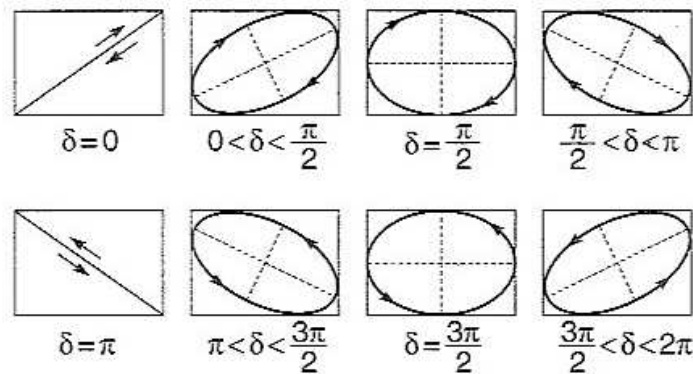


Fig. 5.3 Polarização elíptica

## 5.4 Atividade ótica natural

Existem substâncias transparentes que têm índices de refração diferentes para luz circularmente polarizada esquerda e direita. Isso se deve em geral a uma estrutura assimétrica das moléculas, que têm “helicidade”, ou seja, um sentido privilegiado de rotação em torno de um eixo, como um parafuso de rosca direita (ou esquerda). Um exemplo é uma solução de açúcar de cana (mais geralmente, de origem orgânica).

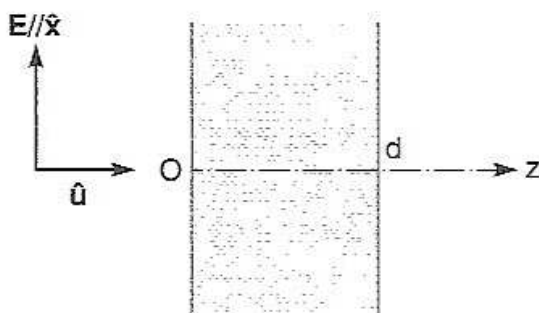


Fig. 5.4 Atravessamento de meio opticamente ativo

Vejamos o que acontece quando uma onda plana monocromática linearmente polarizada incide sobre um tal meio (fig. 5.4) e atravessa uma espessura  $d$  dele. Omitindo o fator  $e^{-i\omega t}$ , a onda incidente é da forma

$$\mathbf{E}_0 = E_0 e^{ik_0 z} \hat{\mathbf{x}} \quad (z \leq 0) \quad (5.43)$$

e tomamos a origem na face de entrada, onde

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}} \quad (z = 0) \quad (5.44)$$

(desprezaremos a reflexão).

Pela (5.42), podemos decompor essa onda em uma onda circularmente polarizada esquerda e outra direita:

$$\mathbf{E}_0(z = 0) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{e}}_- \quad (5.45)$$

Os fatores de propagação das duas ondas dentro do meio são diferentes:

$$\mathbf{E}(z) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_+ z} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_- z} \hat{\mathbf{e}}_- \quad (z > 0) \quad (5.46)$$

onde

$$k_+ = n_+ k_0, \quad k_- = n_- k_0 \quad (5.47)$$

e  $n_+$  ( $n_-$ ) é o índice de refração para polarização circular esquerda (direita). Seja

$$\bar{n} \equiv \frac{1}{2}(n_+ + n_-) \quad (5.48)$$

o índice de refração médio, e

$$\delta n \equiv n_+ - n_- \quad (5.49)$$

a diferença entre os índices. Temos então

$$n_+ = \bar{n} + \frac{1}{2} \delta n, \quad n_- = \bar{n} - \frac{1}{2} \delta n \quad (5.50)$$

e a (5.46) se escreve

$$\mathbf{E}(z) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\bar{n}k_0 z} \left( e^{\frac{i}{2}\delta n k_0 z} \underbrace{\hat{\mathbf{E}}_+}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+i\hat{y})} + e^{-\frac{i}{2}\delta n k_0 z} \underbrace{\hat{\mathbf{E}}_-}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-i\hat{y})} \right)$$

ou seja,

$$\mathbf{E}(z) = E_0 e^{i\bar{n}k_0 z} \left\{ \frac{1}{2} \left( e^{\frac{i}{2}\delta n k_0 z} + e^{-\frac{i}{2}\delta n k_0 z} \right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2i} \left( e^{\frac{i}{2}\delta n k_0 z} - e^{-\frac{i}{2}\delta n k_0 z} \right) \hat{\mathbf{y}} \right\}$$

Finalmente, após atravessar uma espessura  $d$ ,

$$\boxed{\mathbf{E}(d) = E_0 e^{i\bar{n}k_0 d} \left[ \cos\left(\frac{\delta n}{2} k_0 d\right) \hat{\mathbf{x}} - \text{sen}\left(\frac{\delta n}{2} k_0 d\right) \hat{\mathbf{y}} \right]} \quad (5.51)$$

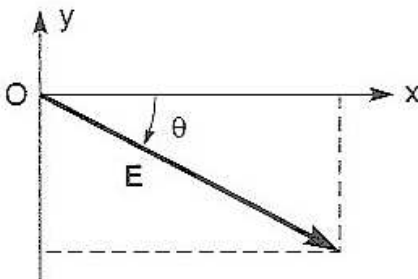


Fig. 5.5 Rotação do plano de polarização

que, pela (5.33), é uma onda linearmente polarizada numa direção (fig. 5.5) formando um ângulo  $\theta$  com  $Ox$ , onde

$$\boxed{\text{tg } \theta = -\text{tg}\left(\frac{\delta n}{2} k_0 d\right) \left\{ \theta = -\frac{1}{2} (\delta n) k_0 d \right.} \quad (5.52)$$

quando a polarização inicial (5.44) era  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Logo, uma substância óticamente ativa produz uma *rotação do plano de polarização* de luz linearmente polarizada incidente sobre ela, e o ângulo de rotação é proporcional à espessura do meio atravessada e à diferença  $\delta n$  entre os índices  $n_+$  e  $n_-$ . Se  $n_+ > n_-$ , a rotação é para a direita (sentido horário), e a substância se diz *dextrógira*; se  $n_+ < n_-$ , é *levógira*.

O açúcar de cana ou beterraba é dextrógiro, e é este açúcar natural que é metabolizado pelos seres vivos; o açúcar levógiro (produzido em laboratório) não é

metabolizado. Não se sabe se a origem dessa assimetria biológica é um acidente ligado com alguma assimetria do ambiente em que a vida se originou. Todos os aminoácidos são levógiros.

Aplicação à indústria do açúcar:  $n_+$  e  $n_-$  são proporcionais à *concentração* da solução, de forma que a medida de  $\theta$  é utilizada em *sacarímetros* para determinar essa concentração.

## 5.5 Condições de contorno

Para tratar o problema da reflexão e refração, precisamos saber o que acontece com o campo eletromagnético na interface entre dois meios de propriedades materiais diferentes. Embora idealizemos essa interface como uma superfície de descontinuidade, o que ocorre de fato é que a transição de um meio ao outro se dá através de uma região que cobre várias camadas atômicas; a espessura  $h$  desta região é porém muito pequena em confronto com os comprimentos de onda típicos no visível.

Assim, embora os operadores  $\text{div}$  e  $\text{rot}$  não possam ser aplicados a uma função descontínua (derivadas parciais na direção normal à camada divergem), podemos ver o que acontece com as equações de Maxwell aplicando-as, em sua forma *integral*, à camada de transição, e passando ao limite  $h \rightarrow 0$ . A discussão abaixo é análoga à que se encontra em *Fís.Bás.* 3, Seç. 5.7.

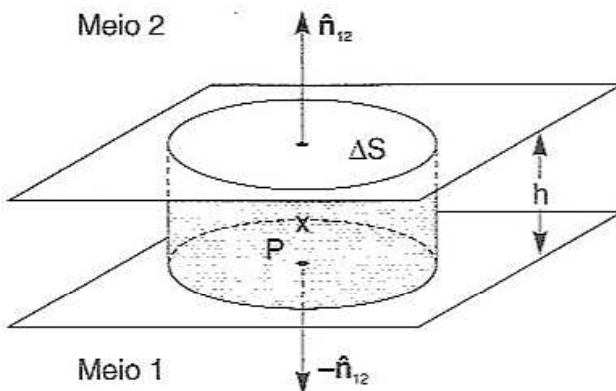


Fig. 5.6 Cálculo da divergência superficial

Seja  $P$  um ponto interno à camada e  $\mathbf{v}$  um vetor que pode representar um qualquer dos campos eletromagnéticos. Apliquemos o teorema da divergência a um volume cilíndrico (fig. 5.6) centrado em  $P$ , com bases de área  $\Delta S$  nos dois meios e altura  $h$ , onde faremos  $h \rightarrow 0$ , de modo que o fluxo através da superfície lateral do cilindro será desprezível em confronto com o fluxo através das bases. Se  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$  é o versor da normal a  $\Delta S$  orientado *do meio 1 para o meio 2* (fig. 5.6), obtemos então:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \Delta S \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} - \Delta S \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} = \int_V \text{div } \mathbf{v} dV \\ &= \text{div } \mathbf{v} \Delta V = \text{div } \mathbf{v} \Delta S h \end{aligned}$$

onde  $h$  é infinitésimo de ordem superior a  $\Delta S$ . Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \operatorname{div} \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \equiv \operatorname{Div} \mathbf{v} \quad (5.53)$$

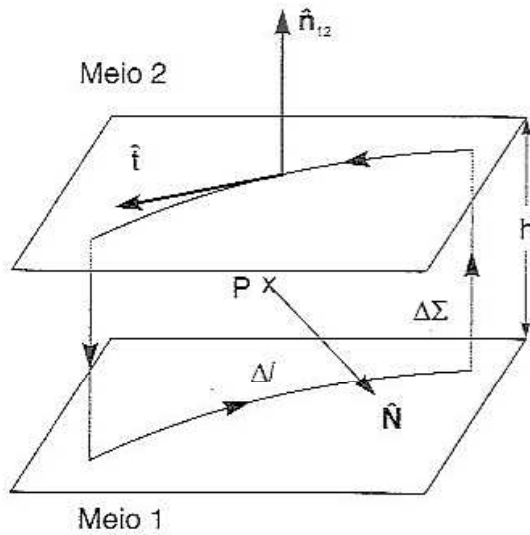


Fig. 5.7 Cálculo do rotacional superficial

onde  $\operatorname{Div} \mathbf{v}$  é chamado de *divergência superficial* do vetor  $\mathbf{v}$ . Vemos que mede a *descontinuidade na componente normal* de  $\mathbf{v}$  (diferença entre as componentes de  $\mathbf{v}$  normais à interface nos dois meios).

Analogamente, seja  $\Gamma$  um circuito orientado retangular, de altura  $h$  e base  $\Delta l$  ( $h$  infinitésimo de ordem superior a  $\Delta l$ ), centrado em  $P$  e apoiado entre os dois meios (fig. 5.7), e apliquemos o teorema de Stokes à circulação de  $\mathbf{v}$  ao longo de  $\Gamma$ , desprezando a contribuição dos lados de altura  $h$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta l - \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta l = \int_{\Delta \Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} d\Sigma = \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} \Delta l h \quad (5.54)$$

onde  $\hat{\mathbf{t}}$  é o versor da tangente a  $\Gamma$  no meio 2 e  $\hat{\mathbf{N}}$  é o versor da normal à área  $\Delta \Sigma$  interna a  $\Gamma$ . Vemos pela fig. 5.7 que

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad (5.55)$$

de modo que a (5.54) fica

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{n}}_{12}) = [\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)] \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (5.56)$$

Como a orientação de  $\hat{\mathbf{N}}$  num plano paralelo à interface é arbitrária, concluímos que\*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \operatorname{rot} \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \equiv \operatorname{Rot} \mathbf{v} \quad (5.57)$$

\* Sendo sempre  $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} = 0$ , poderia haver, em princípio, uma componente de  $h \operatorname{rot} \mathbf{v} // \hat{\mathbf{n}}_{12}$ . Entretanto, isso não acontece, porque uma tal componente, tomando  $z // \hat{\mathbf{n}}_{12}$ , seria

$$h \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

que  $\rightarrow 0$  com  $h$ , porque as derivadas de  $\mathbf{v}$  em direções tangenciais à interface permanecem finitas.

onde  $\text{Rot } \mathbf{v}$  é o *rotacional superficial* de  $\mathbf{v}$ , e mede a descontinuidade na componente tangencial de  $\mathbf{v}$ .

Se multiplicarmos, nas equações de Maxwell (5.1), os dois membros das (II) e (IV) por  $h$ , fazendo  $h \rightarrow 0$  e notando que derivadas em relação ao tempo, como  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ , permanecem finitas, obtemos

$$\begin{aligned} \text{(II')} \quad \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \text{(IV')} \quad \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

que são *condições de contorno gerais* para o campo eletromagnético [porque as eqs. (II) e (IV) valem sempre]:

A componente tangencial de  $\mathbf{E}$  e a componente normal de  $\mathbf{B}$  são sempre contínuas na interface entre dois meios diferentes.

As (I) e (III) das (5.1), válidas para meios transparentes, com  $\rho = \mathbf{j} = 0$ , mostram que, neste caso, a componente tangencial de  $\mathbf{B}$  também permanece contínua,

$$\text{(I')} \quad \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (5.58a)$$

de forma que  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$ , e a componente normal de  $\mathbf{D} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$  também é contínua.

## 5.6 Reflexão e refração. Fórmulas de Fresnel

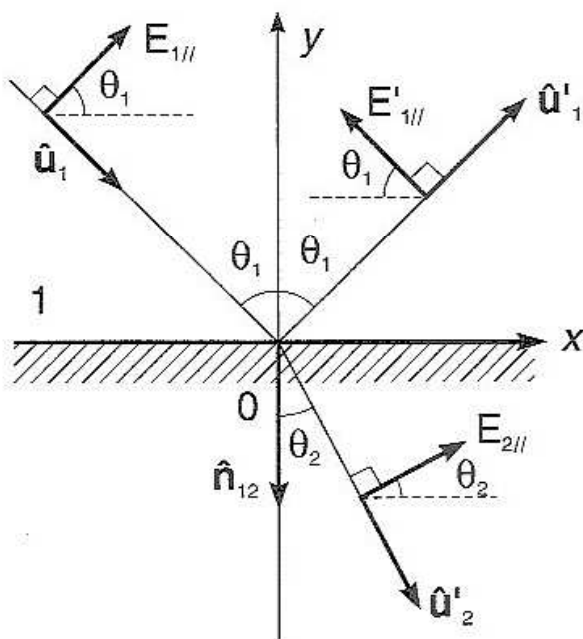


Fig. 5.8 Reflexão e refração

Consideremos uma onda plana monocromática (omitimos o fator  $e^{-i\omega t}$ ) incidente sobre a interface plana entre dois meios transparentes de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  (fig. 5.8):

Os versores das direções de propagação das ondas incidente, refletida e refratada são respectivamente (fig. 5.8):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1 &= \text{sen } \theta_1 \hat{\mathbf{x}} - \text{cos } \theta_1 \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{u}}'_1 &= \text{sen } \theta_1 \hat{\mathbf{x}} + \text{cos } \theta_1 \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= \text{sen } \theta_2 \hat{\mathbf{x}} - \text{cos } \theta_2 \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (5.59)$$





onde as componentes  $\perp$  estão na direção  $\hat{z}$  (fig. 5.8).

As condições de contorno (5.58), onde  $\hat{n}_{12} = -\hat{y}$ , dão (lembrando que  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  na interface, neste caso)

$$\hat{y} \times \mathbf{E}_1|_{y=0} = \hat{y} \times \mathbf{E}_2|_{y=0} \quad (5.64)$$

$$\hat{y} \times \mathbf{B}_1|_{y=0} = \hat{y} \times \mathbf{B}_2|_{y=0}$$

Pelas (5.61) e pelas leis da reflexão e da refração, temos

$$\boxed{e^{i\phi_1}|_{y=0} = e^{i\phi'_1}|_{y=0} = e^{i\phi_2}|_{y=0}} \quad (5.65)$$

de forma que esse fator comum pode ser cancelado. De fato, a dedução das leis pela teoria ondulatória, vista na Seç. 2.2, equivale a dizer que *a componente tangencial do vetor de onda  $\mathbf{k}$  se conserva*, o que leva às (5.65).

As (5.62) e (5.64) dão então:

$$\boxed{\begin{cases} A_1 + A'_1 = A_2 \\ (B_1 - B'_1) \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \end{cases}} \quad (5.66)$$

Pelas (5.59),

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{z}} = -\cos \theta_1 \hat{\mathbf{x}} - \text{sen } \theta_1 \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{u}}'_1 \times \hat{\mathbf{z}} = +\cos \theta_1 \hat{\mathbf{x}} - \text{sen } \theta_1 \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \times \hat{\mathbf{z}} = -\cos \theta_2 \hat{\mathbf{x}} - \text{sen } \theta_2 \hat{\mathbf{y}} \end{cases} \quad (5.67)$$

de forma que as (5.63) e (5.64) dão

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{v_1} (B_1 + B'_1) = \frac{1}{v_2} B_2 \\ \frac{1}{v_1} (A_1 - A'_1) \cos \theta_1 = \frac{1}{v_2} A_2 \cos \theta_2 \end{cases}} \quad (5.68)$$

Vemos que as (5.66) e (5.68) se separam em dois grupos independentes, um contendo só as amplitudes  $A$  e outro só para as amplitudes  $B$ . É por essa razão que o uso de polarizações lineares  $//$  e  $\perp$  ao plano de incidência é o mais conveniente.

Dadas as amplitudes  $A_1$  e  $B_1$  do campo elétrico da onda incidente, interessamos obter:

$$\begin{array}{l} R_{\perp} \equiv \frac{A'_1}{A_1} \quad , \quad R_{\parallel} \equiv \frac{B'_1}{B_1} \quad \text{amplitudes de reflexão} \\ T_{\perp} \equiv \frac{A_2}{A_1} \quad , \quad T_{\parallel} \equiv \frac{B_2}{B_1} \quad \text{amplitudes de transmissão} \end{array} \quad (5.69)$$

o que pode ser feito, porque temos, para cada par destas grandezas, um sistema de duas equações a duas incógnitas. Lembrando que [cf.(2.7)]  $v_1/v_2 = n_{12} \equiv n$  (vamos omitir o índice 12), as (5.66) e (5.68) dão:

$$\begin{array}{l} A_1 + A'_1 = A_2 \\ A_1 - A'_1 = n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} A_2 \end{array} \quad (5.65)$$

e

$$\begin{array}{l} B_1 + B'_1 = n B_2 \\ B_1 - B'_1 = n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} B_2 \end{array} \quad (5.66)$$

As amplitudes de reflexão e de transmissão obtêm-se facilmente resolvendo essas equações. Combinando os resultados com a lei de Snell, obtêm-se (Probl. 5.10)

$$R_{\perp} = - \frac{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \quad (5.67)$$

e

$$R_{\parallel} = \frac{\text{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \quad (5.68)$$

que são as *fórmulas de Fresnel* para as amplitudes de reflexão. Obtêm-se resultados análogos para as amplitudes de transmissão.

Os resultados se simplificam para *incidência*  $\perp$  ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ). Resulta

$$R_{\parallel} = \frac{n-1}{n+1} = -R_{\perp} \quad (\theta_1 = 0) \quad (5.69)$$

que na verdade é o mesmo resultado nos dois casos. Com efeito, para  $\theta_1 = 0$ , o plano de incidência não é definido; a diferença de sinal na (5.69) resulta só de ter adotado convenções de orientação opostas para  $E'_{1\parallel}$  e  $E'_{1\perp}$  neste caso (fig. 5.8). Como  $R_{\parallel} > 0$  para  $n > 1$ , isto implica que as direções de  $E'_1$  e  $E_1$  são *opostas* neste caso [defasagem de  $\pi$ , cf. (3.28)].

## 5.7 Refletividade

Por definição, a *refletividade* é a fração da intensidade incidente sobre uma determinada área da interface que se reflete (porcentagem de reflexão). Lembrando a expressão da intensidade (5.24) e que as ondas incidente e refletida se propagam no mesmo meio e são simétricas em relação à normal, resulta que a refletividade  $r$  é dada por (em notação complexa)

$$r = \frac{|E'_1|^2}{|E_1|^2} \quad (5.70)$$

Em particular, para uma onda incidente *linearmente polarizada* com *polarização*  $\perp$  ou *polarização*  $\parallel$ , respectivamente, as fórmulas de Fresnel dão

$$r_{\perp} = \frac{\text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)} \quad ; \quad r_{\parallel} = \frac{\text{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (5.71)$$

e, para incidência  $\perp$  [cf.(5.69)]

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (\theta_1 = 0) \quad (5.72)$$

Vamos discutir o andamento de  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  em função do ângulo de incidência  $\theta_1$ , supondo  $n > 1$  (meio 2 mais refringente que 1).

Conforme já foi antecipado na Seç. 2.4, a refletividade é em geral muito pequena na incidência  $\perp$ . A (5.72) mostra que é  $\approx (1/7)^2 \sim 2\%$  para uma interface ar/água ( $n \approx 4/3$ ), e é  $\approx (1/5)^2 \sim 4\%$  para uma interface ar/vidro ( $n \approx 3/2$ ).

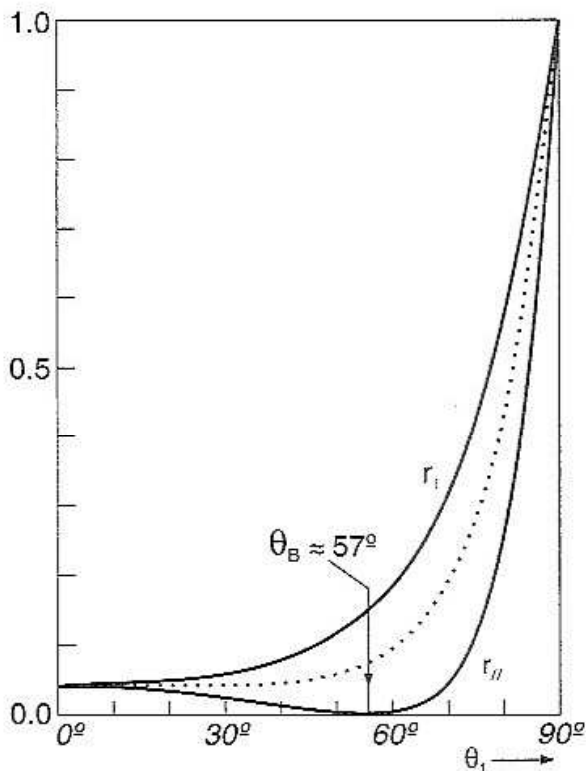
Por outro lado, para incidência rasante ( $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ ), as (5.71) mostram que  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  tendem a 1, ou seja, a luz tende a ser totalmente refletida (superfície de um lago atuando como espelho em relação a uma margem distante).

Que acontece entre esses dois limites? Pode-se mostrar (Probl. 5.15) que

$$dr_{\perp} / d\theta_1 > 0 \quad \left( 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.73)$$

de modo que  $r_{\perp}$  cresce monotonicamente entre seus valores extremos. Para valores de  $n$  usuais (não  $\gg 1$ ) é preciso aproximar-se bastante da incidência rasante para que a reflexão seja apreciável.

Já  $r_{\parallel}$  tem um andamento diferente.



Com efeito, a (5.71) mostra que existe um ângulo de incidência  $\theta_1 \equiv \theta_B$  para o qual  $r_{\parallel} = 0$ . É aquele para o qual o denominador  $\rightarrow \infty$ , ou seja,  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ , o que dá, usando a lei de Snell (cf. Probl. 2.1),

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_B = n} \quad (5.74)$$

Para  $0 < \theta_1 < \theta_B$ ,  $r_{\parallel}$  decresce monotonicamente; para  $\theta_1 > \theta_B$ , cresce monotonicamente para 1 (fig. 5.9).

Fig. 5.9 Refletividades para uma interface ar/vidro

Que acontece se a luz incidente é linearmente polarizada numa direção intermediária entre  $\perp$  e  $\parallel$  ?

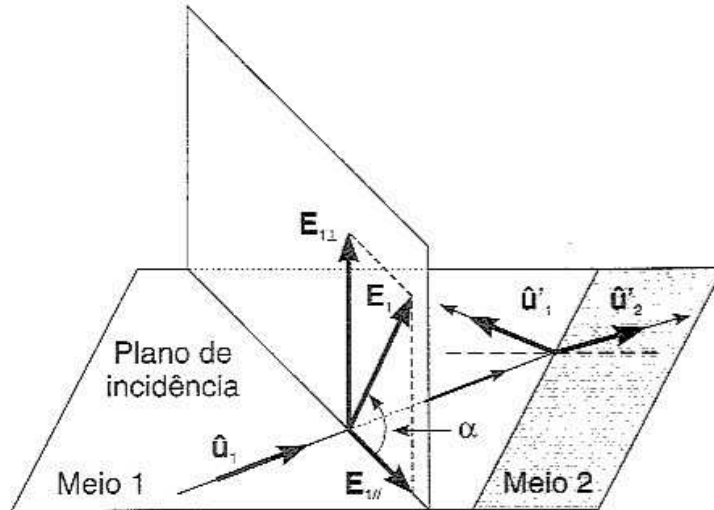


Fig. 5.10 Azimute de incidência

Seja  $\mathbf{E}_1$  o campo elétrico da onda incidente e  $\alpha$  seu *azimute*, definido como o ângulo que faz com *sua projeção*  $\mathbf{E}_{1||}$  sobre o plano de incidência. As componentes  $\perp$  e  $\parallel$  de  $\mathbf{E}_1$  são dadas por (fig. 5.10)

$$\boxed{|\mathbf{E}_{1||}| = |\mathbf{E}_1| \cos \alpha \quad ; \quad |\mathbf{E}_{1\perp}| = |\mathbf{E}_1| \sin \alpha} \quad (5.75)$$

Logo, as componentes  $\perp$  e  $\parallel$  da onda refletida são

$$|\mathbf{E}'_{1||}| = |\mathbf{R}_{||}| |\mathbf{E}_{1||}| = |\mathbf{R}_{||}| |\mathbf{E}_1| \cos \alpha$$

$$|\mathbf{E}'_{1\perp}| = |\mathbf{R}_{\perp}| |\mathbf{E}_{1\perp}| = |\mathbf{R}_{\perp}| |\mathbf{E}_1| \sin \alpha$$

e, como  $|\mathbf{E}'_1|^2 = |\mathbf{E}'_{1||}|^2 + |\mathbf{E}'_{1\perp}|^2$ , a (5.70) dá

$$\boxed{r = r_{||} \cos^2 \alpha + r_{\perp} \sin^2 \alpha} \quad (5.76)$$

## 5.8 Polarização por reflexão

Para  $\theta_1 = \theta_B$ , temos  $r_{||} = 0$ . Logo, se, a onda incidente tiver polarização linear  $\parallel$ , *não há onda refletida*: toda a luz é transmitida. Se a onda incidente é linearmente polarizada com azimute  $\alpha$  qualquer, somente a componente  $\mathbf{E}_{1\perp}$  é refletida nesse ângulo. Logo, nesse caso, *a luz refletida é linearmente polarizada, com  $\mathbf{E}'_1$  perpendicular ao plano de incidência.*



Mais geralmente, isso acontece qualquer que seja a polarização (elíptica) de uma onda incidente monocromática, pois também podemos decompô-la em componentes  $\parallel$  e  $\perp$ . E acontece também para *luz natural*, emitida por um corpo incandescente, como a luz solar, p. ex. .

Com efeito, cada componente monocromática do espectro da luz solar pode ser decomposta em componentes  $\parallel$  e  $\perp$ . Assim, se luz solar incide sobre uma placa de vidro segundo um ângulo  $\theta_1 = \theta_B \approx 57^\circ$ , a luz refletida é linearmente polarizada, com  $\mathbf{E}_1' \perp$  ao plano de incidência.

Foi assim que Malus descobriu a polarização por reflexão: estava observando, em Paris, a luz do sol poente refletida pelas janelas do palácio do Luxemburgo, através de um cristal sensível à polarização.

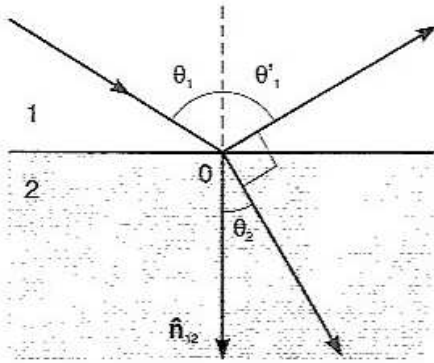


Fig. 5.11 A lei de Brewster

Para  $\theta_1 = \theta_B$ , por definição,  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . Isso equivale a dizer que *o ângulo de polarização  $\theta_B$  é aquele ângulo de incidência para o qual, segundo as leis da reflexão e da refração, o raio refletido é perpendicular ao raio refratado* (fig. 5.11). Este resultado, descoberto por David Brewster em 1815, chama-se *lei de Brewster*.

Para luz natural, o vetor  $\mathbf{E}_1$  da onda incidente, em cada instante  $t$ , pode ser decomposto em  $\mathbf{E}_{1\parallel}$  e  $\mathbf{E}_{1\perp}$ , associados ao azimute instantâneo  $\alpha(t)$ . Entretanto,  $\alpha$  variará rapidamente e *ao acaso* com o tempo: todos os valores de  $\alpha$  serão igualmente prováveis, o que implica

$$\langle \cos^2 \alpha \rangle = \langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2} \quad (5.77)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  é a média temporal. A (5.76) dá então a *refletividade para luz natural*

$$r = \frac{1}{2} (r_{\parallel} + r_{\perp}) \quad (5.78)$$

A curva correspondente está representada em linha interrompida na fig. 5.9.

Embora a luz *incidente* natural seja *não-polarizada* [cf.(5.77)], isto não é verdade para a luz *refletida*. Com efeito, na luz refletida, teremos

$$\frac{\langle |E'_{1\parallel}|^2 \rangle}{\langle |E'_{1\perp}|^2 \rangle} = \frac{r_{\parallel} \langle |E_{1\parallel}|^2 \rangle}{r_{\perp} \langle |E_{1\perp}|^2 \rangle} = \frac{r_{\parallel}}{r_{\perp}} = \frac{\cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (5.79)$$

onde usamos as (5.71).

A razão (5.79) só é = 1 para incidência  $\perp$  ( $\theta_1 = 0$ ) ou razante ( $\theta_1 = \pi/2$ ). Entre esses dois extremos, como se vê pela fig. 5.9, ela é  $< 1$ , ou seja, a luz refletida é *parcialmente polarizada*, com predomínio da componente  $\perp$ . O grau de polarização é definido por

$$P = \frac{r_{\perp} - r_{\parallel}}{r_{\perp} + r_{\parallel}} \quad (5.80)$$

com  $0 \leq P \leq 1$ . Para  $\theta_1 = 0$  ou  $\theta_1 = \pi/2$ , tem-se  $P = 0$ : a luz refletida continua sendo luz natural. Para  $\theta_1 = \theta_B$ , é  $r_{\parallel} = 0$  e  $P = 1$ : a luz refletida é *totalmente polarizada*.

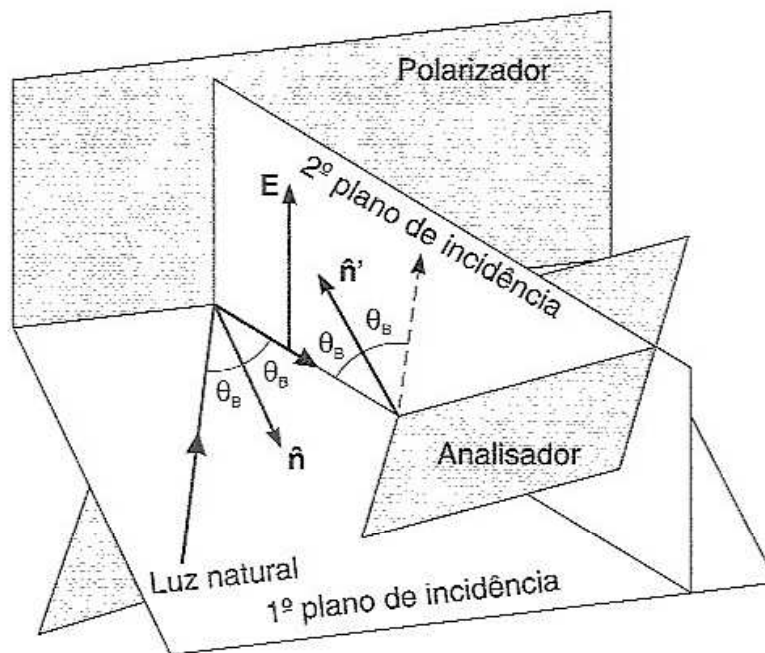


Fig. 5.12 Polarização por reflexão

Isso pode ser verificado experimentalmente fazendo com que a luz refletida por uma placa do material (p. ex., vidro) segundo o ângulo  $\theta_B$  incida sobre uma placa do mesmo material, situada de tal forma que a componente  $E_{\perp}$  em relação à 1.ª placa (*polarizador*) passe a ser a componente  $E_{\parallel}$  em relação a 2.ª (*analisador*). Para isso, basta que o 2.º plano de incidência seja  $\perp$  ao 1.º (fig. 5.12). Se, além disso,

orientarmos a placa analisadora de tal forma que o ângulo de incidência sobre ela também seja  $\theta_B$ , não há luz refletida pela 2.ª placa (fig. 5.12).

Suponhamos agora que, sempre mantendo fixo o ângulo de incidência  $\theta_B$  sobre o analisador, façamos que ele gire (a normal  $\hat{\mathbf{n}}$  ao plano do analisador na fig. 5.12 permanece sobre o cone de eixo sobre o raio e abertura  $\theta_B$ ). O ângulo  $\beta$  entre os dois planos de incidência deixa de ser  $\pi/2$ . Esse é também o ângulo entre as normais aos dois planos. Como  $\mathbf{E}$  da onda incidente sobre o analisador é  $\perp$  ao 1.º plano de incidência (fixo),  $\beta$  é também o ângulo entre  $\mathbf{E}$  e a normal ao 2.º plano de incidência, o que implica (veja a fig. 5.10)

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (5.81)$$

onde  $\alpha$  é o *azimute* de incidência sobre o analisador.

Podemos então aplicar a (5.76), onde  $r_{11} = 0$ :

$$\begin{array}{l} \text{refletividade} \\ \text{na 2ª reflexão} \end{array} \quad r = r_{\perp} \sin^2 \alpha = r_{\perp} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = r_{\perp} \cos^2 \beta \end{array} \right. \quad (5.82)$$

Essa relação mostra como varia a intensidade da luz refletida pelo analisador com o ângulo  $\beta$ . Ela é  $= 0$  na situação anterior [diz-se neste caso que o polarizador e o analisador estão com seus eixos *cruzados* ( $\beta = \pi/2$ )], e é máxima para  $\beta = 0$ , quando os dois planos de incidência são paralelos, de modo que o vetor  $\mathbf{E}$  incidente é  $\perp$  a ambos. Note que  $\beta$  é o ângulo entre a direção de vibração da luz incidente sobre o analisador (direção de  $\mathbf{E}$ ) e a direção para a qual a intensidade é máxima ( $\beta = 0$ ).

A (5.82) é um caso particular da *LEI de MALUS*: a intensidade analisada varia proporcionalmente ao quadrado do cosseno do ângulo entre a direção de vibração da luz incidente sobre o analisador e a direção para a qual a intensidade da luz analisada é máxima.

O aparelho constituído pelo par de placas de vidro chama-se *polariscópio de Nörrenberg*. O *polarizador* transforma luz natural em luz linearmente polarizada; o *analisador* permite detetar (analisar) a existência de polarização, fazendo variar  $\beta$ . Polarizador e analisador funcionam como *filtros de polarização*.

Uma placa de vidro não é um polarizador muito eficiente. O gráfico da fig. 5.9 mostra que  $r_{\perp} \approx 0,15$  para  $\theta_i = \theta_B$ . Aplicando a (5.78), concluímos que apenas 7,5% da intensidade incidente sobre o polarizador são aproveitados.

Outros métodos de polarizar e analisar a luz empregam a *transmissão* através de *meios anisotrópicos*, como os cristais, cujas propriedades variam com a direção relativamente a seus eixos de simetria. Em seu "Tratado sobre a Luz" (1690), Huygens já discutia as propriedades óticas da calcita (conhecida naquela época como espato da Islândia), que pode ser empregada para produzir e analisar luz polarizada (prismas de Nicol).

Edwin H. Land criou um material artificial, o *Polaroid*, capaz de absorver fortemente uma polarização linear preferencial, ao mesmo tempo que transmite a polarização ortogonal a essa. Um material que absorve diferentemente duas polarizações lineares ortogonais chama-se *dicróico*. O polaróide é um plástico constituído de moléculas de um polímero orgânico sintético, o álcool polivinílico; são moléculas muito longas. Lâminas desse material são estiradas numa direção, produzindo o alinhamento preferencial das moléculas; o dicroísmo é reforçado pela adição de iodo. Como a luz solar refletida é parcialmente polarizada [cf. (5.80)], os óculos de Polaroid funcionam como óculos de sol e atenuam a luz refletida.

## 5.9 Reflexão Total

Até aqui, só discutimos o comportamento da refletividade para índice de refração relativo  $n > 1$ , quando o meio 2 é mais refringente que 1.

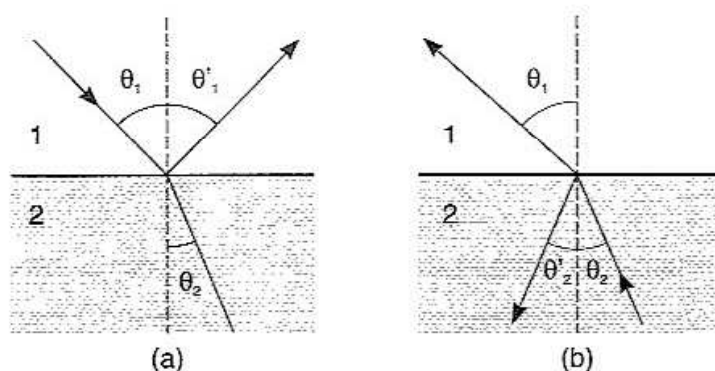


Fig. 5.13 Reversibilidade dos raios

Para ver o que acontece quando  $n < 1$ , notemos primeiro que, pelas leis da reflexão e da refração, se invertermos o percurso do raio refratado [fig. 5.13(b)], inverte-se também o percurso do raio incidente, que passa a ser o raio transmitido.

Por outro lado, as expressões (5.71) da refletividade não se alteram se trocarmos os papéis de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :  $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$ , o que troca  $n \leftrightarrow 1/n$  [isto também não altera a (5.72)], ou seja, *a interface reflete igualmente bem de ambos os lados*.

Essa *lei de reciprocidade* permite obter o andamento de  $r_{\parallel}$  e  $r_{\perp}$  em função do ângulo de incidência  $\theta_1$  para uma interface com  $n < 1$  (p. ex., vidro/ar,  $n = 2/3$ ) a partir dos valores correspondentes para a transição inversa (ar/vidro,  $n = 3/2$ ), trocando a escala de abscissas  $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ .

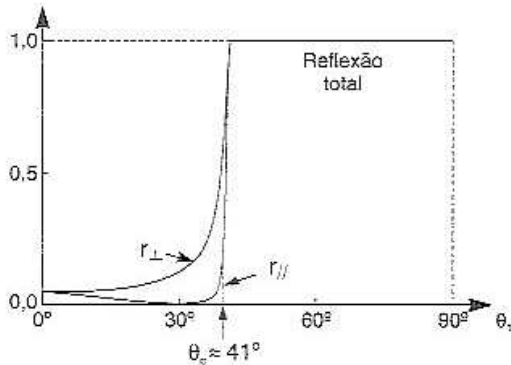


Fig. 5.14 Refletividades para uma interface vidro/ar

O resultado, para uma interface vidro/ar ( $n \approx 2/3$ ), está representado na fig. 5.14. As curvas do gráfico da fig. 5.9 aparecem “comprimidas” entre  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_1 = \theta_c$ , onde  $\theta_c$  é o *ângulo crítico* definido na (2.13),

$$\boxed{\text{sen } \theta_c = n} \quad (5.83)$$

que, para uma interface vidro/ar, é  $\approx 41^\circ$ . Para  $\theta_1 \rightarrow \theta_c$ , tanto  $r_{\perp}$  como  $r_{\parallel}$  tendem a 1 (reflexão total).

Que acontece para  $\theta_1 > \theta_c$ ? Como indicado na fig. 5.14 e visto na Seç. 2.4, ocorre a *reflexão total*, ou seja,  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  permanecem iguais a 1. Entretanto, isso não significa que o campo eletromagnético no meio 2 seja idênticamente nulo, pois ele é  $\neq 0$  no meio 1 e isto violaria as condições de contorno.

A lei de Snell daria

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n} \text{sen } \theta_1 > 1 \quad \text{para } \theta_1 > \theta_c \quad (5.84)$$

o que não pode ser satisfeito por um valor *real* de  $\theta_2$ , mas pode ser satisfeito por um valor *complexo*, que é permitido porque estamos usando notação complexa.

As funções  $\cos z$  e  $\text{sen } z$  para  $z = x + iy$  complexo são definidas pelas fórmulas de Euler,

$$\boxed{\cos z \equiv \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad , \quad \text{sen } z \equiv \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})} \quad (5.85)$$

o que dá

$$\boxed{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - i\Psi \right) = \cos(i\Psi) = \frac{1}{2} (e^{-\Psi} + e^{\Psi}) = \operatorname{ch} \Psi} \quad (5.86)$$

que é a função *coseno hiperbólico*,  $> 1$  para  $\Psi > 0$ .

Logo, podemos continuar satisfazendo a lei de Snell para  $\theta_1 > \theta_c$ , tomando

$$\boxed{\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\Psi \quad , \quad \operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{ch} \Psi = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{n} > 1} \quad (\theta_1 > \theta_c) \quad (5.87)$$

Embora até aqui tenhamos interpretado  $\theta_2$  geometricamente, como um ângulo, a verificação das equações de Maxwell e das condições de contorno só depende das propriedades *analíticas* de  $\cos z$  e  $\operatorname{sen} z$ , que permanecem as mesmas para  $z$  complexo.

Assim, as fórmulas de Fresnel (5.67) e (5.68) permanecem válidas, o que dá

$$\left. \begin{aligned} R_{\perp} &= -\frac{\operatorname{sen} \left( \theta_1 - \frac{\pi}{2} + i\Psi \right)}{\operatorname{sen} \left( \theta_1 + \frac{\pi}{2} - i\Psi \right)} = \frac{\cos(\theta_1 + i\Psi)}{\cos(\theta_1 - i\Psi)} = e^{i\delta_{\perp}} \\ R_{\parallel} &= \frac{\operatorname{tg} \left( \theta_1 - \frac{\pi}{2} + i\Psi \right)}{\operatorname{tg} \left( \theta_1 + \frac{\pi}{2} - i\Psi \right)} = \frac{\operatorname{cotg}(\theta_1 + i\Psi)}{\operatorname{cotg}(\theta_1 - i\Psi)} = e^{i\delta_{\parallel}} \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

onde usamos o fato de que o numerador e denominador são *complexos conjugados*, de forma que o quociente é um *fator de fase* ( $\delta_{\perp}$  e  $\delta_{\parallel}$  são reais). Logo,

$$\boxed{r_{\perp} = |R_{\perp}|^2 = r_{\parallel} = |R_{\parallel}|^2 = 1 \quad , \quad \theta_1 \geq \theta_c} \quad (5.89)$$

confirmando a ocorrência de *reflexão total* acima da incidência crítica.

Além disso, vemos pelas (5.88) que as componentes  $\perp$  e  $\parallel$  da luz refletida sofrem defasagens diferentes, criando uma diferença de fase

$$\delta \equiv \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} \quad (5.90)$$



entre as duas componentes;  $\delta$  varia com  $\theta_1$ . Podemos usar esse resultado para produzir *luz elipticamente polarizada* a partir de luz incidente linearmente polarizada, através de uma única reflexão total.

## 5.10 Penetração da luz no meio menos denso

Vejam agora como interpretar o valor complexo (5.87) de  $\theta_2$  para o campo eletromagnético que penetra no meio opticamente menos denso ( $n_2 < n_1$ ).

O fator de propagação dos campos no meio 2,  $e^{i\phi_2}$ , é dado pela (5.61), onde temos de substituir  $\theta_2$  pela (5.87), que também dá  $\sin \theta_2$ .

Por outro lado,

$$\cos \theta_2 = \cos \left( \frac{\pi}{2} - i\Psi \right) = \sin (i\Psi) = \frac{e^{-\Psi} - e^{\Psi}}{2i} = i \operatorname{sh} \Psi \quad (5.90)$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \exp(i\phi_2) &= \exp \left[ i n_2 k_0 (x \operatorname{ch} \Psi - i y \operatorname{sh} \Psi) \right] \\ &= \exp (i n_2 \operatorname{ch} \Psi k_0 x) e^{+n_2 k_0 \operatorname{sh} \Psi y} \end{aligned} \quad (5.91)$$

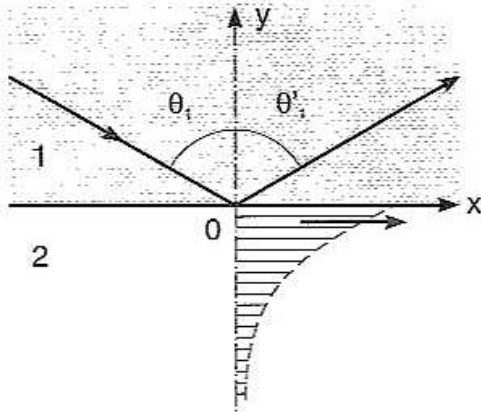


Fig. 5.15 Onda evanescente

o que representa uma onda que se *propaga na direção x* e se *atenua exponencialmente na direção  $y < 0$* , isto é, à medida que penetra no meio 2: temos de tomar  $\Psi > 0$  na (5.87). Como o meio 2 é transparente, essa atenuação *não* está associada à absorção de energia. Uma onda desse tipo (fig. 5.15) chama-se *onda evanescente*.

Se tomarmos, p. ex., a componente  $\perp$  na (5.62), supondo  $A_2$  real, e voltarmos à notação real, o campo elétrico no meio 2 fica (reintroduzindo a dependência temporal)

$$\mathbf{E}_2 = A_2 \cos(k'x - \omega t) e^{k'y} \hat{\mathbf{z}} \quad (y < 0) \quad (5.92)$$

onde

$$k' \equiv n_2 k_0 \operatorname{ch} \Psi \quad ; \quad \kappa \equiv n_2 k_0 \operatorname{sh} \Psi \quad (5.93)$$

O campo magnético correspondente é dado pela (5.62), onde  $\hat{\mathbf{u}}_2 \times \hat{\mathbf{z}}$  resulta da (5.67):

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{A_2}{v_2} \left( \frac{\cos \theta_2}{i \operatorname{sh} \Psi} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{ch} \Psi} \hat{\mathbf{y}} \right) e^{i(\theta_2 - \omega t)}$$

ou, voltando à notação real,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 = & +\frac{A_2}{v_2} \operatorname{sh} \Psi \operatorname{sen} (k'x - \omega t) e^{\kappa y} \hat{\mathbf{x}} \\ & -\frac{A_2}{v_2} \operatorname{ch} \Psi \cos (k'x - \omega t) e^{\kappa y} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (5.94)$$

As (5.92)-(5.94) mostram a estrutura da onda no meio 2.

Definimos a *profundidade de penetração* como a profundidade  $|y| = d$  para a qual as amplitudes de  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{B}_2$  se reduzem a  $e^{-1} = 1/e$  do seu valor na interface. Portanto,

$$d = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{n_2 k_0 \operatorname{sh} \Psi} = \frac{\lambda_0}{2\pi n_2 \operatorname{sh} \Psi} \quad (5.95)$$

No ângulo crítico  $\theta_1 = \theta_c$ , temos  $\Psi = 0$  e a profundidade de penetração é infinita, mas  $\Psi$  aumenta rapidamente para  $\theta_1 > \theta_c$  [cf.(5.87)], e  $d$  cai logo a uma fração de comprimento de onda.

À primeira vista, parece haver uma contradição com a conservação da energia: como pode haver penetração da onda no meio 2 se a reflexão é total? Para ver o que acontece com a energia, calculemos a densidade de corrente de energia no meio 2, dada pelo vetor de Poynting (real) associado às (5.92)-(5.94):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2 = \\
 &= \frac{(A_2)^2}{\mu_0 v_2} \operatorname{ch} \Psi e^{2\kappa y} \cos^2 (k'x - \omega t) \hat{\mathbf{x}} \\
 &+ \frac{(A_2)^2}{\mu_0 v_2} \operatorname{sh} \Psi e^{2\kappa y} \operatorname{sen} (k'x - \omega t) \cos (k'x - \omega t) \hat{\mathbf{y}}
 \end{aligned}
 \tag{5.96}$$

Vemos que, em cada instante, há uma corrente de energia *positiva* na direção  $\hat{\mathbf{x}}$ , ao passo que a componente  $\hat{\mathbf{y}}$  oscila entre valores positivos e negativos (com valor médio = 0) ao longo da interface.

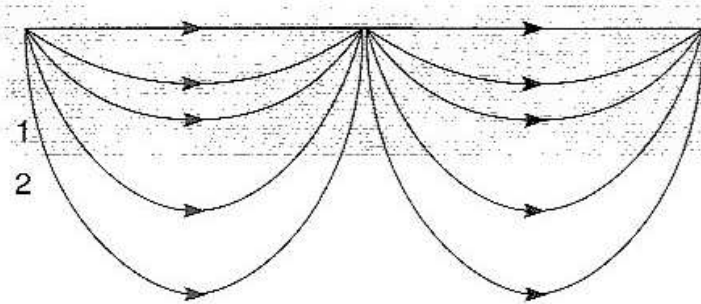


Fig. 5.16 Linhas de corrente da energia na reflexão total

Uma porção das “linhas de força” de  $\mathbf{S}_2$  (linhas de corrente da energia) num dado instante  $t$  na vizinhança da interface está representada na fig. 5.16. O conjunto se desloca para a direita com a variação de  $t$ . Se tomarmos uma média temporal ou espacial (sobre um intervalo de vários comprimentos de onda), obtemos das (5.96)

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S}_{2,x} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{(A_2)^2}{\mu_0 v_2} \operatorname{ch} \Psi e^{2\kappa y} \\
 \langle \mathbf{S}_{2,y} \rangle &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.97}$$

É fácil verificar que o vetor de Poynting complexo leva ao mesmo resultado.

Vemos assim que, na direção  $y$ , a energia penetra e sai do meio 2, sem que, em média, haja transporte de energia para dentro do meio: a corrente de energia faz *meandros* em torno da interface.

Isso ainda não explica como a energia pôde inicialmente penetrar no meio 2. Não dá para ver isso numa solução *estacionária*, como a que estamos considerando: a dependência temporal foi suposta *monocromática* de frequência  $\omega$  para  $-\infty < t < \infty$ : seria preciso considerar um problema não-estacionário, correspondendo a uma superposição de frequências.

Outra idealização foi termos considerado uma onda *plana* incidente, que tem extensão infinita. No caso mais realista de um feixe de luz limitado lateralmente, tem-se uma superposição de ondas planas cujas direções de propagação variam, de modo que para uma parte delas a incidência está abaixo do ângulo crítico. Verifica-se nesse caso que a energia penetra e sai do meio 2 pelas *fronteiras* do feixe.

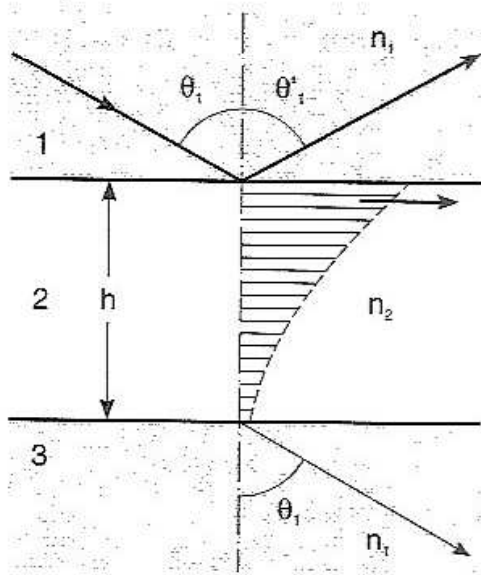


Fig. 5.17 Reflexão total frustrada

penetração  $d$ ; caso contrário, a atenuação exponencial da onda evanescente torna  $|E_3|$  tão pequeno que não se consegue detetar a onda transmitida através da camada.

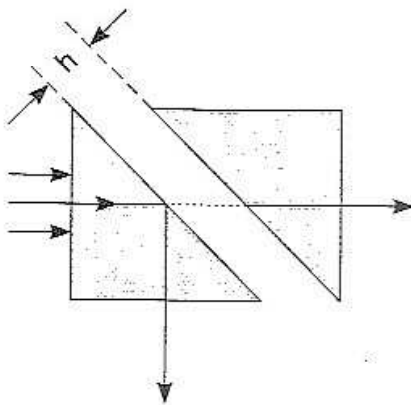


Fig. 5.18 Experimento de J. Bose

Sinais mais fracos puderam ser detetados atrás do 2.º prisma, com intensidade cres-

Que acontece se tivermos uma *lâmina de faces paralelas* de espessura  $h$ , com  $n_2 < n_1$ , e um ângulo  $\theta_1 > \theta_c$  no 1.º meio? A onda evanescente no meio 2 terá então ainda uma amplitude finita ao atingir a outra interface, e dará origem a uma onda transmitida  $E_3$  que se propaga na direção  $\theta_1$  (fig. 5.17).

Logo, a reflexão deixa de ser total: o fenômeno chama-se *reflexão total frustrada*. Entretanto, para que  $E_3$  tenha amplitude perceptível, é preciso que a espessura  $h$  não seja  $\gg$  que a profundidade de

Por isso, o efeito é muito difícil de observar na região do visível, uma vez que  $h$  não pode ser  $\gg$  que o comprimento de onda ( $d$  é  $\sim \lambda$ ). Mas ele pode ser facilmente detetado com ondas de rádio. Num experimento feito por J. Bose, dois prismas de asfalto (fig. 5.18) estavam separados por uma distância  $h$  de vários cm e uma onda incidente de  $\lambda \cong 20$  cm sofria reflexão total frustrada no 1.º prisma. Si-

cente à medida que  $h$  diminuía. Conforme veremos ao tratar de física quântica, esse efeito é o análogo eletromagnético do efeito quântico conhecido como *tunelamento*.

Surpreendentemente, porém, o efeito já havia sido detetado por Newton em seu segundo artigo publicado, que data de 1675! Na experiência dos anéis de Newton (fig. 3.10), na lâmina de ar que separa a lente plano-convexa da placa de vidro, pode não haver exatamente um contato com a placa, deixando uma camada de ar muito fina entre os dois. Newton percebeu que luz que deveria ser totalmente refletida conseguia atravessar essa camada desde que fosse suficientemente fina, e estimou a espessura em no máximo alguns comprimentos de onda: ele já havia usado suas medidas dos raios dos anéis para determinar com grande precisão o comprimento de onda. Foi Newton, portanto, quem descobriu a reflexão total frustrada.

## PROBLEMAS

1. Mostre que as equações de Maxwell (5.1), (5.2) num meio dielétrico não se alteram pela substituição:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{a} \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{B}' = -a \mathbf{E}$$

desde que a constante  $a$  seja escolhida apropriadamente. Que acontece com o vetor de Poynting  $\mathbf{S}$  nessa substituição? E com as densidades de energia  $U_E$ ,  $U_M$ ?

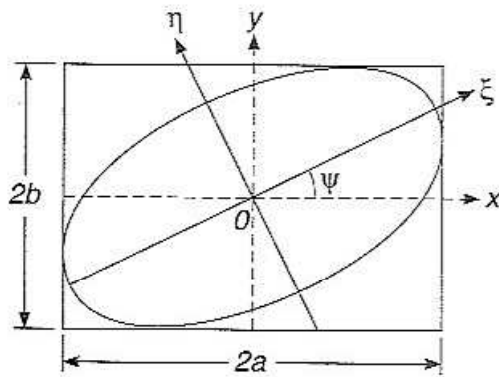
2. Demonstre, a partir das eqs. de Maxwell incluindo uma corrente  $\mathbf{j}$ , a expressão do balanço de energia *médio* para um campo monocromático,

$$-\text{div } \mathbf{S}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E} + 2i\omega (\langle U_E \rangle - \langle U_M \rangle)$$

onde  $\mathbf{S}^+$  é o vetor de Poynting complexo. Interprete a parte real e a parte imaginária.

3. Demonstre que os vetores de polarização circular (5.39) formam uma base ortonormal para um produto escalar de vetores complexos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  definido como  $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}$ , ou seja, que

$$\hat{\mathbf{e}}_+^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_- = \hat{\mathbf{e}}_+ \cdot \hat{\mathbf{e}}_-^* = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{e}}_+^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_+ = \hat{\mathbf{e}}_-^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_- = 1$$



4. Demonstre, para o caso geral de polarização elíptica (5.29), que o ângulo  $\psi$  entre o eixo maior da elipse de polarização e o eixo  $Ox$  é dado por (fig.)

$$\operatorname{tg}(2\psi) = \operatorname{tg}(2\alpha) \cos \delta$$

onde

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv b / a$$

5. Duas ondas circularmente polarizadas de mesma frequência propagam-se na mesma direção, com amplitudes  $a$  e  $2a$ , respectivamente. Descreva a polarização e orientação da onda resultante: (a) Se ambas são levógiras; (b) Se  $a$  é levógira e  $2a$  é dextrógira.

6. Num meio anisotrópico, para luz que se propaga ao longo de uma “direção principal”, há dois índices de refração diferentes,  $n_1$  e  $n_2$ , conforme a direção de vibração do campo elétrico esteja numa das duas outras “direções principais” perpendiculares entre si e à direção de propagação. Chama-se *placa de um quarto de onda* uma lâmina do material cuja espessura  $d$  introduz uma diferença de caminho  $\frac{1}{4}\lambda_0$  ( $\lambda_0$  = comprimento de onda reduzido) entre essas duas componentes do campo elétrico. (a) Calcule  $d$ ; (b) Se uma onda linearmente polarizada segundo a bissetriz dessas duas direções principais incide perpendicularmente sobre uma lâmina de um quarto de onda, qual é a polarização da luz transmitida? (c) Calcule  $d$  para uma lâmina de mica, em que  $n_1 = 1,5941$  e  $n_2 = 1,5997$ , se  $\lambda_0 = 6.000 \text{ \AA}$ .

7. Faz-se girar um analisador de polarização em torno da direção da luz incidente como eixo, observando-se a intensidade da luz transmitida. (a) Mostre que isso não permite distinguir entre luz incidente circularmente polarizada e luz natu-

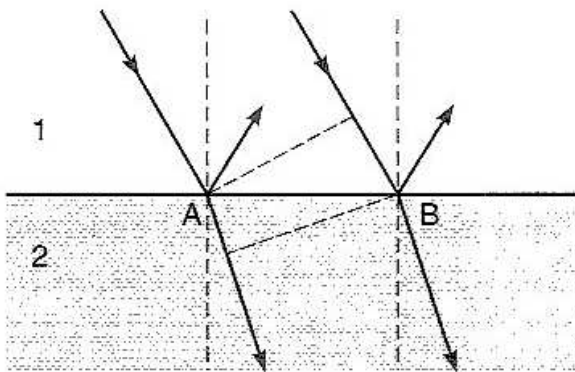


ral. (b) Coloca-se agora no trajeto da luz incidente, antes de atingir o analisador, uma lâmina de um quarto de onda (veja o Probl. 6). Mostre que isso torna possível fazer a distinção entre polarização circular e luz natural, e explique como.

8. Chama-se *eixo* de um filtro de polarização (polarizador ou analisador) a direção de vibração para a qual sua transmissão é máxima. Um par de filtros têm seus eixos cruzados (perpendiculares), de modo que bloqueia a luz incidente. Coloca-se agora um terceiro filtro entre os dois, com seu eixo formando um ângulo  $\theta$  com o eixo do 1.º filtro. Se luz natural de intensidade  $I_0$  incide sobre esse sistema, qual é a intensidade da luz transmitida?

9. Use o operador Div para obter a condição de contorno na interface entre dois meios quando existe sobre ela uma distribuição de carga com densidade superficial  $\sigma$ . Aplique o resultado a um condutor perfeito.

10. Calcule  $R_{\perp}$  e  $R_{\parallel}$ , definidos pelas (5.69), inclusive no caso particular  $\theta_1 = 0$ . Calcule  $T_{\perp}$  e  $T_{\parallel}$ .



11. A *transmissividade*  $t$  é definida como a fração da intensidade incidente sobre uma dada área da superfície de separação (indicada por  $\overline{AB}$  na fig. ao lado) que é transmitida para o meio 2.

(a) Mostre que

$$t = \frac{\langle S_2 \rangle \cos \theta_2}{\langle S_1 \rangle \cos \theta_1} = \frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} \frac{|E_2|^2}{|E_1|^2}$$

(b) Calcule  $t_{\parallel}, t_{\perp}$  (inclusive para  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ).

12. Verifique que  $r_{\perp} + t_{\perp} = r_{\parallel} + t_{\parallel} = 1$ .

13. Para  $\theta_1 = \theta_B$  (ângulo de Brewster), (a) Calcule  $r_{\perp}$ ; (b) Calcule  $t_{\perp}$ ; (c) Calcule o grau de polarização da luz transmitida,

$$P = \left( \frac{t_{\perp} - t_{\parallel}}{t_{\perp} + t_{\parallel}} \right)$$

14. Para que se tenha um *filme anti-refletor* (Seç. 3.3), de índice de refração  $n_2$ , situado entre dois meios de índices  $n_1$  e  $n_3$ , não basta que a espessura do filme seja de  $1/4$  do comprimento de onda no meio 2 [cf. (3.30)]. É preciso também que a refletividade das interfaces 1/2 e 2/3, na incidência perpendicular, seja a mesma. Mostre que a condição para isso é:  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ .

15. Demonstre a (5.73).

# 6

## INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE

### 6.1 O Princípio da Relatividade na Eletrodinâmica

Vimos que, como consequência das equações de Maxwell, as ondas eletromagnéticas se propagam, no vácuo, com velocidade  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , que é uma *constante universal*. Entretanto, ainda não discutimos uma questão básica: a que referencial se refere essa velocidade?

A dependência das leis físicas com respeito ao referencial foi discutida na Mecânica Clássica (*Fís.Bás. 1, Seç. 13.1*), onde vimos que as leis básicas da Mecânica assumem sua forma mais simples nos *referenciais inerciais*. Por definição, um referencial é inercial se nele vale a lei da inércia, ou seja, uma partícula não sujeita a forças (suficientemente afastada das demais) permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Com boa aproximação, um referencial vinculado às estrelas fixas é inercial.

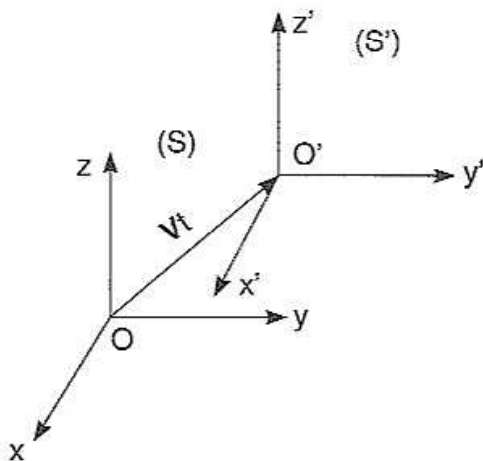


Fig. 6.1 Referenciais (S) e (S')

Vimos também que qualquer referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial é também inercial.

Se o referencial (S') (fig. 6.1) se move em relação a (S) com velocidade constante  $V$  e as origens  $O$  e  $O'$  dos dois referenciais coincidem no instante  $t = t' = 0$ , vemos que a relação entre as coordenadas

$[\mathbf{x}(x, y, z), t]$  e  $[\mathbf{x}'(x', y', z'), t']$  nos dois referenciais é dada pela *transformação de Galileu*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{V} t \\ t' &= t \end{aligned}} \quad (6.1)$$

da qual decorre a *lei de Galileu de composição de velocidades*

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}} \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  são velocidades relativas a  $(S)$  e  $(S')$ , respectivamente. Decorre também a *igualdade das acelerações*:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}} \quad (6.3)$$

Como a transformação de Galileu não afeta as distâncias entre partículas nem a massa, também não afeta uma força  $\mathbf{F}$  que só dependa dessas distâncias (como a gravitação), de modo que

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}' = m'\mathbf{a}' \quad (m' = m)} \quad (6.4)$$

isto é, a lei básica da dinâmica não se altera.

Daí decorre o *princípio de relatividade da Mecânica*, devido a Galileu: *é impossível detetar um movimento retilíneo uniforme de um referencial em relação a outro por qualquer efeito sobre as leis da dinâmica* (Galileu deu o exemplo de experiências de mecânica feitas sob o convés de um navio, com as escotilhas fechadas, que seriam incapazes de distinguir se o navio estaria ancorado ou em movimento retilíneo uniforme).

Vimos também na Mecânica que esse princípio deixa de valer para referenciais não inerciais: aparecem efeitos *detetáveis* sobre as leis da mecânica, através das *forças de inércia* (força centrífuga, força de Coriolis, etc.).

Entretanto, se procurarmos estender à Eletrodinâmica o princípio de relatividade, deparamo-nos imediatamente com um problema: decorre das leis da Eletrodinâmica (eqs. de Maxwell) que a luz se propaga, no vácuo, com velocidade  $c$ . Admitindo que isso vale num dado referencial inercial, e que valem as leis da Mecâ-

nica Clássica, o resultado não poderia valer num outro referencial inercial em movimento retilíneo uniforme em relação ao primeiro com velocidade  $V$ . Com efeito, pela lei da Galileu de composição de velocidades, seria

$$c' = c - V \quad (6.5)$$

e, por conseguinte, seria  $c' \neq c$  (e  $c'$  variaria com a direção de propagação), contradizendo o princípio de relatividade no caso da Eletrodinâmica.

A validade das eqs. de Maxwell estaria restrita então a um referencial inercial privilegiado, onde a velocidade da luz é  $c$  em todas as direções. Isso acontece, p. ex., na acústica: as ondas de som se propagam através de um meio material, que é o suporte das oscilações, e a velocidade do som é *isotrópica* (a mesma em todas as direções) somente num referencial em que este meio está em repouso. Observada de outro referencial em movimento em relação a este, a velocidade do som é diferente e varia com a direção (Efeito Doppler: *Fís. Bás.* 2, Seç. 6.9).

A identificação do “vácuo” com um tal suporte material das ondas eletromagnéticas corresponde ao conceito do *éter*, meio hipotético cuja existência já havia sido postulada por Descartes. Vimos (*Fís. Bás.* 3, Cap. 11) que o próprio Maxwell chegou a suas equações com base num modelo mecânico para o campo eletromagnético, um “éter celular”.

Se o éter existisse como referencial privilegiado, deveria ser possível, por experiências de propagação da luz, detetar um movimento retilíneo uniforme em relação a ele, ou seja, o princípio de relatividade não seria válido na eletrodinâmica (da mesma forma que não é válido na propagação do som).

Se quiséssemos, porém, manter o princípio de relatividade também na eletrodinâmica, a (6.5) mostra que isto não seria compatível com a validade simultânea das equações de Maxwell e das leis da mecânica newtoniana: uma das duas teria de ser abandonada.

Teria de ser válida, portanto, uma das seguintes opções:

(i) A mecânica newtoniana e as equações de Maxwell são válidas, mas o princípio de relatividade não se aplica a todas as leis físicas: existe um referencial absoluto (o éter), onde a velocidade da luz é  $c$  em todas as direções, e deve ser possível, por meio de experiências eletromagnéticas, detetar um movimento retilíneo e uniforme em relação ao referencial absoluto do éter.

(ii) O princípio de relatividade aplica-se a todas as leis físicas e a mecânica newtoniana é correta. Nesse caso, as equações de Maxwell teriam de ser modificadas, e deveria ser possível observar desvios das leis eletrodinâmica clássica.

(iii) O princípio de relatividade aplica-se a todas as leis físicas, e as equações de Maxwell são corretas. Nesse caso, a mecânica newtoniana e a transformação de Galileu não podem ser corretas: deve ser possível observar desvios das leis da mecânica newtoniana.

A única opção compatível com os fatos experimentais, conforme vamos ver, é a (iii).

## 6.2 O experimento de Michelson e Morley

Consideraremos primeiro o teste experimental da opção (i). Se ela fosse válida, deveria ser possível detetar um movimento retilíneo uniforme em relação ao éter usando a lei de Galileu de composição de velocidades (6.5): a velocidade da luz num referencial em movimento relativo ao éter deveria ser diferente em direções diferentes.

Um referencial onde o Sol estaria em repouso é com boa aproximação um referencial inercial. A velocidade de translação da Terra em relação a esse referencial é da ordem de 30 km/s, e sabemos que tem sentidos opostos em intervalos de meio ano, o que corresponde a uma *variação* de velocidade da ordem de 60 km/s.

Logo, mesmo que um referencial ligado à Terra (laboratório) esteja em repouso no éter num dado instante, terá uma velocidade relativa a ele de  $\sim 60$  km/s meio ano mais tarde. Durante metade do ano, a Terra tem uma velocidade  $V$  de pelo menos 30 km/s em relação a *qualquer* referencial inercial fixo. Pela lei de composição de velocidades, isso daria origem a desvios da ordem de  $V/c \geq 10^{-4}$  na velocidade de propagação da luz.

Numa série de experiências realizadas entre 1881 e 1887, A. A. Michelson e E. W. Morley procuraram detetar esses desvios (muito pequenos) usando o interferômetro de Michelson (Seç. 3.5).

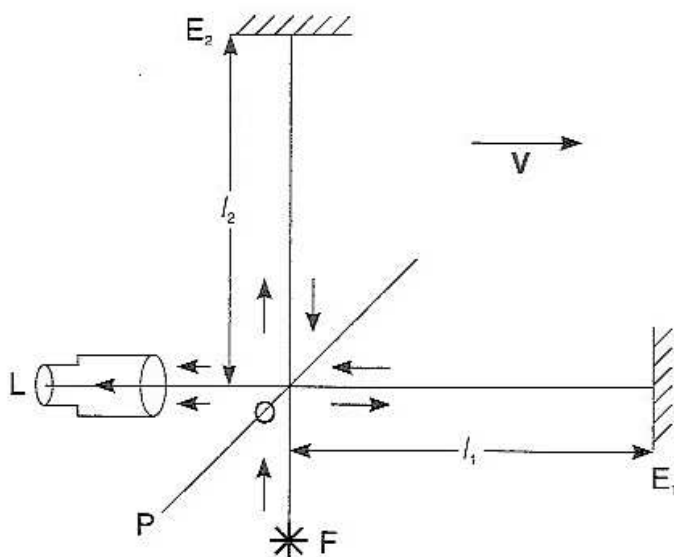


Fig. 6.2 Experimento de Michelson e Morley

O interferômetro está representado esquematicamente na fig. 6.2 (não foi representada a placa de compensação do caminho ótico). Seus braços têm comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ .  $F$  é a fonte de luz,  $P$  a placa semiespelhada divisora do feixe,  $E_1$  e  $E_2$  são os espelhos e  $L$  é a luneta de observação.

A experiência foi repetida muitas vezes, com diferentes orientações da montagem como um todo. Suponhamos que, na situação da figura, a



Terra esteja se movendo em relação ao (hipotético) éter com velocidade  $V$  na direção  $OE_1$ .

Como  $c \parallel V$  ao longo de  $l_1$ , temos [cf.(6.5) e fig. 6.3]

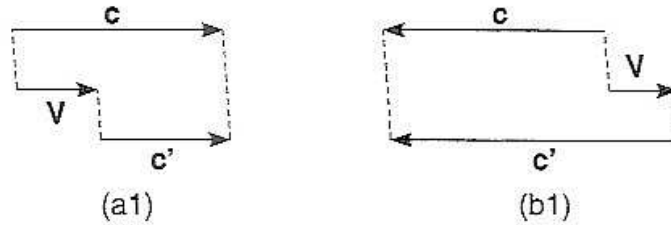


Fig. 6.3 Percursos longitudinais. A velocidade é  $c' = c - V$  na ida (a1) e  $c' = c + V$  na volta (a2)

$\Rightarrow$  Tempo total para ida e volta ao longo de  $l_1 =$

$$= t_1 = \frac{l_1}{c - V} + \frac{l_1}{c + V} = \frac{2l_1 c}{c^2 - V^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{2l_1}{c(1 - \beta^2)} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

onde

$$\beta \equiv V / c \quad (\text{parâmetro adimensional}) \quad (6.7)$$

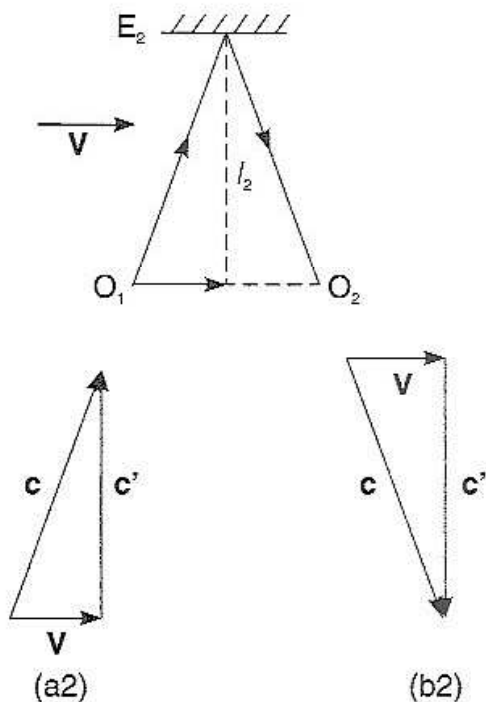


Fig. 6.4 Percursos transversais

Visto do referencial do éter, o percurso na direção de  $l_2$  é oblíquo, porque, durante o tempo de ida e volta da luz do espelho  $E_2$ , a placa  $P$  se terá deslocado de  $O_1$  para  $O_2$ . Conforme mostram as figs. 6.4 (a2) e (b2), tanto na ida como na volta a velocidade da luz no referencial da Terra será

$$c' = \sqrt{c^2 - V^2} = c\sqrt{1 - \beta^2} \quad (6.8)$$

de modo que o tempo do percurso de ida e volta ao longo de  $l_2$  será

$$t_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6.9)$$

A diferença de caminho ótico entre os dois percursos é

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2 \right) \quad (6.10)$$

Se os espelhos  $E_1$  e  $E_2$  não são exatamente perpendiculares entre si, essa diferença de caminho dá origem a franjas de interferência de igual inclinação na cunha de ar de pequena abertura formada por  $E_2$  e pela imagem de  $E_1$  na placa  $P$  (cf. fig. 3.18).

Se girarmos agora de  $90^\circ$  o dispositivo todo, os papéis de  $l_1$  e  $l_2$  são intercambiados, o que dá:

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad t'_2 = \frac{2l_2}{c(1-\beta^2)}$$

$$\Delta' = c(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (6.11)$$

A figura de interferência observada anteriormente sofrerá um deslocamento correspondente ao caminho ótico

$$\Delta' - \Delta = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} (l_1 + l_2) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (6.12)$$

Como esperamos que seja  $\beta \ll 1$ , podemos aproximar

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (6.13)$$

O deslocamento (6.12), medido em termos de *número de franjas*, é então

$$\delta m \equiv \frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} \equiv -\frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2 \quad (6.14)$$

ou seja, o efeito é de 2.<sup>a</sup> ordem em  $V/c \equiv \beta$ . É por ser tão pequeno que se necessita de uma técnica interferométrica.

Na 1.<sup>a</sup> experiência de Michelson e Morley (1881), era  $l_1 \approx l_2 \approx 1,2$  m e  $\lambda = 6 \times 10^{-7}$  m (luz amarela). Tomando  $\beta \sim 10^{-4}$ , como vimos no início desta Seção, resulta então  $|\delta m| \sim 0,4 \times 10^7 \times 10^{-8} \sim 0,04$  de franja, o que teria sido detetado por um observador perito como Michelson (fim da Seç. 3.5). O resultado, para grande surpresa dele, foi, em suas palavras: “...Não há deslocamento das franjas de interferência. Assim, demonstramos que a hipótese de um éter estacionário é incorreta.”

Na repetição da experiência em 1887, era  $l_1 \approx l_2 \approx 11$  m, o que daria  $|\delta m| \sim 0,4$  franja, e Michelson e Morley deram como resultado (limite superior)  $|\delta m| < 0,01$  (não observaram nenhum deslocamento). G. Joos, em 1930, usou  $l_1 \approx l_2 \approx 21$  m, dando um  $|\delta m|$  esperado de  $\sim 0,75$  franja, e achou como limite superior  $|\delta m| < 0,02$ . Experimentos recentes de outros tipos (não baseados no interferômetro de Michelson) dão limites superiores para  $V$  inferiores a 30 m/s, compatíveis com  $V = 0$ , embora a velocidade orbital típica da Terra seja 30 km/s. Com isso, a opção (i) do final da Seç. 6.1 fica descartada (houve algumas tentativas de mantê-la com hipóteses diferentes, que também foram descartadas).

As tentativas mais consistentes dentro da opção (ii), aceitando o caráter geral do princípio de relatividade e a validade da mecânica newtoniana e modificando as equações de Maxwell, foram baseadas na “teoria da emissão” de W. Ritz (1908).

Segundo Ritz,  $c$  deveria ser interpretado como a *velocidade da luz no vácuo relativa à fonte emissora*, e não como velocidade de propagação de ondas num meio. Como  $c$  seria então sempre uma *velocidade relativa*, o resultado nulo do experimento de Michelson e Morley estaria explicado (a transformação de Galileu não altera velocidades relativas), mas as equações de Maxwell teriam de ser modificadas.

As modificações da eletrodinâmica previstas pela teoria de Ritz foram descartadas com base em observações astronômicas que seriam incompatíveis com elas, mas os argumentos empregados não são atualmente considerados como satisfatórios.

Entretanto, a hipótese de Ritz foi eliminada por medidas *diretas* da velocidade da luz (na desintegração  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ) emitida por uma fonte em movimento rápido, realizadas no CERN em 1964 por T. Alvager *et al.* O resultado experimental

foi que, se representássemos uma eventual dependência da velocidade  $v$  da fonte por  $c' = \bar{c} + kv$ , resultaria que  $k = (0 \pm 1,3) \times 10^{-4}$ .

Podemos tirar dos resultados acima descritos as seguintes conclusões:

(A) *PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE RESTRITA: As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.*

Por outro lado, as equações de Maxwell são confirmadas como leis físicas válidas, e daí decorre o

(B) *PRINCÍPIO DE CONSTÂNCIA DA VELOCIDADE DA LUZ: A velocidade da luz no vácuo,  $c$ , é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte.*

Esses dois princípios, porém, são incompatíveis com a mecânica newtoniana, tornando necessário modificá-la. As modificações necessárias, tomando (A) e (B) como pontos de partida, foram propostas por Albert Einstein em 1905, em seu trabalho "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento".

Einstein era um jovem empregado no Escritório de Patentes em Berna, recém-formado pela Universidade, quando publicou esse trabalho. No mesmo ano, publicou dois outros trabalhos fundamentais: um deles sobre o efeito fotoelétrico (Seç. 7.3), reintroduzindo a teoria corpuscular da luz no contexto da teoria dos quanta de Planck, e o outro sobre o movimento Browniano. Ao que tudo indica, Einstein não conhecia os resultados do experimento de Michelson e Morley quando formulou a relatividade restrita; eles não são mencionados no seu artigo.

Na introdução a seu trabalho de 1905 sobre relatividade, Einstein comenta de início a descrição aparentemente assimétrica dos efeitos de indução eletromagnética entre um ímã e um fio condutor, conforme seja o ímã ou o fio que se move, quando só importa o movimento relativo (*Fís. Bás.* 3, Seç. 9.1). Depois diz:

"Exemplos desse tipo, bem como as tentativas malogradas de detetar um movimento da Terra em relação a um "éter", sugerem que os fenômenos eletrodinâmicos, da mesma forma que os mecânicos, não têm quaisquer propriedades compatíveis com a idéia de repouso absoluto. Sugerem, pelo contrário, que as mesmas leis da eletrodinâmica e da ótica serão válidas em todos os referenciais para os quais valem as leis da mecânica. Vamos elevar esta conjectura... à categoria de um postulado, e vamos introduzir outro postulado, que é só aparentemente incompatível com o primeiro, a saber, que a luz sempre se propaga no vácuo com uma velocidade  $c$  bem definida, independente do estado de movimento da fonte emissora".

## 6.3 A relatividade da simultaneidade

Consideremos dois referenciais inerciais diferentes  $S$  e  $S'$  ( $S'$  se desloca em relação a  $S$  com movimento retilíneo uniforme). Podemos escolher as origens  $O$  e  $O'$  das coordenadas em  $S$  e  $S'$  de tal forma que coincidam num instante que tomamos como origem dos tempos,  $t = t' = 0$ :

$$\boxed{O \equiv O' \quad \text{para } t = t' = 0} \quad (6.15)$$

Suponhamos que, nesse instante comum, uma fonte puntiforme localizada em  $O \equiv O'$  emite um sinal luminoso. Decorre então do postulado (B) que esse sinal se propaga em todas as direções com velocidade  $c$  em *ambos* os referenciais. Logo, a frente de onda num instante posterior é *esférica* em *ambos* os referenciais: em  $S$  é uma esfera de centro  $O$ ; em  $S'$  é uma esfera de centro  $O'$ . Aqui surge a aparente incompatibilidade a que Einstein se referiu: como é possível que a mesma esfera tenha dois centros diferentes?

O paradoxo desaparece se não se tratar da *mesma* esfera. O que é uma frente de onda? Num dado referencial, é o lugar geométrico dos pontos atingidos pela onda *simultaneamente* nesse referencial. Se o que é *simultâneo em relação a  $S$*  não é necessariamente *simultâneo em relação a  $S'$* , as frentes de onda nos dois referenciais são formadas de *pontos diferentes*, o que é compatível com centros diferentes.

Einstein percebeu que a validade dos Princípios (A) e (B) exigia que fosse aprofundada a análise do conceito da *simultaneidade de eventos em pontos distantes*, quando analisada em referenciais diferentes. Como ele observa no seu trabalho de 1905,

“...Todos os nossos julgamentos com respeito a *tempo* são sempre julgamentos de eventos simultâneos. Por exemplo, quando se diz “O trem chega aqui às 7 h”, isto significa: “A chegada do trem e a observação de que os ponteiros do relógio marcam 7 h são eventos simultâneos.”

Até aí não há problema, porque as observações da chegada do trem e do relógio são feitas *no mesmo lugar* [como o disparo do sinal luminoso na (6.15)]. Mas como podemos saber que dois eventos que ocorrem em *lugares diferentes*, tais como dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , são simultâneos?

Poderíamos dizer que isso ocorre quando cada evento coincide com uma leitura de relógio:  $t_1$  em  $P_1$  e  $t_2$  em  $P_2$ , e a simultaneidade significa que  $t_1 = t_2$ . Mas



para isso é necessário que os relógios em  $P_1$  e  $P_2$  estejam *sincronizados*. Poderíamos imaginar diversos métodos para efetuar a sincronização:

*Método 1:* Enviando um sinal de  $P_1$  a  $P_2$ . Se  $v$  é a velocidade do sinal e  $l = |\overline{P_1 P_2}|$  a distância de  $P_1$  a  $P_2$ , sendo o sinal convencionado para ser emitido em  $t_1 = t_0$ , basta que o relógio em  $P_2$ , no momento da recepção do sinal, seja ajustado para marcar  $t_2 = t_1 + \frac{l}{v}$ .

Mas como sabemos que a velocidade do sinal é  $v$ ? A partir da medida do tempo que leva o sinal para se propagar entre dois pontos distantes, e esta medida pressupõe a sincronização, de modo que a definição é circular.

*Método 2:* Os dois relógios podem ser sincronizados em  $P_1$  e um deles, posteriormente, transportado para  $P_2$ . Mas *um relógio é um sistema físico*, quer se trate de um pêndulo ou de um relógio atômico, baseado numa linha espectral emitida por um átomo. Como sabemos que a marcha do relógio não é afetada pelo transporte de  $P_1$  a  $P_2$ ? Só poderíamos comprovar isso se já tivéssemos em  $P_2$  um relógio sincronizado com o de  $P_1$ , para compará-lo com o que foi transportado. Novamente, chegamos a um impasse.

*Conclusão:* Ao contrário da simultaneidade de eventos que ocorrem no mesmo ponto, *a simultaneidade de eventos em dois pontos distantes não tem nenhum significado a priori*: ela tem de ser *definida* por uma *convenção*.

A definição de Einstein da simultaneidade de eventos distantes está relacionada com o *método 1* acima e com o Princípio (B), que confere à velocidade da luz no vácuo o caráter de uma *constante universal*. Veremos logo que ela tem um significado mais amplo, representando uma *velocidade limite para a propagação de quaisquer sinais*.

#### *Definição de Einstein da simultaneidade:*

*Se um evento 1 ocorre em  $P_1$  no instante  $t_1$ , sendo marcado pela emissão de um sinal luminoso que parte de  $P_1$  nesse instante, e o mesmo vale para  $P_2$  em  $t_2$  (evento 2), dizemos que estes dois eventos são simultâneos ( $t_1 = t_2$ ) quando o ponto de encontro dos dois sinais luminosos é o ponto médio do segmento  $P_1 P_2$ .*

Essa definição implica imediatamente que a simultaneidade de eventos distantes não tem caráter absoluto: dois eventos simultâneos num particular referencial inercial  $S$  podem não ser simultâneos noutra referencial inercial  $S'$  que se move em relação a  $S$  com movimento retilíneo uniforme.



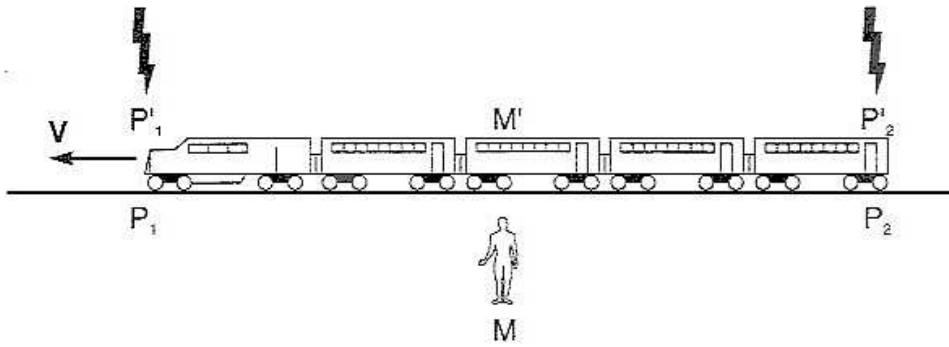


Fig. 6.5 Relatividade da simultaneidade

Com efeito, suponhamos que os dois eventos sejam a queda de relâmpagos em  $P_1$  e  $P_2$ , e que cada um desses pontos coincida com uma extremidade de um trem (referencial  $S'$ ), que se desloca com velocidade constante  $V$  em relação ao referencial  $S$  dos trilhos, suposto inercial. Cada relâmpago gera seu próprio sinal luminoso (fig. 6.5). Se os dois eventos são *simultâneos* em  $S$ , os dois sinais se encontram no ponto médio  $M$  de  $P_1 P_2$ . Mas esse não é o ponto médio  $M'$  do trem, porque  $M'$ , devido ao movimento do trem, recebe o sinal vindo de  $P_1$  antes de receber aquele originário de  $P_2$ .

Na mecânica newtoniana, a *posição* de um evento já era um conceito relativo, dependente do referencial: dois eventos que ocorrem “no mesmo ponto” do trem  $S'$  em instantes diferentes não ocorrem no mesmo ponto no referencial  $S$  dos trilhos.

Assim, por exemplo, um passageiro que esquece a carteira no carro restaurante e volta depois para buscá-la encontra-a (se tiver sorte!) no “mesmo ponto” do trem, mas em pontos diferentes em relação aos trilhos.

Entretanto, o *instante* de ocorrência de um evento era considerado como tendo caráter absoluto, o mesmo em qualquer referencial, o que também se aplicaria à simultaneidade de eventos distantes: daí a relação  $t' = t$ , na transformação de Galileu. Newton escreveu nos “Principia”:

“O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por sua própria natureza, sem relação a nada externo, permanece sempre semelhante e imutável.”

Esse caráter absoluto do tempo na mecânica newtoniana seria justificável se existissem sinais de velocidade arbitrariamente grande (“instantâneos”). Na prática,  $c$  é tão grande comparado com velocidades macroscópicas típicas que a mecânica newtoniana é, para fins práticos, uma excelente aproximação.

Entretanto, vemos que a transformação de Galileu terá de ser substituída por outra em que *as quatro* ordenadas de um evento ( $x, y, z, t$ ) se transformam.

## 6.4 A transformação de Lorentz

Para encontrar a transformação que deve substituir a de Galileu, convém ter uma imagem bastante concreta de um referencial onde se emprega a definição de Einstein da simultaneidade.

O “relógio” atualmente empregado para definir a unidade de tempo já é um sistema físico bem definido (relógio atômico): baseia-se no período de oscilação de uma dada linha espectral emitida por um átomo, em repouso no referencial considerado. Como  $c$  é uma constante universal, a unidade de comprimento se define em função da unidade de tempo (a distância percorrida pela luz numa unidade de tempo é o valor numérico de  $c$ ). Essas definições são as mesmas em qualquer referencial.

Uma forma concreta de pensar num referencial é então como uma estrutura ou arcabouço tridimensional onde as distâncias entre pontos de coordenadas inteiras são “régua” que medem uma unidade de comprimento, e em cada ponto existe um “relógio”, todos os relógios sendo sincronizados de acordo com a definição de Einstein.

Uma forma mais simples é imaginar uma estação de radar operando continuamente. Num dado referencial basta então haver um único relógio, p. ex. na origem  $O$ , emitindo continuamente pulsos de radar.

Para definir as coordenadas de um evento que ocorre num ponto  $P$  num dado instante nesse referencial, pode-se determinar o instante  $t_2$  em que um pulso emitido por  $O$  em  $t_1$  retorna a  $O$  como “eco” após atingir  $P$ . Nesse caso, o instante  $t$  em que o pulso atingiu  $P$  é  $t = \frac{1}{2} (t_2 + t_1)$ , e a distância  $\overline{OP}$  é  $\frac{1}{2} c (t_2 - t_1)$ ; a direção  $\overline{OP}$  também pode ser determinada, fornecendo assim as quatro coordenadas do evento. Essas coordenadas são consistentes com o critério de Einstein de simultaneidade.

Vamos considerar primeiro um caso especial, em que escolhemos o eixo dos  $x$  na direção do movimento relativo entre os dois referenciais inerciais e é satisfeita a (6.15) (origens coincidentes em  $t = t' = 0$ ).

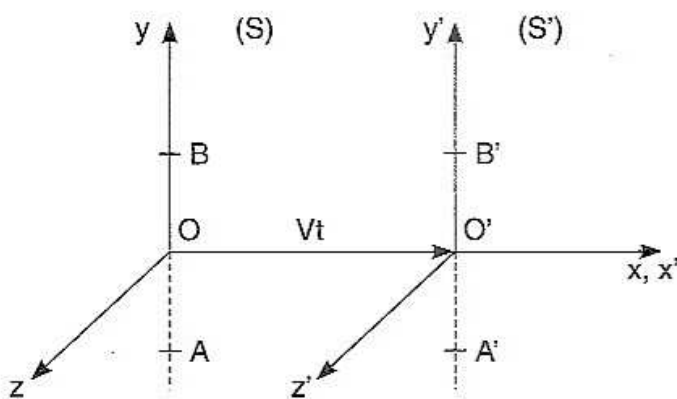


Fig. 6.6 Referenciais  $(S)$  e  $(S')$

A transformação

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$$

tem de satisfazer as seguintes condições:

- (i) Um movimento retilíneo uniforme em relação a  $(S)$  também deve ser retilíneo e uniforme em  $(S')$ .

(ii) Para  $V = 0$  ( $\mathbf{V} \equiv V \hat{\mathbf{x}}$  é a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ ), a transformação deve reduzir-se à identidade [porque vale a (6.15) e escolhemos as mesmas unidades de medida em  $S$  e  $S'$ ].

(iii) Se um sinal luminoso é enviado de  $O \equiv O'$  em  $t = t' = 0$ , a sua frente de onda deve propagar-se com velocidade  $c$  em ambos os referenciais, de modo que

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0} \quad (6.16)$$

(cada uma dessas equações deve implicar a outra).

Pode-se demonstrar que uma transformação que satisfaz essas condições é, necessariamente, uma transformação *linear*. Vamos admitir esse resultado.

#### *Transformação de comprimentos transversais*

Seja  $\overline{AB}$  um segmento do eixo  $y$  com centro em  $O$  e de comprimento  $= 1$ , e  $\overline{A'B'}$  um segmento com as mesmas características em  $S'$  (fig. 6.6). Pela definição de Einstein,  $A'$  e  $B'$  cruzam o eixo  $y$  *simultaneamente* em  $S$ ; analogamente,  $A$  e  $B$  cruzam o eixo  $y'$  *simultaneamente* em  $S'$ , e ambos os eventos ocorrem em  $t = t' = 0$ . Nesse instante, (ou mais tarde, se os cruzamentos deixarem registros permanentes nos eixos  $y, y'$ ), os comprimentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  podem ser comparados.

A única conclusão possível é que eles são iguais: qualquer outra violaria o princípio de relatividade. Com efeito, se em  $S$  se verificasse que  $\overline{A'B'}$ , devido ao movimento, é, p. ex.,  $< \overline{AB}$ , a relatividade exigiria que  $\overline{AB}$ , que está em movimento visto de  $S'$ , é  $< \overline{A'B'}$ , o que seria uma contradição (devido ao fato de que a comparação é simultânea em *ambos* os referenciais). Logo, tem de ser  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , o que se aplica a comprimentos *transversais* à direção  $x$  do movimento:

$$\boxed{y' = y \quad , \quad z' = z} \quad (6.17)$$

Note, porém, que o raciocínio não se aplica a comprimentos *longitudinais*, ou seja, paralelos à direção do movimento, porque neste caso, como vimos acima (Seç. 6.3), posições dos extremos de um segmento que são simultâneas em relação a ( $S$ ) *não* são simultâneas em relação a ( $S'$ ).

Como a origem  $O'$  ( $x' = 0$ ) de ( $S'$ ) deve ter a coordenada  $x = Vt$  em ( $S$ ), deve ser (relação linear)

$$x' = A(x - Vt) \quad (6.18)$$

Por outro lado, a transformação de  $t'$  deve ser linear:

$$t' = Bt + Cx \quad (6.19)$$

onde não há termos adicionais em  $y$  e  $z$  (tipo  $+ Dy + Ez$ ) porque a única direção privilegiada (direção do movimento) é a direção  $x$ ; termos adicionais violariam a isotropia do espaço, definindo uma outra direção privilegiada.

É imediato que a transformação definida pelas (6.17) a (6.19) satisfaz as condições (i) e (ii) acima. Resta impor a condição (iii): sempre que

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (6.20)$$

devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = A^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 (Bt + Cx)^2 \\ &= A^2 (x^2 - 2xVt + V^2 t^2) + \underbrace{y^2 + z^2}_{=c^2 t^2 - x^2} - c^2 (B^2 t^2 + 2BCxt + C^2 x^2) \\ &= (A^2 - c^2 C^2 - 1)x^2 - 2(A^2 V + c^2 BC)xt + \\ &\quad + (A^2 V^2 - c^2 B^2 + c^2)t^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

quaisquer que sejam  $x$  e  $t$ .

Isso só é possível se os coeficientes forem identicamente nulos, o que dá

$$\begin{cases} A^2 V + c^2 BC = 0 \\ A^2 - c^2 C^2 = 1 \\ B^2 - \frac{V^2}{c^2} A^2 = 1 \end{cases} \quad (6.22)$$

A primeira equação dá

$$\boxed{A^2 = -\frac{c^2}{V} B C} \quad (6.23)$$

Substituindo nas duas outras, vem

$$\left. \begin{aligned} -c^2 \frac{C}{V} (B + V C) &= 1 \\ B^2 + V B C &= B (B + V C) = 1 \end{aligned} \right\} \boxed{B = -\frac{c^2}{V} C} \quad (6.24)$$

e, substituindo este resultado na (6.23),

$$\boxed{A^2 = B^2} \quad (6.25)$$

Levando na última (6.22),

$$\boxed{A^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1} \quad (6.26)$$

Vamos introduzir as notações

$$\boxed{\beta \equiv \frac{V}{c} \quad ; \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}} \quad (6.27)$$

As (6.25) dão então, com a (6.24),

$$A = \pm B = \pm \gamma \quad ; \quad C = -\frac{V}{c^2} B \quad (6.28)$$

Mas, pela condição (ii), tem de ser  $A = B = 1$  e  $C = 0$  para  $V = 0$  (quando  $\gamma = 1$ ). Logo,

$$\boxed{A = B = \gamma \quad ; \quad C = -\frac{V}{c^2} \gamma} \quad (6.29)$$

o que leva univocamente à *TRANSFORMAÇÃO de LORENTZ ESPECIAL*

$$\begin{array}{l}
 x' = \gamma (x - V t) \\
 t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \\
 y' = y \\
 z' = z
 \end{array} \tag{6.30}$$

Para que  $\gamma$  seja real, tem de ser  $\beta < 1$ . Isso sugere que  $c$  seja não apenas a velocidade da luz, mas também uma *velocidade limite*, no sentido de que nenhum referencial deve poder mover-se com velocidade  $V > c$ . Isso será confirmado mais tarde.

Se resolvermos o sistema de equações lineares (6.30) em relação a  $(x, y, z, t)$ , resulta (verifique!)

$$\begin{array}{l}
 x = \gamma (x' + V t') \\
 t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right)
 \end{array} , \quad y = y' , z = z' \tag{6.31}$$

Transf. de Lorentz  
especial inversa

que só difere da (6.30) pela substituição  $V \rightarrow -V$ . Logo,  $(S)$  se move em relação a  $(S')$  com velocidade  $(-V)$ , o que não é uma conclusão trivial.

#### A transformação de Galileu como caso limite

Se  $\beta \ll 1$ , temos [cf.(6.13)]

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \tag{6.32}$$

e, para  $x \ll ct$ , as (6.30) se reduzem à transformação de Galileu, a menos de termos de 2.<sup>a</sup> ordem em  $\beta = V/c$ , que são extremamente pequenos para velocidades  $V$  usuais.

A transformação de Lorentz também se reduz à de Galileu no limite formal em que se faz  $c \rightarrow \infty$ . Como já foi mencionado, se existissem sinais “instantâneos”, de velocidade infinita, a simultaneidade de eventos distantes teria caráter absoluto e valeria a transformação de Galileu.



### Transformação de Lorentz geral

A partir da TL (transf. de Lorentz) especial, é fácil obter a expressão de uma TL geral, em que a velocidade  $\mathbf{V}$  de ( $S'$ ) em relação a ( $S$ ) tem direção arbitrária. Para isso, basta decompor o vetor de posição de um ponto  $P$  numa componente  $\parallel \mathbf{V}$ , que se transforma como  $x$  na TL especial, e numa componente  $\perp \mathbf{V}$ , que se transforma como as coordenadas ( $y, z$ ) na TL especial.

A componente paralela se obtém projetando na direção de  $\mathbf{V}$ . Seja  $\hat{\mathbf{V}}$  o versor da direção  $\mathbf{V}$ :

$$\hat{\mathbf{V}} \equiv \frac{\mathbf{V}}{V} \quad (6.33)$$

Temos então

$$\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{V}})\hat{\mathbf{V}} = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}}{V^2} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{V}})\hat{\mathbf{V}}$$

e analogamente para  $\mathbf{x}'$ . As equações da TL geral são:

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V} t) \\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \\ t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{V}} \right) = \gamma \left( t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right) \end{array} \quad \text{TL GERAL} \quad (6.35)$$

Nessa transformação, mantivemos a mesma orientação espacial dos eixos em ( $S$ ) e ( $S'$ ). Naturalmente, podemos ainda efetuar transformações puramente espaciais (translações da origem e rotações dos eixos) sem afetar o caráter inercial dos referenciais.

## 6.5 Efeitos cinemáticos da TL

A TL dá origem a uma série de efeitos que são puramente *cinemáticos*, ou seja, não envolvem a formulação relativística das leis da dinâmica.

## (a) A contração de Lorentz

Chama-se *valor próprio* de uma grandeza física o valor dessa grandeza medido num referencial onde o objeto ao qual está associada encontra-se em repouso.

Consideremos então uma barra que está em repouso ao longo do eixo  $O'x'$  em  $(S')$ , com suas extremidades nos pontos  $x_1'$  e  $x_2'$ . O *comprimento próprio* da barra é então

$$l_0 \equiv x_2' - x_1' \quad (6.36)$$

Como definimos o comprimento  $l$  da barra em  $(S)$ , uma vez que ela está-se deslocando com velocidade  $V$  em relação a  $(S)$ ?

Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são os pontos de  $(S)$  que coincidem com as extremidades da barra no mesmo instante  $t$  em  $(S)$ , ou seja, *simultaneamente em relação a  $(S)$* , o comprimento  $l$  em  $S$  é definido como

$$l \equiv x_2(t) - x_1(t) \quad (6.37)$$

onde  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são dados pela TL (6.30)

$$\left. \begin{array}{l} x_1'(t) = \gamma(x_1 - Vt) \\ x_2'(t) = \gamma(x_2 - Vt) \end{array} \right\} \frac{l_0}{x_2' - x_1'} = \gamma(x_2 - x_1) = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ou seja,

$$l = \sqrt{1 - \beta^2} l_0 \quad (\leq l_0) \quad \text{CONTRAÇÃO de LORENTZ-FITZGERALD} \quad (6.38)$$

Assim, o *comprimento da barra em movimento é menor que seu comprimento próprio*. Esse efeito já havia sido sugerido por Lorentz e por FitzGerald antes da teoria da relatividade para explicar o resultado nulo do experimento de Michelson e Morley, mas sem justificá-lo.

Convém notar a diferença entre comprimentos longitudinais e transversais a  $V$ : vimos na fig. 6.17 que comprimentos transversais não se alteram, porque podem ser determinados simultaneamente em ambos os referenciais. No caso longitudinal, o que é simultâneo em  $(S)$  não é simultâneo em  $(S')$ , o que é a razão da diferença.

Se consideramos um *volume*, como as dimensões transversais não se alteram, o volume próprio  $v_0$  aparece contraído quando medido em movimento:

$$\boxed{v = \sqrt{1 - \beta^2} v_0} \quad (6.39)$$

A contração é um efeito recíproco: uma barra em repouso em  $(S)$  também aparece contraída quando seu comprimento é medido em  $(S')$ , como tem de ser pelo princípio de relatividade ( $V \rightarrow -V$ ).

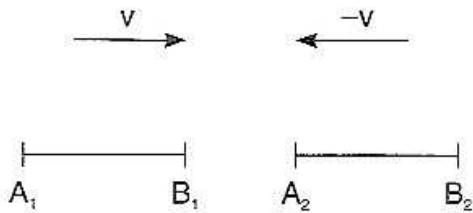


Fig. 6.7 Detecção da contração de Lorentz sem relógios

Embora o conceito de simultaneidade entre na definição do comprimento da barra em movimento, a contração pode ser detectada sem o auxílio de relógios, conforme Einstein observou. Basta considerar (fig. 6.7) duas barras  $A_1 B_1$  e  $A_2 B_2$  de mesmo comprimento próprio  $l_0$  que se movem, em relação a  $(S)$ , em sentidos

opostos, com velocidades  $v$  e  $-v$ . Por simetria, as extremidades se superpõem ( $A_2$  com  $A_1$  e  $B_2$  com  $B_1$ ), simultaneamente em  $(S)$ , coincidindo neste instante com dois pontos  $A$  e  $B$  de  $(S)$ . A distância  $\overline{AB}$  em  $(S)$  é  $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ . Vemos portanto que a contração não é uma propriedade de uma única barra, mas uma relação *recíproca* entre duas barras em movimento relativo entre si.

#### O aspecto visual de objetos em movimento

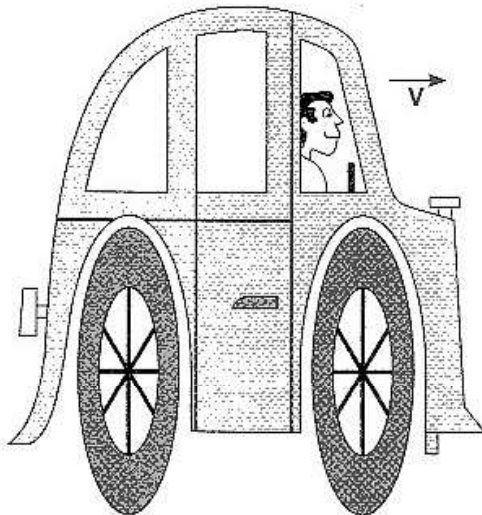


Fig. 6.8 Versão popular da contração de Lorentz

Em livros de divulgação sobre relatividade, encontram-se muitas vezes figuras como a fig. 6.8, procurando representar o aspecto visual de um automóvel (p. ex.) em movimento com velocidade relativística, achatado pela contração. Será que se observaria mesmo dessa forma a aparência visual de um objeto em movimento com velocidade suficientemente elevada?

A resposta, mostrando que a figura 6.8 é inteiramente falsa, só foi dada em 1959 por J. Terrell.\*

\* J. Terrell, *Phys. Rev.* **116**, 1041 (1959); V. F. Weisskopf, *Phys. Today* **13**, 24 (1960).

A razão é que a imagem de um objeto, quer na retina, quer numa chapa fotográfica, é formada por raios de luz que *chegam* essencialmente ao mesmo tempo para formar a imagem, mas, por isto mesmo, *partiram* do objeto *em instantes diferentes*, conforme o ponto de onde provêm. Devido ao movimento do objeto, não temos então uma representação “instantânea” dele, mas sim uma imagem *distorcida*, representando a posição de diferentes pontos em diferentes instantes (em relação a  $S$ ).

Surpreendentemente, para objetos que subtendem um ângulo visual pequeno, a contração de Lorentz-Fitzgerald *corrige* uma distorção que apareceria se ela não existisse, e fornece uma visão do objeto com sua aparência “normal” (a mesma que tem em repouso), tendo apenas o efeito equivalente a uma *rotação*.

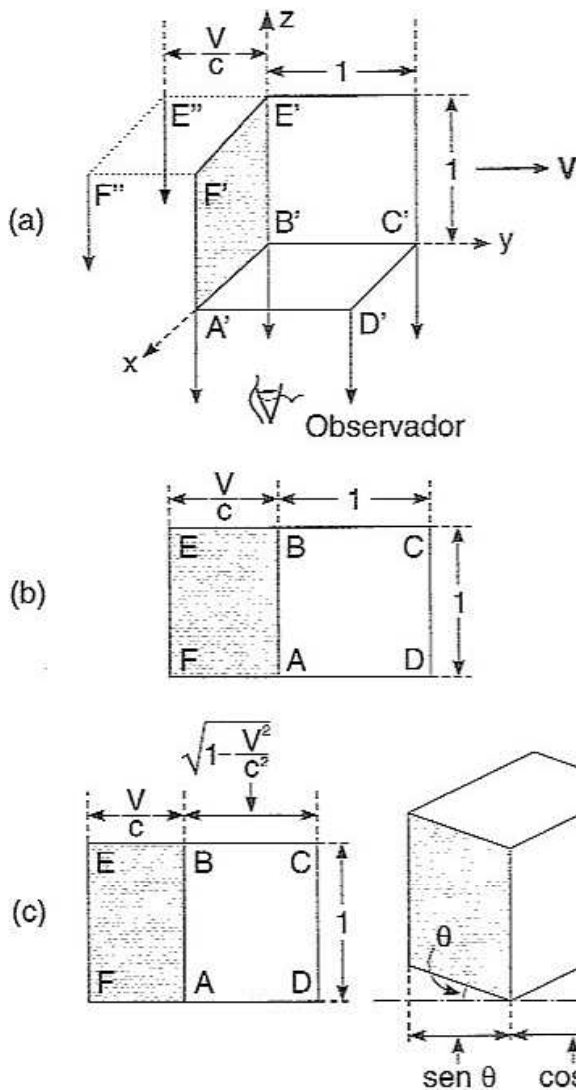


Fig. 6.9 Aspecto visual de um cubo em movimento

tângulo de altura 1 e base  $V/c$  [fig. 6.9(b)]. O resultado se assemelha à visão em perspectiva de um paralelepípedo alongado, não de um cubo.

A contração de Lorentz faz com que AD e BC apareçam com comprimento em ( $S$ ) igual a  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ , sem alterar a visão da face ABEF transversal ao

Para ver como isso acontece, consideremos um cubo de aresta = 1 unidade de comprimento que se move na direção de uma aresta, com velocidade  $V$ , e está sendo observado desde uma distância muito grande (ângulo visual pequeno, raios de luz quase paralelos) numa direção  $\perp$  ao movimento [fig. 6.9(a)]. Os pontos da face  $A'B'C'D'$  são equidistantes do observador, de modo que na física não-relativística (N.R.), ela aparece ao observador como um quadrado de lado 1. Entretanto, para a face  $A'B'E'F'$ , perpendicular a  $V$ , luz da aresta  $E'F'$  deixou o cubo  $\overline{E'B'}/c = 1/c$  segundos antes da luz proveniente de  $A'B'$ , para chegar ao observador ao mesmo tempo. Assim, deixou o cubo quando  $\overline{E'F'}$  estava na posição  $\overline{E''F''}$  [fig. 6.9(a)], uma distância  $V/c$  para trás, de forma que a face ABEF aparece como um re-

movimento. O resultado [fig. 6.9(c)] é a imagem em perspectiva de um *cu*bo (a distorção é eliminada) que sofreu uma *rotação* por um ângulo  $\theta$ , onde

$$\text{sen } \theta = \frac{V}{c} \quad , \quad \text{cos } \theta = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (6.40)$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que uma esfera não é vista como um esferóide: permanece com a aparência visual de uma esfera *devido* à contração de Lorentz.

Vejamos agora o efeito da TL sobre intervalos de tempo.

(b) *A dilatação dos intervalos de tempo*

Consideremos um relógio em repouso em ( $S'$ ), p. ex., na origem  $O'$  das coordenadas. O tempo  $t$  marcado por esse relógio é portanto *tempo próprio*, e vamos representá-lo por  $\tau$ .

A coordenada tempo  $t$  correspondente em ( $S$ ) obtém-se da TL inversa (6.31) fazendo  $x' = 0$ :

$$t = \gamma t' = \gamma \tau \quad (6.41)$$

de forma que a relação entre intervalos de tempo  $\Delta \tau$  em ( $S'$ ) (tempo *próprio* do relógio em repouso) e os intervalos de tempo correspondentes em ( $S$ ), onde o relógio está em movimento, é

$$t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\geq \Delta \tau) \quad (6.42)$$

Daí o nome de *dilatação dos intervalos de tempo* dado a esse efeito.

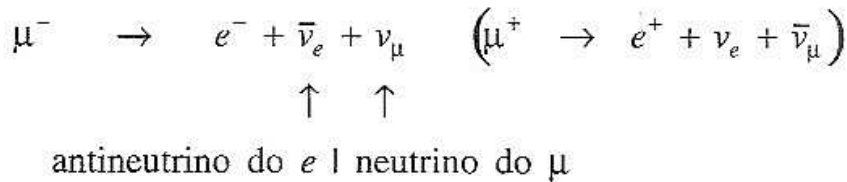
Da mesma forma que para os comprimentos, o efeito é recíproco: um relógio em repouso em ( $S$ ) marca intervalos de tempo maiores em ( $S'$ ). O efeito é contrário ao dos comprimentos, porém: o movimento contrai os comprimentos, mas dilata os tempos.

Como detetar o efeito? O relógio de ( $S'$ ), por hipótese, está sincronizado com o de ( $S$ ) na origem comum:  $t = t' = 0$  para  $x = x' = 0$ . Decorrido um tempo  $t'$  em ( $S'$ ), o relógio em  $O'$  está passando por um *outro* relógio em ( $S$ ) e podem-se comparar as leituras; a leitura em ( $S$ ) será  $t$ , dado pela (6.41). Logo, o efeito resulta



de comparar *um único* relógio em ( $S'$ ) com *dois* relógios diferentes em ( $S$ ), sincronizados segundo o critério de Einstein.

Uma confirmação experimental de grande impacto desse efeito é a desintegração dos muons (mésons  $\mu$ ) dos raios cósmicos, partículas carregadas análogas aos elétrons mas de massa cerca de 200 vezes maior, que se desintegram segundo o esquema



Observando a desintegração de muons em repouso no laboratório, pode-se medir sua *vida média*  $\tau_\mu$ , que é  $\approx 2,2 \times 10^{-6}$  s.

Sabe-se, por outro lado, que muons são produzidos quando raios cósmicos colidem com núcleos ao penetrar na atmosfera da Terra, e uma fração apreciável deles chegam até a superfície. Ora, durante uma vida média, mesmo viajando com velocidade  $v \sim c$ , um muon percorreria uma distância  $\sim c \tau_\mu \sim 3 \times 10^8 \times 2,2 \times 10^{-6}$  m  $\approx 660$  m, em lugar de distâncias  $\geq 10$  km, como ocorre quando são produzidos na alta atmosfera. Como se explica a observação de uma fração apreciável dos muons após um número tão grande de vidas médias?

A explicação é dada pela dilatação dos intervalos de tempo. A vida média  $\tau_\mu$  é um *tempo próprio*, no referencial de repouso do muon. Em relação à Terra, muitos muons se movem com velocidades relativísticas, tendo  $V/c \geq 0,995$ , o que corresponde a um fator de dilatação temporal  $\gamma \geq 10$ . A vida média no referencial da Terra passa a ser  $\geq 2,2 \times 10^{-5}$  s e os muons podem penetrar através de  $\geq 6,6$  km de atmosfera durante uma vida média, o que explica os resultados observados.

Obtemos uma explicação equivalente deslocando-nos para o referencial do muon, onde a vida média é  $\tau_\mu$ . Entretanto, para um muon com  $V/c \geq 0,995$ , é a espessura da atmosfera que sofre uma contração de Lorentz por um fator  $\gamma \geq 10$ , levando ao mesmo resultado.

## 6.6 A lei relativística de composição de velocidades

Consideremos uma partícula em movimento *arbitrário* em relação a ( $S'$ ), com

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t') \quad (6.43)$$



A velocidade instantânea  $\mathbf{v}'(t')$  da partícula em  $(S')$  tem as componentes

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (6.44)$$

A velocidade  $\mathbf{v}(t)$  da partícula em relação a  $(S)$  tem componentes

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (6.45)$$

onde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  estão relacionados com  $x'(t')$ ,  $y'(t')$ ,  $z'(t')$  pela TL (6.30) (tomamos  $\mathbf{x} \parallel \mathbf{V}$ ).

Resulta então das (6.30) que

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - V dt) & , \quad dy' = dy, \quad dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right) \end{cases}$$

o que implica

$$\begin{aligned} v'_x = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dt \left( \frac{dx}{dt} - V \right)}{dt \left( 1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} & \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - V}{\left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt \left( 1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} & \left\{ \begin{array}{l} v'_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_y}{\left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma dt \left( 1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} & \left\{ \begin{array}{l} v'_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_z}{\left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (6.46) \end{aligned}$$

As (6.46) dão a *lei relativística de composição de velocidades*. Se  $|\mathbf{v}| \ll c$ ,  $V \ll c$ , ela se reduz à lei de Galileu (6.2), a menos de pequenas correções (exatamente, quando  $c \rightarrow \infty$ ). O caso geral, em que  $\mathbf{V}$  tem uma direção qualquer, obtém-se, por um método análogo, das expressões (6.35) da TL geral ( $v_x' \rightarrow v_{i1}'$ ,  $v_x V \rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}$ ).

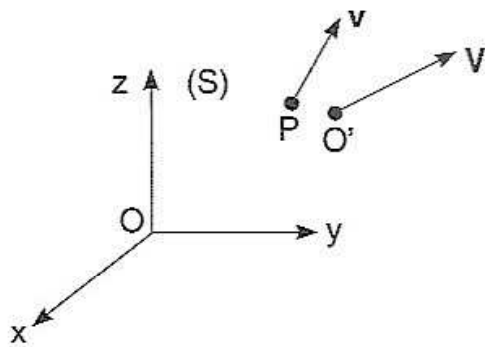


Fig. 6.10 Velocidade relativa

Também podemos interpretar as (6.46) de forma diferente (fig. 6.10). A partícula P se move em relação a (S) com velocidade  $\mathbf{v}$ . Podemos considerar em (S) outra partícula  $O'$  que se move, em (S), com velocidade  $\mathbf{V}$ , e perguntar: qual é a *velocidade relativa* da partícula P em relação à partícula  $O'$ ?

Na mecânica newtoniana, essa velocidade relativa é dada por  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ , como consequência da transformação de Galileu (6.2). Daí seguiria que, se duas partículas se movem em sentidos opostos com velocidades  $c$  e  $-c$ , a sua velocidade relativa seria  $2c$ ; vemos que esta definição não é aceitável.

Entretanto, a definição correta da *velocidade relativa de P em relação a  $O'$*  é: a velocidade  $\mathbf{v}'$  de P em relação a um referencial ( $S'$ ) onde  $O'$  está em repouso. Vemos então que a velocidade relativa  $\mathbf{v}'$  é dada precisamente pelas (6.46).

Decorre das (6.46) (a demonstração será deixada como problema [Probl. 6.4]) que

$$\boxed{1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right)^2}} \quad (6.47)$$

Uma consequência importante desse resultado é que, se as magnitudes de *duas* das velocidades  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{V}$  são  $< c$ , o mesmo vale para a 3.<sup>a</sup>: *a composição de duas velocidades menores que  $c$ , relativisticamente, nunca pode levar a uma resultante maior que  $c$* . Em particular, se  $v \rightarrow c$ , o mesmo vale para  $v'$ , mesmo que  $|\mathbf{V}|$  tenda a  $c$ .

## 6.7 Intervalos

Consideremos dois *eventos* 1 e 2, que ocorrem nos “pontos do espaço-tempo”  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, t_2)$ , respectivamente, em relação a um dado referencial ( $S$ ). Sem restrição da generalidade, podemos supor que  $\mathbf{x}_1 = 0$  e  $t_1 = 0$ , tomando o evento 1 como origem das coordenadas e do tempo, e escrever:  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ ,  $t_2 = t$ .

Tanto  $\mathbf{x}$  como  $t$  são grandezas *relativas*, isto é, dependentes do referencial, mas existe uma grandeza associada às coordenadas espaciotemporais dos dois eventos que é *invariante*, tendo o mesmo valor em qualquer referencial inercial:

$$\boxed{(s_{12})^2 \equiv (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2} \quad (6.48)$$

Com efeito, com a escolha de origem feita,

$$(s_{12})^2 = \mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (6.49)$$

e as equações da TL foram obtidas precisamente impondo a condição de que essa grandeza tenha o mesmo valor em qualquer referencial inercial [o fato de que este valor fosse = 0 não entrou na (6.21)].

A grandeza *invariante por TL*  $(s_{12})^2$ , que pode ter qualquer sinal ( $> 0$ ,  $< 0$  ou  $= 0$ ), chama-se o *quadrado do intervalo entre os eventos 1 e 2*. Vejamos agora, sempre adotando um dos eventos como origem, como na (6.49), a interpretação física do *sinal* de  $(s_{12})^2$ , que tem um caráter *absoluto*, pois é o mesmo em qualquer referencial inercial.

$$\boxed{\text{(a) } (s_{12})^2 < 0}$$

Nesse caso, escrevemos

$$\boxed{(s_{12})^2 = -c^2 (\tau_{12})^2} \quad (6.50)$$

onde  $\tau_{12}$  é real. Pela (6.49), temos

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 < 0 \Rightarrow |\mathbf{x}| < c |t| \quad (6.51)$$

de modo que a *distância* entre os pontos onde ocorrem os dois eventos é menor do que aquela que seria percorrida por um sinal luminoso durante o intervalo de tempo  $t$  que os separa. Isso implica que é possível enviar um sinal de um evento ao outro, de forma que um deles *pode* ser a *causa* do outro.

A (6.51) admite duas possibilidades: (i)  $t > |\mathbf{x}|/c$  : 2 ocorre *depois* de 1 e pode ser causado por 1; (ii)  $t < -|\mathbf{x}|/c$ : inverte-se a ordem temporal entre 1 e 2.

Consideremos um referencial ( $S'$ ) que se move em relação a ( $S$ ) com velocidade  $\mathbf{V}$ ; pela TL geral (6.35),

$$t' = \gamma \left( t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right) \quad (6.52)$$

Temos

$$-\frac{|\mathbf{V}|}{c} \cdot \frac{|\mathbf{x}|}{c} \leq \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \leq \frac{|\mathbf{V}|}{c} \cdot \frac{|\mathbf{x}|}{c}$$

ou, como  $|\mathbf{V}/c| = \beta$ ,

$$\left| \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right| \leq \beta |t| \quad (6.53)$$

onde usamos a (6.51).

Comparando com a (6.52), e com  $\beta < 1$  ( $|\mathbf{v}| < c$ ), vemos que (i)  $t > 0 \rightarrow t' > 0$ ; (ii)  $t < 0 \rightarrow t' < 0$ .

Logo, no caso (i), o evento 2 ocorre *depois* do evento 1, em *qualquer* referencial com  $\beta < 1$ , isto é, está no *futuro absoluto* de 1, o que é consistente com o fato de que 1 pode ter causado 2. No caso (ii), o evento 2 ocorre *antes* do evento 1 em qualquer referencial com  $\beta < 1$ , ou seja, está no *passado absoluto* de 1, podendo portanto ter sido a causa de 1.

Vemos agora por que  $c$  não é apenas a velocidade da luz no vácuo, mas tem de ser a *velocidade limite de propagação de qualquer sinal e de movimento de qualquer referencial*: se assim não fosse, se admitíssemos a possibilidade de  $\beta > 1$ , seria possível violar o *princípio de causalidade*, invertendo a sucessão de causa e efeito! (Morrer antes de ter nascido, por exemplo).

Podemos mostrar também que, *para*  $(s_{12})^2 < 0$ , *sempre existe um referencial inercial onde os eventos 1 e 2 ocorrem no mesmo ponto do espaço*.

Com efeito, na TL geral (6.35),

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V} t) \quad (6.54)$$

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}$$

Se escolhermos  $\mathbf{V} // \mathbf{x}$ , será  $\mathbf{x}_{\perp} = 0$ , e basta tomar

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{x}}{t} \quad (\Rightarrow \mathbf{x}' = 0 = \mathbf{x}) \quad (6.55)$$

o que é possível porque  $|\mathbf{V}| = |\mathbf{x}| / |t| < c$ . Esse é o referencial que *sai de 1* no instante 0 em que 1 ocorre e *chega a 2* no instante  $t$  da sua ocorrência.

Nesse referencial, como  $\mathbf{x}' = 0$ ,

$$(s_{12})^2 = -c^2 (\tau_{12})^2 = -c^2 t'^2 \quad \left\{ \boxed{\tau = t'} \right. \quad (6.56)$$

mostrando que  $\tau$  é o intervalo do tempo entre os eventos 1 e 2 num referencial onde eles ocorrem em repouso (no mesmo ponto O), ou seja,  $\tau$  é o *intervalo de tempo próprio entre os 2 eventos (marcado por um relógio em repouso)*. Dizemos nesse caso que a separação entre eles é *do gênero tempo*.

$$\boxed{(b) (s_{12})^2 > 0}$$

Nesse caso, em lugar da (6.51), teremos

$$|\mathbf{x}| > ct \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{|\mathbf{x}|}{c} < t < \frac{|\mathbf{x}|}{c} \end{array} \right. \quad (6.57)$$

de modo que nenhum sinal com velocidade  $\leq c$  pode ligar um evento ao outro: um dos eventos não pode ser a causa do outro.

Nessas condições, *sempre existe um referencial onde os dois eventos são simultâneos*. Com efeito, para que seja [cf.(6.52)]

$$t' = \gamma \left( t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right) = 0$$

basta tomar  $\mathbf{V} // \mathbf{x}$  e

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 t}{|\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \quad \left\{ \quad \left| \frac{\mathbf{V}}{c} \right| = \frac{ct}{|\mathbf{x}|} < 1 \right. \quad (6.58)$$

Nesse referencial,

$$(s_{12})^2 = \mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = \mathbf{x}'^2 \quad \left\{ \quad s'_{12} = |\mathbf{x}'| \right. \quad (6.59)$$

é a *distância própria* entre os dois eventos.

Um intervalo desse tipo diz-se ser do *gênero espaço*: os dois eventos têm uma separação do gênero espaço, ou ainda, são *absolutamente separados*.

Conforme tomemos  $|\mathbf{V}|$  maior ou menor que o valor (6.58), podemos encontrar  $t' < 0$  ou  $t' > 0$ . Logo, nesse caso, dizer que um evento ocorre “antes” ou “depois” do outro é um conceito relativo: depende do referencial. Isso é consistente com a inexistência de relação de causa e efeito entre eles.

Um exemplo de dois eventos com separação do gênero espaço é o da queda dos relâmpagos (simultânea no referencial dos trilhos) nas duas extremidades de um trem (Seç. 6.3): conforme o trem se mova para a frente ou para trás, qualquer um dos dois eventos pode ser visto como ocorrendo antes do outro, no referencial do trem.

$$(c) \quad (s_{12})^2 = 0$$

Neste caso,

$$|\mathbf{x}| = c |t| \quad (6.60)$$

e os dois eventos podem ser ligados por um sinal luminoso. Diz-se que a separação entre eles é *do gênero luz* (um está no *cone de luz*\* do outro).

---

\* A (6.60), no espaço-tempo quadridimensional, é a equação de um cone, o *cone de luz*, que corta o plano  $(x, t)$  num par de retas de coeficiente angular  $\pm c$ . A *linha de universo* de uma partícula livre (sua trajetória no espaço-tempo) é uma reta (coeficiente angular  $|v| < c$ ) contida dentro desse cone (cf. fig. 6.20).



## 6.8 O efeito Doppler

O fator de propagação de uma onda eletromagnética plana monocromática no vácuo é

$$\exp \left[ i \left( \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \right) \right] = \exp \left[ -i \omega \left( t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \right] = \exp (-2 \pi i F) \quad (6.61)$$

onde

$$F \equiv \nu \left( t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \quad (6.62)$$

tem uma interpretação física simples.

Com efeito, suponhamos que, para  $t = 0$ , a origem  $O$  de um referencial ( $S$ ) esteja sendo cruzada por uma crista de onda. Essa crista atinge o ponto  $\mathbf{x}$  no instante

$$t_0 = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}) / c \quad (6.63)$$

Se escolhermos  $t$  de tal forma que  $F$  na (6.62) seja um número inteiro, este número

$$F \equiv \nu (t - t_0) \quad (6.64)$$

é então o número de cristas de onda que cruzaram a origem depois de  $t = 0$  e atingem  $\mathbf{x}$  entre  $t_0$  e o instante  $t$ . Assim,  $F = 1$  para  $t - t_0 = \tau = 1/\nu$  (um período),  $F = 2$  para  $t - t_0 = 2\tau$ , etc..

Seja agora ( $S'$ ) um outro referencial inercial que se desloca em relação a ( $S$ ) com velocidade  $V$  na direção  $x$ , e tal que  $O \equiv O'$  para  $t = t' = 0$ .

Se  $(\mathbf{x}', t')$  corresponde a  $(\mathbf{x}, t)$  em ( $S'$ ),

$$F' \equiv \nu' \left( t' - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) = \nu' (t' - t'_0) \quad (6.65)$$

é o número de cristas de onda que cruzaram  $\mathbf{x}'$  [mesmo ponto  $P$  em ( $S'$ )] depois daquela que passou por  $O' \equiv O$  em  $t' \equiv t = 0$ , entre os instantes  $t'_0$  (correspondente a  $t_0$ ) e  $t'$ . Esse número tem de ser idêntico a  $F$ , porque a primeira e a última

frente de onda se correspondem em ambos os referenciais [as coordenadas do evento “cruzamento da última” são  $(\mathbf{x}, t)$  em  $(S)$  e  $(\mathbf{x}', t')$  em  $(S')$ ], e o número de cristas entre os dois eventos tem um sentido absoluto (tem de ser o mesmo em ambos os referenciais); também poderíamos tomar o número de zeros do campo eletromagnético,  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ , que tem caráter absoluto.

Logo,

$$\boxed{F = F'} \quad (6.66)$$

ou seja, *a fase de uma onda eletromagnética plana monocromática é uma grandeza invariante.*

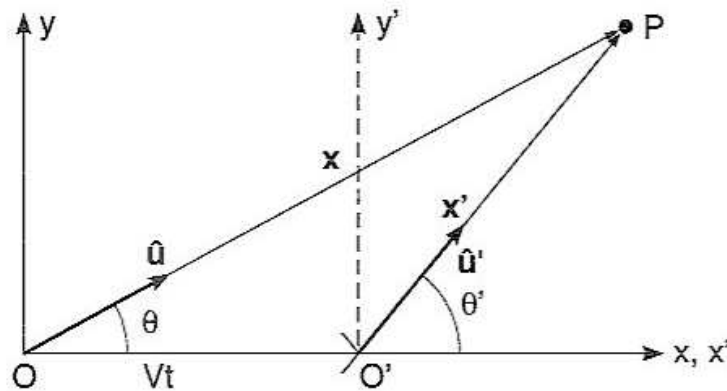


Fig. 6.11 Efeito Doppler e aberração

Suponhamos, para simplificar, que o ponto P, de coordenadas  $\mathbf{x}$  em  $(S)$  e  $\mathbf{x}'$  em  $(S')$ , está no plano  $(x, y)$ , de forma que (fig. 6.11)

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad ; \quad \hat{\mathbf{u}}' \equiv (\cos \theta', \sin \theta', 0) \quad (6.67)$$

Temos então

$$F' \equiv \nu' \left( t' - \frac{x'}{c} \cos \theta' - \frac{y'}{c} \sin \theta' \right) \quad (6.68)$$

e, usando as equações (6.31) da TL inversa,

$$F \equiv \nu' \left( t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{y}{c} \sin \theta \right)$$

$$= v \left[ \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right) - \frac{\gamma}{c} \cos \theta (x' + V t') - \frac{y'}{c} \sin \theta \right]$$

$$F = \gamma v \left( 1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right) t' - \frac{\gamma v}{c} \left( \cos \theta - \frac{V}{c} \right) x' - \frac{v}{c} \sin \theta y' \quad (6.69)$$

que, pela (6.66), tem de ser idêntica à (6.68) quaisquer que sejam  $t'$ ,  $x'$  e  $y'$ .

Isto só é possível se os coeficientes forem idênticos, o que dá, com  $\frac{V}{c} \equiv \beta$ ,

$$\boxed{v' = \gamma v (1 - \beta \cos \theta)} \quad (6.70)$$

que é a *expressão relativística do efeito Doppler*.

Também se pode obter dessa forma a relação entre as direções de propagação  $\theta'$  e  $\theta$ , que são diferentes devido à relatividade da simultaneidade [frentes de onda em ( $S$ ) não coincidem com frentes de onda em ( $S'$ )]. Essa variação de direção corresponde ao fenômeno da *aberração*, que desloca a posição aparente das estrelas. O efeito astronômico foi primeiro observado por Bradley em 1728. A relação entre  $\theta'$  e  $\theta$  será deixada como exercício (Probl. 6.5).

Voltando ao efeito Doppler relativístico para a luz, é interessante comparar a (6.70) com os resultados análogos da física não-relativística na *acústica*, obtidos em *Fís. Bás.* 2, Eq. (6.9.11) e Probl. 6.16. Para adaptá-los à notação atual, é preciso trocar neles  $V \rightarrow -V$ , pois  $V$  é para nós a velocidade do *observador* em relação à fonte, e lá foi tomado como velocidade da *fonte* em relação ao observador.

Na acústica, a definição de  $\beta$  seria,

$$\beta = V / v \quad (v = \text{veloc. do som no ar em repouso}) \quad (6.71)$$

e é preciso considerar duas situações diferentes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fonte em repouso na atmosfera} \\ \text{Observador em movimento com} \\ \text{velocidade } V \text{ na direção } \theta \end{array} \right\} \boxed{v = v_0 (1 - \beta \cos \theta)} \quad (6.72)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Observador em repouso na atm.} \\ \text{Fonte em movimento com} \\ \text{velocidade } V \text{ na direção } \theta \end{array} \right\} \boxed{v = \frac{v_0}{1 + \beta \cos \theta}} \quad (6.73)$$

onde  $v_0$  é a “frequência própria” da fonte em seu sistema de repouso.

No caso da acústica, as duas situações dão resultados *diferentes*, porque existe um referencial privilegiado: aquele em que a atmosfera está em repouso. Para  $\theta = 0$ , p. ex., e  $\beta \ll 1$ ,

$$\begin{array}{l} \text{Fonte em repouso} \\ \text{Observador em repouso} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 (1 - \beta) \\ v = \frac{v_0}{1 + \beta} = v_0 (1 - \beta + \beta^2 - \dots) \end{array} \right. \quad (6.74)$$

vemos que as duas expressões diferem por termos de 2.<sup>a</sup> ordem em  $\beta$ . Por outro lado, para observação *transversal* ( $\theta = \pi/2$ ), não há efeito Doppler acústico:  $v = v_0$  nos dois casos.

O efeito Doppler relativístico para a luz, dado pela (6.70), só depende da velocidade *relativa*  $V$  do observador com respeito à fonte, como tinha de ser. Para  $\theta = 0$ ,

$$\boxed{v' = \gamma v (1 - \beta) = v \frac{(1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}} \quad (6.75)$$

Se existisse o éter como referencial absoluto, ele desempenharia o mesmo papel que a atmosfera para o som, e teríamos de distinguir entre os dois casos. Aliás, as (6.72) e (6.73) também resultariam da (6.66) se aplicássemos a transformação de Galileu em lugar da  $TL$  (Probl.6).

O efeito relativístico (6.70) só difere da (6.72) pelo fator  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , que representa o efeito cinemático da *dilatação dos intervalos de tempo*. No caso relativístico, esse fator persiste para *observação transversal*.

$v' \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \gamma v = (1 - \beta^2)^{-1/2} v \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right) v$	EFEITO DOPPLER TRANSVERSAL	(6.76)
---	----------------------------------	--------

A observação é difícil, não só por ser um efeito de 2.<sup>a</sup> ordem, mas também porque um pequeno desvio da direção  $\theta = \pi/2$  introduz correções adicionais de ordem  $\beta$ . Entretanto, uma observação direta foi feita por W. Kundig em 1963, usando raios  $\gamma$  de uma fonte radioativa colocada no rotor de uma centrífuga em alta rotação. Os resultados confirmaram inteiramente a (6.76), e podem ser considerados como outra verificação experimental do efeito de dilatação dos intervalos de tempo.

Quando se compara o espectro da luz proveniente de uma galáxia distante, onde é possível identificar linhas de absorção características (cf. Seç. 7.6) (p. ex., duas linhas de absorção devidas ao cálcio ionizado), com as mesmas linhas num espectro terrestre, verifica-se que os comprimentos de onda na luz proveniente da galáxia sofreram um *desvio para o vermelho* ( $v' < v$ ).

Em 1929, o astrônomo americano Edwin P. Hubble propôs a hipótese arrojada de que esse desvio seja devido ao *efeito Doppler*, com a galáxia observada se afastando de nós com um dado valor de  $\beta$ , determinado pela (6.75) a partir de  $v'/v$ .

A aplicação da idéia de Hubble a um grande número de galáxias mostrou que a velocidade de recessão  $V$  é proporcional à distância  $r$  da galáxia à Terra:

$$V = H_0 r \quad (6.77)$$

onde  $H_0$  se chama a *constante de Hubble*. O valor de  $H_0$  teve sua determinação mais recente em 2003, a partir de observações efetuadas pelo satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), resultando ser igual a 71 ( $\pm 4$ ) km/s por Mpc (1 Mpc = 1 Megaparsec =  $10^6$  pc; 1 pc  $\approx$  3.6 anos-luz).

O resultado de Hubble foi a primeira indicação de que o Universo não é estático, encontrando-se em *expansão*; voltaremos a discutir este resultado mais adiante (Seç. 6.13).

## 6.9 Momento relativístico

Após substituir a *cinemática* newtoniana, baseada na transformação de Galileu, pela cinemática relativística (*TL*), é preciso reformular a *dinâmica* newtoniana para que seja compatível com a nova cinemática.

Esperamos que, de conformidade com a experiência, a mecânica relativística se reduza à mecânica newtoniana, com muito boa aproximação, quando *todas* as velocidades envolvidas forem  $\ll c$ .

Entretanto, já aparece uma diferença básica se perguntarmos que tipos de *forças* podemos considerar. Na mecânica newtoniana, admitem-se forças de interação entre partículas que ficam inteiramente determinadas pela suas posições (distâncias) instantâneas, tais como a *gravitação*, dada pela lei de Newton da gravitação universal.

Tais forças são inadmissíveis na mecânica relativística: o conceito de “posições simultâneas” das partículas de um sistema depende do referencial, e a velocidade limite de propagação das interações é  $c$ .

Entre as interações fundamentais, podemos admitir as eletromagnéticas, cuja formulação é compatível com a relatividade; a velocidade de propagação no vácuo das interações eletromagnéticas é  $c$ .

Um outro tipo de interação, descrita fenomenologicamente, a nível macroscópico, que podemos admitir, são *forças de contato*, que atuam apenas quando duas partículas entram em contato numa colisão, e podem ser idealizadas como atuando apenas no instante e no ponto de contato, sendo portanto compatíveis com a relatividade.

As leis da dinâmica relativística, como as leis da dinâmica newtoniana, não podem ser “deduzidas”. Procuraremos chegar a elas de forma heurística, usando forças de contato e admitindo a validade geral de *leis de conservação*, que, como sabemos, englobam alguns dos princípios mais básicos da dinâmica.

Há outra forma de inferir essas leis utilizando de forma sistemática o *formalismo covariante*, que garante automaticamente a compatibilidade com o princípio de relatividade, mas as limitações deste curso não permitirão desenvolvê-lo aqui (cf. Sec. 6.12).

Qualquer que seja a abordagem, a justificativa final das leis inferidas para a dinâmica relativística encontra-se no seu acordo com a experiência.

O princípio básico do qual vamos partir é o da *conservação do momento* num processo muito simples de colisão elástica entre duas partículas idênticas [este método é devido a G. N. Lewis e R.C. Tolman (1909)].



Na mecânica newtoniana, o momento de uma partícula é definido por

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} = m \frac{d \mathbf{x}}{d t} \quad (6.78)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o seu vetor velocidade e  $m$  uma grandeza *escalar* que se admite implicitamente ser uma característica invariável da partícula, sua massa inercial.

Vamos *admitir* que na mecânica relativística o momento seja da mesma forma, proporcional a  $\mathbf{v}$ , mas vamos admitir maior generalidade para o coeficiente  $m$ ; continuará sendo um escalar, mas não necessariamente invariável: pode depender da única grandeza escalar associada a  $\mathbf{v}$ , a *magnitude*  $v \equiv |\mathbf{v}|$  da velocidade:

$$m = m(v) \quad ; \quad v = |\mathbf{v}| \quad (6.79)$$

de forma que

$$\mathbf{p} = m(v) \mathbf{v} \quad (6.80)$$

Vamos chamar de  $a$  e  $b$  as duas partículas idênticas (podemos imaginá-las como duas bolinhas), e vamos adotar um referencial ( $S'$ ) (referencial do *CM*) em que o *momento total* do sistema se anula antes da colisão (portanto também depois), e no qual ela tem lugar num plano, que escolhemos como  $(x', y')$ ; o efeito da colisão consiste em *inverter* as componentes da velocidade das partículas ao longo de um eixo, que escolhemos como  $y'$ , sem alterar as componentes  $x'$ .

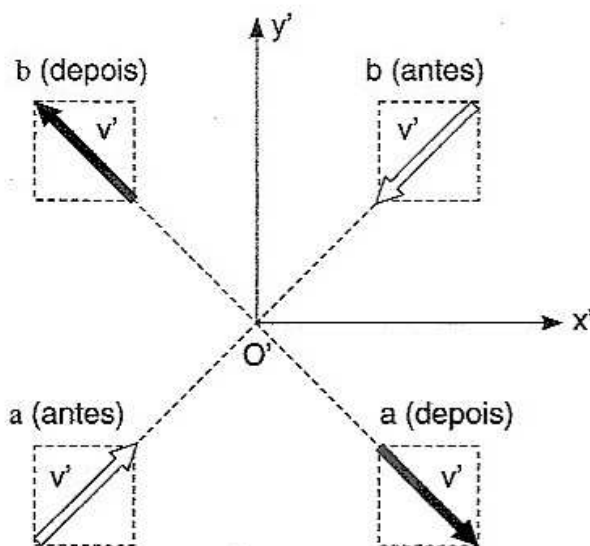


Fig. 6.12 Colisão elástica

As componentes  $x'$  e  $y'$  das velocidades das partículas  $a$  e  $b$  em ( $S'$ ) antes e depois da colisão estão representadas na Tabela 1, conforme a fig. 6.12, onde

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} \quad (6.81)$$

tem o mesmo valor para ambas as partículas, antes e depois da colisão [logo, também  $m(v')$ ].

TABELA 1

Componentes das velocidades em ( $S'$ ) antes e depois				
	$x'$	$y'$	$x'$	$y'$
Antes	$v_x'$	$v_y'$	$-v_x'$	$-v_y'$
Depois	$v_x'$	$-v_y'$	$-v_x'$	$v_y'$
	Partícula $a$		Partícula $b$	

Pela (6.80), o momento *total* é  $= 0$  antes e depois, qualquer que seja a forma da função  $m(v)$ , de modo que a lei de conservação do momento é satisfeita no referencial ( $S'$ ).

Pelo Princípio de Relatividade, o mesmo deve valer em qualquer outro referencial inercial. Seja então ( $S$ ) um referencial em relação ao qual ( $S'$ ) se desloca na direção  $x$  com velocidade  $V$ ; as componentes das velocidades em relação a ( $S$ ) resultam da lei relativística (6.46) de composição de velocidades aplicada à  $TL$  inversa ( $V \rightarrow -V$ ), o que dá, partindo da Tabela 1, os resultados da Tabela 2.

TABELA 2 ( $\beta \equiv V/c$ )

Componentes das velocidades em ( $S$ ) antes e depois da colisão				
Componente	$x$	$y$	$x$	$y$
Antes	$\frac{(v_x' + V)}{[1 + (v_x' V/c^2)]}$	$\frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_y'}{[1 + (v_x' V/c^2)]}$	$\frac{(-v_x' + V)}{[1 - v_x' V/c^2]}$	$\frac{-\sqrt{1 - \beta^2} v_y'}{[1 - v_x' V/c^2]}$
Depois	$\frac{(v_x' + V)}{[1 + (v_x' V/c^2)]}$	$-\frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_y'}{1 + (v_x' V/c^2)}$	$\frac{(-v_x' + V)}{[1 - v_x' V/c^2]}$	$+\frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_y'}{[1 - v_x' V/c^2]}$
	Partícula $a$		Partícula $b$	

O módulo  $v_a$  da velocidade da partícula  $a$  antes e depois da colisão é o mesmo, e o mesmo vale para a velocidade  $v_b$ , da partícula  $b$ , mas  $v_a \neq v_b$ . A conservação do momento em ( $S$ ) se escreve:

$$\left[ m(v_a) \mathbf{v}_a + m(v_b) \mathbf{v}_b \right] \text{ antes} = \left[ m(v_a) \mathbf{v}_a + m(v_b) \mathbf{v}_b \right] \text{ depois} \quad (6.82)$$

o que é *automaticamente* satisfeito para a componente  $x$ . Para a componente  $y$ , pela Tabela 2, a (6.82) dá

$$\begin{aligned} & m(v_a) \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2} v'_y}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} - m(v_b) \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2} v'_y}{\left(1 - \frac{v'_x V}{c^2}\right)} \\ &= -m(v_a) \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2} v'_y}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} + m(v_b) \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2} v'_y}{\left(1 - \frac{v'_x V}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (6.83)$$

o que só pode ser satisfeito para valores arbitrários de  $v'_x$  e  $v'_y$  se ambos os membros forem identicamente nulos, ou seja,

$$\frac{m(v_a)}{m(v_b)} = \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (6.84)$$

Resulta porém da identidade (6.47), onde  $\beta \equiv -V/c$ , que

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \\ \sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \end{aligned} \right\} \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (6.85)$$

e, substituindo na (6.84),

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} m(v_a) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_b}{c}\right)^2} m(v_b) \quad (6.86)$$

Logo, embora as duas partículas que colidem sejam idênticas, os escalares correspondentes  $m(v_a)$  e  $m(v_b)$  não são os mesmos para velocidades  $v_a \neq v_b$ . Entretanto, a grandeza

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} m(v)$$

é independente da magnitude  $v$  da velocidade (invariante). Isso dá

$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad m_0 \equiv m(0)} \quad (6.87)$$

onde  $m_0$  é o *valor próprio* de  $m(v)$ , obtido quando a partícula está em repouso.

Mas, no limite de baixas velocidades, devemos obter a mecânica não-relativística (newtoniana), em que  $m$  representa a *massa da partícula*. Logo,  $m_0$  é a *massa de repouso*, e a expressão relativística do momento deve ser dada por

$$\boxed{\mathbf{p} = m(v) \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (6.88)$$

A característica da inércia da partícula que tem um significado invariante é a sua *massa própria*  $m_0$ .

## 6.10 Energia relativística

A lei fundamental da dinâmica, na forma em que foi enunciada por Newton, é mantida na relatividade:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}} \quad (6.89)$$

mas, como vimos, nem todos os tipos de leis de forças são compatíveis com o princípio de relatividade.

Para uma partícula de carga  $q$  movendo-se com velocidade  $\mathbf{v}$  num campo eletromagnético, permanece válida a expressão da força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.90)$$

de modo que a (6.89) assume a mesma forma que na mecânica não-relativística, exceto pela definição do momento  $\mathbf{p}$ , que é dado pela (6.88).

O movimento de partículas carregadas em aceleradores, onde elas adquirem velocidades próximas de  $c$ , fornece testes experimentais abundantes das (6.88) a (6.90), confirmando-as com grande precisão.

Em particular, isso se aplica à “variação da massa com a velocidade” (6.87).

A taxa de variação temporal da energia cinética de uma partícula continua sendo dada por

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.91)$$

onde  $T$  representa a *energia cinética*. Pela (6.88),

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= m_0 \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] = \\ &= m_0 \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{\left(-2 \frac{v}{c^2}\right) \mathbf{v} \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right\} = \\ &= \frac{m_0 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_0 v \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 v \frac{dv}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] = \frac{dE}{dt} \quad (6.92)$$

onde

$$E \equiv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \quad (6.93)$$

Resulta que da (6.92) que

$$T = E + \text{constante} \quad (6.94)$$

Por definição, a energia cinética de uma partícula deve anular-se quando ela está em repouso ( $v = 0$ ). Portanto, a constante de integração na (6.94) tem de valer  $(-m_0 c^2)$ , o que dá

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (6.95)$$

Para movimentos com velocidades  $|v| \ll c$ , podemos empregar a expansão:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \text{termos de ordem} \left(\frac{v}{c}\right)^4 \quad (6.96)$$

Substituindo na (6.95), resulta

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (6.96)$$



ou seja, desprezando correções de ordem superior, recuperamos a expressão não-relativística da energia cinética.

As (6.93) e (6.95) dão:

$$\boxed{E = m_0 c^2 + T} \quad (6.97)$$

Conforme veremos abaixo,  $E$  representa a *energia total* da partícula, e a constante  $m_0 c^2$  é a *energia de repouso*.

Elevando ao quadrado ambos os membros da (6.88), obtemos

$$\mathbf{p}^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2 \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 + 1 \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left( \frac{E}{c^2} \right)^2 - m_0^2 \right.$$

ou seja

$$\boxed{p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2} \quad (6.98)$$

Comparando a (6.88) com a (6.93), obtemos também

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}} \quad (6.99)$$

Vemos pelas (6.88) e (6.93) que, para  $m_0 \neq 0$ , tanto  $|\mathbf{p}|$  como  $E$  crescem indefinidamente quando  $v \rightarrow c$ . Logo, uma partícula de massa de repouso  $\neq 0$  nunca pode atingir a velocidade da luz.

Por outro lado, isso não fica excluído pelas (6.98) e (6.99) para  $m_0 = 0$ ; neste caso, temos:

$$\boxed{m_0 = 0 \left\{ |\mathbf{v}| = c \text{ e } |\mathbf{p}| = \frac{E}{c} \right.} \quad (6.100)$$

ou seja, uma partícula com  $m_0 = 0$  se move com velocidade  $c$  e a magnitude de seu momento é igual à sua energia total dividida por  $c$ . Não é apropriado falar de “mas-

sa de repouso” nesse caso, porque uma tal partícula não pode ser reduzida ao repouso (seria necessário um referencial com velocidade  $c$ ).

São conhecidas duas partículas com essas propriedades: o fóton e o neutrino (recentemente, surgiram dúvidas sobre se a massa dos neutrinos de fato é nula).

No caso da radiação eletromagnética já se sabia desde Maxwell que ela transporta não só energia, mas também momento. Resulta das equações de Maxwell, fazendo o balanço local de momento, que a *densidade de momento* transportada é dada por

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (6.101)$$

onde  $\mathbf{S}$  é o vetor de Poynting, ou seja, a densidade de corrente de energia. No caso de uma onda plana, vimos [cf. (5.15)] que (no vácuo)

$$\mathbf{S} = cU \hat{\mathbf{u}} \equiv U \mathbf{c} \quad (6.102)$$

onde  $U$  é a densidade de energia. Logo, a (6.101) fica

$$\mathbf{g} = \frac{U}{c} \hat{\mathbf{u}} \left\{ |\mathbf{g}| = \frac{U}{c} \right\} \quad (6.103)$$

o que equivale à (6.100), em termos de densidades. Por conseguinte, a teoria de Maxwell confirma a (6.100).

Uma das manifestações do momento transportado por uma onda eletromagnética é a *pressão de radiação*. Quando a radiação eletromagnética é refletida ou absorvida por uma superfície, ela sofre uma variação de momento, exercendo portanto uma força sobre essa superfície, que corresponde à pressão da radiação.

É a pressão da radiação solar sobre as caudas dos cometas que as leva a apontar em direções que se afastam do sol (isto já havia sido conjecturado em 1619 por Kepler). Recentemente, a NASA fez testes com uma “vela espacial”, que usaria a pressão da radiação solar para propulsão de um veículo espacial.

## 6.11 A inércia da energia

A inércia da energia foi descoberta por Einstein em 1905. No ano seguinte, ele mostrou que se poderia obter o resultado com o auxílio de um argumento

heurístico, que vamos reproduzir agora. Como é típico em muitas contribuições de Einstein, baseia-se numa “experiência imaginada”.

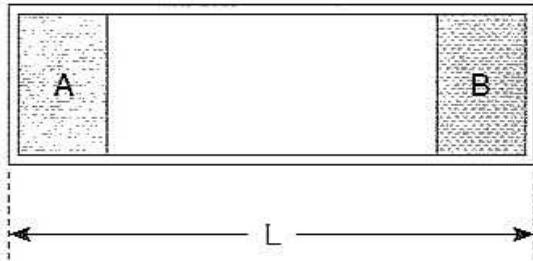


Fig. 6.13 Cavidade cilíndrica

Imaginemos que uma cavidade cilíndrica evacuada de comprimento  $L$  flutua no espaço (vácuo), tendo massa  $M$ .

Nas extremidades da cavidade (fig. 6.13) estão colocados dois corpos A e B, cujas massas supomos desprezíveis em confronto com  $M$ .

Suponhamos agora que o corpo A transmita para B uma energia  $\Delta E$ , sob a forma de radiação eletromagnética, e que essa energia seja totalmente absorvida por B. Admitimos que a duração dos processos de emissão e absorção (na região do visível,  $\sim 10^{-9}$  s) é desprezível em confronto com o tempo  $T = L/c$  que a radiação leva para atravessar o cilindro.

Pela (6.100), a radiação transporta um momento  $\Delta P = \Delta E/c$ . A lei de conservação do momento implica então que o centro de massa do cilindro adquire um momento  $-\Delta P$  (recuo), no sentido  $B \rightarrow A$ . Logo, durante o intervalo de tempo  $T$  que a radiação leva para atravessar o cilindro, o CM (centro de massa) se desloca de

$$-\frac{\Delta P}{M} T = -\frac{\Delta E}{M c} \cdot \frac{L}{c} = -\frac{L}{M c^2} \Delta E \quad (\text{sentido } B \rightarrow A) \quad (6.103)$$

Suponhamos agora que, após ter absorvido a radiação, o corpo B se desloca, sob o efeito unicamente de forças *internas* ao sistema, com velocidade  $v$ , até atingir A. Seja  $m_1$  a massa de B *após* a absorção da energia  $\Delta E$ . Novamente pela conservação do momento total, o CM do cilindro adquire, durante o movimento de B, uma velocidade  $V = m_1 v/M$  no sentido  $A \rightarrow B$ , e se desloca de

$$V \cdot \frac{L}{v} = \frac{m_1}{M} L \quad (\text{sentido } A \rightarrow B) \quad (6.104)$$

durante o tempo  $L/v$  que B leva até atingir A.

Após atingir A, B transfere de volta para A a energia  $\Delta E$  que havia recebido, ficando com massa  $m_2$ , e volta para a outra extremidade do cilindro, produzindo, por analogia com a (6.104), um deslocamento do CM de

$$\frac{-m_2}{M} L \quad (\text{sentido } B \rightarrow A) \quad (6.105)$$

Na situação final, a distribuição de energia é idêntica à inicial. O deslocamento resultante do CM do cilindro é, pelas (6.103) — (6.105),

$$\Delta x = \frac{L}{M} \left( m_1 - m_2 - \frac{\Delta E}{c^2} \right) \quad (\text{sentido } A \rightarrow B) \quad (6.106)$$

Como no cilindro só agiram forças internas, e a configuração final é idêntica à inicial, não pode ter havido um deslocamento do CM. Logo,

$$\Delta x = 0, \quad \text{e daí segue que} \quad \boxed{m_1 - m_2 = \frac{\Delta E}{c^2}} \quad (6.107)$$

ou seja, esta é a *variação de massa do corpo B devida à transferência da energia  $\Delta E$* .

Mas a energia pode ser armazenada por B sob qualquer forma (térmica, potencial, química, ...). Logo, *qualquer forma de energia tem inércia, e a massa inercial  $m$  associada à energia  $E$  é dada pela célebre relação de Einstein*

$$\boxed{E = m c^2} \quad (6.108)$$

o que é um dos resultados mais importantes da teoria da relatividade restrita.

Devido ao valor extremamente elevado do “fator de conversão”  $c^2$ , a variação de massa associada à variação de energia em processos macroscópicos usuais é demasiado pequena para ser detetada. Por exemplo, quando 1 mol de  $O_2$  se combina com 2 mol de  $H_2$  para formar 2 mol de água, a variação de massa associada ao calor de reação é  $\sim 10^{-10}$  da massa total, várias ordens de grandeza menor do que o limite da precisão na medida da massa.

Entretanto, o próprio Einstein chamou a atenção já em 1905 para a possibilidade de verificação experimental em *processos radioativos*, em que a energia libe-

rada é muito maior. Com efeito, a relação de Einstein desempenha um papel extremamente importante em física nuclear, onde ela foi verificada com grande precisão.

Caso exista um processo pelo qual massa de uma partícula possa ser convertida em energia, a (6.108) também define a “taxa de conversão”. Depois da descoberta do pósitron por Anderson (1932), foi verificado por Blackett e Occhialini que um raio  $\gamma$ , passando próximo de um núcleo (cuja presença é necessária para que haja conservação do momento), pode criar um *par elétron-pósitron*. Para isso, é necessário que a energia do  $\gamma$  seja superior ao dobro da energia associada à massa de repouso do elétron, ou seja,  $> 1,02 \text{ MeV}$ . Recentemente, observou-se também a criação *direta* de um par por colisão entre dois fótons.

Reciprocamente, um par elétron-pósitron pode aniquilar-se em dois raios  $\gamma$ , convertendo toda a massa em energia de radiação.

Na física pré-relativística, o princípio de conservação da energia e o princípio de conservação da massa eram considerados como independentes. A relação de Einstein unificou esses dois princípios. Entretanto, na maioria dos processos, a massa (determinada por pesagem, por exemplo) e a energia (medida pelo trabalho realizado) se conservam separadamente. A razão é que apenas uma pequena parte da energia total tem um papel ativo no processo: o restante, incluindo a massa de repouso, não toma parte no processo, permanecendo passivo.

Essa subdivisão da energia em ativa e passiva depende do processo. Nas reações químicas, só a energia de ligação dos elétrons das camadas externas dos átomos é ativa. Numa reação nuclear, a energia associada com as forças nucleares é ativa, mas aquela associada às massas de repouso das partículas constituintes do núcleo permanece passiva.

A explicação do caráter passivo de uma parte da energia só pode ser dada analisando a *dinâmica* de cada processo; trata-se de um típico *efeito quântico*.

## 6.12 O espaço-tempo de Minkowski

Vimos na Seção 6.7 que o *intervalo* entre dois eventos é *invariante* por transformação de Lorentz, tendo um sentido absoluto: é o mesmo em qualquer referencial inercial. Se, num dado referencial, os dois eventos se caracterizam por coordenadas  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, t_2)$ , o quadrado do intervalo entre eles é dado pelas (6.48) e (6.50)

(6.109)

onde

$$(\Delta s)^2 \equiv (\Delta \mathbf{x})^2 - (c \Delta t)^2 \equiv -c^2 (\Delta \tau)^2$$

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \Delta t \equiv (t_2 - t_1)$$

O matemático Hermann Minkowski (que havia sido professor de Einstein em Zürich) observou que, introduzindo formalmente uma coordenada imaginária em lugar da coordenada temporal, com  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , e  $x_0 \equiv ct$ , obtém-se

$$\text{TL especial} \begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 \\ x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \end{cases}$$

(6.110)

$$x_4 \equiv ict \equiv ix_0$$

e a (6.109) se escreve

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2$$

(6.111)

que é idêntica à expressão do quadrado da distância entre dois pontos num *espaço-tempo* quadridimensional, onde as coordenadas de um evento seriam  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , conforme a geometria euclidiana.

Como a contribuição do termo temporal na (6.111) é porém *negativa*,  $-(\Delta x_0)^2$ , diz-se que o espaço-tempo tem *métrica pseudo-euclidiana*.

Em particular, se  $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ , resulta

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_4)^2$$

(6.112)

Essa expressão é invariante para uma *rotação de coordenadas* (fig. 6.14) no plano  $(x_1, x_4)$ :

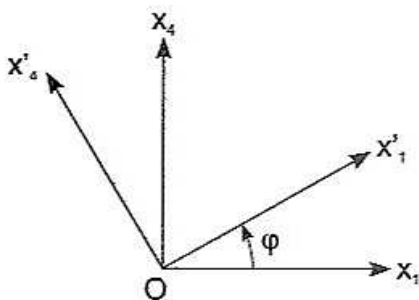


Fig. 6.14 TL como rotação

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_4 \sin \varphi \\ x'_4 = -x_1 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi \end{cases}$$

(6.113)



Como  $x_1'$  deve permanecer real e  $x_4'$  imaginário puro, é preciso que  $\cos \varphi$  seja real e  $\sin \varphi$  imaginário. Pelas (5.86) e (5.90), basta tomar

$$\varphi = i\psi \begin{cases} \cos \varphi = \operatorname{ch} \psi \\ \sin \varphi = i \operatorname{sh} \psi \end{cases} \quad (6.114)$$

o que dá

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \operatorname{ch} \psi - x_0 \operatorname{sh} \psi \\ x_0' = x_1 \operatorname{sh} \psi + x_0 \operatorname{ch} \psi \end{cases} \quad (6.115)$$

Se identificarmos a origem  $O'$  ( $x_1' = 0$ ) com  $x_1 = Vt = \frac{V}{c} x_0 = \beta x_0$ , isto dá

$$\operatorname{th} \psi = \beta \left\{ \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \operatorname{sh} \psi = \gamma \beta \right. \quad (6.116)$$

e as (6.115) se reduzem às equações (6.30) da *TL especial*. Logo, a *TL especial* pode ser interpretada geometricamente como uma *rotação por um ângulo imaginário no plano* ( $x_1, x_4$ ) *do espaço-tempo*.

Minkowski escreveu: “Daqui por diante, o espaço, como entidade separada, e o tempo, como entidade separada, estão fadados a se dissiparem em meras sombras, e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente”. Entretanto, é importante notar que a coordenada temporal preserva um caráter diferente das coordenadas espaciais, o que se manifesta pelo sinal ( $-$ ) no quarto termo  $-(\Delta x_0)^2$  da (6.111) ou, equivalentemente, pela unidade imaginária na (6.110).

A principal vantagem da interpretação geométrica de Minkowski é metodológica: ela permite escrever expressões de leis físicas de forma a garantir automaticamente que elas sejam preservadas pela transformação de Lorentz, ou seja, satisfaçam automaticamente o princípio de relatividade.

Basta para isso introduzir um formalismo de *vetores no espaço-tempo*. Como efeito, sabemos que, no espaço tridimensional, uma lei física expressa em termos de vetores (como  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ) é automaticamente satisfeita num sistema de coordenadas obtido por uma rotação de eixos, porque os dois membros se transformam

da mesma maneira (são *covariantes*). Podemos definir um vetor dizendo que *a lei de transformação das suas componentes numa rotação de eixos é a mesma que a das coordenadas* ( $x_1, x_2, x_3$ ).

Essa definição se estende à de um *quadrivetor* no espaço-tempo de Minkowski: suas 4 componentes se transformam numa rotação de eixos (em particular, numa TL) da mesma forma que as coordenadas ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ). A 4.<sup>a</sup> componente do quadrivetor é também imaginária pura.

### Exemplo

$$x_\beta \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ é um 4-vetor } (\beta = 1, 2, 3, 4)$$

$$d x_\beta \equiv (d x_1, d x_2, d x_3, d x_4) \text{ é um 4-vetor}$$

$$(c d \tau)^2 = d s^2 = (c d t)^2 - (d \mathbf{x})^2 = (c d t)^2 \left[ 1 - \frac{\overbrace{v^2/c^2}}{\left(\frac{d \mathbf{x}}{c d t}\right)^2} \right]$$

é um invariante. O mesmo vale para

$$\boxed{d \tau = d t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.117)$$

que é o *intervalo infinitesimal de tempo próprio* no movimento de uma partícula.

Logo,

$$\boxed{m_0 \frac{d x_\alpha}{d \tau} \equiv p_\alpha} \quad (6.118)$$

onde  $m_0$  é um invariante, é também um 4-vetor.

A *parte espacial* de  $p_\alpha$  é

$$\boxed{m_0 \frac{d \mathbf{x}}{d \tau} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{p}} \quad (6.119)$$

que é o *momento relativístico* (6.88).

A parte temporal de  $p_\alpha$  é

$$p_4 = m_0 \frac{d x_4}{d \tau} = \frac{i m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = i \frac{E}{c} \quad (6.120)$$

onde  $E$  é a *energia relativística* (6.93).

O quadrivetor  $p_\alpha \equiv (\mathbf{p}, i E/c)$  chama-se *quadrimento* da partícula, e as leis de conservação do momento e da energia se unificam na *conservação do quadrimento*. Da mesma forma que

$$\sum_{\alpha=1}^4 (x_\alpha)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

é um invariante, a *norma* do 4-vetor  $x_\alpha$ , a norma do 4-momento

$$\sum_{\alpha=1}^4 (p_\alpha)^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (6.121)$$

também deve ser um invariante. Com efeito, pela (6.98), esse invariante é  $(-m_0^2 c^2)$ , onde  $m_0$  é a massa de repouso da partícula.

As equações de Maxwell podem ser escritas em forma *explicitamente covariante*, demonstrando que satisfazem o princípio da relatividade. Para isto, introduz-se um *quadrivetor de 2.ª ordem*,  $F_{\alpha\beta}$ , que se chama o *tensor campo eletromagnético*, pois suas componentes contêm tanto  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{B}$ . Numa TL, essas componentes se misturam, mostrando que a separação em  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  não tem sentido absoluto; depende do referencial; o que tem sentido é o *campo eletromagnético*. Dessa forma resolve-se a aparente assimetria na lei de Faraday comentada por Einstein na introdução de seu trabalho de 1905 (*Fís.Bás.* 3, Seç. 9.1).

## 6.13 Noções sobre relatividade geral

Vimos na Seç. 6.7 que nenhum sinal pode propagar-se com velocidade  $> c$ . A interação eletromagnética, descrita pelas equações de Maxwell, satisfaz esta condição. Entretanto, ela *não* é satisfeita pela descrição newtoniana de outra interação fundamental existente na natureza: a gravitação.

Com efeito, pela lei de Newton da gravitação, ela é descrita como uma *interação instantânea à distância*: se mudarmos a posição de uma massa, mudam instantaneamente as forças gravitacionais entre ela e quaisquer outras massas, por mais distantes que estejam.

Einstein propôs-se a reformular a teoria da gravitação de forma a torná-la compatível com as limitações impostas pela relatividade restrita. Uma das principais pistas que encontrou para auxiliá-lo nessa tarefa foi um fato que já havia despertado a atenção de Newton, mas que jamais havia encontrado explicações: a *igualdade da massa inercial e da massa gravitacional*. Já vimos (*Fís. Bás. 1, Sec. 13.7*) como ela o conduziu a formular o *Princípio de Equivalência*:

(a) *O Princípio de Equivalência*

Como vimos, é devido à igualdade entre massa inercial  $m_i$  e massa gravitacional  $m_g$  que o campo gravitacional numa pequena região próximo à superfície da Terra produz a mesma aceleração ( $-\mathbf{g}$ ) de queda livre em qualquer corpo material (“experiência” de Galileu da Torre de Pisa). Com efeito, a 2.<sup>a</sup> lei de Newton dá

$$m_i \ddot{\mathbf{x}} = -m_g \mathbf{g} \quad (\text{eixo vertical para cima}) \quad (6.122)$$

onde, no 1.<sup>o</sup> membro, temos a massa inercial, e no 2.<sup>o</sup> a massa gravitacional (resposta de um corpo de prova ao campo gravitacional). Como  $m_i = m_g$ , resulta que

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{g}$$

Logo, a força gravitacional tem a notável propriedade de ser *proporcional à massa inercial* de uma partícula (corpo de prova) sobre a qual atua. Vimos no curso de Mecânica, (*Fís. Bás. 1, Cap. 13*) que essa propriedade é sempre válida para *forças de inércia*, características de referenciais não-inerciais. Isso sugere que possa existir uma relação entre gravidade e forças de inércia, e que convenha examinar *referenciais não-inerciais*. Na relatividade especial, o contínuo espaço-tempo tem caráter *absoluto* (atua sobre a matéria, mas a matéria não atua sobre ele). Por outro lado, referenciais inerciais *concretos* são definidos relativamente à distribuição de matéria no Universo (Princípio de Mach).

Num referencial inercial ( $S$ ) próximo à superfície da Terra, e numa região suficientemente pequena para que o campo gravitacional possa ser tratado como uniforme, a 2.<sup>a</sup> lei de Newton se escreve, para uma partícula de massa  $m$ ,

$$m \ddot{\mathbf{x}} = -m \mathbf{g} + \mathbf{F}_1 \quad (6.123)$$

onde  $\mathbf{F}_1$  representa forças não-gravitacionais que atuem sobre a partícula.

Se considerarmos agora um referencial ( $S'$ ) que se desloca em relação a ( $S$ ) com *movimento retilíneo uniformemente acelerado* de aceleração  $\mathbf{A}$ , vimos (*Fís. Bás. 1*, Seç. 13.2) que a aceleração da partícula em relação a ( $S'$ ) é, como consequência da lei de Galileu de composição de velocidades,

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \quad (6.124)$$

de modo que a (6.123) fica

$$m(\ddot{\mathbf{x}}' + \mathbf{A}) = -m \mathbf{g} + \mathbf{F}_1 \quad (6.125)$$

e, em particular, se  $\mathbf{A} = -\mathbf{g}$

$$m \ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}_1 \quad (6.126)$$

ou seja, num *referencial em queda livre no campo gravitacional* ( $\mathbf{A} = -\mathbf{g}$ , “*elevador de Einstein*”), *desaparecem os efeitos do campo gravitacional sobre a partícula*. É o efeito da “ausência de peso” dos astronautas em órbita. A (6.126) mostra que ( $S'$ ) se comporta como se fosse um referencial *inercial* na ausência de campo gravitacional.

Por conseguinte as leis da mecânica na presença de um campo gravitacional  $-\mathbf{g}$  uniforme são as mesmas que resultariam, *na ausência do campo*, num referencial uniformemente acelerado, com aceleração  $-\mathbf{g}$ : não é possível distinguir entre as duas situações por experiências de mecânica, o que generaliza o princípio de relatividade de Galileu.

Em 1908, Einstein estendeu essa conclusão a todas as leis físicas, formulando o *Princípio de Equivalência*: *Num recinto suficientemente pequeno para que o campo gravitacional dentro dele possa ser tomado como uniforme, em queda livre dentro desse campo, todas as leis físicas são as mesmas que num referencial inercial, na ausência do campo gravitacional.*

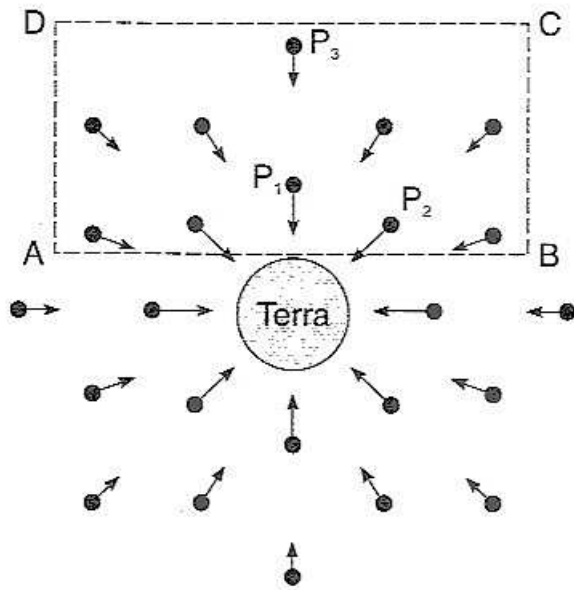


Fig. 6.15 Campo gravitacional da Terra

Por que a restrição a um “recinto suficientemente pequeno”? Porque, para o campo gravitacional da Terra, por exemplo, se tomarmos um recinto de dimensões comparáveis às da Terra (ABCD, na fig. 6.15), o campo gravitacional não será mais uniforme nessa escala, e é perfeitamente possível detetá-lo. As trajetórias de dois pontos materiais bem separados, como  $P_1$  e  $P_2$  na fig. 6.15, tenderão a *aproximar-se uma da outra*. Analogamente, para dois pontos a distâncias bastante diferentes do centro da Terra, como  $P_1$  e

$P_3$ , as acelerações serão sensivelmente diferentes. Logo, usando como “corpo de prova” um *par* de partículas suficientemente afastadas entre si, é possível neste caso detetar a existência do campo gravitacional, e não é possível eliminá-lo por uma mudança para um referencial uniformemente acelerado.

Vemos assim que o Princípio de Equivalência tem de ser aplicado *localmente*, em pequenos recintos, que podemos chamar de *referenciais localmente inerciais*.

Tomando essa precaução, porém, o Princípio de Equivalência nos permite inferir a existência de alguns dos efeitos novos característicos da relatividade geral.

Assim, já vimos [Fís. Bás. 1, Seç. 13.7(b)] que ele permite prever a existência de uma *deflexão gravitacional da luz*. O resultado previsto por Einstein para a deflexão pelo campo gravitacional do Sol foi confirmado pelas observações realizadas em Sobral (Ceará) durante o eclipse solar de 1919, que tiveram grande repercussão.

### (b) O desvio para o vermelho

Consideremos um pequeno recinto em queda livre no campo gravitacional na vizinhança da superfície da Terra, com aceleração  $-g$ . No instante  $t_0 = 0$  em que se inicia a queda a partir do repouso, é emitido um raio de luz monocromático de frequência  $\nu_0$  por uma fonte  $F$  no chão do recinto, verticalmente em direção ao teto, que se encontra a uma altura  $h$  do chão (fig. 6.16), e é suposto transparente.



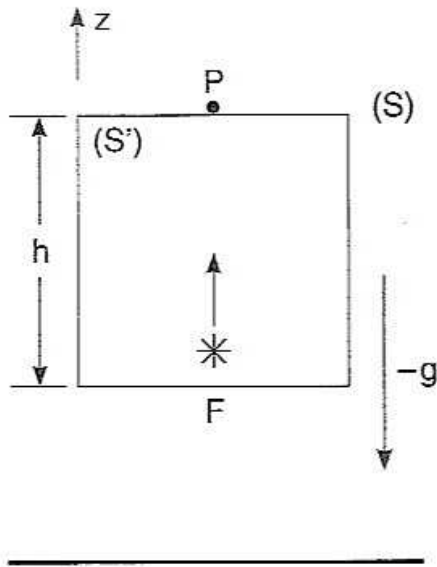


Fig. 6.16 Recinto em queda livre

Pelo Princípio de Equivalência, a luz chega ao teto no instante  $t = h/c$ , e sua frequência, medida no referencial  $(S')$  do recinto em queda livre, continua sendo  $\nu_0$ .

Para um observador externo, no referencial  $(S)$  em que atua o campo gravitacional  $\mathbf{g}$ , qual é a frequência da luz detectada, no instante em que ela chega ao ponto P, na altura do teto (fig. 6.16)?

Nesse instante, a fonte de luz está-se *afastando* do observador em  $(S)$  com velocidade  $V = gt$ . Logo, a frequência da luz medida em  $(S)$  terá sofrido um efeito Doppler, dado pela (6.70) com  $\theta = 0$ :

$$\nu = \nu_0 (1 - \beta) = \nu_0 \left(1 - \frac{gt}{c}\right) \quad (6.127)$$

ou, como  $t = h/c$ ,

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad (6.128)$$

onde, pelas condições impostas, é  $\beta \ll 1$ , de modo que tomamos  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1$ . Como  $\Delta \nu \equiv \nu - \nu_0 < 0$ , vemos que este é um *desvio para o vermelho*. O “desvio percentual”  $\Delta \nu / \nu_0$  é dado pela *diferença de potencial gravitacional*  $gh$  entre o teto e o chão, dividida pelo quadrado da velocidade da luz.

Se, em lugar de estar “subindo” no campo gravitacional, a luz estivesse “descendo” do teto para o chão, a fonte estaria-se *aproximando* de um observador em  $(S)$  ao nível do chão, e o desvio seria para o azul; correspondentemente, a diferença de energia potencial gravitacional ( $gh$ ) seria negativa.

O desvio gravitacional foi medido em 1960 por R. V. Pound e G. A. Rebka com raios  $\gamma$  de 14,4 keV, caindo de uma altura de 22,6 m num tubo onde se havia feito vácuo, o que dá  $-gh/c^2 \approx -2,46 \times 10^{-15}$ ; a experiência deu  $(-2,57 \pm 0,26) \times 10^{-15}$  (precisão de 10%), e foi refinada depois por Pound e Snyder (1964, 65), verificando o resultado com precisão de 1%. O elevado grau de precisão foi possível empregando uma técnica de ressonância (efeito Mössbauer).

Entretanto, uma verificação ainda mais precisa foi feita em 1976 por R. Vessot e M. Levine, que compararam a frequência de um relógio atômico (maser de hidrogênio) colocado num foguete, que subiu a uma altitude de 10.000 km, com um relógio idêntico no solo. O efeito foi verificado com precisão de  $7 \times 10^{-5}$ .

Como o potencial gravitacional (energia potencial por unidade de massa) é, para o campo  $-g$ ,

$$\varphi(z) = g z \quad (6.129)$$

(campo  $-g = -\nabla\varphi$ ), a (6.128) se escreve

$$v_P = v_F \left[ 1 - \frac{(\varphi_P - \varphi_F)}{c^2} \right] \quad (6.130)$$

onde os pontos F e P estão indicados na fig. 6.16.

Apliquemos esses resultados ao potencial gravitacional newtoniano de um corpo de massa  $M$ , dado por (*Fís. Bás.* 1, Seç. 10.9)

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (6.131)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e tomamos o nível 0 de energia potencial no infinito ( $\varphi_\infty = 0$ ). Notando que a unidade de tempo é definida em termos do período  $\Delta t = 1/\nu$  da luz emitida por um átomo, a (6.130) mostra então que a relação entre intervalos de tempo medidos por um relógio à distância  $r$  do corpo e um relógio idêntico no infinito será

$$\Delta t(r) = \Delta t_\infty \left( 1 - \frac{GM}{rc^2} \right) = \Delta t_\infty \left[ 1 + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{c^2} \right] \quad (6.132)$$

ou seja, *o campo gravitacional afeta a marcha de um relógio*: o relógio, no campo gravitacional, “anda mais devagar”, de modo que luz emitida na sua vizinhança chega avermelhada ao “infinito”, onde não há campo gravitacional.

### O “paradoxo das gêmeas”

Ana e Bia, também conhecidas como “A” e “B”, são gêmeas. Enquanto A permanece na Terra, B viaja num foguete a uma estrela situada a 15 anos-luz da Terra, a uma velocidade  $V$  tal que  $V/c = \beta = 3/5$ ; o fator de dilatação temporal é  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 5/4$ . Chegando à estrela, B volta para a Terra à mesma velocidade ( $\beta = -3/5$ ).

Para A, a viagem de B durou  $2 \times \frac{15}{(3/5)} = 50$  anos, ao passo que para B durou apenas  $\frac{4}{5} \times 50 = 40$  anos.

Por outro lado, para Bia, é Ana que se deslocou em relação a ela com  $\beta = \pm 3/5$ , e B pode afirmar que a dilatação temporal ocorreu para A, de modo que, segundo B, devem ter decorrido apenas  $4/5 \times 40 = 32$  anos para A.

Quem tem razão? Ana é 10 anos mais velha ou 8 anos mais moça do que Bia, quando esta retorna?

Admitindo que o referencial de Ana (a Terra) seja inercial, é Ana quem tem razão. O referencial de Bia (o foguete) *não é* inercial, porque tem de ir e voltar: o foguete precisa *desacelerar* chegando à estrela e *acelerar* de novo para voltar à Terra; estas acelerações são muito grandes, porque têm de ter como efeito a passagem de  $\beta = \frac{3}{5}$  para  $\beta = -\frac{3}{5}$ . No referencial *acelerado* do foguete, como num campo gravitacional, o tempo passa mais devagar, e é por isto que Bia está mais moça do que Ana, ao voltar.

Uma comprovação experimental desse efeito foi obtida em 1971 por J. C. Hefele e R. E. Keating. Eles viajaram em torno da Terra em aviões a jato comerciais, tanto dirigindo-se para leste como para oeste, e transportando a bordo relógios atômicos de césio, cujas leituras após a volta ao mundo foram comparadas com as de relógios idênticos que haviam permanecido no Observatório Naval em Washington. As diferenças entre viagens para leste e para oeste resultam da rotação da Terra, que introduz outras forças inerciais (centrífuga, Coriolis). A tabela abaixo compara as previsões teóricas da relatividade geral com as diferenças de tempo  $\Delta t$  (em nanossegundos) observadas.

Sentido da circunavegação	$\Delta t \equiv t_B - t_A$ (em $10^{-9}$ s)	
	Experimental	Teórico
Para oeste	$273 \pm 7$	$275 \pm 21$
Para leste	$-59 \pm 10$	$-40 \pm 23$

Não é um método muito prático de retardar o envelhecimento!

(c) *A curvatura do espaço-tempo*

Pelo que vimos na (6.132), um intervalo de tempo infinitésimo  $dt$  num ponto  $\mathbf{x}$ , na presença de um campo gravitacional com potencial  $\varphi(\mathbf{x})$ , está relacionado com o intervalo de tempo  $dt_\infty$  correspondente no referencial localmente inercial em queda livre em  $\mathbf{x}$ , no qual o campo gravitacional está ausente, por

$$dt(\mathbf{x}) = dt_\infty \left[ 1 + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{c^2} \right] \quad (6.133)$$

A energia potencial de uma massa  $m$  no campo, dada por  $m\varphi(\mathbf{x})$ , é geralmente (excluindo campos gravitacionais muito intensos) uma fração muito pequena da energia total  $mc^2$ , de forma que

$$\frac{m|\varphi(\mathbf{x})|}{mc^2} = \frac{|\varphi(\mathbf{x})|}{c^2} \ll 1 \quad (6.134)$$

o que dá

$$(dt)^2 \approx (dt_\infty)^2 \left[ 1 + 2 \frac{\varphi(\mathbf{x})}{c^2} \right] \quad (6.135)$$

No recinto *localmente inercial* em queda livre, o quadrado de um intervalo infinitésimo de espaço-tempo, que define a *métrica* do espaço-tempo, é dado pela (6.109):

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2 \quad (6.136)$$

que é a *métrica de Minkowski* da relatividade especial.

Entretanto, num referencial onde existe um campo gravitacional, temos de substituir  $(dt)^2$  pela (6.135), o que dá

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2 \left[ 1 + 2 \frac{\varphi(\mathbf{x})}{c^2} \right] \quad (6.137)$$

ou seja, *a presença de um campo gravitacional modifica a métrica (geometria) do espaço-tempo.*

Em geral, essa modificação não se restringe à componente temporal. Para ver que afeta também a parte espacial, basta considerar um exemplo.

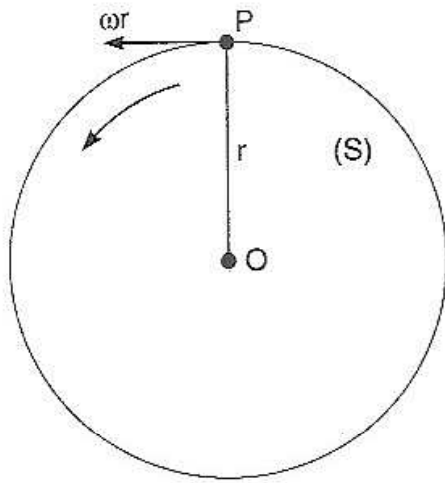


Fig. 6.17 Plataforma girante

Consideremos um disco de raio  $r$  em rotação, com velocidade angular  $\omega$  (fig. 6.17), em torno de um eixo  $\perp$  ao plano da figura. Supomos  $\omega r \ll c$ , mas ainda assim suficientemente grande para que efeitos relativísticos não sejam desprezíveis.

Imaginemos que se meça o raio do disco alinhando ao longo de  $\overline{OP}$  “régua” de uma unidade de comprimento em contato entre si; o resultado são  $r$  régua. Se fizermos o mesmo ao longo da circunferência do disco, e o resultado são  $C$  régua,

sabemos que, com o disco *em repouso* num referencial inercial,\*

$$\frac{C}{r} = 2\pi \quad (6.138)$$

Entretanto, quando o disco está em rotação com velocidade angular  $\omega$ , o comprimento das régua ao longo do raio, transportadas numa direção  $\perp$  à velocidade, não muda ( $r$  não se altera), mas as que estão alinhadas ao longo da periferia (transportadas *na* direção da velocidade) sofrem contração de Lorentz. Logo, é preciso alinhar um número  $C' > C$  de unidades para cobrir toda a periferia, o que implica

$$\frac{C'}{r'} > 2\pi \quad (6.139)$$

Logo, num disco em rotação, *deixa de valer a geometria euclideana*. Por outro lado, de acordo com o Princípio de Equivalência, no referencial ( $S$ ) do disco, tomado como referencial de repouso, existe um “campo gravitacional” (campo das forças centrífugas e de Coriolis). Logo, a presença de um campo gravitacional deve afetar a geometria (tanto espacial quanto temporal) do espaço-tempo.

---

\* Podemos imaginar a régua suficientemente pequena para aproximar  $2\pi$  tanto quanto quisermos.

A geometria torna-se não-euclídeana (geometria “física”). Isso corresponde a ter *curvatura* no espaço-tempo. Para ilustrar o conceito de curvatura, é conveniente considerar um espaço bidimensional, ou seja, uma *superfície*.

Um plano não tem curvatura; o mesmo se aplica a um cilindro, que pode ser “desenrolado” sobre um plano: a curvatura é uma propriedade *intrínseca* da superfície, detetável em pequenas regiões, não afetada pelo “desenrolamento”, desde que não haja dilatação ou dobra.

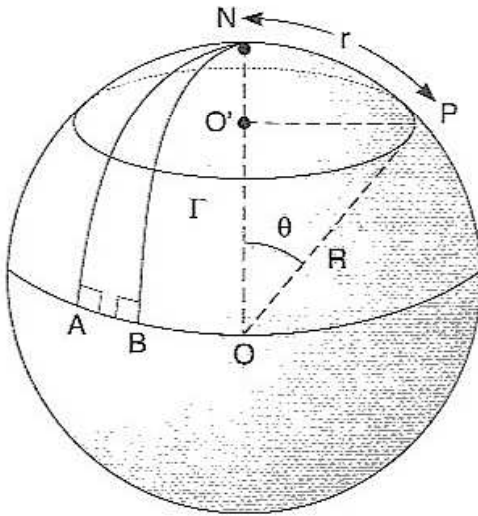


Fig. 6.18 Curvatura da esfera

Já a superfície de uma esfera tem curvatura. Numa esfera de raio  $R$ , o “paralelo”  $\Gamma$  da fig. 6.18 é um círculo, por ser o lugar geométrico dos pontos “equidistantes” do polo norte  $N$ , onde a *distância* tem de ser medida ao longo de uma geodésica, que é o caminho mais curto (ou *estacionário* com respeito a pequenas variações) entre 2 pontos sobre a superfície. Assim, o raio  $r$  do círculo  $\Gamma$  é (fig. 6.18)

$$r = R \theta \quad (6.140)$$

ao passo que sua circunferência é

$$C = 2 \pi \times \overline{O'P} = 2 \pi R \text{ sen } \theta \quad (6.141)$$

Logo,

$$\frac{C}{r} = 2 \pi \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 2 \pi \quad (6.142)$$

o que é característico de uma superfície de curvatura *positiva*. A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é também maior que  $180^\circ$  (fig. 6.18,  $\Delta NAB$ ).



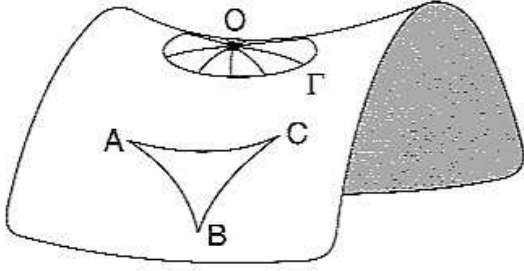


Fig. 6.19 Sela

Um exemplo de superfície com curvatura negativa é uma *sela* (fig. 6.19).

Nesse caso, para um círculo  $\Gamma$ , tem-se  $C/r > 2\pi$ , e a soma dos ângulos internos de um  $\Delta$ , como ABC, é  $< 180^\circ$ .

É importante novamente observar, como foi salientado por Gauss, que a curvatura

de uma superfície é uma propriedade *intrínseca*, que pode ser determinada a partir de medidas feitas *sobre* a superfície (sem sair dela).

Assim, por exemplo, as (6.140) e (6.142) dão, para  $r \ll R$ , ou seja, para círculos *pequenos* sobre a esfera,

$$\frac{C}{2\pi r} = \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \dots \cong 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

A *curvatura*  $K$  da esfera é definida por (definição válida p/  $K > 0$ ),

$$\boxed{K \equiv \frac{1}{R^2}} \quad (6.143)$$

e o resultado acima mostra que

$$\frac{C}{2\pi r} - 1 \approx -\frac{r^2}{6} K \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{K = \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{2\pi r - C}{r^3} \right)} \end{array} \right. \quad (6.144)$$

onde o 2.º membro pode ser determinado sem sair da superfície.

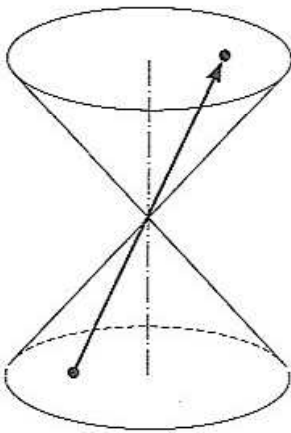
Para um campo gravitacional, a curvatura pode ser positiva ou negativa, e em geral varia de ponto a ponto: é uma curvatura do *espaço-tempo quadridimensional*. Conforme foi mostrado por Gauss e Riemann, a curvatura pode ser obtida através da *métrica*  $g_{\alpha\beta}$ , onde

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 g_{\alpha\beta} (x_1, x_2, x_3, x_4) dx_\alpha dx_\beta \quad (6.145)$$

e estamos usando a notação quadridimensional da Seção 6.12. A definição da geometria através da métrica é característica da geometria riemanniana.

Os efeitos gravitacionais estão contidos na forma pela qual a métrica  $g_{\alpha\beta}$  varia com  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , ou seja, na *geometria do espaço-tempo*, especialmente na sua *curvatura*. As *equações de Einstein* da relatividade geral relacionam essa curvatura com a presença de matéria (equivalente a energia), que produz o campo gravitacional.

Na ausência de curvatura, tem-se a métrica (6.136) de Minkowski. A lei da inércia diz nesse caso que uma partícula livre se move com movimento retilíneo uniforme.



Sua linha de universo (trajetória quadridimensional) é portanto uma *reta*, (fig. 6.20) que é uma *geodésica* no espaço-tempo de Minkowski, satisfazendo a

$$\delta \int_1^2 ds = 0 \quad (6.146)$$

Fig. 6.20 Linha de universo de uma partícula livre é *estacionário* (compare com o Princípio de Fermat).

ou seja, o “caminho” (*intervalo*) entre os pontos 1 e 2 da linha de universo de uma

A *lei de movimento básica* na relatividade geral é uma extensão ao espaço-tempo curvo: postula-se que *a linha de universo de uma partícula no espaço-tempo é uma geodésica*.

Uma analogia com essa descrição, para o movimento sobre uma superfície curva (espaço bidimensional) seria imaginar esse espaço como, por exemplo, a superfície de um sofá. Se colocarmos uma bolinha de chumbo sobre o sofá, ela produzirá uma depressão, imprimindo uma *curvatura* à superfície, que seria o análogo do “campo gravitacional” da bolinha.

Se agora colocarmos outra partícula (bolinha) sobre esta superfície deformada, ela se moverá sobre uma trajetória que é “guiada” pela curvatura, representando o análogo da geodésica no espaço-tempo. É importante observar que, no caso gravitacional, a curvatura afeta tanto o espaço como o tempo, conforme veremos agora.

#### (d) A solução de Schwarzschild

O problema mais simples seria o do *campo gravitacional central* de uma partícula de massa  $M$  em repouso (no movimento planetário, seria o Sol). É natural, nesse caso, tomar origem na partícula e adotar coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ .

A grande distância da partícula ( $r \rightarrow \infty$ ), esperamos que o campo gravitacional tenda a zero e que a métrica do espaço-tempo seja portanto a de Minkowski,

$$(ds)_{\infty}^2 = (dr)_{\infty}^2 + (r d\theta)_{\infty}^2 + (r \sin \theta d\phi)_{\infty}^2 - (c dt)_{\infty}^2 \quad (6.147)$$

A presença de  $M$  deve alterar a métrica a distância finita, introduzindo curvatura no espaço-tempo. Como o problema é *estático*, os coeficientes da métrica devem ser independentes do tempo, e, pela simetria esférica, não devem depender de  $\theta$  e  $\phi$ . Pela mesma razão, a métrica nessas variáveis angulares não deve ser alterada. Assim, esperamos que a métrica seja da forma

$$(ds)^2 = a(r)(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2 - b(r)(c dt)^2 \quad (6.148)$$

onde  $a(r)$  e  $b(r)$  são funções a determinar, resolvendo as equações de Einstein para o campo gravitacional da teoria da relatividade geral.

Um argumento de plausibilidade para  $b(r)$  resulta da (6.135). O caráter estático da métrica implica que a sincronização dos relógios em posições diferentes (através de sinais luminosos) não deve variar com o tempo. Entretanto, pelas (6.132) e (6.135), a presença do campo gravitacional afeta a marcha dos relógios diferentemente conforme a posição. Para manter a sincronia e o caráter estático do espaço-tempo, é preciso portanto *corrigir* o coeficiente de  $(c dt)^2$  por um fator que compense a (6.135), o que daria

$$b(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} \quad (6.149)$$

Em 1916, Schwarzschild obteve uma solução *exata* das equações de Einstein da relatividade geral que tem essa forma. O resultado para  $a(r)$  é o inverso de  $b(r)$ , como na relação entre dilatação de Lorentz temporal e contração espacial, o que dá a *solução de Schwarzschild*:

$$(ds)^2 = \frac{(dr)^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} + r^2 \left[ (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2 \right] - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (c dt)^2 \quad (6.150)$$

onde

$$r_S \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (6.151)$$

chama-se o *raio de Schwarzschild* associado à massa  $M$ . Para  $r \rightarrow \infty$ , a (6.150) tende à (6.147).

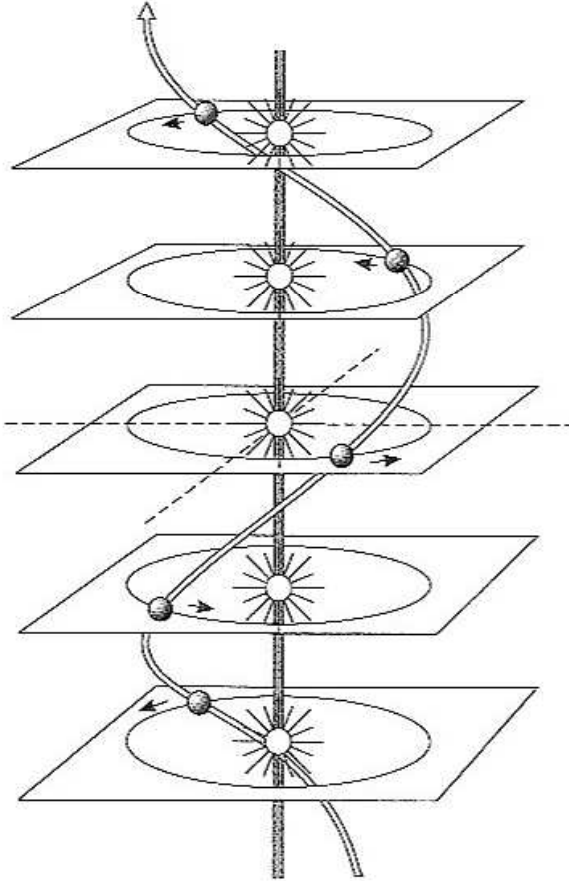


Fig. 6.21 Linha de universo de um planeta em torno do Sol

Se interpretarmos  $M$  como a massa do Sol, a linha de universo de um planeta seria uma geodésica no espaço-tempo com a métrica de Schwarzschild (fig. 6.21).

O cálculo mostra que a órbita não é mais a elipse newtoniana.

Ela não é fechada: é em geral uma *rosácea* (fig. 6.22), correspondendo a uma *precessão do periélio*.

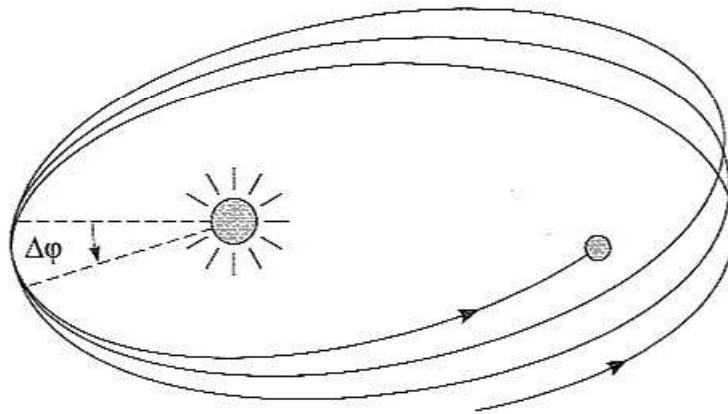


Fig. 6.22 Precessão do periélio

Na mecânica newtoniana, ocorre uma precessão quando levamos em conta a presença dos demais planetas, como uma *perturbação* do problema de dois corpos.

Entretanto, havia uma pequena discrepância entre a precessão calculada pela mecânica newtoniana e a precessão observada.

O valor dessa discrepância para o planeta Mercúrio é de  $43,11'' \pm 0,45''$  (segundos de arco) por século. A relatividade geral, calculando as órbitas como geodésicas na métrica de Schwarzschild, prediz para este desvio o valor  $43,03''$  por século, em excelente acordo com a experiência.

Também se pode empregar a métrica de Schwarzschild para obter a trajetória de um raio luminoso no campo gravitacional da massa  $M$ . Isso dá o valor numérico da *deflexão gravitacional* da luz. Para luz que passa próxima do Sol, encontra-se uma deflexão  $\Delta \varphi = 1,75''$ .

Para medir essa deflexão, é preciso comparar a posição aparente de uma estrela no céu noturno com sua posição quando vista no céu, próxima do Sol, o que só pode ser feito durante um eclipse solar. O valor médio observado é de  $1,89''$ , mas os erros de observação são grandes.

Por outro lado, o quasar 3C279, fonte intensa de ondas de rádio, é ocultado pelo Sol uma vez por ano, permitindo que se meça a deflexão gravitacional com precisão bem maior. O resultado é  $1,73'' \pm 0,05''$ , em excelente acordo com a predição da relatividade geral.

#### (e) Buracos negros

O coeficiente de  $(dr)^2$  na métrica de Schwarzschild (6.150) tem uma singularidade ( $\rightarrow \infty$ ) para  $r = r_S$  (raio de Schwarzschild). Para  $M \cong 2 \times 10^{30}$  kg (massa do Sol), com  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/(kg)<sup>2</sup> e  $c = 3 \times 10^8$  m/s, acha-se  $r_S \cong 3$  km. Muito antes de atingir essa distância, o campo gravitacional do Sol já não seria assimilável ao de uma “massa puntiforme”.

Em 1939, J. R. Oppenheimer e H. Snyder estudaram o que acontece na evolução de uma estrela quando ela atinge a etapa final, em que todo o combustível nuclear já foi exaurido. Não há mais como produzir o calor e a pressão necessária para contrabalançar a atração gravitacional.

Para um objeto de massa maior que o triplo da massa do Sol, resulta então que ele entra em *colapso gravitacional*: seu raio vai diminuindo até atingir  $r_S$ , e tornar-se  $< r_S$ . Que acontece para  $r < r_S$ ?

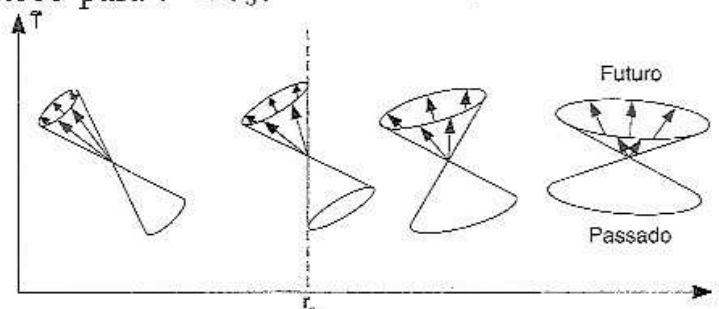


Fig. 6.23 Cone de luz na vizinhança do raio de Schwarzschild



É fácil verificar que *nenhuma partícula pode estar em repouso para  $r < r_s$* . Com efeito, a linha de universo de uma partícula só pode ser formada de intervalos *do gênero tempo* situados dentro do seu cone de luz em cada ponto (Seç. 6.7). Ora, se existisse uma partícula em repouso, seria  $dr = d\theta = d\varphi = 0$  ao longo de sua linha de universo, o que daria, pela (6.150),

$$(ds)^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (cdt)^2 > 0 \quad \text{para } r < r_s$$

o que é impossível.

Logo, qualquer partícula com  $r < r_s$  continua colapsando para o centro: forma-se um *buraco negro*, assim chamado porque a própria luz é capturada pela atração gravitacional intensa, não podendo\* emergir da região interna. O que acontece com o cone de luz ao penetrar dentro de um buraco negro está ilustrado na fig. 6.23. Na região externa  $r > r_s$ , porém, o campo gravitacional do buraco negro continua atuando.

Existe evidência de que a fonte binária de raios X Cygnus X1 possa conter um buraco negro: a emissão de raios X estaria associada à energia liberada pela captura de uma estrela “companheira” pelo buraco negro, de massa da ordem de 14 massas solares. Também há evidência sugerindo a existência de buracos negros no núcleo de galáxias (em particular, a galáxia M87), incluindo, possivelmente, a nossa.

#### (f) *Cosmologia*

Na escala cósmica de galáxias, a gravidade é a força dominante. Já em 1917, Einstein aplicou a relatividade geral para modelar o comportamento do universo como um todo. Naquela época, sequer estava estabelecida a existência de galáxias diferentes da nossa. Também se desconhecia a expansão do universo, de forma que o modelo inicial de Einstein era estático.

O modelo para o universo é o de um “fluido de galáxias”. As distâncias típicas associadas a *estrelas* são  $\sim 1$  A.L. (Ano Luz), para *galáxias* são  $\sim 10^6$  A.L. e para *aglomerados de galáxias* são  $\sim 3 \times 10^7$  A.L. Na *maior* dessas escalas (mas não nas outras!), as observações astronômicas indicam que o “fluido de galáxias”

---

\* Quanticamente, isto deixa de valer, conforme foi mostrado por Stephen Hawking.



parece ser *homogêneo e isotrópico*. Isso é postulado no modelo ("*princípio cosmológico*"), de forma que ele descreve essa situação extremamente simplificada e só se aplica nessa escala dos aglomerados de galáxias.

Resulta desse princípio que a curvatura  $K(t)$  do espaço tridimensional é *constante* para um *dado* tempo  $t$ , mas varia com  $t$ . O primeiro modelo cosmológico dependente do tempo foi proposto por Alexander Friedmann em 1922 (depois foi generalizado), e era consistente com a expansão do universo observada posteriormente por Hubble (Seç. 6.8).

A curvatura  $K(t)$  é dada por

$$K(t) = \frac{k}{R^2(t)} \quad R(t) = \text{fator de escala cósmico}$$

onde  $k = +1, 0$  ou  $-1$ .

Há várias possibilidades. Se a curvatura do espaço é *positiva*, resulta que o universo é espacialmente finito, embora ilimitado, da mesma forma que, em duas dimensões, a superfície de uma esfera é finita mas ilimitada (sem fronteiras). Se a curvatura é *nula* ou *negativa*, o universo é infinito espacialmente.

Em qualquer dos três casos, a *escala de distâncias entre galáxias* (mas não o tamanho delas) evolui com o tempo, correspondendo à expansão do universo\*. A taxa de expansão é dada pela *lei de Hubble* (6.77):  $H = \dot{R}(t)/R(t)$ .

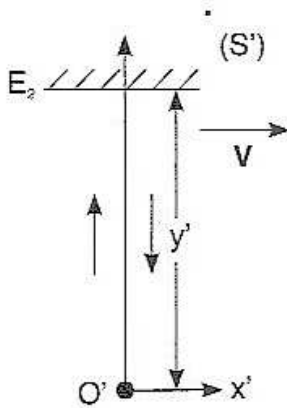
Isso significa que, no passado, as distâncias eram menores. Extrapolando para o passado remoto, chega-se a uma singularidade num "instante inicial", que corresponderia a uma "grande explosão" ("big bang"); a "idade do universo", pelas determinações do satélite WMAP (Seç. 6.8), seria de 13,7 ( $\pm 0,2$ ) bilhões de anos.

A hipótese do "big bang" foi consideravelmente reforçada pela descoberta feita em 1965 por A. Penzias e R. Wilson (que lhes valeu o Prêmio Nobel de 1978) da *radiação de fundo primordial*. Trata-se de radiação térmica de temperatura  $\approx 2,7$  K remanescente do "big bang" e "resfriada" pela expansão (atualmente é dominada por microondas). Resultados recentes da missão espacial COBE ("Cosmic Background Explorer") confirmam o caráter extremamente isotrópico dessa radiação, com flutuações muito pequenas, que poderiam nuclear galáxias.

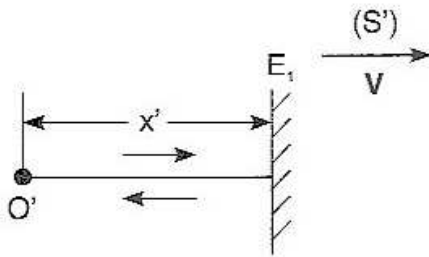
---

\* Uma analogia bidimensional seria com a superfície de uma balão de borracha sarapintado que incha quando é soprado: cada pinta vê todas as outras afastando-se dela.

## PROBLEMAS



1. Um sinal luminoso que, partindo de um ponto  $O'$  de um referencial  $(S')$ , se reflete num espelho à distância  $y'$  de  $O'$  e volta para  $O'$ , pode ser considerado como um “relógio” que marca intervalos de tempo  $\Delta t'$  correspondentes à ida e volta do sinal (fig.). Suponha que  $(S')$  se desloca em relação a  $(S)$  com velocidade  $V$  na direção  $x'$  e calcule o intervalo de tempo correspondente  $\Delta t$  em  $(S)$ , admitindo o princípio da constância da velocidade da luz. Mostre que o resultado equivale à dilatação dos intervalos de tempo da relatividade restrita.



2. Considere agora a situação (fig.) em que o raio luminoso se reflete entre  $O'$  e um espelho à distância  $x'$  em  $(S')$ , na direção da velocidade  $V$ . Calcule o tempo necessário para esse percurso de ida e volta no referencial  $(S)$ , levando em conta

a dilatação dos intervalos de tempo obtida no Probl. 1. Mostre que isso permite obter a contração de Lorentz (*Observação*: os trajetos dos Probs. 1 e 2 correspondem aos dois braços do interferômetro de Michelson).

3. Demonstre que duas *TL* especiais sucessivas na mesma direção, com parâmetros  $\beta_1 \equiv V_1/c$  e  $\beta_2 \equiv V_2/c$ , equivalem a uma *TL* única, e calcule o parâmetro  $\beta$  correspondente. Relacione o resultado com a lei relativística de composição de velocidades.

4. Demonstre a (6.47).

5. Partindo da invariância da fase de uma onda plana monocromática (Seç. 6.8), obtenha as expressões relativísticas do efeito de *aberração*, demonstrando que as direções  $\theta'$  e  $\theta$  de propagação da luz em  $(S')$  e  $(S)$  estão relacionadas por

$$\boxed{\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad ; \quad \text{sen } \theta' = \frac{\text{sen } \theta}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}}$$

6. (a) Escreva as eqs. da  $TL$  especial em termos das coordenadas  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_0 = ct$ . Note que elas adquirem uma forma mais simétrica. (b) Usando a notação da parte (a), mostre que a equação de ondas

$$\Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

é invariante por uma  $TL$  especial, mas não é invariante por uma transformação de Galileu.

7. O comprimento  $l$  de uma régua num referencial ( $S$ ) em relação ao qual ela se move com velocidade  $V$  constante na direção  $x$  também pode ser definido por:  $l = V(\Delta t)$ , onde  $(\Delta t)$  é o tempo que ela leva para passar por um ponto *fixo* de ( $S$ ). Mostre que essa definição também leva à contração de Lorentz.

8. Em 1851, H. Fizeau mediu a velocidade da luz  $v$  quando ela se propaga num tubo cheio de água em movimento. O escoamento da água, com velocidade  $V$ , é na mesma direção em que a luz se propaga. O resultado obtido por Fizeau foi

$$v = \frac{c}{n} + V \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

onde  $n$  é o índice de refração da água e  $V \ll c$ . Mostre que esse resultado decorre da lei relativística de composição de velocidades.

9. Uma régua em repouso num referencial ( $S'$ ) faz um ângulo  $\theta_0$  com a direção de movimento desse referencial, que se desloca em relação a ( $S$ ) com velocidade  $V$ . Qual é o valor  $\theta$  desse ângulo em ( $S$ )?

10. Um físico está sendo julgado por ter avançado um sinal vermelho e alega para o juiz de trânsito que o sinal lhe pareceu verde, devido ao efeito Doppler. O juiz, que também estudou física, condena-o a pagar uma multa de R\$1,00 para cada km/h de excesso de velocidade ultrapassando os 50 km/h regulamentares. Qual é o valor da multa? (Tome  $\lambda_{\text{vermelho}} = 6.500 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_{\text{verde}} = 5.300 \text{ \AA}$ ).

11. No Fermilab, prótons são acelerados a uma energia de 500 GeV. Ao atingir essa energia, (a) por que fator terá aumentado a massa do próton, em relação a sua massa de repouso? (b) que porcentagem da velocidade da luz terá sido atingida pelo próton?



12. Duas fontes idênticas de luz monocromática, de frequência própria  $\nu_0$ , afastam-se uma da outra (fig.) com velocidades  $v$  e  $-v$  num referencial inercial ( $S$ ). Qual a frequência  $\nu$  de uma das fontes, quando observada pela outra?

13. Considere o movimento relativístico de uma partícula carregada de carga  $q$  e massa de repouso  $m_0$  num campo magnético uniforme de magnitude  $B$ . (a) Mostre que a energia cinética da partícula não se altera, e que a partícula descreve uma órbita circular se sua velocidade inicial é  $\perp \mathbf{B}$  (como no caso não-relativístico). Mostre que permanecem válidas as fórmulas não-relativísticas para o raio da órbita e a frequência de ciclotron (*Fís. Bás.* 1, Seç. 5.4), desde que a massa empregada seja a massa relativística. (b) No Probl. 11, os prótons de 500 GeV são mantidos por um campo magnético uniforme numa órbita circular de 750m de raio. Qual é a intensidade do campo magnético?

14. Uma partícula de massa de repouso  $m_0$ , em repouso na origem para  $t = 0$ , é submetida a uma força constante  $F_0$  até o instante  $t$ . (a) Calcule a posição  $x(t)$  da partícula. (b) Calcule o limite não-relativístico do resultado e mostre que concorda com a previsão da mecânica newtoniana. (c) Calcule  $x(t)$  no limite de tempos muito longos.

15. Uma partícula em repouso de massa  $m_0$  se desintegra em duas outras, de massas de repouso  $m_1$  e  $m_2$ . Calcule as energias  $E_1$  e  $E_2$  desses dois fragmentos. *Sugestão:* Use as leis de conservação e a relação (6.98).

16. Uma partícula de massa de repouso  $m_0$  e velocidade  $v$  colide com outra partícula idêntica, mas que está em repouso. Após a colisão, as duas partículas caminham juntas, formando uma partícula composta. Calcule, para essa partícula

composta: (a) sua massa de repouso  $M_0$ ; (b) sua velocidade  $V$ . Exprima os resultados em função do parâmetro

$$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

17. Uma barra de comprimento próprio  $L_0$  está em repouso no plano vertical, num referencial onde forma um ângulo  $\theta'$  com o eixo horizontal. Esse referencial se move em relação a outro referencial ( $S$ ), com velocidade  $V$  constante, na direção do eixo horizontal.

- (a) Calcule o ângulo  $\theta$  entre a barra e a horizontal em ( $S$ ).  
 (b) Calcule o comprimento  $L$  da barra em ( $S$ ).

18. Um fóton de energia  $E$  é espalhado por um elétron livre. Demonstre que a máxima energia cinética que o fóton pode transferir ao elétron é dada por

$$T_{\max} = \frac{E^2}{E + \frac{1}{2} mc^2}$$

onde  $m$  é a massa de repouso do elétron.

19. Dois nêutrons 1 e 2 aproximam-se um do outro ao longo da mesma reta, com velocidades opostas  $v$  e  $-v$ , respectivamente, vistos do referencial do laboratório.

- (a) Calcule a velocidade  $V$  de 1 em relação a 2, e verifique que é sempre  $< c$ .  
 (b) Calcule a energia total do nêutron 2 vista do referencial de 1, em função da massa de repouso  $M_0$  do nêutron.

20. Obtenha as expressões não-relativísticas do efeito Doppler a partir da invariância da fase de uma onda plana, usando a transformação de Galileu.

21. Demonstre que um fóton, propagando-se no vácuo, não pode desintegrar-se em dois outros, exceto se eles tiverem a mesma direção de propagação.

22. Calcule, usando a mecânica newtoniana, qual seria a velocidade de escape a partir da superfície de uma esfera de massa  $M$  cujo raio fosse o raio de Schwarzschild (6.151).

23. Demonstre que a curvatura  $K$  de uma esfera pode ser expressa em termos da área  $A$  de um círculo de raio  $r$ , por

$$K = \frac{12}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{(\pi r^2 - A)}{r^4} \right]$$

24. Uma plataforma horizontal de raio  $r$  está em rotação com velocidade angular  $\omega$  em relação a um referencial inercial. (a) Para  $\omega r \ll c$ , calcule a razão  $\Delta t(r) / \Delta t(0)$  entre intervalos de tempo registrados por um relógio na periferia e outro no centro da plataforma. (b) Associando a força centrífuga  $\mathbf{F}_c$  a um potencial  $\varphi_c$ , pela relação  $\mathbf{F}_c = -\nabla \varphi_c$ , mostre que, nessa aproximação, tem-se

$$\frac{\Delta t(r)}{\Delta t(0)} = 1 + \frac{\varphi_c(r)}{c^2}$$



# 7

## OS PRIMÓRDIOS DA TEORIA QUÂNTICA

### 7.1 Introdução

Neste capítulo e nos próximos, vamos introduzir os conceitos básicos da transformação mais profunda pela qual a física passou desde a época de Newton: a *física quântica*. Ela constitui uma alteração muito mais radical das idéias fundamentais da física do que a relatividade, que marcou num certo sentido o apogeu do que chamamos hoje a *física clássica*.

A física clássica lida principalmente com fenômenos *macroscópicos*, na escala que nos é familiar. Seus conceitos são abstraídos dessa escala, e é dela também que resulta nossa intuição, de modo que podemos formar imagens “intuitivas” desses conceitos com base na nossa experiência cotidiana.

Já a física quântica trata principalmente de fenômenos na *escala atômica e sub-atômica*, mais de um milhão de vezes menor do que as dimensões macroscópicas (também trata das *repercussões* desses fenômenos ao nível macroscópico). Como essa escala é totalmente remota da nossa experiência, não há nenhuma razão para esperar que possa ser descrita pelos conceitos da física clássica. Efetivamente não pode: *a física quântica não se parece com nada do que vimos até agora*. Daqui por diante, entraremos em território realmente novo!

É uma grande conquista da física do século 20 que ela tenha conseguido não apenas desenvolver conceitos adequados à nova escala, mas também tratá-los com grande precisão. Mais que isso: os novos conceitos e princípios vêm sendo aplicados a escalas cada vez menores, até que já atingimos uma escala tão remota da escala atômica quanto esta o é da macroscópica: distâncias da ordem de  $10^{-15}$  cm ou menos, sem que se tenha encontrado até hoje qualquer indício de inaplicabilidade da física quântica.

Da mesma forma que a mecânica newtoniana é uma aproximação da mecânica relativística, válida com precisão mais que satisfatória para velocidades muito menores do que  $c$ , a física clássica é também uma aproximação da física quântica (princípio de correspondência de Bohr). Entretanto, a transição de uma para a outra é bastante mais sutil, conceitualmente, do que a transição da mecânica relativística para a newtoniana.

Mesmo na escala macroscópica, conforme veremos adiante, a física era uma teoria bastante incompleta, incapaz de explicar inúmeros fenômenos importantes, a começar pela própria existência e estabilidade da matéria!

Para alguns fenômenos, inclusive, a física clássica levava a conclusões inaceitáveis. Um deles será mencionado na Seç. 7.2, porque marca a própria origem da teoria quântica, mas vamos nos limitar a enunciar os resultados, porque se trata de um fenômeno complexo, cujo tratamento teórico nos afastaria muito do objetivo de introduzir de forma tão direta quanto possível os conceitos básicos da física quântica: trata-se da *distribuição espectral da radiação térmica*.

## 7.2 A hipótese de Planck

O aspecto da radiação emitida por um corpo aquecido varia com a temperatura desse corpo. Podemos observar o que acontece no interior de um *forno* em equilíbrio térmico a uma certa temperatura  $T$  através de um buraco numa das paredes, que deixa escapar um feixe de radiação. Trata-se de radiação eletromagnética, cujo espectro pode ser determinado experimentalmente.

Sabemos pela experiência que, à medida que a temperatura se eleva, a radiação visível passa de uma coloração avermelhada a um vermelho vivo, depois vai-se tornando mais “branca” (filamento de uma lâmpada incandescente), tendendo para o azulado. O espectro é *contínuo*, mas a coloração dominante se desloca para frequências mais elevadas à medida que a temperatura aumenta.

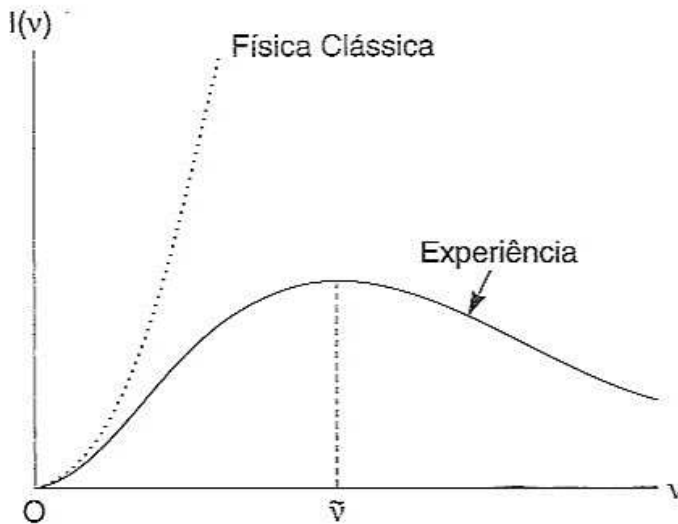


Fig. 7.1 Distribuição espectral da radiação térmica

A uma dada temperatura  $T$ , a distribuição espectral em frequência da intensidade da radiação observada tem o aspecto ilustrado na fig. 7.1, onde a frequência de pico,  $\tilde{\nu}$ , cresce com  $T$ , conforme observado acima.

A predição da física clássica concorda muito bem com a experiência para frequências abaixo do pico, mas depois desvia-se cada vez mais (curva em linha pontilhada na fig. 7.1). Pior ainda: ela prediz que  $I(\nu)$  cresce como uma

potência de  $\nu (\nu^3)$ , de forma que a energia total emitida pela cavidade (integrando sobre todo o espectro de frequências) seria infinita! Como esse efeito se deve às frequências elevadas, ele é chamado de “catástrofe ultravioleta”.

O equilíbrio térmico da radiação no interior da cavidade ocorre através de trocas de energia entre a radiação e os átomos das paredes, à temperatura  $T$ : os átomos absorvem e reemitem a radiação. O modelo clássico para absorção e emissão de radiação eletromagnética de frequência  $\nu$  por um sistema de cargas (átomo) é que as cargas oscilem com essa frequência (oscilador de Hertz: cf. *Fís. Bás.* 3, Seç. 11.5).

Em 14 de Dezembro de 1900, Max Planck apresentou numa reunião da Sociedade Alemã de Física uma proposta que permitia obter uma expressão para  $I(\nu)$  em excelente acordo com a experiência, à custa de abandonar uma das idéias mais arraigadas da física clássica. Classicamente, a troca de energia entre a radiação e os “osciladores” nas paredes se dá de forma *contínua*: qualquer quantidade de energia pode ser absorvida ou emitida.

Para obter acordo com a experiência\*, Planck postulou que a troca seria “quantizada”: *um oscilador de frequência  $\nu$  só poderia emitir ou absorver energia em múltiplos inteiros de um “quantum de energia”*

---

\* Planck confessou mais tarde que só foi levado a formular esse postulado por “um ato de desespero”, dizendo: “era uma hipótese puramente formal, e não lhe dei muita atenção, adotando-a porque era preciso, a qualquer preço, encontrar uma explicação teórica”

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (7.1)$$

onde  $h$  é uma nova *constante universal*, a *constante de Planck*. Ela tem dimensões de [energia] x [tempo], correspondendo ao que se chama de *ação*. O valor numérico de  $h$  é

$$h \cong 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \cong 6,6261 \times 10^{-34} \text{ joule} \times \text{segundo} \quad (7.2)$$

Na (7.1),

$$\hbar \cong \frac{h}{2\pi} \cong 1,0546 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cong 6,582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad (7.3)$$

Para radiação visível de comprimento de onda  $\lambda = 5.000 \text{ \AA}$ , temos  $\nu = c/\lambda \approx 6 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , de forma que  $h\nu \cong 3,98 \times 10^{-19} \text{ J}$ , uma energia extremamente pequena na escala macroscópica. Por outro lado, em eletronsvolts,

$$1 \text{ eV} \cong 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (7.4)$$

esta energia é  $\cong 2,5 \text{ eV}$ , o que absolutamente não é pequeno na escala atômica. A constante de Boltzmann é

$$\kappa \cong 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cong 8,62 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \quad (7.5)$$

Assim, para temperaturas  $T \sim 10^4 \text{ K}$ , a energia térmica  $\kappa T$  torna-se da ordem de 1 eV (à temperatura ambiente,  $\kappa T \sim \frac{1}{40} \text{ eV}$ ).

Desvios apreciáveis em relação à predição da física clássica na curva da fig. 7.1 começam a aparecer para

$$h\nu \geq \kappa T \quad (7.6)$$

o que podemos compreender lembrando que, em equilíbrio termodinâmico à temperatura  $T$ , a mecânica estatística indica que a probabilidade de encontrar um sistema com energia  $E$  deve conter um fator de Boltzmann (*Fís. Bás.* 2, Sec. 12.2)

$$e^{-E/(\kappa T)} \quad (7.7)$$

o que, *pela* (7.1), reduziria exponencialmente a possibilidade de trocas de energia com  $h\nu \gg \kappa T$ . É um fator desse tipo o responsável pela queda da curva de  $I(\nu)$ , eliminando a catástrofe ultravioleta.

O postulado de quantização de Planck é, porém, inteiramente incompreensível na física clássica, onde a energia de uma oscilação não tem qualquer relação com sua frequência: depende apenas da *amplitude* de oscilação, que pode variar continuamente.

Planck procurou por muitos anos, com grande esforço, encontrar uma explicação para o seu postulado dentro da física clássica. Acabou, muito a contragosto, convencendo-se de que isso não seria possível.

### 7.3 O efeito fotoelétrico

Em suas experiências de 1887, em que demonstrou a validade da teoria de Maxwell produzindo e detetando ondas eletromagnéticas, como vimos (*Fís. Bás.* 3, Seç. 11.5), Heinrich Hertz produzia uma descarga oscilante fazendo saltar uma faísca entre dois eletrodos, para gerar as ondas, e detetava-as usando uma antena ressonante, onde a deteção também era acompanhada de uma faísca entre eletrodos. Ele observou que a faísca de deteção saltava com mais dificuldade quando os eletrodos da antena receptora não estavam expostos à luz (predominantemente violeta e ultravioleta) proveniente da faísca primária na antena emissora, ou seja, quando se introduzia um anteparo entre as duas para bloquear a luz.

Curiosamente, ao comprovar a teoria de Maxwell, coroamento da física clássica, Hertz estava assim descobrindo o efeito fotoelétrico, uma das primeiras evidências experimentais da quantização. Verificou-se logo que a razão pela qual a luz ultravioleta facilitava a descarga era por ser capaz de ejetar elétrons da superfície metálica dos eletrodos. Os elétrons assim ejetados, acelerados pela diferença de potencial entre os eletrodos, contribuía para ionizar o ar e facilitar a descarga. Hoje em dia, as *fotocélulas*, que têm inúmeras aplicações práticas (fotômetros, controle de portas de elevadores, ...), empregam o efeito fotoelétrico para converter um sinal luminoso numa corrente elétrica.

As investigações posteriores do efeito, devidas principalmente a P. Lenard (1899), revelaram uma série de características intrigantes, contraditórias ao que seria esperado pela física clássica. Para as experiências, o material de onde serão ejetados os fotoelétrons deve estar limpo e polido, para evitar quaisquer contaminações: na prática, isto implica que ele esteja num recipiente em alto vácuo.



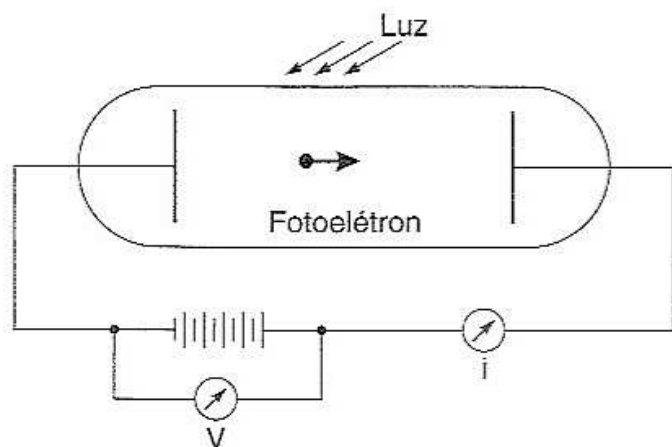
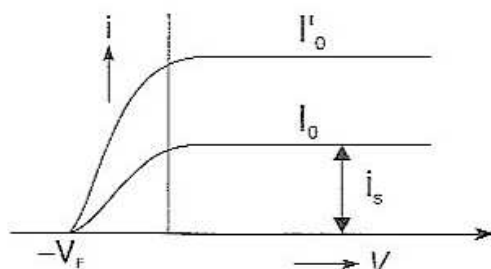


Fig. 7.2 Efeito fotoelétrico

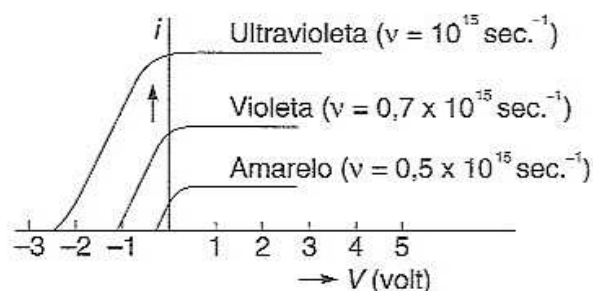
Numa experiência típica, os eletrodos estão dentro de uma ampola de quartzo (transparente à luz ultravioleta) evacuada, e se estabelece entre eles uma diferença de potencial  $V$ , iluminando depois o catodo com luz de frequência  $\nu$  e intensidade  $I_0$ . Mede-se a corrente elétrica  $i$  assim gerada com o auxílio de um amperímetro (fig. 7.2).

Fig. 7.3 Variação de  $i$  com  $V$ 

Os resultados de uma experiência típica têm o aspecto ilustrado na fig. 7.3. Para  $I_0$  e  $\nu$  fixos e um dado material do catodo, todos os fotoelétrons arrancados pela luz são coletados pelo anodo quando a diferença de potencial  $V$  é positiva, correspondendo a uma corrente constante  $i_s$  (corrente de saturação).

Se agora invertemos a polaridade da voltagem, procurando *frear* os elétrons em lugar de acelerá-los, a corrente *continua passando no mesmo sentido*, mas vai diminuindo à medida que  $|V|$  aumenta, até que se anula para  $V = -V_F$ , onde  $V_F (> 0)$  chama-se *potencial de freamento*.

Se aumentarmos a intensidade, de  $I_0$  para  $I_0'$  (fig. 7.3), o aspecto da curva permanece o mesmo: apenas a *intensidade  $i$  da corrente*, ou seja, o *n.º de fotoelétrons arrancados*, cresce, sendo *diretamente proporcional à intensidade da luz*: duplica ao passar de  $I_0$  a  $2I_0$ .

Fig. 7.4 Variação de  $i$  com a frequência da luz

Que acontece se variarmos a *frequência  $\nu$*  da luz incidente? Verifica-se que o aspecto qualitativo das curvas tende a permanecer o mesmo, mas o valor do *potencial de freamento  $V_F$*  muda, *aumentando à medida que se aumenta a frequência  $\nu$* , conforme ilustrado na fig. 7.4. A figura se aplica a um catodo de metal alcalino,

como potássio, em que ocorre efeito fotoelétrico com luz visível (mesmo assim, deixaria de ocorrer com luz infravermelha); para a maioria dos metais, é preciso ir



ao ultravioleta. O potencial de freamento  $V_F$ , para uma dada frequência  $\nu$ , varia de substância para substância: é uma característica do material.

Como interpretar esses resultados? A produção da fotocorrente pela luz deve resultar de que a luz forneça energia suficiente para arrancar elétrons da vizinhança da superfície do material do catodo. Quando um elétron é extraído, a carga positiva remanescente tende a atraí-lo de volta, e é preciso fornecer energia suficiente para vencer essa atração.

Como os elétrons no interior do catodo podem ter uma *distribuição* de energias (num metal, existem elétrons livres) e podem provir de profundidades diferentes, os elétrons arrancados devem ter direções de movimento diferentes e velocidades (energias cinéticas) diferentes.

Para frear um elétron de energia cinética  $T = 1/2 m_e v^2$  ( $m_e$  = massa do elétron), é preciso usar uma diferença de potencial retardadora  $V$  tal que  $eV = T$ , onde  $(-e)$  é a carga do elétron. Logo, o potencial de freamento deve estar associado a elétrons com direção de movimento perpendicular ao catodo e com energia cinética *máxima*  $T_m = \frac{1}{2} m_e v_m^2$ :

$$\boxed{\frac{1}{2} m_e v_m^2 = e V_F} \quad (7.8)$$

Pela conservação da energia, essa energia cinética máxima deve corresponder à energia  $E$  fornecida pela luz menos o trabalho  $W$  necessário (valores típicos de  $W$  são da ordem de alguns eV) para extrair um elétron da superfície contra a força atrativa da carga positiva remanescente:

$$\frac{1}{2} m_e v_m^2 = e V_F = E - W \quad (7.9)$$

onde  $W$  é uma característica do material empregado denominada *função de trabalho*.

O que se esperaria então segundo a teoria eletromagnética clássica? Uma onda eletromagnética transporta *energia*, que, como vimos, é *diretamente proporcional à intensidade  $I_0$  da onda*, qualquer que seja sua frequência  $\nu$ . Essa energia pode ser transferida aos elétrons do catodo, pois eles são colocados em oscilação forçada pelo campo elétrico da onda.

Esperaríamos portanto que, à medida que  $I_0$  *aumenta, aumentasse  $E$*  na (7.9), e por conseguinte também  $V_F$ . Não é o que se observa experimentalmente: as cur-

vas da fig. 7.3 mostram que o aumento de  $I_0$  só aumenta a intensidade  $i$  da fotocorrente (n.º de fotoelétrons ejetados), sem aumentar  $V_F$ . Por outro lado, a variação de  $V_F$  com a frequência  $\nu$  (curvas da fig. 7.4) não tem explicação clássica.

Num trabalho publicado em 1905, intitulado “Um ponto de vista heurístico sobre a produção e transformação da luz”, Einstein propôs uma teoria do efeito fotoelétrico baseada numa extensão muito mais audaciosa\* das idéias de Planck sobre quantização: a de que *radiação eletromagnética de frequência  $\nu$  consiste de quanta de energia*

$$E = h\nu \quad (7.10)$$

Nas palavras de Einstein, “A idéia mais simples é que um quantum de luz transfere toda a sua energia a um único elétron: vamos supor que é isto que acontece”.

A (7.9) fica então

$$\frac{1}{2} m_e v_m^2 = eV_F = h\nu - W \quad (7.11)$$

que é a *equação de Einstein do efeito fotoelétrico*. Ela explica imediatamente o aumento de  $V_F$  com  $\nu$ . Como Einstein observou a seguir,

“Se a fórmula deduzida é correta, um gráfico de  $V_F$ , em função da frequência da luz incidente, deve resultar numa reta, cujo coeficiente angular deve ser independente da natureza da substância iluminada”.

Com efeito, esse coeficiente angular, pela (7.11), é dado por  $h/e$  ( $h =$  constante de Planck). O físico americano R. A. Millikan não acreditou na explicação de Einstein, e passou os dez anos seguintes fazendo uma série de experiências com o objetivo de demonstrar que a predição de Einstein era incorreta. O resultado foi que, nas palavras de Millikan, “...contra todas as minhas expectativas, vi-me obrigado em 1915 a afirmar sua completa verificação experimental, embora nada tivesse de razoável, uma vez que parecia violar tudo o que conhecíamos sobre a interferência da luz”.

---

\* Para explicar a diferença entre a sua hipótese e a de Planck, o próprio Einstein fez mais tarde um paralelo bem humorado: “O fato de que a cerveja seja sempre vendida em garrafas não implica que a cerveja consista de porções indivisíveis de uma garrafa cada uma”.

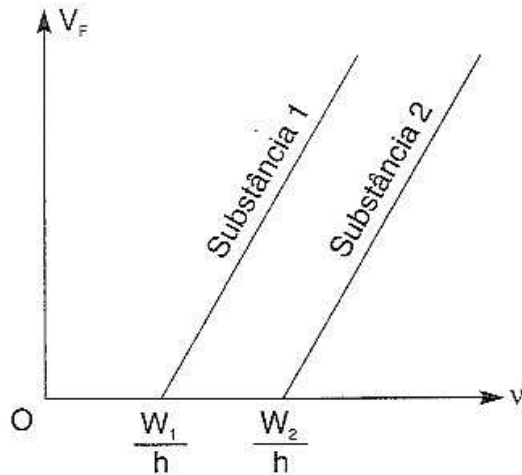


Fig. 7.5 Variação de  $V_F$  com  $\nu$

Conforme ilustrado na fig. 7.5, o coeficiente angular da reta é o mesmo para diferentes substâncias, mas as intersecções com o eixo das abscissas são diferentes, correspondendo à função de trabalho  $W$  dividida por  $h$ . O valor de  $W$  para cada substância corresponde, como vimos, ao trabalho necessário para remover um elétron da superfície.

O nome “fóton” para um “quantum de luz” só apareceu em 1926, num trabalho de G. N. Lewis. A *intensidade* da luz é proporcional à energia total que transporta, e por conseguinte ao *número de fótons*, o que explica por que a fotocorrente é diretamente proporcional à intensidade da luz.

Várias outras características do efeito fotoelétrico classicamente inexplicáveis têm explicação imediata através da hipótese de Einstein. Por mais intensa que seja, luz infravermelha não produz efeito fotoelétrico. Por outro lado, luz ultravioleta de intensidade extremamente fraca produz fotoelétrons alguns nanossegundos depois de incidir sobre um material, quando, segundo a imagem clássica, levaria muito mais tempo para transmitir energia suficiente a um fotoelétron.

Conforme o próprio Einstein percebeu ao usar no título de seu artigo a expressão “um ponto de vista heurístico”, a equação do efeito fotoelétrico (7.11) não *demonstra* a existência de fótons: apenas pode ser interpretada dessa forma. Após a formulação da mecânica quântica, foi mostrado por Guido Beck\* (1927) que a relação de Einstein resulta da quantização da *matéria* (átomos), sendo desnecessário, para obtê-la, quantizar a *radiação* (fótons).

Não foi apenas Millikan que recebeu com incredulidade a hipótese dos fótons, por contrariar a teoria ondulatória da luz, que era considerada como firmemente estabelecida. Em 1913, quatro físicos alemães, entre os quais se incluía Planck, encaminharam à Academia de Ciências da Prússia uma proposta inusitada: a eleição para membro titular de Albert Einstein, que então tinha apenas 34 anos.

\* Beck, físico austríaco, veio em 1942 para a Argentina. Lá e no Brasil, deu importantes contribuições para a formação de escolas de física teórica.

A proposta terminava dizendo.

“Em suma, pode-se afirmar que não há praticamente nenhum dos grandes problemas em que a física moderna é tão rica, ao qual Einstein não tenha dado alguma notável contribuição. Que ele às vezes tenha errado o alvo em suas especulações, como por exemplo em sua hipótese dos "quanta de luz", não pode realmente ser tomado como uma acusação muito séria contra ele, pois não é possível introduzir idéias verdadeiramente novas, mesmo nas ciências mais exatas, sem correr alguns riscos de vez em quando”.

O prêmio Nobel dado a Einstein, em 1921, foi pela teoria do efeito fotoelétrico.

## 7.4 O efeito Compton

Evidência mais direta de propriedades corpusculares da luz foi obtida entre 1919 e 1923 por Arthur H. Compton, observando o espalhamento de raios X monocromáticos por um alvo de grafita (Compton recebeu o prêmio Nobel de 1927 por esses trabalhos).

Compton usou raios X de comprimento de onda  $\lambda_0 = 0,7 \text{ \AA}$ . O alvo espalha a radiação incidente em todas as direções, e Compton usou um *espectrômetro de Bragg* para raios X (Seç. 4.11) para fazer a análise espectral dos raios X espalhados em diversos ângulos. Encontrou uma componente de mesmo comprimento de onda  $\lambda_0$  que a radiação incidente e outra de comprimento de onda  $\lambda > \lambda_0$ , onde o valor de  $\lambda$  variava com o ângulo de espalhamento:  $\Delta \lambda \equiv \lambda - \lambda_0$  é o *deslocamento Compton*.

Para explicar esses resultados, Compton levou às últimas conseqüências a hipótese de Einstein, tratando os raios X em termos de fótons, ou seja, como partículas de energia dada pela relação de Einstein (7.10). Para  $\lambda_0 = 0,7 \text{ \AA} = 7 \times 10^{-10} \text{ m}$ , é  $\nu_0 \equiv \frac{3}{7} \times 10^{18} \text{ s}^{-1}$  e  $E_{\gamma_0}$  (energia dos raios X incidentes)  $\equiv \frac{3}{7} \times 4,1 \times 10^3 \text{ eV}$  (usando  $h = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ ), o que dá  $E_{\gamma_0} \approx 18 \text{ keV}$ .

Além da energia, a radiação eletromagnética transporta *momento*. Pela (6.100), o momento do fóton de raios X incidente é dado por

$$\mathbf{p}_{\gamma_0} = \frac{E_{\gamma_0}}{c} \hat{\mathbf{u}}_0 \quad (7.12)$$

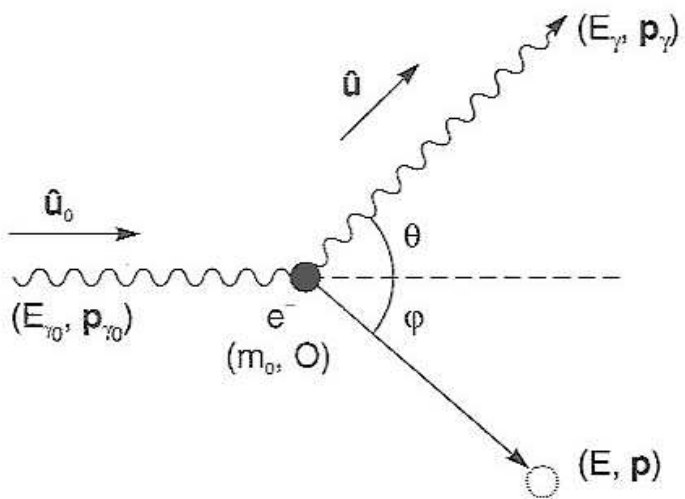
onde  $\hat{\mathbf{u}}_0$  é o versor da direção de propagação dos raios X incidentes. Como  $E_{\gamma_0} = h \nu_0$ , resulta

$$\boxed{|\mathbf{p}_{\gamma 0}| = \frac{h \nu_0}{c} = \frac{h}{\lambda_0} = \hbar k_0} \quad (7.13)$$

Grafita é uma forma de carbono, e a energia dos raios X incidentes, 18 keV, é muito maior que a energia de ligação dos elétrons (particularmente os mais externos) ao átomo de carbono. Compton admitiu que os raios X pudessem ser espalhados pelos *elétrons* do átomo, e neste caso a energia de ligação seria desprezível, ou seja, cada elétron se comportaria como se estivesse livre.

Finalmente, Compton tratou então o espalhamento como uma *colisão* entre um *fóton*, de energia  $E_{\gamma 0}$  e momento  $\mathbf{p}_{\gamma 0}$ , e um *elétron livre*, inicialmente em repouso. Devido ao *recuo* do elétron na colisão, o fóton espalhado tem energia  $E_{\gamma} < E_{\gamma 0}$ , ou seja, comprimento de onda  $\lambda > \lambda_0$ , conforme observado.

Para encontrar de que forma  $\lambda$  depende do ângulo de espalhamento  $\theta$  dos raios X, Compton aplicou as leis de conservação da energia e do momento na colisão, em forma relativística, porque o fóton é uma partícula relativística.



Sejam  $E_{\gamma}$  e  $\mathbf{p}_{\gamma}$  energia e momento do fóton espalhado na direção  $\hat{\mathbf{u}}$ , e  $(E, \mathbf{p})$  a energia e momento do elétron após a colisão (recuo).

As leis de conservação relativísticas dão então:

$$\boxed{E_{\gamma 0} + m_0 c^2 = E_{\gamma} + E} \quad (7.14)$$

Fig. 7.6 Efeito Compton

$$\boxed{\frac{E_{\gamma 0}}{c} \hat{\mathbf{u}}_0 = \frac{E}{c} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{p}} \quad (7.15)$$

onde  $E$  e  $\mathbf{p}$  do elétron estão relacionados pela (6.98):

$$\boxed{E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4} \quad (7.16)$$

A (7.14) dá

$$E^2 = (E_{\gamma 0} - E_{\gamma} + m_0 c^2)^2 = (E_{\gamma 0} - E_{\gamma})^2 + 2(E_{\gamma 0} - E_{\gamma})m_0 c^2 + m_0^2 c^4$$



ou seja

$$E^2 - m_0^2 c^4 = (E_{\gamma 0} - E_{\gamma})^2 + 2(E_{\gamma 0} - E_{\gamma})m_0 c^2 = \mathbf{p}^2 c^2 \quad (7.17)$$

Por outro lado, a (7.15) dá

$$\mathbf{p}^2 c^2 = (E_{\gamma 0} \hat{\mathbf{u}}_0 - E_{\gamma} \hat{\mathbf{u}})^2 = (E_{\gamma 0})^2 + (E_{\gamma})^2 - 2 E_{\gamma 0} E_{\gamma} \cos \theta \quad (7.18)$$

pois  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 = \cos \theta$  (veja a fig. 7.6).

Substituindo a (7.18) na (7.17) e cancelando os termos idênticos, resulta

$$(E_{\gamma 0} - E_{\gamma})m_0 c^2 = E_{\gamma 0} E_{\gamma} (1 - \cos \theta)$$

$\therefore$

$$\frac{1}{E_{\gamma}} - \frac{1}{E_{\gamma 0}} = \frac{(1 - \cos \theta)}{m_0 c^2} \quad (7.19)$$

Mas, pela relação de Einstein,  $\frac{c}{E_{\gamma 0}} = \frac{c}{h \nu_0} = \frac{\lambda_0}{h}$ , e da mesma forma para  $E_{\gamma}$ .

$$\therefore \Delta \lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \left( \frac{h}{m_0 c} \right) (1 - \cos \theta) \quad \text{Deslocamento Compton} \quad (7.20)$$

que dá a variação de comprimento de onda em função do ângulo  $\theta$  de espalhamento.

A constante  $\frac{h}{m_0 c}$ , onde  $m_0$  é a massa de repouso de elétron, é chamada de *comprimento de onda Compton do elétron*. Substituindo os valores numéricos de  $h$ ,  $m_0$  e  $c$ , obtemos

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m_0 c} \equiv 2,426 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,02426 \text{ \AA} \quad (7.21)$$

Compton verificou experimentalmente tanto o valor absoluto do deslocamento quanto sua dependência angular. Conforme já foi mencionado, a radiação espalhada



também contém uma componente de comprimento de onda  $\lambda_0$ . Seu aparecimento pode ser explicado como resultante do espalhamento não por um elétron, mas pelo átomo como um todo. Como a massa do átomo de carbono é 4 ordens de grandeza maior do que a massa do elétron, o deslocamento correspondente é desprezível.

A interpretação de Compton recebe confirmação adicional quando se observa o elétron de recuo. Isso foi feito por G. N. Cross e N. F. Ramsey em 1950, usando raios  $\gamma$  de 2,6 MeV. O ângulo  $\phi$  de recuo do elétron (fig. 7.6) foi verificado, concordando com seu valor teórico. Também foi verificado experimentalmente, por Z. Bay *et al.* (1955), que o elétron de recuo e o fóton espalhado emergem em coincidência (ao mesmo tempo), com precisão da ordem de  $10^{-11}$  s. Logo, o tratamento do efeito Compton como uma *colisão entre duas partículas* (fóton e elétron) ficou plenamente justificado.

## 7.5 Rutherford e a descoberta do núcleo

Nos primeiros anos deste século, J. J. Thomson, o descobridor do elétron, procurou construir um modelo da estrutura de um átomo. Sabia-se que um átomo contém elétrons, que as massas atômicas são muito maiores que a massa de elétrons, e que o átomo é eletricamente neutro, com dimensões típicas da ordem de  $10^{-10}$  m ( $= 1 \text{ \AA}$ ).

Thomson propôs então um modelo em que a carga positiva estaria distribuída uniformemente dentro de uma esfera com as dimensões do átomo, e os elétrons estariam dentro dessa nuvem positiva (como passas num bolo). Pelo teorema de Earnshaw (*Fís. Bás.* 3, Cap. 3), essa distribuição não poderia estar em equilíbrio estável sob a ação puramente de forças eletrostáticas.

Entretanto, os elétrons poderiam mover-se dentro da nuvem. Aplicando o modelo ao hidrogênio, o elétron poderia ter um movimento de oscilação radial, com frequência correspondente à luz visível (*Fís. Bás.* 3, Probl. 3.10) — embora isto não explicasse o espectro do átomo de hidrogênio, que contém uma série de frequências diferentes: o modelo só daria uma.

Ernest Rutherford, natural da Nova Zelândia, foi o sucessor de J. J. Thomson no Laboratório Cavendish da Universidade de Cambridge. Rutherford desenvolveu inúmeros trabalhos experimentais empregando as radiações emitidas por substâncias radioativas: partículas  $\alpha$  ( $\text{He}^{++}$ ),  $\beta$  ( $e^-$ ) e  $\gamma$  (fótons de energia elevada).

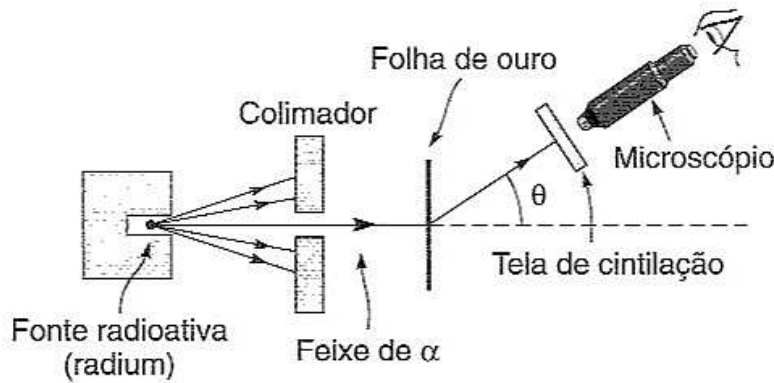


Fig. 7.7 Espalhamento Rutherford

Em 1909, dois assistentes de Rutherford, Geiger e Marsden, observaram o espalhamento de partículas  $\alpha$  por uma lâmina delgada de ouro, utilizando o dispositivo experimental da fig. 7.7. Uma fonte de radium emite partículas  $\alpha$ , de velocidade  $v \approx 1,52 \times 10^7$  m/s. Um feixe colimado de  $\alpha$  incide sobre uma folha de ouro muito fina, de espessura  $\sim 10^{-3}$  mm, o que equivale a alguns milhares de camadas atômicas.

As  $\alpha$  espalhadas numa direção  $\theta$  eram detetadas pelas cintilações provocadas pelo seu impacto sobre uma tela de sulfeto de zinco, observadas através de um microscópio. O ângulo de observação  $\theta$  era variável, e o aparelho estava numa câmara evacuada, para evitar que as  $\alpha$  do feixe fossem espalhadas por moléculas de ar.

Como a massa de uma  $\alpha$  é  $\sim 8.000$  vezes a do elétron, uma colisão com um elétron praticamente não desviaria a  $\alpha$  de sua trajetória. Por outro lado, se valesse o modelo de Thomson, a carga positiva do átomo estaria uniformemente distribuída dentro do raio atômico, e também não poderia produzir desvios muito grandes na trajetória da  $\alpha$  (mesmo cumulativos, por espalhamento múltiplo, pois tenderiam a se cancelar).

De fato, nas primeiras experiências, só se observaram desvios muito pequenos, como se a folha de ouro fosse praticamente transparente ao feixe de  $\alpha$ . Rutherford relata o que aconteceu em 1910:

“Um dia Geiger veio ver-me e disse: “Não seria bom que o jovem Marsden, que eu estou treinando em métodos radioativos, iniciasse uma pequena pesquisa?” Eu também tinha pensado nisso, e disse: “Por que ele não olha se há partículas  $\alpha$  espalhadas em grandes ângulos?” Aqui entre nós, eu não acreditava que houvesse, pois a  $\alpha$  era uma partícula de massa e velocidade elevadas, portanto de grande energia, e podia-se mostrar que, se o espalhamento resultasse do efeito cumulativo de um grande número de pequenas deflexões, a probabilidade de que uma  $\alpha$  fosse retroespalhada seria muito pequena. Lembro-me então de que, dois ou três dias

depois, Geiger veio ver-me extremamente excitado, dizendo: “Conseguimos obter algumas partículas  $\alpha$  espalhadas para trás...”. Foi a coisa mais incrível que jamais me aconteceu em toda a minha vida. Era quase tão incrível como se se disparasse um obus de 15 polegadas contra um lenço de papel e ele fosse defletido para trás, atingindo você.”.

E mais adiante: “Refletindo, percebi que esse retroespalhamento deveria ser produzido por uma única colisão, e fazendo as contas vi que seria impossível obter qualquer coisa dessa ordem de grandeza, exceto num sistema em que a maior parte da massa do átomo estivesse concentrada num núcleo diminuto. Foi então que tive a idéia de um átomo com a carga (positiva) e massa concentradas numa minúscula região central”.

É fácil estimar até que distância do centro, onde se concentra a carga positiva de um átomo de ouro, uma partícula  $\alpha$  da energia empregada na experiência precisa chegar para ser retroespalhada (*Fís. Bás.* 3, Probl. 4.6). O resultado, conforme foi estimado por Rutherford, é uma distância  $\sim 10^{-12}$  cm, ou seja,  $\sim 10^4$  vezes menor que o raio do átomo. Esse é então um limite superior para o raio do núcleo. Isso significa que a matéria é, em grande parte, espaço vazio. Ao mesmo tempo, verifica-se a *validade da lei de Coulomb* até distâncias dessa ordem!

Rutherford usou a mecânica clássica para calcular a fração  $dF$  das partículas incidentes que é espalhada em diferentes direções entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  (as órbitas são hiperbólicas: o problema é análogo ao de um cometa na gravitação). Os resultados foram comparados com as experiências de Geiger e Marsden, mostrando bom acordo e completando assim a justificativa da existência do núcleo e do modelo atômico de Rutherford.

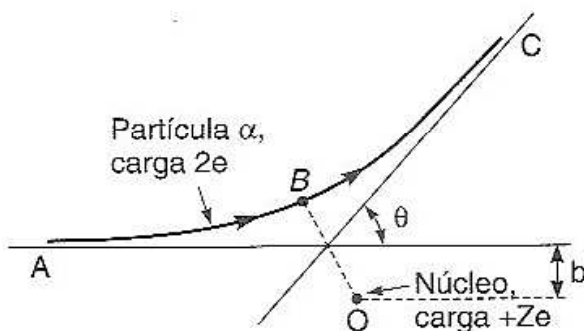


Fig. 7.8 Deflexão coulombiana

A força coulombiana responsável pela deflexão (fig. 7.8) é proporcional ao produto da carga  $2e$  da  $\alpha$  pela carga  $Ze$  do núcleo. Logo, determinando-se experimentalmente a fração  $dF$  espalhada entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  pode-se *medir* a carga nuclear  $Ze$ .

Os resultados obtidos por Chadwick para  $Z$  coincidem, dentro do erro experimental, com o *número atômico* do elemento utilizado como alvo, ou seja, com o seu número de ordem na tabela periódica dos elementos: 1 para H, 2 para He, 3 para Li, ...

Rutherford e sua escola estabeleceram assim experimentalmente que o átomo consiste de um núcleo de carga  $Ze$  e dimensões  $\leq 10^{-12}$  cm, que concentra quase toda a massa atômica, e  $Z$  elétrons distribuídos em dimensões  $\sim 10^{-8}$  cm em torno dele.

## 7.6 Espectros atômicos

A primeira evidência experimental significativa\* sobre espectros atômicos estava contida na descoberta, feita por Fraunhofer em 1814, de uma série de linhas escuras no espectro solar (“raias de Fraunhofer”).\*\*

Em 1859, Kirchhoff e Bunsen descobriram que o *espectro de emissão* de um elemento, formado por uma série de frequências bem definidas (*linhas espectrais*: as linhas obtidas são imagens da fenda do espectroscópio), é característico desse elemento. Assim, a emissão do vapor de sódio (obtida, por exemplo, lançando sal de cozinha na chama de um bico de Bunsen) contém duas linhas muito próximas no amarelo, responsáveis pela cor amarela da luz emitida. Os dois *mesmos* comprimentos de onda aparecem como linhas escuras entre as raias de Fraunhofer.

Esse último fato foi interpretado como significando que as linhas escuras formam o *espectro de absorção*. A radiação térmica solar, que tem um espectro contínuo, é parcialmente absorvida ao atravessar a atmosfera do Sol, e as linhas escuras sinalizam a presença do elemento ao qual estão associadas (sódio, por exemplo) nessa atmosfera. Essa descoberta de Kirchhoff e Bunsen serviu de base à análise da composição química das estrelas em astrofísica, através do seu espectro de absorção — em particular, permitiu identificar o desvio Doppler para o vermelho e descobrir a expansão do Universo (Seç. 6.8).

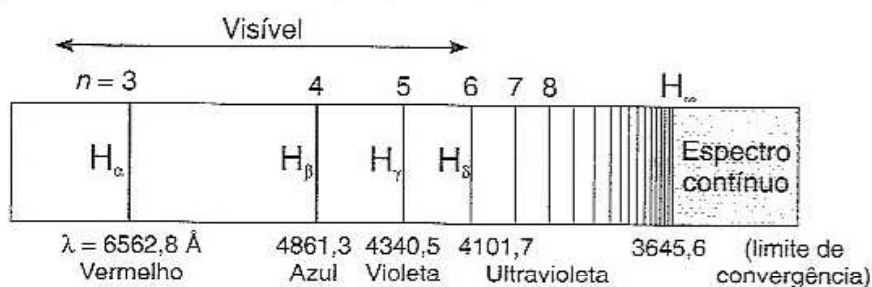


Fig. 7.9 Espectro do H

No espectro de emissão do hidrogênio *atômico* (H, não  $H_2$ ), p. ex., aparece na região do visível, estendendo-se até o ultravioleta, um conjunto de raias que vão-se aproximando cada vez mais umas das outras (fig. 7.9), tendendo a um ponto de acumulação.

\* Thomas Melvill já havia observado espectros de emissão de gases em 1752, mas com resolução muito pobre.

\*\* William Wollaston havia visto algumas linhas escuras em 1802.

Em 1885, Johann Balmer, um professor secundário em Basel, encontrou uma fórmula empírica que reproduzia com grande precisão (dentro de 0,02%) as posições desse conjunto de raias:

$$\lambda_n = C \left( \frac{n^2}{n^2 - 4} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \quad (7.22)$$

onde  $C$  é uma constante, que Balmer tomou  $= 3645,6 \text{ \AA}$ . Note que  $C$  é o limite da série:  $C = \lambda_\infty$ .

Uma forma mais sugestiva de apresentar esse resultado é em termos de *inversos de comprimentos de onda*:

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, \dots) \quad (\text{Balmer}) \quad (7.23)$$

onde  $R_H = 4/C$  chama-se *constante de Rydberg para o hidrogênio*. Seu valor é

$$R_H \approx 109.677 \text{ cm}^{-1} \quad (7.24)$$

A linha  $H_\alpha$  no vermelho é responsável pela cor avermelhada de uma descarga num tubo com hidrogênio. A série de linhas espectrais dada pela (7.23) chama-se *série de Balmer*.

Em 1906, Lyman descobriu outra série de linhas no ultravioleta distante no espectro do H, com

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (\text{Lyman}) \quad (7.25)$$

e em 1908 Paschen descobriu outra série no H, dada por

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, \dots) \quad (\text{Paschen}) \quad (7.26)$$

esta no infravermelho.

Todas essas séries são da forma geral

$$\frac{1}{\lambda_{n(m)}} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = m + 1, m + 2, \dots) \quad (7.27)$$



e são casos particulares de uma regra geral, associada ao *princípio de combinação de Rydberg e Ritz*, segundo a qual linhas espectrais podem sempre ser representadas como *diferenças* de dois *termos espectrais*:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{21}} = T_2 - T_1} \quad (7.28)$$

de forma que, se duas frequências  $\nu_1$  e  $\nu_2$  ( $\nu = c/\lambda$ ) aparecem num espectro, podemos esperar que também apareçam  $\nu_1 + \nu_2$  e  $|\nu_1 - \nu_2|$

Por exemplo, a 1.<sup>a</sup> linha da série de Lyman tem  $1/\lambda$  dado por  $R_H \left(1 - \frac{1}{4}\right)$  e a 1.<sup>a</sup> da série de Balmer por  $R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$ ; a combinação das duas dá  $R_H \left(1 - \frac{1}{9}\right)$  que é a 2.<sup>a</sup> linha da série de Lyman.

Todos esses resultados eram incompreensíveis pela física clássica. O modelo clássico de emissão de luz monocromática, como vimos, era o *oscilador de Hertz*, que só emite a frequência de oscilação  $\nu$ . Sistemas oscilantes mais gerais podem emitir também *harmônicos* dessa frequência, como  $2\nu$ ,  $3\nu$ , ..., mas não há nada que se pareça ao princípio de combinação de Rydberg-Ritz nem às séries espectrais, como as do H.

## 7.7 O modelo atômico de Bohr

Os resultados de Rutherford trouxeram um novo desafio para a compreensão da estrutura do átomo, mostrando que o modelo de J. J. Thomson era inadmissível. Um modelo eletrostático era excluído pela impossibilidade de levar a uma configuração de equilíbrio estável (teorema de Earnshaw).

Modelos dinâmicos do tipo de um sistema planetário, com os elétrons orbitando em torno do núcleo, haviam sido considerados, mas também apresentavam uma dificuldade insuperável dentro da física clássica.

Em qualquer órbita descrita em torno do núcleo, um elétron está continuamente se movendo com aceleração  $\neq 0$ . Mas uma carga acelerada, de acordo com a teoria de Maxwell, emite radiação, e por conseguinte *perde energia*, tendendo a aproximar-se do núcleo. A órbita se transforma numa espiral, que acaba levando à *captura* dos elétrons pelo núcleo e ao colapso do átomo. Para uma órbita de dimensões atômicas, esse colapso ocorre num tempo inferior a  $10^{-9}$  s! Logo, conforme já foi observado na Seç. 7.1, a física clássica não consegue sequer explicar a existência de átomos e a estabilidade da matéria.



Em 1912, Niels Bohr transferiu-se do laboratório de J. J. Thomson em Cambridge para o de Rutherford, que nessa época estava em Manchester. Bohr procurou interpretar os resultados de Rutherford construindo um modelo para o átomo mais simples, o de H, com base nas idéias de Planck e Einstein sobre quantização.

Bohr, percebendo que a teoria clássica não poderia explicar a estabilidade do átomo em seu estado normal, com o elétron orbitando em torno do núcleo sem emitir radiação, resolveu simplesmente postulá-la, admitindo a existência de *estados estacionários* com estas características.

De acordo com a mecânica clássica, o problema de um elétron orbitando em torno de um próton no átomo de H, sujeito apenas à força coulombiana, é inteiramente análogo ao problema de Kepler de dois corpos na gravitação, levando a órbitas em geral elípticas, como as dos planetas, podendo haver, como caso particular, órbitas circulares (Fig. 7.10). Bohr resolveu considerar esse caso mais simples.

Se  $r$  é o raio de uma órbita circular e  $v$  a velocidade com que ela é descrita, sabemos que  $v$  é constante pela conservação do momento angular  $L$  (o campo é central):

$$L = m v r = \text{constante} \quad (7.29)$$

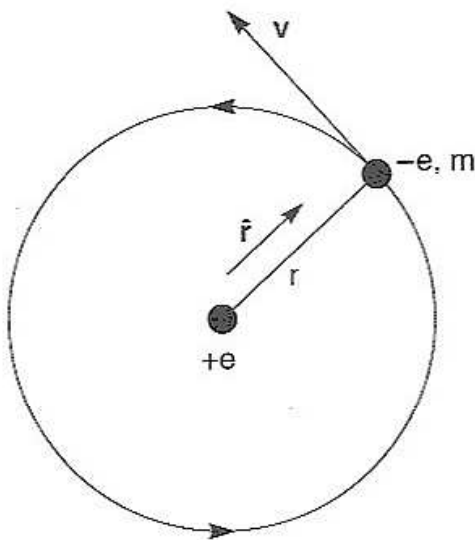


Fig. 7.10 Órbita circular

A aceleração  $a$  do elétron é puramente centrípeta,

$$a = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (7.30)$$

A única força que atua é a força coulombiana entre o elétron e o próton,

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{r^2} \hat{r} = -\frac{m v^2}{r} \hat{r} \quad (7.31)$$

onde, para simplificar, fizemos

$$q^2 \equiv e^2 / (4\pi \epsilon_0) \quad (7.32)$$

Obtemos portanto

$$\boxed{m v^2 = \frac{q^2}{r}} \quad (7.33)$$

Tomando o nível zero de energia total no infinito, ou seja, com o elétron “infinitamente” afastado do núcleo e em repouso, a energia  $E$  do sistema é

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{q^2}{r} = -\frac{q^2}{2r}} \quad (7.34)$$

↑  
pela (7.33)

onde o sinal (–) se deve à escolha do nível zero para  $E$ : é preciso *fornecer* energia para levar o elétron até o “infinito”.

Quando o átomo emite luz, sua energia tem de diminuir. Usando a (7.34), Bohr associou essa variação de energia  $\Delta E$  a uma variação do raio da órbita, que passaria de um valor inicial  $r_i$  a um valor final  $r_f$ :

$$\Delta E_{i \rightarrow f} = -\frac{q^2}{2r_f} - \left( -\frac{q^2}{2r_i} \right) = \frac{q^2}{2} \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (7.35)$$

Bohr baseou-se na teoria de Einstein do efeito fotoelétrico para associar essa variação de energia à *freqüência*  $\nu$  do fóton emitido usando a relação

$$\boxed{\Delta E_{i \rightarrow f} = h \nu = h \frac{c}{\lambda}} \quad (7.36)$$

o que dá, levando na (7.35),

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \frac{q^2}{2 h c} \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)} \quad (7.37)$$

que já tem a estrutura de uma *diferença entre dois termos espectrais*, como a (7.28).

Um espectroscopista havia informado Bohr sobre as fórmulas empíricas para o espectro do H. “Assim que vi a fórmula de Balmer”, disse Bohr, “tudo se tornou claro para mim”.

Se identificarmos cada termo da (7.37) com a (7.27), inferimos, com efeito,

$$\frac{q^2}{2 h c r_n} = \frac{R_H}{n^2} \quad (7.38)$$

ou seja, que os raios das órbitas são dados por

$$r_n = n^2 a_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.39)$$

onde

$$a_0 \equiv \frac{q^2}{2 h c R_H} \equiv \text{RAIO DE BOHR} \quad (7.40)$$

(da menor órbita,  $n = 1$ )

e a energia  $E_n$  associada à órbita  $n$ , pelas (7.34) e (7.39), é

$$E_n = -\frac{q^2}{2 n^2 a_0} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.41)$$

com [cf.(7.36)]

$$E_n - E_m = h \nu_{n \rightarrow m} = \frac{q^2}{2 a_0} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (7.42)$$

dando a frequência da linha espectral emitida na passagem de  $n$  para  $m$ .

A (7.40) relaciona o raio da 1.<sup>a</sup> órbita de Bohr com a constante de Rydberg, que é determinada experimentalmente. Mas Bohr conseguiu relacioná-la com outras constantes físicas fundamentais usando seu *princípio de correspondência* (Seç. 7.1), a idéia de que a física clássica deve ser obtida como caso limite.

No limite em que o “*número quântico*”  $n$  se torna muito grande, a (7.39) mostra que o raio da órbita correspondente cresce rapidamente, aproximando-se de dimensões macroscópicas. Hoje em dia, embora isso seja altamente não trivial, sabe-se preparar átomos nessa situação, p. ex., com  $n \geq 50$ , que são chamados *átomos de Rydberg*.

Se considerarmos então uma transição entre duas órbitas vizinhas,  $n + 1 \rightarrow n$ , a variação fracionária de raio é muito pequena, e podemos considerar

que o elétron permanece numa única órbita circular quase macroscópica. A frequência  $\nu$  da radiação emitida nessa transição é, pela (7.42),

$$\nu_{n+1 \rightarrow n} = \frac{q^2}{2 h a_0} \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{q^2 \overbrace{(2n+1)}^{=2n}}{2 h a_0 n^2 \underbrace{(n+1)^2}_{=n^2}}$$

ou seja, para  $n \gg 1$ ,

$$\nu_{n+1 \rightarrow n} \approx \frac{q^2}{h a_0 n^3} \quad (n \gg 1) \quad (7.43)$$

Mas nesse caso a física clássica, que deve resultar como caso limite, prevê que a frequência da radiação emitida coincide com a frequência do movimento circular uniforme ao longo da órbita,

$$(\nu_n)_{class} = \frac{v_n}{2 \pi r_n} = \frac{v_n}{2 \pi n^2 a_0} \quad (\text{Frequência clássica}) \quad (7.44)$$

onde, pela (7.33),

$$v_n^2 = \frac{q^2}{m r_n} = \frac{q^2}{m a_0 n^2}$$

de modo que

$$(\nu_n^2)_{class} = \frac{q^2}{m a_0 n^2} \cdot \frac{1}{4 \pi^2 n^4 a_0^2} = \frac{q^2}{(2 \pi)^2 m (n^2 a_0)^3} \quad (7.45)$$

Como  $\nu_n = 1/\tau_n$  onde  $\tau_n$  é o período, e  $n^2 a_0 = r_n$ , a (7.45) não passa da 3.ª lei de Kepler: os quadrados dos períodos são proporcionais aos cubos dos raios das órbitas correspondentes (*Fís. Bás.* 1, Seç. 10.4).

Usando o princípio de correspondência, a (7.43) dá

$$(\nu_{n+1, n})^2 = \frac{q^4}{h^2 a_0^2 n^6} \Big| \approx (\nu^2)_{class} \quad (7.46)$$

e, comparando com a (7.45), resulta [cf. (7.32)]

$$\frac{q^2}{(2\pi)^2 m (a_0)^3} = \frac{q^4}{h^2 a_0^2} \left\{ \boxed{a_0 = \frac{\hbar^2}{m q^2} = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2}} \right. \quad (7.47)$$

que exprime o raio de Bohr em função de constantes fundamentais da física.

Substituindo os valores numéricos

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,854 \times 10^{-12} \text{ F / m} , \quad h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ m &= 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} , \quad e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \end{aligned}$$

acha-se

$$\boxed{a_0 \cong 5,29 \times 10^{-11} \text{ m} \cong 0,529 \text{ \AA}} \quad (7.48)$$

e a (7.40) dá o valor da constante de Rydberg  $R_H$  correspondente:

$$\boxed{R_H = \frac{q^2}{2 h c a_0} = \frac{2 \pi^2 m q^4}{c h^3} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3}} \quad (7.49)$$

Substituindo os valores numéricos, acha-se  $R_H \approx 109.600 \text{ cm}^{-1}$ , o que já concorda bastante bem com o valor experimental (7.24). A concordância ainda melhora quando se leva em conta que o próton foi tratado como em repouso (massa infinita), quando na verdade deveríamos ter usado o referencial do CM e a *massa reduzida* (Fís. Bás. 1, Seç. 10.10). Esse foi um grande sucesso da teoria de Bohr.

A expressão do raio de Bohr em termos da constante de Planck e da carga e massa do elétron foi um marco na história da física, definindo a *escala atômica de tamanho*. Como observou Dirac, “grande” e “pequeno” deixaram de ser conceitos relativos, com a introdução, pela primeira vez, de uma escala absoluta, baseada em constantes universais da Natureza.

Entretanto, a condição (7.38), que seleciona os raios das órbitas circulares, foi obtida identificando a (7.37) com a fórmula de Balmer. Haveria alguma justificativa *teórica* para essa regra de seleção?

Pelas (7.29) e (7.33), o quadrado do *momento angular*  $L_n$  do elétron na órbita de raio  $r_n$  é

$$L_n^2 = m^2 v_n^2 r_n^2 = m q^2 r_n = m q^2 a_0 n^2 = n^2 \hbar^2$$

↑  
pela (7.47)

ou seja,

$$\boxed{L_n = n \hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots)} \quad (7.50)$$

Isso significa que os raios das órbitas correspondem à *quantização do momento angular em unidades de  $\hbar$* . As dimensões do momento angular são as mesmas da ação.

Refazendo em sentido inverso o caminho que nos levou a esses resultados, vemos que o modelo atômico de Bohr pode ser deduzido a partir das seguintes hipóteses:

(I) ESTADOS ESTACIONÁRIOS: *Existe no átomo um conjunto discreto de estados chamados de “estacionários”*. Pelo menos o estado estacionário de energia mais baixa [dado pela (7.41) com  $n = 1$  para o H], chamado de *estado fundamental*, é realmente estacionário, no sentido de ser *estável*: o átomo pode permanecer nele indefinidamente.

Esses estados correspondem a órbitas eletrônicas em torno do núcleo, que Bohr calculou usando as leis da mecânica newtoniana e considerando somente órbitas coulombianas circulares.

Esta hipótese já viola a teoria eletromagnética clássica, segundo a qual a aceleração do elétron nessas órbitas levaria à emissão de radiação, fazendo-o espiralar para dentro do núcleo.

(II) CONDIÇÃO DE QUANTIZAÇÃO DE BOHR: *Os estados estacionários são aqueles que satisfazem à condição de quantização do momento angular (7.50)*.

(III) CONDIÇÃO DE FREQUÊNCIA DE BOHR: *Quando um elétron passa de um estado “estacionário” de energia  $E_n$  para outro de energia  $E_m$ , a diferença de energia corresponde, se  $E_n > E_m$ , à emissão de um fóton, de frequência dada por*

$$\boxed{\nu_{n \rightarrow m} = (E_n - E_m) / h} \quad (7.51)$$

Também pode ocorrer o processo inverso, em que o átomo passa de  $E_m$  para  $E_n$  por *absorção* de um fóton dessa frequência (espectro de absorção).



Pode-se perguntar por que os estados com  $n = 2, 3, 4, \dots$  são chamados de “estacionários”, uma vez que tendem a passar para o estado fundamental  $n = 1$ , com emissão de um fóton da série de Lyman. A razão é que o período de revolução numa órbita é da ordem de grandeza do período da luz visível, ou seja,  $\sim 10^{-14}$  s, ao passo que a “vida média” para emissão de radiação é tipicamente  $\sim 10^{-8}$  s, de forma que o elétron, no modelo de Bohr, descreve um grande número de revoluções numa órbita antes de passar para outra.

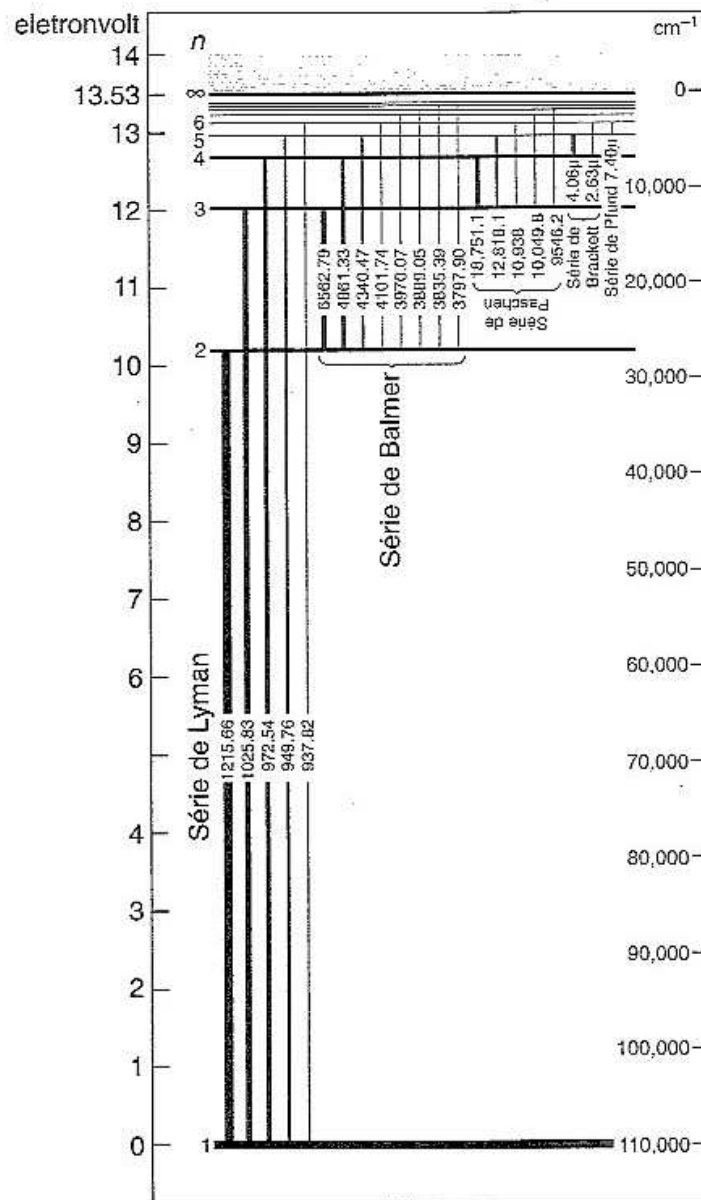


Fig. 7.11 Diagrama de termos de H

A fig. 7.11 mostra um “diagrama de termos”, no sentido da (7.28), ou, o que é equivalente, dos *níveis de energia dos estados estacionários*, previstos pela teoria de Bohr para o átomo de H.

Com a escolha feita do nível zero de energia, a energia do estado fundamental do H, pelas (7.41) e (7.49), é

$$\boxed{E_1 = -\frac{q^2}{2a_0} = -chR_H} \quad (7.52)$$

$$\left. \begin{array}{l} h = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \\ c = 3 \times 10^{10} \text{ cm / s} \\ R_H = 109.677 \text{ cm}^{-1} \end{array} \right\} \boxed{E_1 \approx -13,6 \text{ eV}}$$

Isso significa que é preciso *fornecer* 13,6 eV ao átomo no seu estado fundamental para remover o elétron até uma distância “infinita” do núcleo com energia zero, ou seja, para *ionizar* o átomo de H. Esse resultado concorda com o valor experimental da *energia de ionização* do H.

Se fornecermos *mais* do que esta energia, o elétron não só será ionizado, como ainda terá uma energia cinética *positiva*, que pode variar de forma *contínua*. Por isso, a região hachurada acima de  $n = \infty$  na fig. 7.11 foi marcada “espectro contínuo”. Como o elétron não está mais ligado ao núcleo, podemos pensar nesses estados como representando o *espalhamento* de um elétron por um próton.

A *energia de excitação* mínima que é preciso fornecer ao elétron para removê-lo do estado fundamental é aquela correspondente à transição para o 1.º estado excitado,  $n = 2$ , dada por [cf. (7.42)]

$$E_2 - E_1 = E_1 \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \cong \frac{3}{4} \times 13,6 \text{ eV} \approx 10,2 \text{ eV}.$$

### *Os experimentos de Franck e Hertz*

Uma verificação experimental importante das idéias de Bohr, em particular do conceito da *energia de excitação mínima* de um átomo, que acabamos de discutir, foi obtida numa série de experimentos de James Franck e Gustav Hertz\* realizados a partir de 1914. Até então, o caráter quantizado de transferências de energia tinha-se restringido essencialmente à emissão e absorção da radiação. Os experimentos

---

\* Não confundir com Heinrich Hertz, que verificou a teoria de Maxwell.

de Franck e Hertz foram os primeiros a demonstrar o caráter quantizado de transferências de energia em que a energia transferida era *energia cinética*, com a transferência efetuada através de *colisões*.

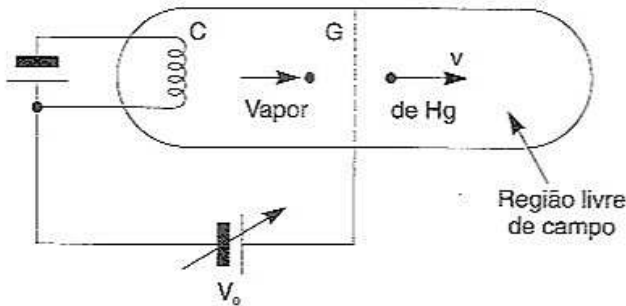


Fig. 7.12 Experimento de Franck e Hertz

O arranjo experimental mais simples que empregaram está ilustrado na fig. 7.12. Num tubo contendo vapor de mercúrio a baixa pressão, elétrons emitidos por um filamento incandescente C (catodo) são acelerados por uma diferença de potencial  $V_0$  variável até o anodo, que é uma *grade* G, cujos interstícios os elétrons podem

atravessar, penetrando depois numa região livre de campo elétrico, onde a velocidade  $v$  adquirida pelos elétrons acelerados se mantém, enquanto eles não colidem com átomos de Hg.

A energia cinética adquirida pelos elétrons que atravessam a grade é

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV_0 \quad (7.53)$$

(a energia térmica da emissão pelo filamento é desprezível em confronto com  $eV_0$ ).

Aumentando gradualmente  $V_0$ , verifica-se que o vapor de mercúrio permanece escuro, até que se atinge o valor  $V_0 = 4,88 \text{ V}$ , quando ele começa a emitir radiação com  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ , característica do Hg.

Usando a “condição de frequência” de Bohr (7.51), a diferença de energia associada à frequência  $\nu = c/\lambda$ , com  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ , é  $h\nu \approx 4,88 \text{ eV}$ . Logo, a interpretação do resultado experimental é: enquanto o potencial acelerador é insuficiente para comunicar aos elétrons essa energia cinética, eles não podem transferir aos átomos de Hg com os quais colidem a energia de excitação mínima necessária para removê-los do estado fundamental.

Assim que é atingido o *limiar de excitação* de 4,88 eV, começam a ocorrer *colisões inelásticas* entre os elétrons e os átomos, em que *energia cinética* dos elétrons é convertida em *energia de excitação* e depois reemitida sob a forma de radiação de 2537  $\text{\AA}$ .

Também foram observados limiares associados a transições para outros níveis: estas experiências constituem um dos primeiros exemplos de *bombeamento atômico*, em que um átomo é transferido de seu estado fundamental a algum de seus estados excitados de forma controlada, no caso através de colisões com elétrons.

Além disso, também foi determinada experimentalmente por Franck e Hertz a energia necessária para *ionizar* os átomos, que corresponde à transição do estado fundamental para o espectro contínuo; o valor de  $V_0$  correspondente é o *potencial de ionização*, e concorda com aquele inferido espectroscopicamente pelo limite de uma série de linhas espectrais.

## 7.8 As ondas de de Broglie

Em 1923, o físico francês Louis de Broglie, que estava preparando sua tese de doutoramento, sugeriu uma série de idéias especulativas, baseadas nos resultados até então obtidos para fótons, na teoria de Bohr, e na analogia ótico-mecânica (Seç. 2.11).

Para os fótons, como vimos no tratamento do efeito Compton, manifestam-se efeitos que os caracterizam como partículas, mas que ao mesmo tempo dependem de suas propriedades *ondulatórias*, como a relação (7.13) entre a magnitude do momento  $p$  do fóton e o seu comprimento de onda  $\lambda$ :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (7.54)$$

O aparecimento de números inteiros na condição de quantização de Bohr para as órbitas dos elétrons no átomo de H foi uma pista importante. Nas palavras de de Broglie,

“A determinação do movimento estacionário dos elétrons no átomo introduz números inteiros; ora, até aqui os únicos fenômenos em que intervinham inteiros na física eram os de interferência e modos normais de vibração. Esse fato me sugeriu a idéia de que também os elétrons não deveriam ser considerados somente como corpúsculos mas de que deveriam estar associados com periodicidade”.

Assim, a contrapartida das propriedades corpusculares da luz, antes considerada como onda, seriam propriedades ondulatórias dos elétrons (mais geralmente, de outras partículas), até então tratados como corpúsculos. Por analogia com a (7.54), de Broglie postulou que o *comprimento de onda* associado a partículas (não-relativísticas) de momento  $p = mv$ , seria

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (7.55)$$

que se chama o *comprimento de onda de de Broglie* da partícula.

Qual seria o valor de  $\lambda$  para elétrons de diferentes energias  $E$ ? Para um elétron livre não-relativístico, a energia é puramente cinética:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \left\{ p = \sqrt{2mE} \right. \quad \left\{ \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \right. \quad (7.56)$$

Para um elétron de 1 eV, temos:

$$E = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}, \quad m = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s},$$

o que dá

$$\lambda_{(1\text{eV})} = 1,22 \times 10^{-9} \text{ m} = 12,2 \text{ \AA}$$

ou seja

$$\lambda (\text{eletrons}) = \frac{12,2}{\sqrt{E_{(\text{eV})}}} \text{ \AA} \quad (7.57)$$

Assim, para um elétron de 100 eV, tem-se  $\lambda = 1,22 \text{ \AA}$ , para  $10^4$  eV,  $\lambda = 0,122 \text{ \AA}$ ; muito acima disso, já seria preciso usar a energia relativística. Por outro lado, para prótons de 1 keV, seria  $\lambda = 0,009 \text{ \AA}$  (devido a  $M_p \approx 1836 m_e$ ).

Os pequenos valores de  $\lambda$  mesmo para partículas da escala atômica explicariam por que as propriedades ondulatórias teriam passado despercebidas. Conforme observou de Broglie, é a mesma razão pela qual as propriedades ondulatórias da luz visível passam, normalmente despercebidas, permitindo que se empregue a ótica geométrica em lugar da ótica ondulatória.

Durante a defesa de tese, Jean Perrin perguntou a de Broglie se as suas ondas poderiam ser detetadas experimentalmente. A resposta de de Broglie foi que isso talvez fosse possível fazendo experiências de difração de elétrons por cristais.

Sem que Perrin ou de Broglie soubessem, já existiam alguns dados experimentais nessa ocasião indicativos do efeito, em experiências no laboratório de C. H. Davisson em N. York, de espalhamento de elétrons por amostras cristalinas de níquel (foi um antecessor dos laboratórios da Bell).

Entretanto, efeitos muito mais claros apareceram nessas experiências por acaso, devido a um acidente ocorrido no laboratório em 1925: uma garrafa de ar líquido explodiu, levando o alvo de níquel a ficar oxidado. Para eliminar o óxido, o alvo foi submetido a um tratamento térmico que o transformou, de um agregado policristalino, em pequeno número de monocristais. O resultado foi uma mudança radical na distribuição angular dos elétrons espalhados: apareceu um pico intenso correspondente a um ângulo de desvio de  $50^\circ$ , para um feixe de elétrons de 54 eV.

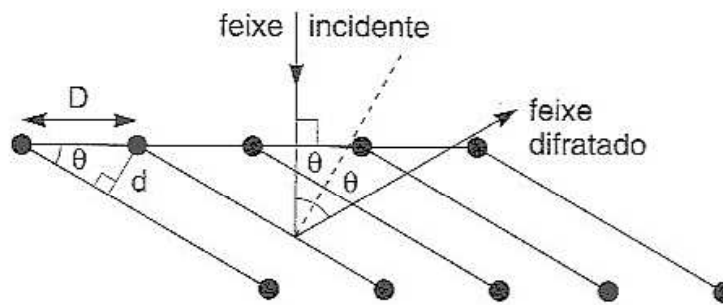


Fig. 7.13 Difração de elétrons

Por difração de raios X sabia-se que o espaçamento  $D$  entre átomos de Ni *na superfície* era de  $2,15 \text{ \AA}$ .

Se o feixe de elétrons sofre difração de Bragg por uma família de planos reticulares que forma um ângulo  $\theta$  com a superfície (fig. 7.13), o espaçamento entre os planos é  $d = D \sin \theta$ , e a condição de Bragg (4.89) dá, para  $m = 1$ ,

$$2 d \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \lambda = 2 D \sin \theta \cos \theta = D \sin (2 \theta) \quad (7.58)$$

Mas  $2\theta$  é o ângulo de desvio (fig. 7.3), de modo que

$$\lambda = 2,15 \text{ \AA} \sin 50^\circ = 1,65 \text{ \AA}$$

ao passo que a (7.57) daria  $\lambda = 1,66 \text{ \AA}$ . Confirmou-se assim que o pico a  $50^\circ$  era devido à *difração* de Bragg dos elétrons pelo cristal de Ni.

Vimos na Sec. 4.11 que outra técnica de difração de raios X é o método dos pós cristalinos de Debye e Scherrer, em que o agregado de microcristais do pó tem faces distribuídas ao acaso, levando à formação de *anéis* concêntricos de difração.



Experiências análogas de difração de elétrons foram feitas em 1927 por G. P. Thomson, mostrando os anéis de difração esperados. 30 anos antes, em 1897, o pai de G. P. Thomson, J. J. Thomson, havia descoberto o elétron, tendo ganhado o Prêmio Nobel de 1906 pela identificação dos elétrons como corpúsculos. Em 1937, juntamente com Davisson, G. P. Thomson ganhou o Nobel — por demonstrar que elétrons são ondas!

Em 1929, I. Estermann e O. Stern demonstraram a difração de partículas neutras: átomos de He e moléculas de H<sub>2</sub>, verificando a validade da relação de de Broglie também neste caso. Posteriormente, foram feitas experiências de difração com nêutrons, levando a técnicas valiosas de investigação da estrutura de cristais, complementares à difração de raios X.

Vimos até aqui os eventos mais importantes que precederam a formulação da teoria quântica, correspondendo à “velha teoria quântica”, desenvolvida durante o primeiro quarto deste século. A característica principal dessa era foi a abordagem heurística, fenomenológica, procurando encontrar aspectos da nova dinâmica do mundo atômico e subatômico de forma semi-empírica.

Embora tenha obtido alguns sucessos notáveis, a velha teoria quântica tinha defeitos muito sérios. Em primeiro lugar, era uma mistura extremamente arbitrária de física clássica com novos postulados alheios e contraditórios à física clássica. Além disso, o modelo atômico de Bohr nunca pôde ser estendido a átomos com mais de um elétron “ótico”; isto é, envolvido nas transições que dão origem ao espectro ótico: por ex., ao átomo de He. Mesmo para o átomo de H, conforme veremos, a predição da teoria de Bohr para o momento angular no estado fundamental ( $L = \hbar$ ) é incorreta: o momento angular é nulo.

Na avaliação de Einstein: “Que essas bases incertas e contraditórias tenham permitido a Bohr descobrir as leis que regem as linhas espectrais e as camadas eletrônicas dos átomos, bem como seu significado para a química, pareceu-me como um milagre”.

## **7.9 A equação de Schrödinger para estados estacionários**

Os trabalhos de de Broglie, antes da confirmação experimental dos efeitos ondulatórios associados a partículas, não haviam tido muita repercussão, mas sua importância foi logo reconhecida por Einstein.

Em 1926, Peter Debye, que estava na Escola Politécnica Federal de Zürich, organizava, juntamente com Erwin Schrödinger, seu sucessor na Universidade de

Zürich, um colóquio conjunto. Conversando sobre a teoria de de Broglie, concordaram que não a entendiam, e Debye pediu a Schrödinger que preparasse um colóquio sobre esse tema. Foi a preparação do colóquio que acabou levando Schrödinger, poucos meses depois, à formulação da *mecânica ondulatória*, a sua versão da mecânica quântica.

Schrödinger, que tinha uma excelente formação em física matemática, preocupou-se logo em encontrar uma *equação de ondas* para as ondas materiais, de de Broglie, começando pelos *estados estacionários*, ou seja, por partículas de energia  $E$  dada.

Para *partículas livres não-relativísticas* isso era bastante simples. Com efeito, nesse caso, as relações de de Broglie implicam, como vimos, que a frequência  $\nu$  da onda e seu número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  estão relacionados com a energia e o momento da partícula por

$$\boxed{\begin{aligned} E &= h\nu = \hbar\omega \\ p &= \frac{h}{\lambda} = \hbar k \end{aligned}} \quad (7.59)$$

ao mesmo tempo que se tem, para uma partícula livre de massa  $m$ ,

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (7.60)$$

(a energia é puramente cinética).

Por outro lado, a equação de ondas monocromáticas de número de onda  $k$  é, em três dimensões,

$$\boxed{(\Delta + k^2)\psi(\mathbf{x}) = 0} \quad (7.61)$$

ou seja, usando as (7.59) - (7.60),

$$\Delta\psi = -k^2\psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi = -\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\tilde{E}}\psi$$

ou, finalmente,

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}) = E \psi(\mathbf{x})} \quad (7.62)$$

que é a *equação de Schrödinger estacionária* para partículas *livres* não-relativísticas de massa  $m$  e energia  $E$ .

Consideremos agora o problema não-relativístico do movimento de uma partícula de massa  $m$  e energia  $E$  num campo de forças, associado à energia potencial  $V(\mathbf{x})$ , para o qual

$$\boxed{E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x})} \quad (7.63)$$

O problema do átomo de hidrogênio, p. ex., é desse tipo.

Para obter a equação das ondas de de Broglie nesse caso, Schrödinger apelou, como o próprio de Broglie já fizera, para a *analogia ótico-mecânica* que havia sido descoberta por Hamilton.

Vimos na Seç. 2.11 que a trajetória de uma partícula de energia  $E$  dada num campo de forças de energia potencial  $V(\mathbf{x})$ , segundo as leis da mecânica clássica, é idêntica à de um raio luminoso num meio inhomogêneo de índice de refração dado pela (2.73),

$$\boxed{n(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - \frac{V(\mathbf{x})}{E}}} \quad (7.64)$$

segundo as leis da ótica geométrica.

Em seu primeiro trabalho de 1926, Schrödinger argumentou:

“Nossa mecânica clássica é talvez *completamente* análoga à ótica geométrica, e por isto falha e está em desacordo com a realidade ... Portanto é preciso estabelecer uma mecânica ondulatória, e o método mais óbvio é a elaboração de uma teoria ondulatória a partir da analogia Hamiltoniana”.

Sabemos (Seç. 3.1) que, para ondas de número de onda reduzido  $k_0$  num meio de índice de refração  $n$ , o número de onda no meio é  $k = n k_0$ . Logo, a equação de ondas monocromáticas (7.61) deve ser substituída por

$$\boxed{\left[ \Delta + n^2(\mathbf{x}) k_0^2 \right] \psi(\mathbf{x}) = 0} \quad (7.65)$$

onde  $k_0$  é o número de onda na ausência do meio, ou seja, para partículas livres, de mesma energia (frequência), dado, como na (7.61), por

$$k_0^2 = \frac{\mathbf{p}_0^2}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (7.66)$$

As (7.64) e (7.65) dão então

$$0 = \left\{ \Delta + \frac{2m}{\hbar^2} E \left[ 1 - \frac{V(\mathbf{x})}{E} \right] \right\} \psi(\mathbf{x}) = \Delta \psi - \frac{2m}{\hbar^2} V \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi$$

ou seja

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x}) \psi = E \psi(\mathbf{x}) \right] \quad (7.67)$$

que é a *equação de Schrödinger para estados estacionários de energia E na presença da energia potencial V(x)*, generalização da (7.62). Para o átomo de H, p. ex., seria

$$\left[ V(\mathbf{x}) = -\frac{q^2}{r} \right] \quad (7.68)$$

Não basta, entretanto, formular uma equação de ondas. É preciso que saibamos como *interpretá-la*. A que correspondem a amplitude e a intensidade da onda? Qual é a relação entre a onda e a partícula a ela associada?

O problema da interpretação também está relacionado com as condições que devem ser impostas às soluções da equação para que sejam fisicamente aceitáveis, em particular as condições de contorno que devem ser satisfeitas.

Trata-se precisamente de formular os novos conceitos físicos associados à escala atômica. Esse é um problema altamente não-trivial, e ainda hoje, mais de meio século após a formulação da teoria quântica, alguns aspectos mais sutis continuam sendo elaborados (seq. 10.8).

Deixando de seguir a evolução histórica, vamos abordar a formulação dos princípios e conceitos básicos da física quântica no próximo capítulo.

## PROBLEMAS

1. Para verificar se o conceito de fóton é relevante no eletromagnetismo microscópico, considere uma estação de rádio que transmite na frequência de 1 MHz e com uma potência total emitida de 5 kW. (a) Calcule o comprimento de onda das ondas de rádio emitidas. (b) Calcule a energia correspondente dos fótons, em eV. (c) Quantos fótons são emitidos por segundo?

2. O comprimento de onda correspondente ao limiar para que ocorra o efeito fotoelétrico no alumínio é de  $2.954 \text{ \AA}$ . (a) Qual é a função de trabalho do Al (em eV)? (b) Qual é a energia cinética máxima dos elétrons ejetados do Al por luz ultravioleta de comprimento de onda de  $1500 \text{ \AA}$ ?

3. Um fóton de 100 MeV colide com um próton em repouso. Calcule a perda máxima de energia que o fóton pode sofrer.

4. Relacione a direção  $\phi$  de desvio do elétron de recuo no efeito Compton (Seç. 7.4) com as frequências  $\nu_0$  e  $\nu$  dos fótons incidente e espalhado e o ângulo  $\theta$  de espalhamento.

5. Um fóton de raios X de  $\lambda_0 = 3 \text{ \AA}$  é espalhado por um elétron livre em repouso, sendo desviado de  $90^\circ$ . Qual é a energia cinética de recuo do elétron (em eV)?

6. Um pósitron de momento  $\mathbf{p}$  colide com um elétron em repouso, levando o par a aniquilar-se em dois fótons, cujas direções de propagação formam um ângulo  $\theta$  uma com a outra. Demonstre que a soma dos comprimentos de onda dos dois fótons é igual a  $\lambda_c (1 - \cos \theta)$ , onde  $\lambda_c$  é o comprimento de onda Compton do elétron (observe que o cálculo é semelhante ao do efeito Compton).

7. Em 1965, Höglund e Mezger observaram, com um radiotelescópio, uma linha espectral de emissão de frequência 5.009 MHz. (a) Mostre que essa linha corresponde a uma transição entre dois níveis de Rydberg do átomo de hidrogênio,  $n = 110$  e  $n = 109$ . (b) Qual é o raio da órbita de Bohr  $n = 110$ ?

8. Para verificar o possível efeito de correções relativísticas na teoria de Bohr do átomo de hidrogênio, pode-se calcular a razão  $v/c$ , onde  $v$  é a velocidade do elétron no estado fundamental do átomo. Mostre que

$$\frac{v}{c} = \alpha \quad , \quad \alpha \equiv \frac{q^2}{\hbar c}$$

onde  $\alpha$  é chamada de *constante de estrutura fina*. Mostre que  $\alpha \approx 1/137$ , de modo que  $v/c < 1\%$ .

9. No tratamento do modelo de Bohr do átomo de H na Seção 7.7, o núcleo (próton) foi tratado como se tivesse massa infinita em repouso. Na realidade, o elétron e o núcleo se movem em torno do centro de massa do sistema. (a) Mostre, levando em conta esse efeito, que ele corrige a constante de Rydberg por um fator de  $M/(M + m)$ , onde  $M$  é a massa do núcleo. (b) Considere o espectro do deutério (isótopo do hidrogênio de massa 2). Qual é a variação percentual de comprimento de onda entre uma linha do espectro do H e a linha correspondente do espectro do deutério?

10. Considere um oscilador harmônico bidimensional, de energia

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

onde  $r$  é a distância ao centro e  $\omega$  a frequência angular do oscilador. Para órbitas *circulares*, aplique a condição de quantização de Bohr e obtenha os níveis de energia. Qual seria a frequência da radiação emitida numa transição entre dois níveis vizinhos?

11. Considere uma molécula diatômica formada por dois átomos idênticos de massa  $M$  (ex.:  $H_2, O_2, \dots$ ) e separação  $r_0$ . A molécula pode entrar em rotação (como um haltere) em torno de um eixo que passa pelo seu centro, perpendicular ao segmento que liga os dois átomos, tratado como uma barra rígida. (a) Aplicando a condição de quantização de Bohr, calcule os níveis de energia rotacional da molécula. (b) Para a molécula de  $H_2$ , calcule a energia (em eV) do primeiro nível rotacional, tomando  $r_0 \approx 0,74 \text{ \AA}$ .



12. Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado às seguintes partículas: (a) elétron de energia igual a 10 MeV (relativística!); (b) nêutron térmico (à temperatura  $T = 300$  K).

13. Iluminando-se sucessivamente a superfície de um metal com luz de dois comprimentos de onda diferentes,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , encontra-se que as velocidades máximas dos fotoelétrons emitidos estão relacionadas por:  $v_{1,\max} = \alpha v_{2,\max}$ . Demonstre que a função de trabalho é dada por

$$W = \frac{(\alpha^2 \lambda_1 - \lambda_2) hc}{(\alpha^2 - 1) \lambda_1 \lambda_2}$$

14. Um átomo de hélio uma vez ionizado,  $\text{He}^+$ , tem um espectro análogo ao do hidrogênio, mas seu núcleo tem o dobro da carga do de hidrogênio. (a) Desenvolva a teoria de Bohr para o  $\text{He}^+$ , calculando os níveis de energia  $E_n$  em função das constantes físicas  $e$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $\epsilon_0$ . (b) Calcule a energia de ionização do  $\text{He}^+$ .

# 8

## PRINCÍPIOS BÁSICOS DA TEORIA QUÂNTICA

### 8.1 A dualidade onda—partícula

Vimos ao longo deste curso como as teorias sobre a natureza da luz evoluíram de uma teoria corpuscular, capaz de explicar leis básicas da ótica geométrica, à teoria ondulatória, que explica os efeitos de interferência e difração da luz. Por outro lado, as teorias do efeito fotoelétrico e do efeito Compton voltaram a apontar para características corpusculares da luz, levando à introdução dos fótons como “partículas de luz”.

Para os elétrons, considerados como partículas desde sua descoberta, a confirmação experimental das conjecturas de de Broglie demonstrou efeitos de difração e interferência caracteristicamente ondulatórios.

Como conciliar conceitos tão diferentes como os de onda e partícula? Durante o período em que isso estava sendo tentado, William Bragg chegou a descrever a situação nestes termos: “Os elétrons se comportam como partículas às segundas, quartas e sextas e como ondas às terças, quintas e sábados.” Aos domingos, presumivelmente, os físicos descansariam do esforço de tentar compatibilizar os dois comportamentos.

Procuremos definir de forma mais precisa o contraste entre “comportamento ondulatório” e “comportamento corpuscular” analisando o experimento de Young de duas fendas (Seqs. 3.1 e 3.2) em termos dos conceitos clássicos de *onda* e de *partícula*.

(a) *Experimento de Young com ondas clássicas*

Vamos pensar em ondas clássicas como ondas “macroscópicas” num meio: por exemplo, ondas de som na atmosfera. As ondas, produzidas por uma fonte suficientemente pequena para que possamos tratá-la como puntiforme (fonte coerente), incidem sobre um par de aberturas num anteparo opaco e são detetadas sobre um anteparo de observação por um detetor móvel que varre o anteparo (por exemplo, um microfone acoplado a um altofalante).

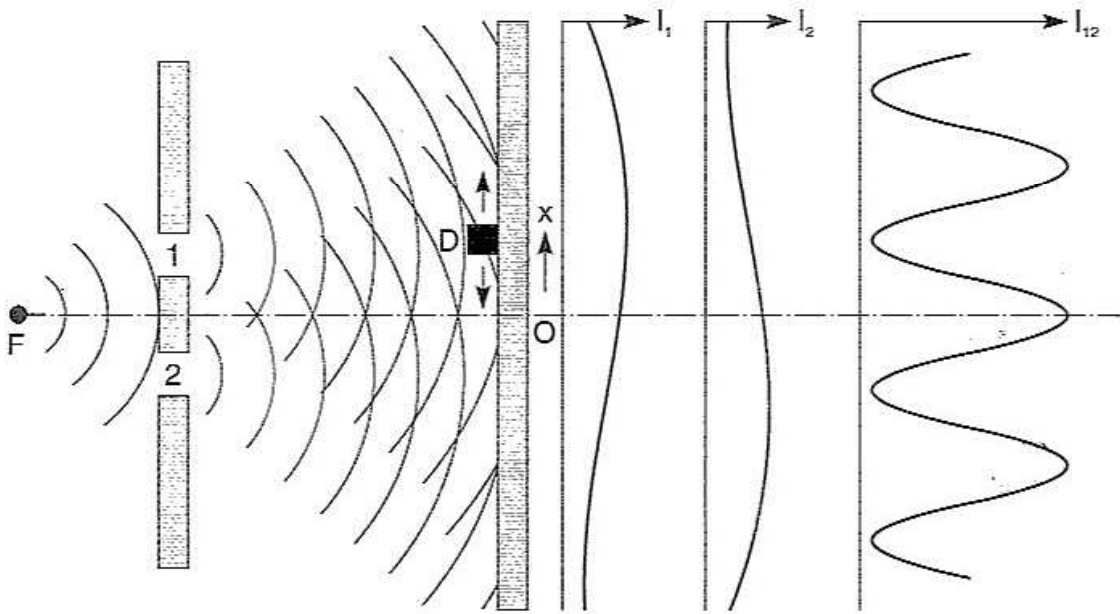


Fig. 8.1 Experimento de Young com ondas clássicas

Se apenas a fenda 1 estivesse aberta, a intensidade do som detetada seria  $I_1(x)$  (fig.8.1); analogamente para 2, sendo

$$I_j(x) = |\varphi_j(x)|^2 \quad (j = 1,2) \quad (8.1)$$

onde  $\varphi(x)$  é a amplitude da onda sonora (função de onda). A experiência de Young mostra *interferência*, ou seja: com 1 e 2 abertas, a intensidade observada é

$$I_{12}(x) = |\varphi_1(x) + \varphi_2(x)|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \quad (8.2)$$

onde  $\Delta$  é a defasagem entre as duas contribuições [cf. (3.11)].

— Logo, em geral,  $I_{12} \neq I_1 + I_2$ ; em particular, se  $I_1 = I_2 = I_0$ , a intensidade resultante  $I_{12}$  pode variar, de 0 a  $4I_0$  (com *valor médio*  $2I_0$ ), conforme a interferência seja destrutiva ou construtiva.

— Assim, se *fechamos* uma das fendas, a intensidade num ponto  $x$  do anteparo de observação pode diminuir, mas também pode *aumentar*.

— Se formos gradualmente diminuindo a intensidade da fonte sonora, as franjas de interferência vão diminuindo proporcionalmente de intensidade, de forma *contínua*.

(b) *Experimento de Young com partículas clássicas*

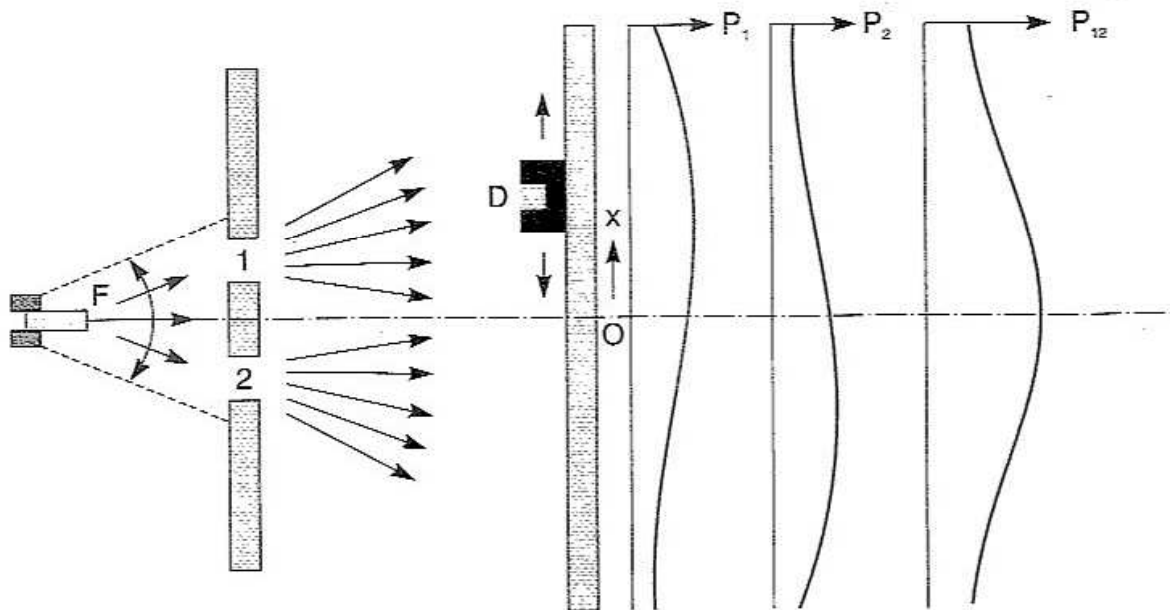


Fig. 8.2 Experimento de Young com partículas clássicas

Para simular uma fonte puntiforme, que emite isotropicamente em todas as direções, vamos imaginar uma *metralhadora giratória*  $F$  que dispara balas varrendo direções *ao acaso* (supondo também que as balas possam ricochetear, emergindo de cada fenda segundo um conjunto de direções). Para simular uma fonte estacionária, de intensidade constante, supomos que a taxa de disparos (nº de balas/unidade de tempo) é constante. Um detetor  $D$ , por exemplo, uma caixa de areia, varre o anteparo de observação e registra a *probabilidade*  $P(x) dx$  de encontrar uma bala entre  $x$  e  $x + dx$  no anteparo (razão do número de balas detetadas neste intervalo, por unidade de tempo, à taxa de disparo).

Sejam  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  as distribuições encontradas quando somente 1 ou somente 2 (respectivamente) está aberta. Supomos que as balas (partículas) não podem fragmentar-se, ou seja:

— Não podemos detetar uma *fração* de bala

— Cada bala passa *ou* pela fenda 1 *ou* pela fenda 2, e esses eventos são independentes e mutuamente exclusivos. Logo, a distribuição  $P_{12}$  observada com ambas as fendas abertas é

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (8.3)$$

— Se fecharmos uma das fendas, como  $P_1 \geq 0$  e  $P_2 \geq 0$ , a distribuição  $P_{12}(x)$  só pode *diminuir*, em cada ponto  $x$ .

— Se formos diminuindo a taxa de disparos, as balas continuam chegando uma a uma até o anteparo de observação, distribuídas em pontos  $x$  ao acaso, aproximando-se da distribuição (8.3) após um tempo de observação suficientemente grande.

(c) *Experimento de Young com elétrons*

Experimentos do tipo do de Young com partículas atômicas ou subatômicas são muito difíceis de realizar, devido à escala, grau de monocromaticidade dos feixes e outros requisitos necessários. Entretanto, os efeitos a serem descritos já foram observados com elétrons e outros tipos de partículas.\*

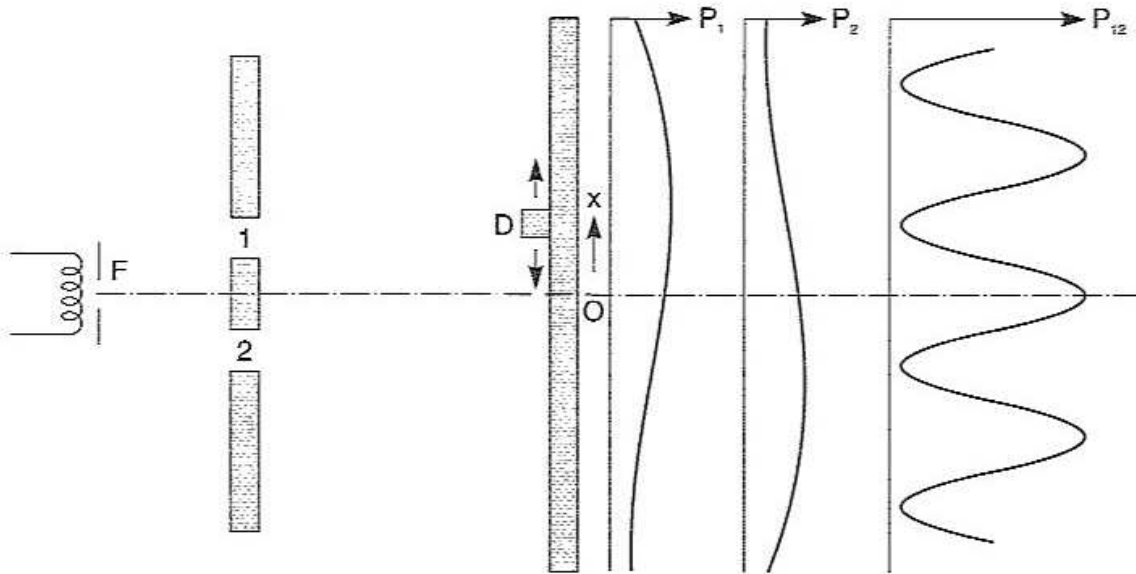


Fig. 8.3 Experimento de Young com elétrons

A fonte  $F$  de elétrons pode ser um filamento aquecido. O detetor poderia ser um contador Geiger, que contém um gás num campo elétrico próximo ao valor disruptivo que produziria uma descarga no gás. A passagem de um elétron, pela ionização que gera, provoca um efeito de avalanche, que amplifica o efeito ao nível

\* Com elétrons: C. Jönsson, *Z. Phys.* **161**, 454 (1961); *Am J. Phys* **42**, 4 (1974).  
Com nêutrons frios: A. Zeilinger *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 1067 (1988).  
Com átomos: O. Carnal e J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2689 (1991).

macroscópico, produzindo a descarga (a corrente associada pode ser usada para gerar um sinal acústico, por exemplo).

As características observadas são as seguintes:

(i) O detetor só registra números inteiros de elétrons, nunca uma fração de elétron (*como para partículas clássicas*).

(ii) Para uma fonte de elétrons suficientemente fraca, pode-se fazer com que os elétrons cheguem *um a um*. Nesse caso, eles chegam em pontos  $x$  *distribuídos ao acaso*, como no exemplo da metralhadora giratória (partículas clássicas), e podemos medir a *distribuição de probabilidade*  $P_j(x)$  correspondente a ter só a fenda  $j$  aberta ( $j = 1, 2$ ), bem como a distribuição  $P_{12}(x)$  com as duas fendas abertas.

(iii) Acumulando as contagens de uma fonte muito fraca durante um tempo longo, obtêm-se (para elétrons suficientemente monoenergéticos) *franjas de interferência* em  $P_{12}$

$$\boxed{P_{12} \neq P_1 + P_2} \quad (8.4)$$

*com uma figura de interferência idêntica à de ondas clássicas.*

(iv) Fechando uma das aberturas,  $P_{12}(x)$  tanto pode diminuir como aumentar, dependendo da posição  $x$  (*como para ondas clássicas*).

As propriedades (i) e (ii) são características de partículas clássicas, e (iii) e (iv) são características de ondas clássicas. A única *conclusão* possível é:

*Os elétrons (e outras partículas atômicas e subatômicas, inclusive o fóton) não são NEM partículas clássicas NEM ondas clássicas (embora mostrem algumas das propriedades de ambas);*

Entretanto, o fato notável, que pode ser inferido pela analogia entre a figura de interferência dos elétrons e a das ondas sonoras, é que *existe uma função de onda*  $\psi(x)$  tal que, se  $\psi_j(x)$  é o seu valor quando só a fenda  $j$  está aberta,

$$\boxed{\begin{aligned} P_1(x) &= |\psi_1(x)|^2, \quad P_2(x) = |\psi_2(x)|^2 \\ P_{12}(x) &= \underbrace{|\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2}_{\text{Superposição}} \end{aligned}} \quad (8.5)$$



## 8.2 A interpretação probabilística

Identificando  $\psi(x)$  com a função de onda de Schrödinger das ondas de de Broglie, a (8.5) implica que a interpretação física de  $\psi(x)$  é como uma *amplitude de probabilidade*, ou seja que

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx \quad (8.6)$$

é a probabilidade de encontrar a partícula entre  $x$  e  $x + dx$  (dctecção ao longo da direção  $x$  descrita acima). Essa interpretação física foi proposta por Max Born em 1928 e valeu-lhe o prêmio Nobel em 1954.

O fato de que *amplitudes de probabilidade podem interferir e propagar-se como ondas* é extremamente peculiar. A interferência encontrada no experimento de Young com elétrons, por exemplo, é incompatível com a idéia de que o elétron tem de passar pela fenda 1 ou pela fenda 2.

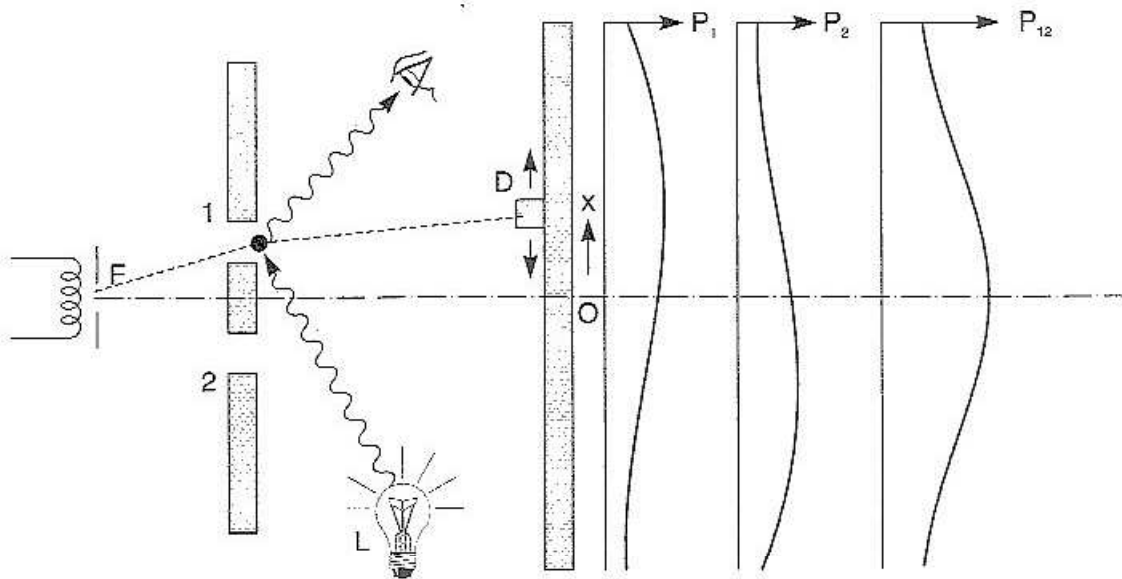


Fig. 8.4 Observação da fenda pela qual um elétron passa

Para verificar isso diretamente, consideremos uma variante (altamente esquematizada) da experiência descrita, em que procuraremos verificar *por qual das fendas* o elétron passa. Para isso, iluminaremos as fendas com uma “lâmpada”  $L$  e procuraremos observar luz *espalhada* pelo elétron (fig. 8.4) por ocasião de sua passagem. Como partícula carregada, o elétron espalha a luz, e podemos verificar (usando um circuito de coincidências) se o “flash” devido à sua passagem provém da fenda 1 ou da fenda 2. Para tornar a identificação possível, podemos reduzir a

intensidade do feixe de elétrons a um valor tão baixo que passa somente *um elétron de cada vez*. Por outro lado, é preciso que a luz seja suficientemente intensa para que tenhamos certeza de que *todos os elétrons são observados* (são acompanhados de “flashes”).

Se fizermos a experiência nessas condições, verificaremos que os elétrons que passam pela fenda 1 têm uma distribuição de probabilidade  $P_1(x)$  (como seria de se esperar), e os que passam por 2 têm  $P_2(x)$ . Todos os “flashes” de luz provêm *ou* de 1 *ou* de 2; nunca se observarão “flashes” vindo ao mesmo tempo de 1 e 2 devidos à passagem de *um* elétron. E quanto vale  $P_{12}(x)$ ? Como as observações foram feitas com as duas fendas abertas e todos os elétrons foram observados, apenas agrupando-se conforme a fenda pela qual passam, será

$$\boxed{P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)} \quad (8.7)$$

ou seja, *ao observarmos por qual fenda o elétron passa, destruímos a interferência*.

Por conseguinte, *a maneira pela qual se faz a observação na escala microscópica (atômica ou subatômica) pode afetar drasticamente os resultados*.

Na física clássica, o processo de observação também perturba os resultados, mas esta perturbação pode ser levada em conta e pode ser reduzida, em princípio, a um nível arbitrariamente pequeno.

No presente exemplo, a perturbação provém do espalhamento de luz pelo elétron. Não será possível também reduzir o seu efeito? Há dois parâmetros que podemos usar como controles para isso: a *intensidade* da luz e o seu *comprimento de onda* (supondo-a monocromática). Classicamente, diminuir a intensidade equivale a diminuir a interação com os elétrons. Entretanto, a dualidade onda-partícula também se aplica à luz: ela é formada de fótons, e reduzir a intensidade equivale a *diminuir o n.º de fótons incidentes por unidade de tempo e de área*, sem alterar a interação de cada fóton com o elétron.

O resultado\* é então que diminui a probabilidade de que o elétron *encontre* um fóton ao passar, ou seja, a probabilidade de espalhamento torna-se  $< 1$  (antes, supúnhamos que era  $= 1$  : havia um fóton espalhado na passagem de *cada* elétron).

---

\* Um experimento equivalente a este foi realizado por X. Y. Zou, L. J. Wang e L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 318 (1991), para fótons, e por E. Burks *et al.*, *Nature* **391**, 871 (1998), para elétrons.

Haverá então dois tipos de elétrons nas observações: os de “tipo A”, cuja detecção está associada à observação de um fóton espalhado [com probabilidade  $P_1(x)$  para os que passam por 1 e  $P_2(x)$  por 2], e os de “tipo B”, que foram detectados sem espalhamento de luz associado, de forma que não podemos dizer se passaram por 1 ou por 2.

Para os elétrons de tipo A, a distribuição de probabilidade continua sendo dada pela (8.7). Entretanto, para os elétrons do tipo B, *aparece o termo de interferência*, ou seja, *só interferem as amplitudes de probabilidade associadas aos elétrons para os quais não se pode determinar por que fenda passaram.*

Podemos porém reduzir a perturbação devida ao espalhamento de luz, *mantendo a* sua intensidade suficientemente elevada para garantir que todos os elétrons que passam dão origem a um “flash” de luz espalhada. Basta para isso diminuir a *energia* de cada fóton, o que, pela relação de Einstein  $E = h\nu$ , equivale a diminuir  $\nu$ , ou seja, *aumentar o comprimento de onda*  $\lambda$  da luz.

Verifica-se então que, para  $\lambda$  *suficientemente grande*, *reaparecem* os efeitos de interferência, mesmo com luz de intensidade elevada: isto acontece quando  $\lambda$  é da ordem da distância  $d$  entre as duas fendas. Mas, devido às propriedades *ondulatórias* da luz (poder separador), não podemos localizar uma partícula, usando luz de comprimento de onda  $\lambda$ , com precisão melhor do que  $\lambda$ . Logo, nessa situação, não podemos mais saber se a luz espalhada provém da fenda 1 ou da fenda 2!

O resultado dessa “conspiração da Natureza” é que *amplitudes de probabilidade associadas a duas possibilidades diferentes (fenda 1 ou fenda 2) interferem quando não é possível saber qual das duas foi seguida, e não interferem quando é possível distingui-las. Caminhos indistinguíveis interferem.*

Vemos assim que, na escala quântica, o processo de observação pode ter uma influência decisiva no resultado observado. Conforme foi observado por Dirac, isso permite definir, pela primeira vez na física, uma escala absoluta de tamanho, em que “grande” e “pequeno” deixam de ser apenas conceitos relativos. A escala atômica e subatômica é *pequena* no sentido *absoluto* de que nela se encontram limitações absolutas às possibilidades de observação: neste sentido, os objetos atômicos são “frágeis”, e é preciso sempre especificar de que forma estão sendo observados.

A medida dessa escala é introduzida através da constante de Planck  $h$ : uma ação é “grande” quando é  $\gg h$ , condição necessária para que nos aproximemos do nível macroscópico.

Poderíamos perguntar, por exemplo, por que não se observam interferências de Young com balas de metralhadora (Seç. 8.1(b)), uma vez que estas também devem ser descritíveis pela física quântica.

Teríamos de admitir, para começar, que é possível criar um feixe monoenergético de balas, todas com a mesma velocidade  $v$ . Qual seria o comprimento de onda de de Broglie correspondente? Se tomarmos  $m = 10$  g e  $v = 500$  m/s

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{10^{-2} \times 5 \times 10^2} \text{ m} \sim 1,3 \times 10^{-34} \text{ m}$$

de modo que as oscilações da figura de interferência — se fosse concebível produzi-las — ocorreriam numa escala totalmente inacessível à resolução de qualquer detetor imaginável, sendo pois inobserváveis.

Outro fator que contribui para a não-observação de interferências ao nível macroscópico (o efeito conhecido como “descoerência”) será discutido na Seç. 10.8.

### 8.3 Estados de polarização da luz

Para introduzir os conceitos e os princípios básicos da teoria quântica, um exemplo particularmente adequado, pela sua simplicidade, é o da *polarização da luz*. A razão disso é que, classicamente, a polarização de um feixe pode ser descrita em termos de um pequeno número de variáveis; a descrição quântica será também então bem mais simples do que a da *posição de uma partícula*, que pode assumir uma infinidade contínua de valores.

Classicamente, como vimos na Seç. 5.3, o estado de polarização de uma onda plana monocromática de intensidade e direção de propagação dadas fica determinado por *dois parâmetros*: a razão  $b/a$  das amplitudes do campo elétrico em duas direções ortogonais (num plano  $\perp$  à direção de propagação) e a *defasagem*  $\delta$  entre essas componentes [cf. (5.29)].

Procuraremos descrever quanticamente apenas a *polarização* dos fótons, sem nos preocuparmos com sua energia (frequência) e direção de propagação (ou seja, com a dependência de  $x$  e  $t$ ). Vamos considerar primeiro estados de *polarização linear*.

Vimos na Seç. 5.8 o conceito de um *filtro de polarização*. Um filtro de polarização linear, usado como *polarizador*, só deixa passar luz de polarização *linear*



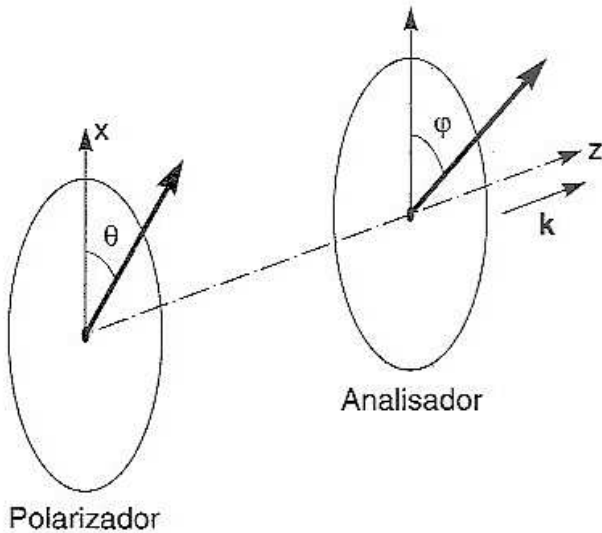


Fig. 8.5 Filtros de polarização linear

numa dada direção (*eixo* do filtro). Se tomarmos a direção de propagação como eixo  $z$ , a direção de polarização linear produzida pelo filtro pode ser caracterizada pelo ângulo  $\theta$  que faz com uma direção *fixa* no plano transversal, por exemplo, a direção  $x$  (fig. 8.5).

Podemos usar um filtro idêntico como *analisador*, para detetar a polarização. Se o eixo do analisador forma um ângulo  $\varphi$  com a direção de referência  $x$ , ele só deixará passar uma fração  $I/I_0$  da intensidade da luz proveniente do polarizador, onde  $I/I_0$ , para um filtro ideal, é dado pela *lei de Malus* (5.82):

$$I / I_0 = \cos^2 (\theta - \varphi) \quad (8.8)$$

Passará toda a intensidade se os eixos estão alinhados ( $\theta = \varphi$ ), e ela será toda bloqueada se estiverem cruzados ( $\theta - \varphi = \pm \pi/2$ ).

Como descrever esses resultados em termos de fótons? A polarização linear define a direção de oscilação do campo elétrico. No efeito fotoelétrico, é o campo elétrico que atua sobre os elétrons: com luz linearmente polarizada, a direção de polarização é a direção preferencial em que os elétrons são ejetados. Há evidência experimental de que isso vale para *cada fóton* incidente, ou seja, *num feixe de luz linearmente polarizado, cada fóton tem a mesma polarização linear*.

Sabemos que a *intensidade* do feixe é proporcional ao *número de fótons*. Logo, a (8.8) deve representar a *fração do número de fótons* incidente sobre o analisador que é transmitida por ele. Mas o que acontece com *cada fóton* incidente?

Não pode ser transmitida uma fração de fóton: ou ele passa ou não passa. Logo, a única forma de interpretar a lei de Malus (8.8) é que ela dá a *probabilidade* de que um fóton linearmente polarizado na direção  $\theta$  atravesse um analisador com seu eixo alinhado na direção  $\varphi$ .

Vimos na Seção 2.2 que um problema semelhante existe na interpretação corpuscular da existência de reflexão e transmissão parciais na interface entre dois meios: um corpúsculo que atinge a interface é refletido ou transmitido? (foi para resolver este problema que Newton propôs seu modelo dos “acessos” de fácil reflexão ou fácil transmissão).

Classicamente, dizemos que um sistema se encontra num *estado bem definido* quando conhecemos a *máxima informação possível* a seu respeito: por exemplo, para uma partícula de massa  $m$ , o estado clássico é definido pela *posição*  $\mathbf{x}$  e *velocidade*  $\mathbf{v}$  (ou *momento*  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ ).

No mesmo sentido, diremos que o *estado quântico de polarização de um fóton* fica bem definido quando sabemos que ele é *linearmente polarizado numa dada direção* ( $\theta$  ou  $\varphi$ , por exemplo). Podemos dizer então que o polarizador, na experiência acima descrita, *prepara* fótons no *estado de polarização linear*  $\theta$ , e que, após atravessar o analisador, um fóton estará no *estado de polarização linear*  $\varphi$ .

Chegamos assim à seguinte conclusão: *a probabilidade de que um fóton preparado no estado de polarização linear*  $\theta$  *passe por um analisador que seleciona fótons de polarização linear*  $\varphi$  *é*

$$P(\varphi, \theta) = \cos^2(\theta - \varphi) \quad (8.9)$$

Não é possível prever com *certeza* o que acontece com um fóton, exceto para  $\varphi = \theta$ , quando  $P = 1$ , e para  $\varphi = \theta \pm \pi/2$ , quando  $P = 0$ .

Podemos tomar então como *amplitude de probabilidade* associada a esse processo

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi$$

o que também pode ser escrito como um *produto de fatores* associados a  $\theta$  e  $\varphi$  *separadamente* (ou seja, aos estados de polarização do fóton incidente e do fóton transmitido), da seguinte forma:

$$\cos(\theta - \varphi) = (\cos\varphi \ \sin\varphi) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

onde estamos usando álgebra de matrizes para a multiplicação de uma *matriz linha*  $(\cos\varphi \ \sin\varphi)$  por uma *matriz coluna*  $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ .

## 8.4 Vetores de estado

Sabemos pela álgebra linear que uma matriz coluna pode ser considerada como um *vetor* num *espaço vetorial linear*; para uma matriz de dois elementos, este espaço tem *dimensão*  $= 2$ , e um estado geral de polarização linear é então representado pelo *vetor coluna*



$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ com } |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (8.11)$$

onde esta última condição, chamada de *condição de normalização*, corresponde neste caso ao fato de que tem de ser  $P(\theta, \theta) = 1$  [cf. (8.9)].

Veremos logo que essa representação se aplica não só à polarização linear, mas a qualquer estado de polarização (no caso geral, elíptica) do fóton. Entretanto, para representar o caso geral, é necessário que  $c_1$  e  $c_2$  possam tomar valores *complexos*.

Com efeito, vimos que o estado geral de polarização depende de *dois parâmetros reais*. Se  $c_1$  e  $c_2$  são complexos, temos à disposição 4 parâmetros reais, mas que têm de obedecer ao vínculo de normalização, deixando 3 parâmetros reais livres. Mas, se multiplicarmos  $c_1$  e  $c_2$  por um *fator de fase* arbitrário  $e^{i\alpha}$ , isto não altera as *probabilidades*, que correspondem a *módulos ao quadrado* de amplitudes de probabilidade: logo, a fase absoluta de  $c_1$  e  $c_2$  pode ser alterada, desde que não se altere a *diferença de fase* entre esses dois números complexos [como na onda clássica (5.29)]. Sobram então precisamente *dois parâmetros reais* arbitrários, confirmando a necessidade de  $c_1$  e  $c_2$  serem *complexos* para descrever polarização geral.

Vamos utilizar uma notação devida a Dirac para representar o *vetor coluna* associado à polarização linear  $\theta$ :

$$|\theta\rangle \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

que chamaremos de *vetor de estado* correspondente a essa polarização. O *vetor linha* da (8.10) será representado por

$$\langle \varphi | \equiv (\cos \varphi \ \sin \varphi) \quad (8.13)$$

com

$$\langle \varphi | \theta \rangle = (\cos \varphi \ \sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos(\theta - \varphi) \quad (8.14)$$

correspondendo ao *produto escalar* desses dois vetores. Dirac chama  $|\dots\rangle$  de “ket” e  $\langle \dots|$  de “bra”; o produto escalar  $\langle \dots | \dots \rangle$  é então um “bracket” (colchete de Dirac) e a (8.9) se escreve

$$P(\varphi, \theta) = |\langle \varphi | \theta \rangle|^2 \quad (8.15)$$

No caso geral, em que as componentes têm de ser complexas, o vetor linha associado ao vetor coluna (8.11) é definido por:

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle c| = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

onde o asterisco indica o *complexo conjugado*. O *produto escalar* é definido por

$$\langle a|b\rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 \quad (8.17)$$

Em particular\*, a *norma*  $\| |c\rangle \|$  é definida como

$$\| |c\rangle \|^2 = \langle c|c\rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 \quad (8.18)$$

que tem de ser = 1 pela (8.11). Se  $\langle a|b\rangle = 0$ , diz-se que  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  são *ortogonais*.

Chegamos assim à seguinte regra básica:

*Regra I: O estado quântico de polarização de um fóton (de luz monocromática, numa dada direção de propagação) é representado pelo vetor de estado normalizado*

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ com } \| |c\rangle \|^2 = \langle c|c\rangle = 1 \quad (8.19)$$

#### *Não-unicidade da representação*

A representação *não é unívoca*. Por exemplo, o vetor de estado de polarização linear na direção  $\theta$  pode ser representado igualmente por

---

\* A norma tem de ser real e não-negativa, o que requer a conjugação complexa na (8.16).

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{+i\theta} \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

Com efeito, isso dá

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{+i\varphi} & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{+i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)} \right] = \cos(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (8.21)$$

que é o mesmo resultado (8.20), preservando a normalização e a probabilidade (8.9). Podemos também multiplicar ambas as componentes por um mesmo fator de fase arbitrário, como vimos. As diferentes representações correspondem ao mesmo *vetor de estado*, da mesma forma que o mesmo vetor é representado por componentes diferentes em diferentes sistemas de coordenadas (Seç. 8.7).

## 8.5 Observação binária. Polarização circular

Ao fazer um fóton passar por um analisador com eixo orientado na direção  $\varphi$  estamos *observando a polarização linear do fóton nessa direção*. (i) Essa observação *só tem dois resultados possíveis*: o fóton passa (“sim”) ou não passa (“não”), que podemos codificar, em linguagem binária, por 1 (“sim”) ou 0 (“não”). Além disto, (ii) *só existe um estado para o qual o resultado é, com certeza “sim”*: o estado  $|\varphi\rangle$ . Uma observação que satisfaz às condições (i) e (ii) será chamada de “*observação binária*”.

Para um fóton preparado num estado de polarização qualquer, só podemos, em geral, prever a *probabilidade* de que passe pelo analisador, e inferimos da (8.15) a segunda regra básica:

*Regra II: Se um fóton é preparado num estado de polarização  $|a\rangle$ , a probabilidade de que seja observado com polarização  $|b\rangle$  numa observação binária imediatamente posterior é*

$$P(b, a) = |\langle b|a\rangle|^2 \quad (8.22)$$

Em particular, isso dá a justificativa geral da condição de normalização, pois  $P(a, a)$  tem de ser = 1.

Para que a (8.22) possa representar uma probabilidade, seu valor tem de estar entre 0 e 1, o que decorre da bem conhecida *desigualdade de Schwarz* (Probl. 8.1):

$$\boxed{|\langle b|a\rangle|^2 \leq \| |b\rangle \|^2 \| |a\rangle \|^2 = 1} \quad (8.23)$$

### *Luz circularmente polarizada*

Resulta da representação da Seção 5.3 de luz circularmente polarizada que a *intensidade de um feixe circularmente polarizado, ao passar por um analisador de direção  $\varphi$* , sempre se reduz à metade, qualquer que seja  $\varphi$ , ou seja, a probabilidade de passagem de um fóton circularmente polarizado é  $= \frac{1}{2}$ , independente de  $\varphi$ .

Logo, se representarmos o vetor de estado correspondente por  $|c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , a (8.22) dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= P(\varphi, c) = |\langle \varphi|c\rangle|^2 = \left| (\cos \varphi \ \text{sen } \varphi) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= |\cos \varphi c_1 + \text{sen } \varphi c_2|^2 = (\cos \varphi c_1^* + \text{sen } \varphi c_2^*) (\cos \varphi c_1 + \text{sen } \varphi c_2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos^2 \varphi |c_1|^2 + (c_1^* c_2 + c_2^* c_1) \cos \varphi \text{sen } \varphi + \text{sen}^2 \varphi |c_2|^2 = \frac{1}{2}, \forall \varphi \quad (8.24)$$

Em particular, tomando  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , obtemos

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2} \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\beta} \end{cases}$$

e, tomando  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,

$$c_1^* c_2 + c_2^* c_1 = \frac{1}{2} \left[ e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)} \right] = \cos(\alpha - \beta) = 0$$

o que dá  $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ . Escolhendo convenientemente o fator de fase arbitrário, temos portanto duas soluções possíveis:

$$\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}} \quad (8.25)$$

que correspondem às duas polarizações circulares independentes (esquerda e direita; cf. fig. 5.2).

## 8.6 Observáveis

Que grandezas são observáveis na física quântica? Uma grandeza que pode ser medida, como a polarização linear de um fóton numa dada direção, é observável, mas o resultado de uma medida não precisa ser “sim” ou “não”, como numa observação binária. A energia de um fóton, por exemplo, é uma grandeza observável, e o resultado pode ser qualquer número real  $\geq 0$ . Por outro lado, é condição *necessária* de observabilidade que o resultado da observação seja um número *real*.

Vamo-nos limitar, por enquanto, a grandezas *A* que só podem tomar um número finito de valores, ou seja, tais que os resultados da observação de *A* só podem ser os números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Vamos supor também, de início, que *existe um e um só estado quântico*  $|e_j\rangle$  para o qual *A* toma o valor  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Podemos então definir como  $E_{jk}$  a observação binária que responde à pergunta:

$E_{jk}$ : O valor de *A* no estado  $|e_j\rangle$  é  $a_k$ ?

Para ver que se trata de uma observação binária, basta notar que só há duas respostas possíveis: “sim”, se  $j = k$ , e “não” para  $j \neq k$ , e só existe *um* estado,  $|e_j\rangle$ , para o qual a resposta é “sim”.

Logo, pela *regra II*, se um fóton for preparado no estado  $|e_j\rangle$ , a probabilidade de que a medida de *A* produza o resultado  $a_k$  (portanto, que o fóton seja observado no estado  $|e_k\rangle$ ) é

$$\left| \langle e_k | e_j \rangle \right|^2 = \delta_{jk} \quad (j, k) = 1, 2, \dots, n \quad (8.26)$$

onde  $\delta_{jk} = 1$  ( $j = k$ ),  $= 0$  ( $j \neq k$ ).

Escolhendo convenientemente as fases dos vetores de estado, a (8.26) se reduz a

$$\langle e_k | e_j \rangle = \delta_{kj} \quad (8.27)$$

o que significa que  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$  formam um *conjunto ortonormal* de  $n$  vetores de estado.

Sabemos, porém, da álgebra linear, que, num espaço vetorial de dimensão  $m$ , não podem existir mais de  $m$  vetores ortonormais. Vimos também que  $m = 2$  para os vetores de estado associados à polarização do fóton.

Logo, no conjunto de estados quânticos associados à polarização do fóton, nenhuma grandeza observável (ou seja, que só dependa da polarização), pode tomar mais do que 2 valores diferentes: *a dimensão do espaço dos estados representa o número máximo de valores que uma grandeza observável nesse espaço pode tomar.*

#### Exemplo

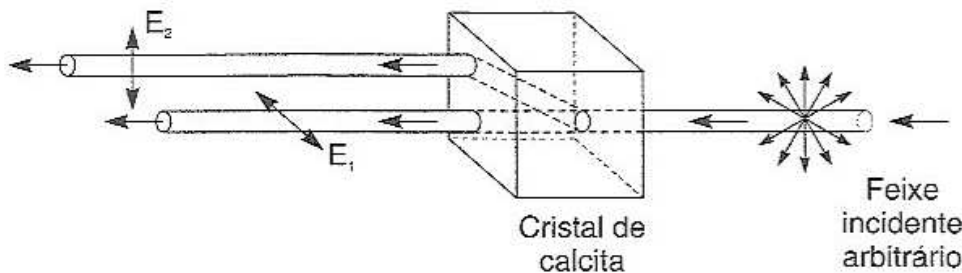


Fig. 8.6 Dupla refração

Quando um feixe de luz qualquer incide sobre um cristal de *calcita* ( $\text{Ca CO}_3$ ) talhado de forma conveniente, dá origem a *dois* feixes transmitidos (feixe ordinário e feixe extraordinário), que têm polarizações *lineares ortogonais* (fig. 8.6). Nenhum material produz mais de dois feixes associados a polarizações diferentes, o que é consistente com termos tomado  $n = 2$  para descrever o estado quântico de polarização de um fóton.

#### Valores médios

Num estado de polarização  $|u\rangle$  qualquer do fóton, a grandeza  $A$  não tomará em geral um valor definido: isso só acontece nos estados  $|e_j\rangle$ . No caso geral,  $A$  tomará um de seus dois valores possíveis,  $a_1$  ou  $a_2$ , em cada observação, e haverá *probabilidades*  $p_1$  e  $p_2$  dadas pela Regra II (generalizada) para cada um desses valores:



$$\boxed{p_1 = |\langle e_1 | u \rangle|^2, p_2 = |\langle e_2 | u \rangle|^2} \quad (8.28)$$

Assim, se fizermos um número  $N$  muito grande de observações de  $A$  no estado  $|u\rangle$ , e obtivermos o resultado  $a_1$  em  $n_1$  delas e  $a_2$  nas  $n_2$  restantes, com  $n_1 + n_2 = N$ , as *freqüências relativas*  $n_1/N$  e  $n_2/N$  se aproximarão respectivamente de  $p_1$  e  $p_2$  à medida que  $N$  for crescendo.

Conforme a definição usual, o *valor médio* (também chamado de *valor esperado*) de  $A$  no estado  $|u\rangle$  é então a *média ponderada*

$$\boxed{\langle A \rangle_u \equiv \sum_{j=1}^2 p_j a_j} \quad (8.29)$$

Substituindo os valores de  $p_j$  pelas (8.28),

$$\langle A \rangle_u \equiv \sum_{j=1}^2 a_j |\langle e_j | u \rangle|^2 \quad (8.30)$$

Voltando à definição (8.17) do produto escalar, temos:

$$\langle \langle a | b \rangle \rangle^* = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

o que equivale a

$$\boxed{\langle \langle a | b \rangle \rangle^* = \langle b | a \rangle} \quad (8.31)$$

de forma que a (8.30) se escreve:

$$\langle A \rangle_u = \sum_{j=1}^2 a_j \langle u | e_j \rangle \langle e_j | u \rangle \quad (8.32)$$

### Produto externo

Vamos introduzir a nova notação  $|a\rangle\langle b|$  (*produto externo de  $|a\rangle$  e  $\langle b|$* ), definida por sua atuação sobre um ket  $|u\rangle$  qualquer:

$$\boxed{(|a\rangle\langle b|)|u\rangle \equiv \langle b|u\rangle |a\rangle} \quad (8.33)$$

é o produto do número  $\langle b|u\rangle$  pelo ket  $|a\rangle$ . Logo, atuando sobre um ket  $|u\rangle$ , o resultado é outro ket:  $|a\rangle\langle b|$  é um *operador* sobre kets, e é imediato que é um operador *linear*:

$$(|a\rangle\langle b|)(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle) = (\alpha\langle b|u\rangle + \beta\langle b|v\rangle)|a\rangle \quad (8.34)$$

Em termos das componentes  $|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  e  $|b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , o produto externo está associado a uma *matriz* 2 x 2:

$$|a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

o que corresponde à relação bem conhecida entre *operadores lineares e matrizes*, em termos de álgebra vetorial, e satisfaz a (8.33) (verifique!).

Voltando à (8.32), vemos então que ela pode ser reescrita como

$$\boxed{\langle A \rangle_u = \langle u|\hat{A}|u\rangle} \quad (8.36)$$

onde  $\hat{A}$  é o *operador linear* (o circunflexo é a notação para *operador*)

$$\boxed{\hat{A} \equiv \sum_{j=1}^2 a_j \hat{\Pi}_j} \quad (8.37)$$

com

$$\boxed{\hat{\Pi}_j \equiv |e_j\rangle\langle e_j| \quad (j = 1, 2)} \quad (8.38)$$

## 8.7 Representações. Matrizes

Antes de formular regras relativas a observáveis, vamos recapitular alguns resultados de álgebra linear sobre a *representação de operadores lineares por matrizes* e introduzir alguns desenvolvimentos da notação de Dirac.

Como o espaço dos vetores de estado de polarização do fóton tem dimensão 2, podemos introduzir nele uma *base ortonormal*  $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ , onde

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (j = 1, 2) \quad (8.39)$$

e representar qualquer vetor de estado  $|c\rangle$  como *superposição* dos vetores da base:

$$\begin{aligned} |c\rangle &= c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle \\ c_1 &= \langle e_1 | c \rangle, \quad c_2 = \langle e_2 | c \rangle \end{aligned} \quad (8.40)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são as *componentes* do vetor coluna

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

Em particular,

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.42)$$

*Exemplo 1:* Na representação em que  $|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$  corresponde ao estado de polarização linear na direção  $\theta$ , os estados (8.42) correspondem a  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ , respectivamente, e qualquer outro estado de polarização é uma superposição destas duas polarizações ortogonais, onde as componentes  $c_1 = \cos\theta$  e  $c_2 = \sin\theta$ , pela (8.40),

$$c_1 = \langle 0 | \theta \rangle, \quad c_2 = \left\langle \frac{\pi}{2} | \theta \right\rangle \quad (8.43)$$

representam as *amplitudes de probabilidade*, no estado  $|\theta\rangle$ , de detetar o fóton com polarização linear na direção 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ , respectivamente.

*Exemplo 2:* É fácil ver (verifique!) que os vetores de estado de polarização circular (8.25) são ortogonais:

$$\langle + | - \rangle = 0 \quad (8.44)$$

de modo que formam outra base ortonormal para a polarização: fisicamente, qualquer estado de polarização pode ser representado como superposição de polarizações circulares direita e esquerda. Em particular,

$$|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = c_1 |+\rangle + c_2 |-\rangle \quad (8.45)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} c_1 = \langle +|\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \\ c_2 = \langle -|\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

o que dá  $|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}$ , que é a (8.20). Logo, a multiplicidade de representações dos vetores de estado corresponde à multiplicidade de escolhas de bases possíveis, exatamente como a de escolhas de sistemas de coordenadas para vetores em três dimensões.

A decomposição (8.45) é um caso particular, para luz linearmente polarizada, da representação de um estado geral de polarização como superposição de luz circularmente polarizada direita com polarização circular esquerda. A interpretação quântica em termos de fótons, porém, é que  $|c_1|^2 = \frac{1}{2} = |c_2|^2$  dão as probabilidades de detetar o fóton linearmente polarizado, respectivamente, como fóton circularmente polarizado direito ou esquerdo. Fisicamente, isto pode ser realizado com o auxílio de cristais que têm a propriedade de *birrefringência circular*, decompondo luz incidente sobre eles em dois feixes, um de polarização circular direita e outro esquerda.

#### Operador de projeção

A (8.40) permite escrever a identidade

$$\boxed{\begin{aligned} |c\rangle &= \langle e_1|c\rangle |e_1\rangle + \langle e_2|c\rangle |e_2\rangle \\ &= \hat{\Pi}_1 |c\rangle + \hat{\Pi}_2 |c\rangle \end{aligned}} \quad (8.47)$$

onde, analogamente à (8.38),

$$\hat{\Pi}_1 = |e_1\rangle\langle e_1|, \quad \hat{\Pi}_2 = |e_2\rangle\langle e_2| \quad (8.48)$$

Temos

$$\hat{\Pi}_j |c\rangle = c_j |e_j\rangle \quad (j = 1, 2) \quad (8.49)$$

ou seja,  $\hat{\Pi}_j |c\rangle$  representa a *componente* do estado  $|c\rangle$  associada ao estado  $|e_j\rangle$  da base (por exemplo, componente do estado  $|\theta\rangle$  que tem polarização  $|+\rangle$ ). Diz-se que  $\hat{\Pi}_j |c\rangle$  é a *projeção* de  $|c\rangle$  sobre o estado  $|e_j\rangle$ , e  $\hat{\Pi}_j$  chama-se um *operador de projeção*.

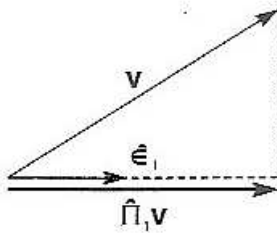


Fig. 8.7 Projeção de um vetor

Para um vetor em 3 dimensões, a fig. 8.7 mostra que

$$\hat{\Pi}_1 \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1) \hat{\mathbf{e}}_1$$

é a componente de  $\mathbf{v}$  na *direção*  $\hat{\mathbf{e}}_1$ , obtida *projetando*  $\mathbf{v}$  sobre essa direção, o que justifica o nome de operador de *projeção* dado a  $\hat{\Pi}_j$ .

A (8.47) mostra que

$$\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \sum_{j=1}^2 |e_j\rangle\langle e_j| = \hat{1} \quad (8.50)$$

onde  $\hat{1}$  é o *operador identidade*:  $\hat{1} |c\rangle = |c\rangle$ , para *qualquer* vetor  $|c\rangle$ . A relação (8.50) exprime o caráter *completo* da base  $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ , ou seja, que qualquer vetor pode ser representado em termos dela.

As (8.35) e (8.42) dão a representação matricial dos operadores de projeção e da (8.50):

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\Pi}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1} \quad (8.51)$$

### Matrizes

Dado um operador linear  $\hat{A}$ , a (8.50) permite escrever a identidade

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{i=1}^2 |e_i\rangle\langle e_i| \hat{A} \sum_{j=1}^2 |e_j\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |e_i\rangle A_{ij} \langle e_j| \end{aligned} \quad (8.52)$$

onde

$$A_{ij} \equiv \langle e_i | \hat{A} | e_j \rangle \quad (8.53)$$

chama-se *elemento de matriz do operador  $\hat{A}$  entre os estados  $|e_i\rangle$  e  $|e_j\rangle$*  (para  $i = j$ , são os *elementos diagonais*)

Temos, por exemplo,

$$|e_1\rangle\langle e_2| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz em que só o elemento 12 é  $\neq 0$  ( $e = 1$ ). Logo, a (8.53) permite interpretar  $A_{ij}$  como o *elemento (ij)* de uma *matriz* que *representa* o operador  $\hat{A}$ , da mesma forma que  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  representa  $|c\rangle$ .

$$\hat{A} = \|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

Usando a (8.52), vemos que, para qualquer vetor de estado  $|c\rangle$ ,



$$|c'\rangle \equiv \hat{A}|c\rangle = \sum_{j=1}^2 A_{ij} \langle e_j|c\rangle |e_i\rangle = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} c_j |e_i\rangle \quad (8.55)$$

o que equivale a

$$c'_i = \sum_{j=1}^2 A_{ij} c_j \quad (8.56)$$

que é o resultado da aplicação da *matriz*  $\|A_{ij}\|$  ao vetor coluna  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , segundo a regra do *produto de matrizes*:

$$\hat{A}|c\rangle = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 \end{pmatrix} \quad (8.57)$$

Analogamente, aplicando sucessivamente dois operadores lineares  $\hat{B}$  e  $\hat{A}$  a um vetor  $|c\rangle$ , o resultado equivale (Probl. 8.6) à regra do produto:

$$\left( \hat{A} \hat{B} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^2 A_{ik} B_{kj} \quad (8.58)$$

### Conjugado hermiteano

A matriz

$$\|A_{ji}^*\| = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix} \quad (8.59)$$

que se obtém da (8.54) transpondo linhas e colunas e tomando o complexo conjugado, chama-se *matriz conjugada hermiteana* de  $\|A_{ij}\|$ , e o operador linear  $\hat{A}^\dagger$  correspondente chama-se *conjugado hermiteano* do operador  $\hat{A}$ .

Temos então, por definição,

$$\langle e_i | \hat{A}^\dagger | e_j \rangle = \langle e_j | \hat{A} | e_i \rangle^* \quad (8.60)$$

o que, usando a decomposição (8.40), se estende a qualquer par de vetores  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ :

$$\boxed{\langle a | \hat{A} | b \rangle^* = \langle b | \hat{A}^\dagger | a \rangle} \quad (8.61)$$

Por outro lado, se

$$|c\rangle \equiv \hat{B}|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} b_1 + B_{12} b_2 \\ B_{21} b_1 + B_{22} b_2 \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} \langle c | &= \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^* b_1^* + B_{12}^* b_2^* & B_{21}^* b_1^* + B_{22}^* b_2^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} = \langle b | \hat{B}^\dagger \end{aligned}$$

ou seja

$$\boxed{|c\rangle = \hat{B}|b\rangle \Rightarrow \langle c| = \langle b| \hat{B}^\dagger} \quad (8.62)$$

e, aplicando a (8.61) a  $\langle a | \hat{A} | c \rangle^*$ , obtemos

$$\boxed{(\hat{A} \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger} \quad (8.63)$$

Um operador  $\hat{A}$  tal que

$$\boxed{\hat{A}^\dagger = \hat{A}} \quad (8.64)$$

chama-se *operador hermiteano*.

Note as inversões de ordem nas (8.61) a (8.63).

## 8.8 Regras para observáveis

Voltando agora à (8.36), que dá o valor médio (esperado) de um observável  $A$  num estado quântico de polarização arbitrário, vemos que ele é o *elemento de matriz diagonal* de um operador linear  $\hat{A}$  associado a  $A$ , dado pela (8.37):

$$\boxed{\langle A \rangle_u = \langle u | \hat{A} | u \rangle}$$

Como o valor médio de uma grandeza observável é necessariamente um número *real*, devemos ter

$$\langle u | \hat{A} | u \rangle^* = \langle u | \hat{A}^+ | u \rangle = \langle u | \hat{A} | u \rangle, \quad \forall | u \rangle \quad (8.65)$$

o que implica

$$\boxed{\hat{A} = \hat{A}^+} \quad (8.66)$$

e leva à regra

*Regra IIIa: Uma grandeza observável  $A$  é representada por um operador hermiteano  $\hat{A}$ .*

Na Seq. 8.6,  $\hat{A}$  foi representado em termos dos dois valores possíveis que pode tomar,  $a_1$  e  $a_2$ , e dos vetores de estado (únicos)  $|e_1\rangle$  e  $|e_2\rangle$  a eles associados, por [cf. (8.37)]

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^2 a_j \underbrace{|e_j\rangle\langle e_j|}_{\hat{\Pi}_j} \quad (8.67)$$

onde, como vimos,  $|e_1\rangle$  e  $|e_2\rangle$  formam uma base ortonormal, e  $\hat{\Pi}_j$  são os operadores de projeção sobre os vetores da base.

A (8.67) dá, como  $\langle e_j | e_i \rangle = \delta_{ij}$ ,

$$\boxed{\hat{A} |e_i\rangle = a_i |e_i\rangle \quad (i = 1,2)} \quad (8.68)$$

o que se exprime dizendo que  $|e_i\rangle$  é um *AUTOVETOR* de  $\hat{A}$  associado ao *AUTOVALOR*  $a_i$ . Isso leva às regras:

*Regra IIIb: Os resultados possíveis das observações de  $A$  são os autovalores de  $\hat{A}$ .*

*Regra IIIc: Os estados (de polarização) para os quais  $A$  assume com certeza (probabilidade = 1) seus valores possíveis ( $a_1$ ,  $a_2$ ) são os autovetores (também chamados de autoestados) correspondentes de  $\hat{A}$ .*

Para que essa interpretação seja aceitável, é necessário que os autovalores sejam *reais*. Isso decorre do teorema: *Os autovalores de um operador hermiteano são sempre reais.*

A demonstração é imediata:

$$\hat{A} |v\rangle = \lambda |v\rangle \Rightarrow \langle v | \hat{A} |v\rangle = \lambda \overbrace{\langle v | v \rangle}^{=1} = \lambda$$

juntamente com a (8.65).

Finalmente, a (8.36) dá a

*Regra III d: O valor esperado (médio) de  $A$  num estado qualquer  $|u\rangle$  é dado por*

$$\langle A \rangle_u = \langle u | \hat{A} |u\rangle \quad (8.69)$$

Levando em conta a (8.51), vemos também que a decomposição (8.37) equivale a

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad (8.70)$$

ou seja, *na base de seus autoestados, a matriz  $\hat{A}$  é diagonal, e seus elementos diagonais são os autovalores.*

#### *Exemplo: Observável POLARIZAÇÃO LINEAR*

Sabemos que é possível observar a polarização linear de um fóton numa direção  $\theta$ , fazendo-o passar através de um analisador com eixo orientado nessa direção, e que se trata de uma observação *binária*: no estado  $|\theta\rangle$ , o fóton *passa* com certeza (autovalor 1), e no estado  $|\theta + \frac{\pi}{2}\rangle$  *não passa* com certeza (autovalor 0). Logo, pela (8.38), esperamos que o observável  $\hat{P}_\theta \equiv$  *polarização linear do fóton na direção  $\theta$*  seja representado por

$$\begin{aligned}\hat{P}_\theta &= |\theta\rangle\langle\theta| + 0 \times \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right\rangle \left\langle \theta + \frac{\pi}{2} \right| \\ &= |\theta\rangle\langle\theta| = (\cos \theta \ \text{sen } \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{8.71}$$

o que leva a

$$\hat{P}_\theta \equiv \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \ \text{sen } \theta \\ \cos \theta \ \text{sen } \theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}\tag{8.72}$$

que é claramente uma matriz hermiteana (regra IIIa).

Seus autovalores são dados por

$$\hat{P}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

o que dá

$$\begin{cases} (\cos^2 \theta - \lambda) c_1 + (\cos \theta \ \text{sen } \theta) c_2 = 0 \\ (\cos \theta \ \text{sen } \theta) c_1 + (\text{sen}^2 \theta - \lambda) c_2 = 0 \end{cases}$$

Para que haja solução não trivial, devemos ter

$$\begin{vmatrix} (\cos^2 \theta - \lambda) & \cos \theta \ \text{sen } \theta \\ \cos \theta \ \text{sen } \theta & (\text{sen}^2 \theta - \lambda) \end{vmatrix} = 0\tag{8.73}$$

que se chama a *equação secular*, e leva a (verifique!)

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \{\lambda = (1, 0)\}\tag{8.74}$$

conforme previsto (regra IIIb).

Substituindo no sistema de equações lineares, resultam os autoestados correspondentes (Regra IIIc)

$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = |\theta\rangle ; \lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (8.75)$$

Finalmente, o valor esperado da polarização linear na direção  $\theta$  para um estado  $|\varphi\rangle$  é [cf.(8.71)], pela Regra III d,

$$\langle \varphi | \hat{P}_0 | \varphi \rangle = \langle \varphi | \theta \rangle \langle \theta | \varphi \rangle = |\langle \varphi | \theta \rangle|^2 = \cos^2 (\varphi - \theta) \quad (8.76)$$

o que concorda com o resultado obtido anteriormente.

## 8.9 Momento angular do fóton

Que grandezas são observáveis na física quântica? Essa não é uma questão fácil de responder, uma vez que estamos lidando com propriedades de objetos da escala atômica, em muitos casos.

Entretanto, o Princípio de Correspondência, que já vimos na formulação de Bohr, pode sugerir pelo menos candidatos a grandezas observáveis. Com efeito, um objeto macroscópico é um agregado de objetos microscópicos, e deve ser possível extrapolar ao domínio quântico determinadas propriedades dos objetos macroscópicos, como fizemos para a polarização de fótons.

Isso se aplica pelo menos a grandezas *aditivas*, cujo valor para um sistema de partículas é a resultante dos valores associados a cada partícula. Exemplos de tais grandezas são o momento linear, o momento angular e a energia de sistemas sem interações entre as partículas. A “posição de um sistema”, definida em termos do seu centro de massa, é também uma “variável coletiva”, combinação das posições das partículas.

Vamos empregar essa idéia para procurar definir um observável quântico correspondente ao *momento angular de um fóton*. Na eletrodinâmica clássica, já se verifica que um feixe de luz pode transportar não só momento linear, mas também momento angular. Da mesma forma que a radiação pode transmitir momento linear a um corpo macroscópico (pressão da radiação), pode também transmitir momento angular.



Isso foi verificado experimentalmente por R. Beth em 1936. Fazendo luz circularmente polarizada atravessar uma lâmina de um cristal birrefringente, que modifica seu estado de polarização, ele verificou que a lâmina, absorvendo energia da luz, entra em rotação em torno da direção de propagação da luz; a transferência de momento angular pode ser medida.

Vamos ver como esse efeito pode ser descrito em termos da teoria clássica. A interação da luz com a matéria, classicamente, é descrita pela *teoria da dispersão*. O campo elétrico da onda, de frequência angular  $\omega$ , coloca em *oscilação forçada* os elétrons atômicos, que são tratados classicamente como *osciladores harmônicos* de massa  $m$ , frequência própria  $\omega_0$  e constante de amortecimento  $\gamma$  associada à absorção de energia da onda. Assim, tomando eixo  $z$  na direção de propagação da onda, as equações de movimento para um elétron atômico são:

$$\begin{array}{l} \text{carga do elétron} \\ \downarrow \\ m \left( \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x \right) = e E_x \\ m \left( \ddot{y} + \gamma \dot{y} + \omega_0^2 y \right) = e E_y \end{array} \quad (8.77)$$

Pela (5.37), o campo elétrico da onda circularmente polarizada é tal que

$$E_x + i E_y = E_0 e^{\pm i \omega t} \quad (8.78)$$

de modo que, definindo

$$z \equiv x + i y \equiv r e^{i \theta} \quad (8.79)$$

as (8.77) dão

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{e E_0}{m} e^{\pm i \omega t} \quad (8.80)$$

Procuramos a solução como oscilação forçada sob a forma (8.79), onde

$$\theta = \pm (\omega t - \delta) \quad (8.81)$$

Vem, com  $\frac{d}{dt} = \pm i\omega$ ,

$$\left(-\omega^2 \pm i\gamma\omega + \omega_0^2\right) r e^{\pm i(\omega t - \delta)} = \frac{e E_0}{m} e^{\pm i\omega t}$$

o que dá

$$r e^{\mp i\delta} = \frac{(e E_0) / m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm i\gamma\omega} \quad (8.82)$$

permitindo calcular  $r$  e  $\delta$ ; devido ao amortecimento, será  $\delta \neq 0$ .

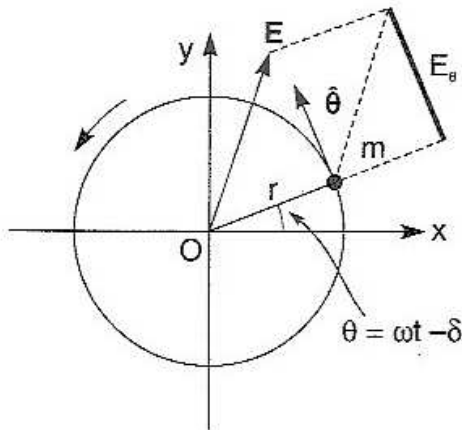


Fig. 8.8 Oscilação forçada do elétron

A fig. 8.8 ilustra o resultado para luz esquerda e  $\omega < \omega_0$  ( $\delta > 0$ ): o elétron descreve um movimento circular uniforme forçado, acompanhando o campo com uma *defasagem*  $\delta$ : o campo tem  $\therefore$  uma componente  $E_\theta \neq 0$  tangencial à trajetória do elétron, que produz um torque, realizando trabalho sobre ele e transferindo-lhe momento angular.

A energia transferida pela onda por unidade de tempo (potência) é dada por (para um elétron)

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (8.83)$$

(o campo  $\mathbf{B}$  não contribui)

onde

$$\mathbf{v} = \pm \omega r \hat{\theta} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \pm e \omega r E_\theta \quad (8.84)$$

Mas

$$r \cdot e E_\theta = \tau_z \quad (8.85)$$

onde  $\tau_z$  é a componente do *torque* (exercido pela onda) ao longo do eixo de rotação, que pela dinâmica das rotações, está relacionada com a *taxa*  $dJ_z/dt$  de *variação do momento angular do elétron em torno do eixo de rotação* por

$$\tau_z = \frac{dJ_z}{dt} \quad (8.86)$$

Finalmente, as (8.84) e (8.86) dão

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \pm \omega \frac{dJ_z}{dt}} \quad \begin{array}{l} + \text{ para polarização circular esquerda} \\ - \text{ para polarização circular direita} \end{array} \quad (8.87)$$

notando que o sinal de  $\omega$  teria de ser trocado para polarização circular *direita*.

Vamos agora usar o Princípio de Correspondência para interpretar essa relação em termos de fótons. No *limite clássico*, o feixe incidente é composto de um grande número  $N$  de fótons de energia  $E = \hbar \omega$ , de forma que

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \hbar \omega \frac{dN}{dt}} \quad (8.88)$$

onde  $dN/dt$  é a *taxa de absorção de fótons* pelo material, por unidade de tempo (que coloca a lâmina em rotação, no experimento de Beth).

Se admitirmos que cada fóton absorvido transfere um momento angular  $J_z$  para o elétron, ou seja que  $J_z$  é o *momento angular do fóton ao longo de sua direção de propagação*  $z$ , teremos analogamente à (8.88),

$$\boxed{\frac{dJ_z}{dt} = J_z \frac{dN}{dt}} \quad (8.89)$$

Levando as (8.88) e (8.89) na (8.87), resulta

$$\boxed{J_z = \pm \hbar} \quad \begin{array}{l} + \text{ para polarização circular esquerda} \\ - \text{ para polarização circular direita} \end{array} \quad (8.90)$$

ou seja, o momento angular do fóton ao longo de sua direção de propagação é quantizado, assumindo os valores  $+\hbar$  ou  $-\hbar$ : estes são seus autovalores. (Compare com a condição de quantização de Bohr na Seção 7.7)

Associando o autovetor  $|+\rangle$  da (8.25) à polarização circular *esquerda* e  $|-\rangle$  à *direita*, podemos então construir o observável  $\hat{J}_z$  usando a (8.37):

$$\begin{aligned} \hat{J}_z &= +\hbar|+\rangle\langle+| + (-\hbar)|-\rangle\langle-| = \\ &= +\hbar \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix} (1 \quad -i) - \hbar \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -i \end{pmatrix} (1 \quad i) \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \left\{ \boxed{\hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \right. \end{aligned} \quad (8.91)$$

(Representação matricial na base dos estados de polarização linear  $|\theta = 0\rangle, |\theta = \frac{\pi}{2}\rangle$ ).

## 8.10 Relação de incerteza

Na física clássica, quando um sistema se encontra num estado bem definido, o resultado de *cada* observação feita sobre o sistema é bem definido. Como sabemos, isso não é verdade na física quântica: em geral, só é possível prever a *probabilidade* de um resultado.

Assim, por exemplo, o momento angular  $J_z$  de um fóton só tem valores bem definidos nos autoestados  $|+\rangle$  ( $J_z = \hbar$ ) e  $|-\rangle$  ( $J_z = -\hbar$ ). Num estado de polarização linear  $|\theta\rangle$ , o valor esperado de  $J_z$  é dado pela regra III d):

$$\begin{aligned} \langle J_z \rangle &= \langle \theta | \hat{J}_z | \theta \rangle = \hbar (\cos \theta \quad \text{sen } \theta) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix} \\ &= \hbar (\cos \theta \quad \text{sen } \theta) \begin{pmatrix} -i \text{sen } \theta \\ i \cos \theta \end{pmatrix} = i \hbar (-\cos \theta \text{sen } \theta + \text{sen } \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

ou seja

$$\boxed{\langle J_z \rangle_\theta = 0} \quad [\text{elementos diagonais da (8.91)}] \quad (8.92)$$

Como os valores obtidos para  $J_z$  em cada determinação (para cada fóton) só podem ser  $+\hbar$  e  $-\hbar$ , a (8.92) significa, simplesmente, que *cada um destes resultados tem a mesma probabilidade*:

$$p(+\hbar) = p(-\hbar) = \frac{1}{2} \quad (8.93)$$

o que é confirmado pelas (8.46), pois, pela Regra II,

$$p(\pm\hbar) = |\langle \pm | \theta \rangle|^2 = \left| \frac{e^{\mp i\theta}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (8.94)$$

De forma mais geral, como  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  formam uma base, qualquer estado de polarização do fóton é da forma

$$|v\rangle = v_+ |+\rangle + v_- |-\rangle \quad (8.95)$$

e  $|v_+|^2 = p$  é a probabilidade de que se encontre  $+\hbar$  determinando  $J_z$  no estado  $|v\rangle$ , com  $|v_-|^2 = 1 - p$  dando a probabilidade de encontrar  $(-\hbar)$ . O valor médio  $\langle J_z \rangle_v$  será então

$$\boxed{\langle J_z \rangle_v = p \cdot \hbar + (1 - p) (-\hbar) = (2p - 1)\hbar} \quad (8.96)$$

que, sendo  $0 \leq p \leq 1$ , pode assumir *qualquer valor entre  $-\hbar$  e  $+\hbar$*  (embora o valor em *cada* observação seja  $-\hbar$  ou  $+\hbar$ ).

A (8.95) representa  $|v\rangle$  como uma *superposição quântica* de  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ . Esse é um conceito novo, tipicamente quântico, muito diferente do conceito clássico de superposição linear de dois estados. Os *valores* de  $J_z$  na superposição  $|v\rangle$  *não são* intermediários entre os valores extremos correspondentes a  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ . Os únicos valores possíveis continuam sendo  $+\hbar$  e  $-\hbar$ .

É a *probabilidade* de encontrar um desses resultados que assume valores intermediários entre 0 e 1 [por conseguinte, também o valor *médio* (8.96)].

### Flutuação

O único caso em que a observação de uma grandeza  $A$  leva à *certeza* de um dado resultado é quando o estado  $|a\rangle$  observado é um *autoestado* de  $\hat{A}$  ( $a =$  autovalor). Nesse caso,

$$\langle \hat{A} \rangle_a = \langle a | \hat{A} | a \rangle = a \langle a | a \rangle = a \quad (8.97)$$

ou seja

$$\boxed{\left( \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_a \right) | a \rangle = 0} \quad (8.98)$$

Reciprocamente, se vale a (8.98),  $|a\rangle$  é um autoestado de  $\hat{A}$  com autovalor  $\langle \hat{A} \rangle_a = a$ .

Em qualquer outro caso, a observação de  $A$  levará a valores *diferentes* em diferentes observações. Num estado  $|u\rangle$  diferente de um autoestado, os resultados *flutuarão* em torno do valor médio  $\langle \hat{A} \rangle_u$ . Uma boa medida dessa *flutuação* ou *incerteza* de  $A$  no estado  $|u\rangle$  é o desvio quadrático médio,  $(\Delta A)_u$ , definido por

$$\left[ (\Delta A)_u \right]^2 \equiv \left\langle \left( \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_u \right)^2 \right\rangle_u = \langle u | \left( \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_u \right)^2 | u \rangle \quad (8.99)$$

que leva em conta tanto flutuações positivas como negativas.

Temos

$$\begin{aligned} \left[ (\Delta A)_u \right]^2 &= \langle u | \left( \hat{A}^2 - 2 \langle \hat{A} \rangle_u \hat{A} + \langle \hat{A} \rangle_u^2 \right) | u \rangle \\ &= \langle u | \hat{A}^2 | u \rangle - 2 \underbrace{\langle \hat{A} \rangle_u \langle u | \hat{A} | u \rangle}_{(\langle \hat{A} \rangle_u)^2} + \langle \hat{A} \rangle_u^2 \underbrace{\langle u | u \rangle}_{=1} \end{aligned}$$

ou seja

$$\boxed{(\Delta A)_u = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle_u - \langle \hat{A} \rangle_u^2}} \quad (8.100)$$

*Exemplo:* Levando em conta a (8.92), a flutuação de  $J_z$  no estado  $|\theta\rangle$  é



$$\left(\Delta J_z\right)_\theta = \sqrt{\langle \hat{J}_z^2 \rangle_\theta} \quad (8.101)$$

Pela (8.91),

$$\hat{J}_z^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hbar^2 \cdot \hat{1} \quad (8.102)$$

de forma que a (8.101) dá

$$\boxed{\left(\Delta J_z\right)_\theta = \hbar} \quad (8.103)$$

resultado consistente com a (8.94).

#### *A Relação de Incerteza*

Sejam  $\hat{A} = \hat{A}^+$  e  $\hat{B} = \hat{B}^+$  dois observáveis,  $|u\rangle$  um vetor de estado e  $\lambda$  um número real qualquer, e consideremos a desigualdade

$$\left\| \left( \hat{A} + i\lambda \hat{B} \right) |u\rangle \right\|^2 \geq 0 \quad (8.104)$$

(a norma de qualquer vetor é não-negativa). Isso equivale a

$$\langle u | \left( \hat{A} - i\lambda \hat{B} \right) \left( \hat{A} + i\lambda \hat{B} \right) |u\rangle \geq 0 \quad (8.105)$$

ou, desenvolvendo a expressão,

$$\langle u | \hat{A}^2 |u\rangle + i\lambda \langle u | \left( \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right) |u\rangle + \lambda^2 \langle u | \hat{B}^2 |u\rangle \geq 0$$

ou seja,

$$\langle \hat{B}^2 \rangle_u \lambda^2 + i\lambda \left\langle \left[ \hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle_u + \langle \hat{A}^2 \rangle_u \geq 0 \quad (8.106)$$

onde definimos

$$\boxed{\left[ \hat{A}, \hat{B} \right] = \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}} \quad (8.107)$$

que se chama o *comutador* dos operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ . Como é bem sabido, o produto de duas matrizes (ou dos operadores lineares a elas associados), em geral, não é comutativo.

Temos, pela (8.63), como  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são hermiteanos,

$$\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)^+ = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} \quad \left\{ \boxed{\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^+ = -\left[\hat{A}, \hat{B}\right]} \right. \quad (8.107)$$

de modo que

$$\left(i\left\langle\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle_u\right)^* = i\left\langle\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle_u \quad (8.108)$$

ou seja, o trinômio do 2.º grau em  $\lambda$  (8.106) tem todos *os seus coeficientes reais*. Para que seja  $\geq 0$  para *qualquer*  $\lambda$  é preciso então que seu discriminante seja  $\leq 0$ :

$$\left(i\left\langle\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle_u\right)^2 - 4\left\langle\hat{A}^2\right\rangle_u\left\langle\hat{B}^2\right\rangle_u \leq 0$$

onde o 1.º termo é real e  $\geq 0$ , pela (8.108). Logo,

$$\boxed{\left\langle\hat{A}^2\right\rangle_u\left\langle\hat{B}^2\right\rangle_u \geq \frac{1}{4}\left|\left\langle\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle_u\right|^2} \quad (8.109)$$

desigualdade válida para quaisquer operadores hermiteanos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  e qualquer estado  $|u\rangle$ .

Sejam  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  dois operadores associados a observáveis, e tomemos na (8.109)

$$\hat{A} = \hat{X} - \langle\hat{X}\rangle_u, \quad \hat{B} = \hat{Y} - \langle\hat{Y}\rangle_u \quad (8.110)$$

Então, pela (8.99), será

$$\left\langle\hat{A}^2\right\rangle_u = (\Delta X)_u^2, \quad \left\langle\hat{B}^2\right\rangle_u = (\Delta Y)_u^2 \quad (8.111)$$

Por outro lado, é fácil ver (verifique!) que

$$\left[ \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle_u, \hat{Y} - \langle \hat{Y} \rangle_u \right] = \left[ \hat{X}, \hat{Y} \right] \quad (8.112)$$

pois um número sempre comuta com um operador.

Finalmente, substituindo esses resultados na (8.109), resulta

$$\boxed{(\Delta X)_u (\Delta Y)_u \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[ \hat{X}, \hat{Y} \right] \right\rangle_u \right|} \quad (8.113)$$

que se chama *RELAÇÃO DE INCERTEZA*: se  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  não comutam, não é possível tornar ao mesmo tempo tão pequenas quanto se queira as flutuações em  $X$  e  $Y$ , qualquer que seja o estado  $|u\rangle$  escolhido.

### Observações incompatíveis

Em consequência da relação de incerteza, a física quântica tem uma característica radicalmente diferente da física clássica: *a determinação simultânea, com precisão, de duas grandezas físicas diferentes pode ser incompatível, ou seja, impossível por princípio.*

Pela Regra IIIb, os resultados possíveis das determinações de um observável  $\hat{X}$  são seus autovalores  $x_j$ . Logo após uma observação de  $\hat{X}$  com resultado  $x_j$ , o sistema está no autoestado correspondente  $|x_j\rangle$ : *a observação prepara o sistema no estado  $|x_j\rangle$*  (ex.: passagem por um analisador de polarização).

Logo, após uma observação tanto de  $\hat{X}$  (com resultado  $x_j$ ) como de  $\hat{Y}$  (com resultado  $y_j$ ) o sistema teria de estar num *autoestado simultâneo* de ambos,  $|e_j\rangle$ , com

$$\hat{X}|e_j\rangle = x_j |e_j\rangle, \hat{Y}|e_j\rangle = y_j |e_j\rangle \quad (8.114)$$

o que implica

$$\left[ \hat{X}, \hat{Y} \right] |e_j\rangle = \left( \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} \right) |e_j\rangle = \left( x_j y_j - y_j x_j \right) |e_j\rangle = 0 \quad (8.115)$$

Vimos na Seq. 8. 6 que, se só existe um autoestado  $|e_j\rangle$  associado a cada autovalor, os autoestados formam uma base ortonormal [cf. (8.27)]. Logo, qualquer estado  $|v\rangle$  é da forma

$$|v\rangle = \sum_j v_j |e_j\rangle \quad (8.116)$$

e a (8.115) implica

$$[\hat{X}, \hat{Y}]|v\rangle = 0, \forall |v\rangle \quad (8.117)$$

ou seja,

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 0 \quad (8.118)$$

como conseqüência da *mensurabilidade simultânea de X e Y em qualquer estado*.

Reciprocamente, com as mesmas hipóteses, a (8.118), aplicada aos autovetores  $|e_j\rangle$  de  $\hat{X}$ , implica

$$\hat{X}(\hat{Y}|e_j\rangle) = \hat{Y}(\hat{X}|e_j\rangle) = x_j(\hat{Y}|e_j\rangle) \quad (8.119)$$

ou seja,  $\hat{Y}|e_j\rangle$  também é autovetor de  $\hat{X}$ , com o mesmo autovalor  $x_j$ . Como, por hipótese, só há um autovetor (a menos da normalização) com este autovalor,  $\hat{Y}|e_j\rangle$  tem de ser *proporcional* a  $|e_j\rangle$ ,

$$\hat{Y}|e_j\rangle = y_j|e_j\rangle \quad (8.120)$$

Quando há mais de um autovetor linearmente independente associado ao mesmo autovalor (diz-se neste caso que o autovalor é *degenerado*), pode-se mostrar que a conclusão permanece válida, sendo possível construir uma base por um processo de ortonormalização bem conhecido em álgebra linear.

A conclusão é portanto que *a condição necessária e suficiente para que dois observáveis  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  sejam compatíveis, isto é, possam sempre ambos ter valores bem definidos no mesmo estado quântico (tendo então uma base ortonormal comum de autovetores) é que  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  comutem:  $[\hat{X}, \hat{Y}] = 0$ . Assim, compatibilidade equivale a comutatividade.*

Exemplo: Consideremos os observáveis  $\hat{P}_{\pi/4}$  e  $\hat{P}_{\pi/2}$  (polarização linear do fóton nas direções  $\theta = \pi/4$  e  $\theta = \pi/2$ , respectivamente). Pela (8.72),

$$\hat{P}_{\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \hat{P}_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.121)$$

o que dá

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_{\pi/4} \hat{P}_{\pi/2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_{\pi/2} \hat{P}_{\pi/4} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \left[ \hat{P}_{\pi/2}, \hat{P}_{\pi/4} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.122)$$

mostrando que um fóton não pode ao mesmo tempo ter polarização linear bem definida na direção  $\theta = \pi/4$  e na direção  $\theta = \pi/2$ .

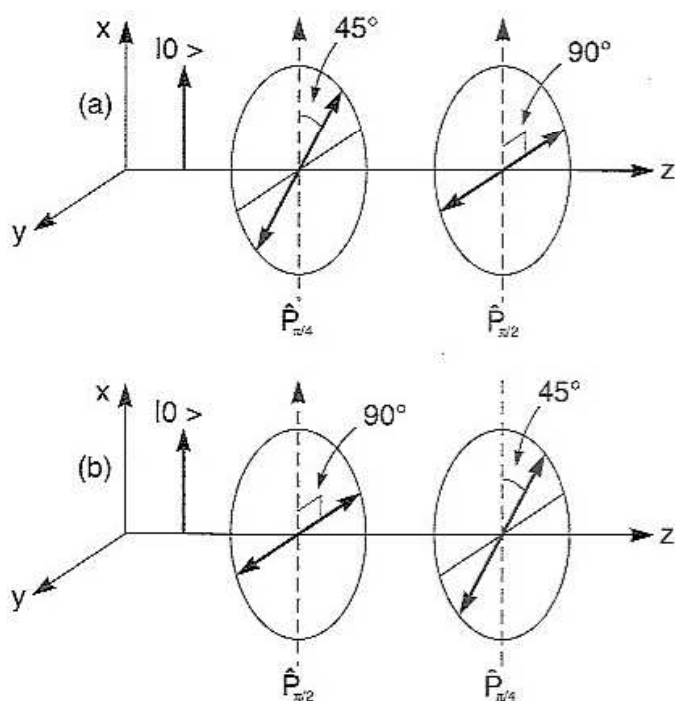


Fig. 8.9 Observações incompatíveis

Para verificar a incompatibilidade, consideremos um fóton incidente de polarização linear  $\theta = 0$  que atravessa sucessivamente dois analisadores, um com  $\varphi = \pi/4$  e outro com  $\varphi = \pi/2$ . Se atravessar *antes* o de  $\varphi = \pi/4$  [fig. 8.9(a)], a probabilidade de passar por ele será  $\cos^2(\pi/4) = 1/2$ , e o fóton emergirá linearmente polarizado com  $\theta = \pi/4$ , de modo que a probabilidade de passar pelo 2.º analisador será também  $\cos^2(\pi/2 - \pi/4) = 1/2$ . Logo, a probabilidade total de passagem é  $p = 1/4$ .

Por outro lado, se invertemos a ordem [fig. 8.9(b)], a probabilidade total se torna  $p = 0$ . Logo a probabilidade total de passagem *depende da ordem* em que as determinações são efetuadas, mostrando que não pode haver um autoestado simultâneo de  $\hat{P}_{\pi/4}$  e  $\hat{P}_{\pi/2}$ . Isso também nos dá uma idéia do significado físico do comutador.

## 8.11 Descrição quântica da atividade ótica natural

Vimos na Seç. 5.6 que existem substâncias transparentes (tais como uma solução de água com açúcar ou um cristal de quartzo) que têm *atividade ótica natural*: quando um feixe de luz linearmente polarizada penetra numa destas substâncias, o plano de polarização gira de um ângulo proporcional à profundidade de penetração.

Tomando o eixo  $z$  ao longo da direção de propagação, com origem na face de entrada, podemos dizer então que, se o vetor de estado inicial de polarização é  $|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}$  (direção de polarização  $\theta$ ), teremos, após penetrar uma distância  $z$  no meio, um vetor de estado

$$|\theta(z)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha z) \\ \text{sen}(\theta + \alpha z) \end{pmatrix} \quad (8.123)$$

onde  $\alpha$  é o *poder rotatório específico* do meio.

Até agora, discutimos apenas o que se poderia chamar de *cinemática* quântica: como representar o *estado* de um sistema quântico (polarização do fóton), o que se faz por um *vetor de estado normalizado*, e como representar grandezas observáveis, através de *operadores lineares* sobre os vetores de estado. A atividade ótica natural é um efeito *dinâmico*, associado à *evolução* de um vetor de estado; neste caso, devido à propagação dos fótons num meio material.

Na dinâmica newtoniana, a evolução do estado de uma partícula (movimento) é descrita por uma equação diferencial, a 2ª lei de Newton. Aqui estamos descrevendo a evolução não no tempo, mas em  $z$  (profundidade de penetração no meio); vamos tratar de fazê-lo através de uma equação diferencial, obtida a partir de sua solução (8.123), que dá

$$|\theta'(z)\rangle \equiv \frac{d}{dz} |\theta(z)\rangle = \alpha \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta + \alpha z) \\ \cos(\theta + \alpha z) \end{pmatrix} \equiv \hat{D} |\theta(z)\rangle \quad (8.124)$$

onde representamos o resultado por um *operador linear* (como é a derivação) aplicado a  $|\theta(z)\rangle$ . Vamos achar  $\hat{D}$ .

A evolução em  $z$  tem de *preservar a normalização* do vetor de estado, ou seja,  $\langle \theta(z) | \theta(z) \rangle = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle \theta(z) | \theta(z) \rangle &= \langle \theta(z) | \theta'(z) \rangle + \underbrace{\langle \theta'(z) | \theta(z) \rangle}_{\langle \theta(z) | \hat{D}^\dagger} = \\ &= \langle \theta(z) | \hat{D} | \theta(z) \rangle + \langle \theta(z) | \hat{D}^\dagger | \theta(z) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (8.125)$$

o que dá



$$\boxed{\hat{D}^\dagger = -\hat{D}} \quad (8.126)$$

ou seja,  $\hat{D}$  é *anti-hermiteano*, o que implica que pode ser escrito como

$$\boxed{\hat{D} = -i\hat{A}, \hat{A}^\dagger = \hat{A}} \quad (8.127)$$

onde  $\hat{A}$  é hermiteano.

A representação geral de uma matriz hermiteana  $2 \times 2$  é

$$\boxed{\hat{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}}, \quad a \text{ e } b \text{ reais} \quad (8.128)$$

As (8.124) a (8.128) dão então, com

$$\boxed{\theta_z \equiv \theta + \alpha z} \quad (8.129)$$

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dz} |\theta_z\rangle &= \hat{A} |\theta_z\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_z \\ \sin \theta_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \theta_z + c \sin \theta_z \\ c^* \cos \theta_z + b \sin \theta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha \sin \theta_z \\ i\alpha \cos \theta_z \end{pmatrix} \begin{cases} a = b = 0 \\ c = -i\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{i \frac{d}{dz} |\theta\rangle = \hat{A} |\theta\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix} |\theta\rangle} \quad (8.130)$$

Pela (8.91).

$$\boxed{\hat{A} = \alpha \hat{J}_z / \hbar} \quad (8.131)$$

onde  $\hat{J}_z$  é o operador *momento angular do fóton*. A (8.130) é uma *equação de evolução quântica* para o vetor de estado de polarização de um fóton num meio opticamente ativo com poder rotatório  $\alpha$ . Embora obtida para estados de polarização linear, podemos tomá-la como aplicável a qualquer estado de polarização, pois os estados de polarização linear definem uma base.

Vemos então imediatamente que os *autoestados* de  $\hat{J}_z$  têm características especiais. Pelas (8.90), são os estados de polarização *circular*:

$$\boxed{\frac{\hat{J}_z}{\hbar} |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle} \quad (8.132)$$

o que, pelas (8.130) e (8.131), implica

$$i \frac{d}{dz} |\pm\rangle = \pm \alpha |\pm\rangle \quad \left\{ \boxed{|\pm\rangle_z = e^{\mp i \alpha z} |\pm\rangle_{z=0}} \right. \quad (8.133)$$

Como  $e^{\pm i \alpha z}$  é um fator de fase, que não altera o estado, vemos que um fóton circularmente polarizado (esquerdo ou direito) permanece com seu estado de polarização *inalterado*, ou seja, é *estacionário* com respeito à propagação num meio opticamente ativo.

Os *estados estacionários*  $|\pm\rangle$  da evolução num meio opticamente ativo constituem uma base especialmente cômoda para obter a evolução de um vetor de estado qualquer, dada a linearidade da equação de evolução (8.130).

Com efeito, como  $|\pm\rangle_{z=0}$  formam uma base, *qualquer* estado de polarização do fóton pode ser escrito como

$$\boxed{|u\rangle_{z=0} = u_+ |+\rangle_{z=0} + u_- |-\rangle_{z=0}} \quad (8.134)$$

e, pelas (8.133) e pela linearidade, o estado de polarização evolui com

$$\boxed{|u\rangle_z = e^{-i \alpha z} u_+ |+\rangle_{z=0} + e^{i \alpha z} u_- |-\rangle_{z=0}} \quad (8.135)$$

Em particular, para o estado  $|\theta\rangle$  de polarização linear na direção  $\theta$ , as (8.46) dão

$$\boxed{|\theta\rangle_{z=0} = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} |+\rangle_{z=0} + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |-\rangle_{z=0}} \quad (8.136)$$

e a (8.135) leva a

$$\boxed{|\theta\rangle_z = \frac{e^{-i(\alpha z + \theta)}}{\sqrt{2}} |+\rangle_{z=0} + \frac{e^{i(\alpha z + \theta)}}{\sqrt{2}} |-\rangle_{z=0}} \quad (8.137)$$

Na representação em que  $|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ , os vetores  $|\pm\rangle_{z=0}$  são dados pela (8.25), e a (8.137) corresponde à solução (8.123), como é fácil verificar.

### O operador de evolução

Na equação de evolução (8.130),

$$\frac{d}{dz}|u\rangle = -i\hat{A}|u\rangle \quad (8.138)$$

aplicada a um vetor de estado qualquer  $|u\rangle$ ,  $\hat{A} \equiv \frac{\alpha}{\hbar}\hat{J}_z$  é um operador *constante* (independente de  $z$ ).

Se pudéssemos integrar a (8.138) como uma eq. diferencial ordinária, a solução seria

$$|u\rangle_z = \exp(-i\hat{A}z)|u\rangle_0 \quad (8.139)$$

mas, tratando-se de um operador, é preciso verificar que sentido tem a exponencial.

Para isso, notemos que, em termos de seus autovalores  $a_j$  e autovetores correspondentes  $|e_j\rangle$ , o operador hermiteano  $\hat{A}$  é representado pela (8.67),

$$\hat{A} = \sum_j a_j \hat{\Pi}_j, \quad \hat{\Pi}_j \equiv |e_j\rangle\langle e_j| \quad (8.140)$$

e os  $|e_j\rangle$  formam uma base ortonormal. Dai decorre imediatamente que (probl. 8.4)

$$\hat{\Pi}_j \hat{\Pi}_k = \delta_{jk} \hat{\Pi}_k \quad (8.141)$$

o que dá

$$\hat{A}^2 = \sum_j (a_j^2) \hat{\Pi}_j, \quad \hat{A}^3 = \sum_j (a_j^3) \hat{\Pi}_j, \dots$$

o mesmo valendo para qualquer potência ou polinômio em  $\hat{A}$ . Para matrizes, a (8.140) é uma representação em que  $\hat{A}$  é *diagonal*, e qualquer potência de  $\hat{A}$  se calcula imediatamente.

Por extensão, para qualquer função  $f(z)$  que possa ser expandida em série de potências, definimos

$$\boxed{f(\hat{A}) \equiv \sum_j f(a_j) \hat{\Pi}_j} \quad (8.142)$$

o que se aplica, em particular, à função exponencial.

Os cálculos que levaram à (8.91) dão:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\Pi}_+ &= |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \hat{1} + \frac{\hat{J}_z}{\hbar} \right) \\ \hat{\Pi}_- &= |-\rangle\langle-| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \hat{1} - \frac{\hat{J}_z}{\hbar} \right) \end{aligned}} \quad (8.143)$$

de modo que, com  $\hat{A} = \alpha \hat{J}_z / \hbar$  [cf.(8.131)],

$$\begin{aligned} \hat{U}(z) &\equiv \exp(-i\hat{A}z) = e^{-i\alpha\hat{J}_+z/\hbar} \hat{\Pi}_+ + e^{-i\alpha\hat{J}_-z/\hbar} \hat{\Pi}_- \\ &= \frac{1}{2} (e^{-i\alpha z} + e^{i\alpha z}) \hat{1} + \frac{1}{2} (e^{-i\alpha z} - e^{i\alpha z}) \frac{\hat{J}_z}{\hbar} \\ &= \cos(\alpha z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin(\alpha z) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{J}_z/\hbar \text{ [cf.(8.91)]}} \end{aligned}$$

Finalmente, a (8.139) fica

$$\boxed{|u\rangle_z = \hat{U}(z) |u\rangle_0} \quad (8.144)$$

onde o operador de evolução em  $z$ ,  $\hat{U}(z)$ , é dado por

$$\boxed{\hat{U}(z) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha z) & -\sin(\alpha z) \\ \sin(\alpha z) & \cos(\alpha z) \end{pmatrix}} \quad (8.145)$$

Dado um estado inicial de polarização qualquer,

$$|u\rangle_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (8.146)$$

a (8.145) leva à solução da equação de evolução (8.138)

$$|u\rangle_z = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\alpha z) - c_2 \operatorname{sen}(\alpha z) \\ c_1 \operatorname{sen}(\alpha z) + c_2 \cos(\alpha z) \end{pmatrix} \quad (8.147)$$

que se reduz a  $|u\rangle_0$  para  $z = 0$  e permite recuperar a (8.123).

## PROBLEMAS

1. Sejam  $|u\rangle$  e  $|v\rangle$  dois vetores de estado *fixos* (normalizados) e  $\lambda = r e^{i\theta}$  um número complexo variável. Demonstre que

$$\min_{\lambda} \left\| |u\rangle + \lambda |v\rangle \right\|^2 = 1 - |\langle u|v\rangle|^2$$

quando  $\lambda$  varia, onde o mínimo é atingido para  $\lambda = -\langle v|u\rangle$ . Deduza daí a *desigualdade de Schwarz*

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq 1 \left( = \| |u\rangle \|^2 \| |v\rangle \|^2 \right)$$

*Sugestão:* Exprima a condição de mínimo em termos de  $r$  e  $\theta$ .

2. Obtenha os vetores de estado de polarização circular na representação alternativa, em que

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

por um método análogo ao que levou às (8.25). Interprete o resultado.

3. Mostre que, para qualquer operador  $\hat{A}$ , tem-se

$$\left( \hat{A}^+ \right)^+ = \hat{A}$$

4. Mostre que os *operadores de projeção*  $\hat{\Pi}_j$  definidos nas (8.48) têm a propriedade

$$\left( \hat{\Pi}_j \right)^2 = \hat{\Pi}_j$$

Demonstre que daí decorre que os únicos autovalores desses operadores são 0 e 1. Mostre que

$$\hat{\Pi}_1 \hat{\Pi}_2 = 0$$

5. Mostre que, na representação em que

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

o observável  $\hat{P}_\theta$  (polarização linear do fóton na direção  $\theta$ ) é representado pela matriz

$$\hat{P}_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2i\theta} \\ e^{2i\theta} & 1 \end{pmatrix}$$

6. Demonstre a regra do produto (8.58).



7. Um feixe de fótons linearmente polarizados na direção  $x$  incide, em seqüência, sobre um par de analisadores de polarização. O primeiro deles tem seu eixo de transmissão máxima orientado segundo um ângulo  $\theta_1$  com a direção  $x$ , e o segundo tem seu eixo de transmissão máxima orientado segundo um ângulo  $\theta_2$  com a direção  $x$ .

(a) Qual é a probabilidade de que um fóton passe através dos dois analisadores?

(b) Para  $\theta_2$  fixo, qual é o valor de  $\theta_1$  para o qual essa probabilidade de transmissão através dos dois analisadores será máxima?

8. Considere o seguinte vetor de estado de polarização de um fóton:

$$|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|+\rangle + \frac{(1-i)}{2}|-\rangle$$

onde  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  são vetores de estado normalizados de polarização circular esquerda e direita, respectivamente.

(a) Mostre que  $|\psi\rangle$  é normalizado.

(b) Mostre que  $|\psi\rangle$  é linearmente polarizado, e calcule o ângulo de polarização, em valor absoluto e sinal.

9. Um fóton linearmente polarizado na direção  $\theta$  incide sobre um analisador orientado na direção  $\varphi$ , podendo atravessá-lo (resultado = 1) ou não (resultado = 0). Mostre que a incerteza no resultado é

$$\Delta X = \frac{1}{2} \left| \sin \left[ 2(\theta - \varphi) \right] \right|$$

10. Mostre que

$$\left[ \hat{P}_\theta, \hat{P}_\varphi \right] = 0$$

se e somente se  $\theta - \varphi = n\pi/2$ , com  $n$  inteiro. Discuta a interpretação física desse resultado.

11. Calcule  $[\hat{P}_\theta, \hat{J}_z]$ .

12. Mostre que, para

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

tem-se,

$$(\Delta P_\theta)_u (\Delta J_z)_u \geq \frac{1}{2} \hbar \left| \left( |c_1|^2 - |c_2|^2 \right) \sin(2\theta) - (c_1^* c_2 + c_2^* c_1) \cos(2\theta) \right|$$

e que o segundo membro é da ordem de  $\hbar$ .

# 9

## A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Neste capítulo, vamos generalizar os princípios básicos desenvolvidos no capítulo 8, formulando a equação de Schrödinger, em que se baseia a dinâmica quântica.

### 9.1 A equação de Schrödinger unidimensional

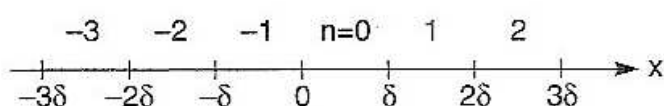


Fig. 9.1 Divisão em intervalos

Consideremos uma partícula não-relativística de massa  $m$  limitada a mover-se somente ao longo de uma direção, que tomaremos como eixo  $Ox$ .

Uma observação da partícula pode encontrá-la em qualquer ponto do eixo, ou seja, os valores possíveis do observável “posição da partícula” são todos os números reais, correspondendo a uma *infinitude contínua* de valores possíveis.

Como passo intermediário mais simples para descrever essa situação, vamos estabelecer primeiro uma descrição *aproximada*, dividindo a reta em *intervalos idênticos* (fig. 9.1), de comprimento  $\delta$ . Diremos que a partícula está no intervalo  $n$  quando

$$n\delta \leq x < (n+1)\delta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9.1)$$

Podemos interpretar  $\delta$  como sendo a precisão na determinação da posição (o erro é  $\leq \delta$ ).

Isso leva, generalizando os conceitos do Cap. 8, a uma representação aproximada do vetor de estado da partícula em termos de sua posição,

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-1} \\ c_n \\ c_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

como um vetor coluna de infinitas componentes (infinidade discreta), onde o número complexo  $c_n$  representa a *amplitude de probabilidade* de encontrar a partícula no intervalo  $n$  ( $|c_n|^2 =$  probabilidade de encontrar a partícula no intervalo  $n$ ), com a condição de normalização

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 1} \quad (9.3)$$

Para passar à representação contínua, notemos que a probabilidade  $|c_n|^2$ , para  $\delta$  suficientemente pequeno, deve ser proporcional ao comprimento  $\delta$  do intervalo. Quando  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{|c_n|^2}{\delta} \right) = \begin{array}{l} \text{densidade de probabilidade de encontrar} \\ \text{a partícula em } x, \text{ centro do intervalo } \delta. \end{array} \quad (9.4)$$

Logo,  $c_n / \sqrt{\delta}$  deve também tender a um limite finito, que representa a *amplitude de densidade de probabilidade* correspondente,  $\varphi(x)$ :

$$\boxed{\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{c_n}{\sqrt{\delta}} \right) = \varphi(x)} \quad (9.5)$$

onde [cf.(8.6)]

$$\boxed{\underbrace{|\varphi(x)|^2}_{\text{densidade de probabilidade}} dx = dp(x) = \text{probabilidade de encontrar a partícula entre } x \text{ e } x + dx,} \quad (9.6)$$

com a condição de normalização [forma limite da (9.3)]

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1} \quad (9.7)$$

O “bra” correspondente à (9.2) é

$$\langle \varphi | = (\dots c_{n-1}^* \ c_n^* \ c_{n+1}^* \ \dots) \quad (9.8)$$

e a (9.7) é o limite, para  $\delta \rightarrow 0$ , de

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \cdot \left( \frac{c_n^*}{\sqrt{\delta}} \right) \left( \frac{c_n}{\sqrt{\delta}} \right) \quad (9.9)$$

Analogamente, o produto escalar de dois vetores de estado  $|\varphi\rangle$  e  $|\psi\rangle$ , associados às amplitudes de densidade de probabilidade  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$ , é dado por

$$\boxed{\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x) \psi(x) dx} \quad (9.10)$$

As amplitudes de densidade de probabilidade são chamadas de *funções de onda*.

Chegamos assim, finalmente, às *funções de onda de Schrödinger* da Seç. 7.9, mas agora conhecemos sua interpretação física.

Em geral, numa descrição dinâmica, a função de onda associada a uma partícula deve depender do tempo  $t$ :

$$\boxed{|\psi\rangle \rightarrow \psi(x, t)} \quad (9.11)$$

A relação de Einstein  $E = \hbar \omega$ , estendida por de Broglie a uma partícula qualquer [cf. (7.59)], sugere que, para uma partícula de energia  $E$ , essa dependência do tempo seja da forma

$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i\omega t} = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (9.12)$$

o que daria

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi \quad (9.13)$$

Mas, pela (7.67), a eq. de Schrödinger nesse caso deve ser da forma

$$E \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\mathbf{x}) \Psi \quad (9.14)$$

para uma partícula de massa  $m$  num potencial  $V(\mathbf{x})$ .

Especializando esses resultados ao caso unidimensional, as (9.13) e (9.14) dariam

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi \quad (9.15)$$

que é a *EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER DEPENDENTE DO TEMPO* para o movimento unidimensional no potencial  $V(x)$ .

Para o vetor de estado  $|\psi\rangle$  correspondente, essa é uma equação de evolução temporal

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (9.16)$$

[análoga à equação de evolução espacial (8.130)], onde

$$\hat{H} |\psi\rangle \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi \equiv \hat{H} \psi \quad (9.17)$$

com o operador

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \hat{1} \quad (9.18)$$

cuja atuação diretamente sobre uma função de onda  $\psi$  é definida pela (9.17).



$\hat{H}$  chama-se *operador hamiltoniano*. Embora tenhamos partido de um caso particular (estado estacionário), a (9.16) tem validade geral: para a mecânica quântica, é a *lei fundamental da dinâmica* (como a 2ª lei de Newton para a mecânica clássica).

Ao contrário da 2ª lei de Newton, onde aparece  $\partial^2/\partial t^2$ , a (9.16) é de 1.ª ordem em  $t$ , contendo apenas  $\partial/\partial t$ . Logo, basta *uma* condição inicial,  $|\psi\rangle_{t=0}$ , para determinar a solução. Isso é consistente com o fato de que o vetor de estado  $|\psi\rangle_{t=0}$  descreve *completamente* o estado quântico do sistema no instante inicial.

## 9.2 Conjugado hermiteano

O conjugado hermiteano  $\hat{A}^+$  de um operador  $\hat{A}$  define-se de forma análoga à (8.61):

$$\boxed{\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{A}^+ | \varphi \rangle \quad (\forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle)} \quad (9.19)$$

ou seja

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x) [\hat{A} \psi(x)] dx \right\}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) [\hat{A}^+ \varphi(x)] dx \quad (9.20)$$

para qualquer par de funções de onda  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$ .

Trocando  $\hat{A} \rightarrow \hat{A}^+$  e usando  $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$  (Probl. 9.3), vem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) [\hat{A} \varphi(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{A}^+ \psi(x)]^* \varphi(x) dx} \quad (9.21)$$

*Exemplo:* Seja  $\hat{A} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ . Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \left[ \varphi^*(x) \psi(x) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \psi(x) dx \end{aligned}$$

O termo integrado  $\rightarrow 0$  em  $\pm\infty$ , porque  $\varphi$  e  $\psi$  têm de ser normalizáveis, e a (9.7) implica que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$$

Logo, tomando o complexo conjugado da relação acima,

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right)^* = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \quad (9.22)$$

e, comparando com a (9.20) [cf. (8.126)]

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^+ = - \frac{\partial}{\partial x} \quad (9.23)$$

mostrando que esse operador é *anti-hermiteano*. Isso também implica que

$$\left( i \frac{\partial}{\partial x} \right)^+ = i \frac{\partial}{\partial x} \quad (9.24)$$

ou seja,  $i \partial / \partial x$  é um operador hermiteano.

Como o quadrado de um operador hermiteano também é hermiteano [cf. (8.63)], vemos que  $-\partial^2 / \partial x^2$  é hermiteano, e a (9.18) dá

$$\hat{H}^+ = \hat{H} \quad (9.25)$$

ou seja, o *hamiltoniano* é um operador hermiteano.

Isto permite verificar uma condição de consistência importante: a *evolução dinâmica dada pela equação de Schrödinger preserva a normalização do vetor de estado*.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\partial \psi^*}{\partial t}}_{=\left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi\right)^*} \psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{=\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi} dx \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{H} \psi) dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H} \psi)^* \psi dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{H}^+ \psi) dx \text{ pela (9.21)}} \right] \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{H} - \hat{H}^+) \psi dx = 0
 \end{aligned}$$

### Valor esperado e derivada temporal

O valor esperado (médio) de um observável  $\hat{A}$  num estado  $|\psi\rangle$  é dado por

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) [\hat{A} \psi(x,t)] dx} \quad (9.26)$$

Supondo que  $\hat{A}$  não contém o tempo explicitamente, o valor esperado evolui com o tempo devido à evolução de  $\psi$ , o que dá

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\psi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\partial \psi^*}{\partial t}}_{=\left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi\right)^*} \hat{A} \psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{=\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi} dx \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \hat{H} \psi dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H} \psi)^* \hat{A} \psi dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{H} (\hat{A} \psi) dx \text{ pela (9.21)}} \right\}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle_{\psi} \quad (9.27)$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{H} \rangle_{\psi} = 0 \quad \text{O valor esperado do hamiltoniano se conserva} \quad (9.28)$$

### 9.3 Operadores posição e momento

A interpretação física de  $|\psi(x, t)|^2 dx$  como probabilidade de encontrar a partícula entre  $x$  e  $x + dx$  no instante  $t$  mostra que o valor esperado da *posição* da partícula nesse instante tem de ser definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) x \psi(x, t) dx = \langle \hat{x} \rangle_{\psi} \quad (9.29)$$

onde

$$\hat{x} \psi(x, t) = x \psi(x, t) \quad (9.30)$$

ou seja, o observável  $\hat{x} \equiv$  “posição da partícula” é um operador equivalente à *multiplicação por  $x$* .

Para definir o observável *velocidade*  $\hat{v}$  da partícula, ou, equivalentemente, seu *momento*  $m\hat{v}$ , vamos usar o princípio de correspondência, pelo qual devemos ter

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle_{\psi} = \langle \hat{v} \rangle_{\psi} \quad (9.31)$$

num estado descrito por  $\psi(x, t)$ .

A (9.27) dá

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle_{\psi} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{x}, \hat{H}] \rangle_{\psi} \quad (9.32)$$

Como o operador identidade comuta com qualquer outro, a (9.18) dá

$$\left[ \hat{x}, \hat{H} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \hat{x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] + V(x) \underbrace{\left[ \hat{x}, \hat{1} \right]}_{=0}$$

$$\therefore \left[ \hat{x}, \hat{H} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \hat{x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \quad (9.33)$$

Para calcular o comutador entre esses dois operadores, basta aplicá-lo a uma função de onda qualquer  $\psi$ :

$$\left[ \hat{x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi = \underbrace{\hat{x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}_{x \partial^2 \psi / \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{x} \psi) \quad (9.34)$$

Temos, pela (9.30),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{x} \psi) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x \psi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

de modo que a (9.34) fica

$$\boxed{\left[ \hat{x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] = -2 \frac{\partial}{\partial x}} \quad (9.35)$$

e, levando nas (9.32) e (9.33),

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle_{\psi} = \frac{1}{i\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \right) (-2) \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{\psi} = \left\langle -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{\psi}$$

o que, comparando com a (9.31), dá

$$\boxed{\hat{v} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x}} \quad (9.36)$$

e

$$\boxed{\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}} \quad \text{OPERADOR MOMENTO} \quad (9.37)$$

Isso mostra que a (9.18) equivale a

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\hat{1}} \quad (9.38)$$

ou seja, que o hamiltoniano equivale ao observável *energia da partícula*. Obtemos assim a interpretação física da (9.28): ela garante a conservação do *valor esperado da energia*.

Temos, por outro lado,

$$\left[ \hat{x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi = x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (x \psi) = -\psi, \quad \forall \psi$$

ou seja,

$$\boxed{\left[ \hat{x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] = -\hat{1}} \quad (9.39)$$

Combinando esse resultado com a (9.37), obtemos a *regra de comutação de Heisenberg*

$$\boxed{\left[ \hat{x}, \hat{p} \right] = i\hbar} \quad (9.40)$$

Como a dedução da (8.113) é válida em geral, daí resulta

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar} \quad (9.41)$$

que é a célebre *relação de incerteza de Heisenberg para posição e momento de uma partícula*. Vemos que *posição e momento* (ou *velocidade*) de uma partícula são *observáveis incompatíveis*: não podem ter, ao mesmo tempo, valores bem definidos, em nenhum estado quântico. As flutuações recíprocas têm de obedecer à (9.41).



## 9.4 O teorema de Ehrenfest

Do ponto de vista do princípio de correspondência, podemos comparar com a mecânica clássica as equações de movimento para *valores médios* de observáveis quânticos. Já nos valemos dessa idéia para definir o operador momento  $\hat{p}$  por

$$\langle \hat{p} \rangle_{\psi} = m \langle \hat{v} \rangle_{\psi} = m \frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle_{\psi} \quad (9.42)$$

Vamos calcular agora  $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle_{\psi}$ , usando novamente a (9.27):

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle_{\psi} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[ \hat{p}, \hat{H} \right] \right\rangle_{\psi} \quad (9.43)$$

Como  $\hat{p}$  comuta com  $\hat{p}^2$ , a (9.38) dá

$$\left[ \hat{p}, \hat{H} \right] = \left[ \hat{p}, V(x) \hat{1} \right] = -i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial x}, V(x) \hat{1} \right] \quad (9.44)$$

Calculamos o comutador aplicando ambos os membros a uma função de onda  $\psi$  arbitrária:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x}, V(x) \hat{1} \right] \psi &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ V(x) \psi \right] - V(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \psi \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}, V(x) \hat{1} \right] = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (9.45)$$

Substituindo esse resultado nas (9.44) e (9.43), obtemos o *teorema de Ehrenfest*

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle_{\psi} = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle_{\psi} \quad (9.46)$$

Classicamente, a força  $F$  que atua sobre a partícula num campo de energia potencial  $V(x)$  é  $F = -\partial V / \partial x$ , de forma que as (9.42) e (9.46) implicam que *os valores esperados obedecem à 2ª lei de Newton*, resultado inteiramente conforme ao princípio de correspondência.

Entretanto, esse resultado de per si está longe de dar conta das sutilezas envolvidas na transição entre a mecânica quântica e a mecânica clássica. Ele nada diz sobre as *flutuações* nem sobre as diferenças conceituais e de interpretação; em particular, sobre o que acontece com o *estado quântico* de um sistema em confronto com o conceito clássico do estado.

## 9.5 Autofunções do momento

Uma autofunção do operador momento (9.37) é definida por

$$\hat{p} \psi_p(x) \equiv -i \hbar \frac{\partial \psi_p}{\partial x} = p \psi_p(x) \quad (9.47)$$

onde  $p$  é o autovalor. A solução dessa equação diferencial é

$$\psi_p(x) = C e^{i p x / \hbar} = C e^{i k x} \quad (9.48)$$

que é uma *onda plana* de momento

$$p = \hbar k \quad (-\infty < p < \infty) \quad (9.49)$$

onde  $p$  pode tomar todos os valores reais.

A (9.49) é a relação de de Broglie (7.54) entre momento e número de onda  $k$ . A (9.48) dá

$$|\psi_p(x)|^2 = |C|^2 = \text{constante} \quad (9.50)$$

de forma que  $\psi_p(x)$  não representa realmente um estado quântico aceitável, porque *não pode ser normalizada*: a integral de normalização (9.7) diverge.

Sabemos efetivamente que uma onda plana é uma idealização, um caso limite. Do ponto de vista do princípio de incerteza (9.41), corresponderia a  $\Delta p = 0$ , o que requer  $\Delta x \rightarrow \infty$ , ou seja, *indeterminação completa da posição*: daí o valor constante da “densidade de probabilidade” (9.50).

Embora a (9.48) represente uma “autofunção imprópria”, as ondas planas, como na ótica, representam uma idealização extremamente conveniente. Vimos para os estados de polarização que os autovetores de um observável formam uma *base*, ou seja, que é possível expandir qualquer vetor de estado como superposição dos autovetores.

Apesar do caráter impróprio das autofunções do momento, essa propriedade se generaliza para elas: qualquer função de onda  $\psi(x)$  *normalizável* (representando portanto um estado quântico aceitável) pode ser expandida em termos das (9.48):

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk \quad (9.51)$$

onde a soma sobre todos os autovalores corresponde aqui a uma integral sobre toda a reta.

Na análise matemática, a (9.51) corresponde ao que se chama de expansão em *integral de Fourier*, e é possível dar expressões explícitas para o cálculo dos coeficientes  $c(k)$ .

O conjunto dos autovalores de um operador chama-se *espectro* desse operador. [Por exemplo, pela (8.90), o espectro de  $\hat{J}_z$  para o fóton é *discreto*, formado pelos autovalores  $(-\hbar, +\hbar)$ ]. Tanto para  $\hat{x}$  como para  $\hat{p}$  encontramos um *espectro contínuo* de autovalores ( $x$  e  $p$  podem assumir qualquer valor real).

## 9.6 Densidade de corrente de probabilidade

Vimos na Seç. 9.2 que há conservação *global* da probabilidade:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 0 \quad (9.52)$$

Entretanto, há também uma lei de conservação *local*, análoga à equação da continuidade na hidrodinâmica e à conservação local da carga elétrica.

Sabemos que a *densidade de probabilidade*  $\rho(x, t)$  é dada por

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \quad (9.53)$$

Logo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \psi^* (x, t) \psi (x, t) \right] = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \quad (9.54)$$

Usando a equação de Schrödinger (9.15), isso dá

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\psi^*}{i \hbar} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi \right] - \frac{\psi}{i \hbar} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V(x) \psi^* \right]$$

∴

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right) = \\ &= -\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \end{aligned}$$

ou finalmente,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0} \quad (9.54)$$

onde

$$\boxed{j(x, t) \equiv \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right)} \quad (9.55)$$

A (9.54) é a versão unidimensional da *equação da continuidade*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0} \quad (9.56)$$

e representa a *lei de conservação da probabilidade*.

Com efeito, integrando ambos os membros sobre um segmento de reta entre  $x_1$  e  $x_2$ , vem, com  $x_1 < x_2$ ,

$$\boxed{-\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dx = j(x_2, t) - j(x_1, t)} \quad (9.57)$$

ou seja, a taxa de decréscimo, por unidade de tempo, da probabilidade de encontrar a partícula entre  $x_1$  e  $x_2$ , é igual ao fluxo de probabilidade, por unidade de tempo, que sai por  $x_2$ , menos aquele que entra por  $x_1$ . Logo,  $j(x, t)$  dado pela (9.55), representa a *corrente de probabilidade* (em uma dimensão, a densidade de corrente se confunde com a corrente, porque o “fluxo” é tomado através de um ponto).

Em particular, fazendo  $x_1 \rightarrow -\infty$ ,  $x_2 \rightarrow \infty$  na (9.57), e observando que  $j$  deve tender a zero no infinito para vetores de estado normalizados, recuperamos a lei de conservação global (9.52).

### Exemplo

Vamos calcular  $j$  para a autofunção do momento (9.48):

$$\left. \begin{aligned} \psi_p &= C e^{i p x / \hbar} \left\{ \frac{\partial \psi_p}{\partial x} = i \frac{p}{\hbar} \psi_p \right. \\ \psi_p^* &= C e^{-i p x / \hbar} \left\{ \frac{\partial \psi_p^*}{\partial x} = -i \frac{p}{\hbar} \psi_p^* \right. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j = \frac{\hbar}{2 m i} \left[ \frac{i p}{\hbar} \underbrace{|\psi_p|^2}_{=\rho} - \left( -\frac{i p}{\hbar} \right) \underbrace{|\psi_p|^2}_{=\rho} \right] = \frac{\hbar}{2 m i} \cdot \frac{2 i p}{\hbar} \rho$$

$\therefore$

$$\boxed{j = \frac{p}{m} \rho = \rho v} \quad (9.58)$$

que corresponde à expressão bem conhecida da corrente associada a um escoamento com densidade  $\rho$  e velocidade  $v$ .

As considerações precedentes se aplicam ao caso geral da equação de Schrödinger na presença de um potencial  $V$ . Vamos considerar agora *partículas livres* ( $V = 0$ ).

## 9.7 Partículas livres

Para partículas livres em uma dimensão, a equação de Schrödinger fica

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2 m} \psi = -\frac{\hbar^2}{2 m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (9.59)$$

*Estados estacionários*

Pelas (9.12) a (9.14), temos, para um estado estacionário de energia  $E$ ,

$$\boxed{\psi(x, t) = \varphi_E(x) e^{-iEt/\hbar}} \quad (9.60)$$

onde

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_E}{dx^2} = E \varphi \quad \left\{ \quad \frac{d^2 \varphi_E}{dx^2} + \left( \frac{2m}{\hbar^2} E \right) \varphi_E = 0 \quad \right. \quad (9.61)$$

Como a energia é puramente cinética, podemos escrever

$$\boxed{E = \frac{p^2}{2m}, \text{ com } p \equiv +\sqrt{2mE}} \quad (9.62)$$

e a (9.61) fica

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi_E}{dx^2} + \left( \frac{p}{\hbar} \right)^2 \varphi_E = 0} \quad (9.63)$$

cuja solução geral é

$$\boxed{\varphi_E(x) = C_+ e^{ipx/\hbar} + C_- e^{-ipx/\hbar}} \quad (9.64)$$

que é uma superposição de *autoestados do momento*.

Temos aqui o 1º exemplo de *degenerescência*: cada autovalor  $E \geq 0$  é *duplamente degenerado*, com duas autofunções linearmente independentes ( $+p$  e  $-p$ ), correspondendo à possibilidade de a partícula se mover para a direita ou para a esquerda, com a mesma energia  $E$ .

Como as autofunções do momento,  $\varphi_E(x)$  é uma autofunção *imprópria*, não normalizável. Uma interpretação possível dos resultados, por exemplo de

$$\boxed{\Psi_E^+(x, t) = C_+ e^{ipx/\hbar} e^{-iEt/\hbar}} \quad (9.65)$$

é que representa não uma partícula única, mas um *feixe estacionário* de partículas de momento  $+p$  e de energia  $E$  (feixe monoenergético): A *densidade de partículas* no feixe é



$$\rho = |\psi_E^+|^2 = |C_+|^2 \quad (9.66)$$

e a *densidade de corrente* de partículas no feixe é dada pela (9.58),  $j = \rho v = \rho p/m$ . Podemos pensar numa experiência com o feixe como um grande número de repetições independentes de uma experiência com uma única partícula. Analogamente, a (9.64) representa, nessa interpretação, a superposição de dois feixes de partículas livres, um viajando para a direita e o outro para a esquerda.

### Pacotes de ondas

O estado mais geral possível de uma partícula livre em uma dimensão é obtido tomando uma expansão nas autofunções da energia (estados estacionários) como base:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(p) e^{ipx/\hbar} e^{-iEt/\hbar} dp \quad (9.67)$$

onde os autoestados do tipo  $C_+$  ( $C_-$ ) correspondem à integral de 0 a  $\infty$  (de  $-\infty$  a 0), e  $E = p^2/(2m)$ .

Pela teoria da integral de Fourier [cf.(9.51)], podemos representar dessa forma qualquer estado normalizável. A *Regra II* indica que  $|C(p)|^2 dp$  deve ser proporcional à *probabilidade de encontrar a partícula com momento entre  $p$  e  $p + dp$* .

Um estado *normalizável* da forma (9.67) chama-se um *pacote de ondas* de partículas livres.

O princípio de correspondência sugere que se possa empregar um pacote de ondas para representar uma partícula aproximadamente *localizada*.

Os exemplos de pacotes de ondas eletromagnéticas analisados na Seção 3.6, onde discutimos a relação entre tempo de coerência  $\Delta\tau$  e largura espectral  $\Delta\omega$ , obtendo, na (3.49),  $\Delta\omega \Delta\tau \sim 2\pi$ , podem ser aplicados à (9.51), pois, em ambos os casos, trata-se de uma integral de Fourier. Basta substituir  $t \rightarrow x$  e  $\omega \rightarrow k$  [cf.(3.52)].

Inferimos então que, se  $|c(k)|^2$  tem um pico de largura  $\Delta k$ , com centro em  $\bar{k}$ , e  $|\varphi(x)|^2$  tem um pico de largura  $\Delta x$ , com centro em  $\bar{x}$ , deve ser (fig. 9.2)

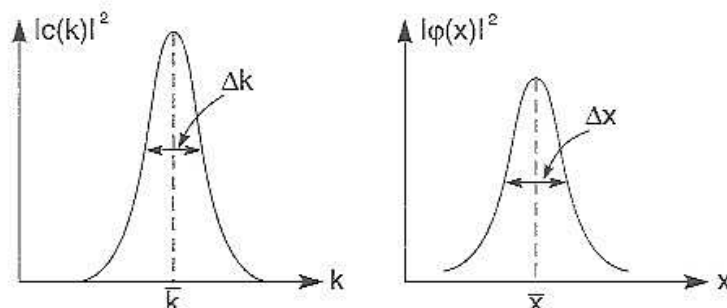


Fig. 9.2 Larguras de pacote em  $x$  e  $k$

$$\Delta x \Delta k \sim 2\pi \quad (9.68)$$

Como  $k = p/\hbar$  [cf.(9.49)], a (9.68) equivale a

$$\Delta x \Delta p \sim 2\pi\hbar = h \quad (9.69)$$

o que é consistente com a relação de incerteza (9.41) e fornece uma dedução heurística alternativa dessa relação. Para isto, interpretamos  $\Delta x$  e  $\Delta p$  como as incertezas (flutuações) em  $x$  e  $p$ , respectivamente, no pacote de ondas.

Analogamente, podemos esperar que seja

$$\bar{x} \approx \langle \hat{x} \rangle_\psi, \quad \hbar \bar{k} \approx \langle \hat{p} \rangle_\psi \quad (9.70)$$

e podemos usar a (9.67) para estudar a evolução temporal do centro de um pacote que, para  $t = 0$ , é dado pela (9.51).

Reescrevendo a (9.67) sob a forma [cf.(7.59)]

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad \tilde{c}(k) = \hbar c(p) \quad (9.71)$$

a relação entre  $\omega$  e  $k$  é dada por

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{(\hbar k)^2}{2m\hbar} \left\{ \begin{array}{l} \omega = \hbar \frac{k^2}{2m} \end{array} \right. \quad (9.72)$$

de modo que a velocidade de fase  $\omega/k$  varia com  $k$  ( $\therefore$  com o comprimento de onda): há *dispersão*.

Vimos no estudo da interferência (superposição) de ondas [Fís. Bás. 2, Seç. 5.5(c)] que, nesse caso, o pacote de ondas se propaga com a *velocidade de grupo*

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\bar{k}} \quad (9.73)$$

A (9.72) dá

$$v_g = \frac{\hbar \bar{k}}{m} = \frac{\langle \hat{p} \rangle_\psi}{m} \quad (9.74)$$

o que é consistente com o teorema de Ehrenfest: o pacote de ondas se propaga com a velocidade média da partícula.

Entretanto, devido à existência de dispersão, o pacote inicial tende a *deformar-se* ao longo da propagação. Além disso, a incerteza de velocidade  $\Delta p/m$ , para partículas livres, implica numa incerteza adicional  $\sim (\Delta p/m)t$  na largura  $\Delta x$  do pacote após um tempo  $t$ , ou seja, há um *alastramento* do pacote de ondas.

## 9.8 A equação de Schrödinger tridimensional

Para o movimento tridimensional de uma partícula de massa  $m$ , a função de onda continua obedecendo à equação de evolução (9.16), mas o 2.º membro agora é dado pela (9.14):

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x})\psi} \quad (9.75)$$

Esta é a equação de Schrödinger tridimensional dependente do tempo para uma partícula não-relativística.

A densidade de probabilidade é dada por

$$\boxed{p(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2} \quad (9.76)$$

com a condição de normalização

$$\boxed{\int |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x = 1} \quad (9.77)$$

onde a integral é estendida a todo o espaço.

A definição do conjugado hermiteano é

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \left( \int \phi^* (\hat{A} \psi) d^3x \right)^* = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \phi \rangle = \int \psi^* (\hat{A}^\dagger \phi) d^3x \quad (9.78)$$

$$\text{Se } \hat{A} = \hat{A}^\dagger, \int \psi^* (\hat{A} \phi) d^3x = \int (\hat{A} \psi)^* \phi d^3x$$

O operador de *posição*  $\hat{\mathbf{x}}$  é definido por

$$\hat{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (9.79)$$

e o operador *momento*  $\mathbf{p}$  por

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}_x \mathbf{i} + \hat{p}_y \mathbf{j} + \hat{p}_z \mathbf{k} = -i\hbar \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla \quad (9.80)$$

com

$$\hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2 \Delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^2 \\ 2m \end{array} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right. \quad (9.81)$$

Analogamente à (9.40), temos

$$\begin{aligned} \left[ \hat{x}, \hat{p}_x \right] &= \left[ \hat{y}, \hat{p}_y \right] = \left[ \hat{z}, \hat{p}_z \right] = i\hbar \\ \left[ \hat{x}_j, \hat{p}_k \right] &= i\hbar \delta_{jk} \end{aligned} \quad (9.82)$$

Os observáveis  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  [ou  $(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ ] são compatíveis, pois estão associados a graus de liberdade independentes:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{x}, \hat{y} \right] &= \left[ \hat{x}, \hat{z} \right] = \left[ \hat{y}, \hat{z} \right] = \left[ \hat{p}_x, \hat{p}_y \right] = \left[ \hat{p}_x, \hat{p}_z \right] = \left[ \hat{p}_y, \hat{p}_z \right] = 0 \\ &= \left[ \hat{x}, \hat{p}_y \right] = \dots = \left[ \hat{z}, \hat{p}_x \right] \end{aligned} \quad (9.83)$$

As (9.82) e (9.83) são as *regras de comutação canônicas* de Heisenberg.

A lei de conservação local da probabilidade se obtém de forma análoga à (9.54):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \psi^* (\hat{H} \psi) - (\hat{H} \psi)^* \psi \right] \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \right) (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) \end{aligned} \quad (9.84)$$

Temos (*Fís. Bás. 3*, Seç. 4.6)

$$\operatorname{div} (\psi^* \nabla \psi) = \psi^* \underbrace{\operatorname{div} (\nabla \psi)}_{\Delta \psi} + \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi \quad (9.85)$$

Intercambiando  $\psi^* \leftrightarrow \psi$  e subtraindo membro a membro, resulta

$$\operatorname{div} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* \quad (9.86)$$

de modo que a (9.84) dá

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (9.87)$$

onde a *densidade de corrente de probabilidade*  $\mathbf{j}$  é dada por

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (9.88)$$

que se reduz à (9.55) no caso unidimensional.

Um *autoestado do momento*  $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ , com

$$\mathbf{p} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = -i\hbar \nabla \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \quad (9.89)$$

é da forma

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = C e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})/\hbar} \quad (9.90)$$

pois, como é fácil verificar,

$$\operatorname{grad} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) = i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (9.91)$$

Qualquer função de onda normalizável pode ser expandida em autofunções do momento,

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 k \quad (9.92)$$

Esta *integral de Fourier* tridimensional generaliza a (9.51).

Os *estados estacionários* da equação de Schrödinger para partículas livres [ $V(\mathbf{x}) = 0$ ] são da forma (ondas planas monocromáticas)

$$\boxed{\Psi_E(\mathbf{x}, t) = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}} \quad \begin{array}{l} \text{Degenerescência infinita:} \\ \mathbf{k} \text{ aponta em qualquer direção do espaço} \end{array} \quad (9.93)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{k} = \mathbf{p} / \hbar, \quad \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\mathbf{p}^2}{2 m \hbar} = \frac{\hbar k^2}{2 m}} \quad (9.94)$$

A solução geral da equação de Schrödinger para *partículas livres* é um *pacote de ondas tridimensional*, que generaliza a (9.67):

$$\boxed{\Psi(\mathbf{x}, t) = \int \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})/\hbar} e^{-\frac{i \mathbf{p}^2}{\hbar 2 m} t} d^3 p} \quad (9.95)$$

que se reduz ao pacote inicial (9.92) para  $t = 0$ .

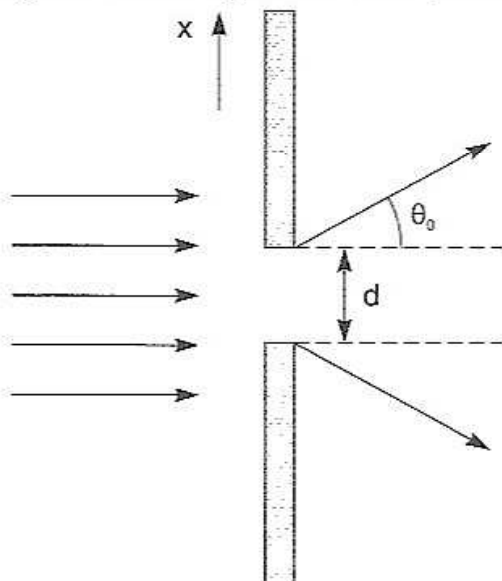
## 9.9 A relação de incerteza

As regras de comutação canônicas (9.82) implicam

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{1}{2} \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{1}{2} \hbar} \quad (9.96)$$

ao passo que todos os demais pares de observáveis podem ser determinados conjuntamente com precisão.

Podemos visualizar a origem desses resultados analisando experimentos concebíveis para localização de uma partícula.



(a) Diafragma

Poderíamos tratar de localizar a posição numa dada direção  $x$  fazendo um feixe de elétrons (por exemplo) incidir perpendicularmente sobre um diafragma de largura  $d$  na direção  $x$  (fig. 9.3), o que levaria a uma incerteza

$$\Delta x \sim d \quad (9.97)$$

na coordenada  $x$  dos elétrons que atravessam o diafragma. Entretanto, embora se

Fig. 9.3 Localização por um diafragma



pudesse ter  $p_x = 0$  ( $\therefore \Delta p_x = 0$ ) antes do atravessamento, isto deixa de ser verdade depois, devido à difração (propriedades ondulatórias do elétron).

Com efeito, conforme vimos no tratamento da difração por uma fenda (Seç. 4.7), a abertura angular do feixe difratado é  $\sim \theta_0$ , onde [cf.(7.55)]

$$\text{sen } \theta_0 \approx \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{p d} \quad (9.98)$$

o que leva a uma incerteza em  $p_x$  da ordem de

$$\Delta p_x \sim p \text{ sen } \theta_0 \sim \frac{h}{d} \quad (9.99)$$

Combinando as (9.97) e (9.99), resulta

$$\Delta x \Delta p_x \sim h \quad (9.100)$$

(b) O "microscópio" de Heisenberg

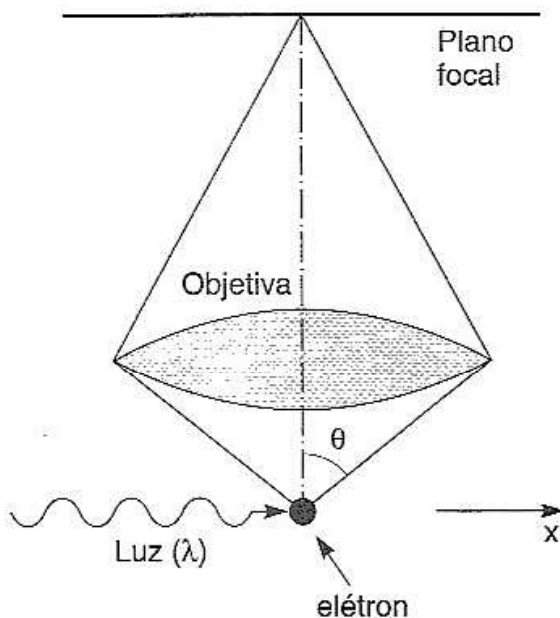


Fig. 9.4 "Microscópio" de Heisenberg

Poderíamos tentar localizar o elétron observando-o num (super) microscópio. Entretanto, devido à natureza ondulatória da luz, como vimos na Seç. 4.8, a localização não pode ser mais precisa do que o poder separador do microscópio, dado por

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\text{sen } \theta} \quad (9.101)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz empregada e  $\theta$  é a abertura angular da objetiva (fig. 9.4).

Por outro lado, devido à natureza corpuscular da luz, o espalhamento de luz pelo elétron modifica seu momento. Para minimizar a transferência de momento, podemos espalhar um único fóton.

Mas não sabemos em que direção, dentro do ângulo  $\theta$  de abertura da objetiva, o fóton será espalhado. Logo, há uma incerteza  $\Delta p_x$  na componente  $x$  do momento do fóton espalhado, dada por

$$\Delta p_x \sim p \sin \theta = \hbar k \sin \theta = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \theta \quad (9.102)$$

Pela conservação do momento (recuo), essa é também a incerteza  $\Delta p_x$  na componente  $p_x$  do *elétron*. As (9.101) e (9.102) dão

$$\Delta x \Delta p_x \sim 2\pi\hbar = h \quad (9.103)$$

## PROBLEMAS

1. Demonstre que

$$\boxed{[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]}$$

2. Use a relação do Problema 1 para calcular  $\left[\hat{x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$  a partir de  $\left[\hat{x}, \frac{\partial}{\partial x}\right]$ .

3. Calcule

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^n\right]$$

para  $n$  inteiro.

4. Os operadores de *paridade*  $\hat{P}$  e de *translação* por  $a$ ,  $\hat{T}_a$ , em uma dimensão, são definidos por

$$\hat{P} \varphi(x) = \varphi(-x), \quad \hat{T}_a \varphi(x) = \varphi(x+a)$$

Calcule os hermiteanos conjugados de  $\hat{P}$  e de  $\hat{T}_a$ .

5. Calcule  $\rho$  e  $j$  para o estado estacionário de energia  $E$  de uma partícula livre

$$\psi_E(x, t) = [C_+ \exp(ipx / \hbar) + C_- \exp(-ipx / \hbar)] \exp(-iEt / \hbar)$$

6. Para a equação de Schrödinger tridimensional (9.75), demonstre o *teorema de Ehrenfest*

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_\psi = -\langle \text{grad } V \rangle_\psi$$

7. Demonstre que se  $\hat{A}$  é um operador hermiteano,

$$\langle \hat{A}^2 \rangle_\psi \geq 0$$

em qualquer estado  $\psi$ .

8. Para o movimento num potencial unidimensional  $V(x)$ , demonstre que, em qualquer estado  $\psi$ ,

$$m \frac{d}{dt} \langle \hat{x}^2 \rangle_\psi = \langle \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle_\psi$$

# 10

## SISTEMAS QUÂNTICOS SIMPLES

Vamos considerar agora uma série de exemplos simples de sistemas quânticos, a fim de ilustrar alguns efeitos quânticos importantes. Em cada caso, faremos uso, dentro de suas limitações, da relação com a mecânica clássica, bem como da analogia ótico-mecânica e da imagem ondulatória clássica. Discussões mais completas são dadas em cursos de física atômica, física nuclear, física da matéria condensada, etc...

### 10.1 Estados estacionários em uma dimensão

Conforme vimos na Seq. 9.1, um estado estacionário de energia  $E$  é descrito por uma função de onda

$$\psi_E(x, t) = \varphi_E(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (10.1)$$

onde

$$\hat{H} \varphi_E(x) = E \varphi_E(x) \quad (10.2)$$

ou seja,  $\varphi_E$  é uma autofunção de energia  $E$ . O conjunto dos autovalores de  $\hat{H}$  dá o *espectro de energia* do sistema.

Para o movimento num potencial unidimensional, a (10.2) fica (omitindo o índice  $E$ )

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V(x)\varphi = E\varphi \equiv \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 \varphi \quad (10.3)$$

onde  $k_0$  seria o número de onda na ausência do potencial ( $V = 0$ ). A (10.3) equivale a

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + n^2(x) k_0^2 \varphi = 0 \quad (10.4)$$

onde

$$n^2(x) = 1 - \frac{V(x)}{E} \quad (10.5)$$

é o quadrado do *índice de refração* na analogia ótico-mecânica [cf. (7.64), (7.65)].

Na mecânica clássica, para uma partícula de energia total  $E$  dada,

$$E - V(x) = \frac{1}{2m} p^2(x) \quad (10.6)$$

é a *energia cinética da partícula na posição  $x$* , contanto que seja  $E > V(x)$ , caso em que a posição  $x$  é *acessível* ao movimento da partícula (região *classicamente permitida*).

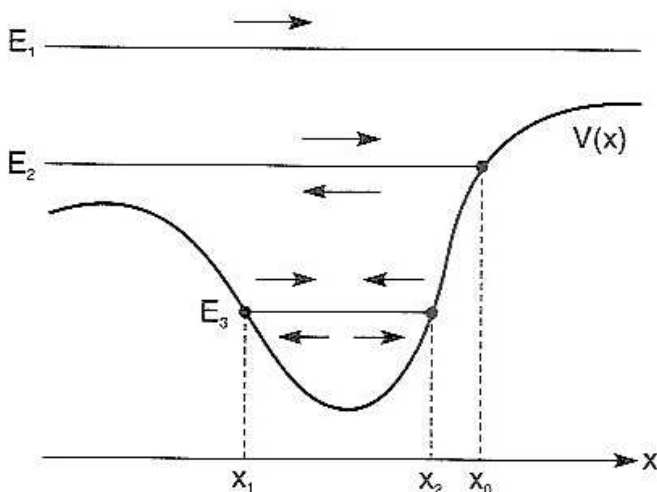


Fig. 10.1 Pontos de inversão

Vimos na *mecânica clássica* (Fís. Bás. 1, Seç. 6.5) que, num potencial  $V(x)$  como o da fig. 10.1, as regiões permitidas variam com a energia  $E$  da partícula. Para uma energia  $E_1 > V(x)$  para  $V(x)$ , a reta toda é permitida e o movimento é *ilimitado*.

Já para  $E = E_2$  (fig. 10.1), há um ponto  $x_0$  onde

$$E_2 = V(x_0) \quad (10.7)$$

que se chama *ponto de inversão* ou de *retorno*, onde  $p(x)$  se anula e troca de sinal: o movimento da partícula pode ser *ilimitado à esquerda* mas ela não pode ultrapassar  $x_0$ : se vier de  $-\infty$ , ela inverte o sentido do movimento ao atingir  $x_0$  e retorna a  $-\infty$ .

Para uma energia  $E = E_3$  (fig. 10.1), o movimento é *confinado* à região entre os pontos de retorno  $x_1$  e  $x_2$ : a partícula *oscila* indefinidamente entre esses pontos.

Já se pensarmos do ponto de vista da *ótica ondulatória*, numa região onde  $n(x)$  é constante, com  $E > V$  (região permitida), a solução da (10.4) é da forma

$$\varphi(x) = A_+ e^{i n k_0 x} + A_- e^{-i n k_0 x} \quad (10.8)$$

representando ondas que podem propagar-se nos dois sentidos.

Entretanto, se  $E < V$  (região classicamente *proibida*), com  $n^2 < 0$  na (10.5), podemos tomar

$$n = i \eta, \quad \eta \text{ real} \quad (10.9)$$

e ainda existem soluções do tipo

$$\varphi(x) = A_{\pm} e^{\mp \eta k_0 x} \quad (10.10)$$

que são *exponencialmente atenuadas* para a direita ou para a esquerda. Encontramos soluções desse tipo, chamadas de *ondas evanescentes*, no estudo da reflexão total (Seç. 5.10.).

## 10.2 Degrau de potencial

É o potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \equiv \text{região 1}) \\ V \text{ (constante)} & (x > 0 \equiv \text{região 2}) \end{cases} \quad (10.11)$$

Podemos tomar  $V > 0$ .



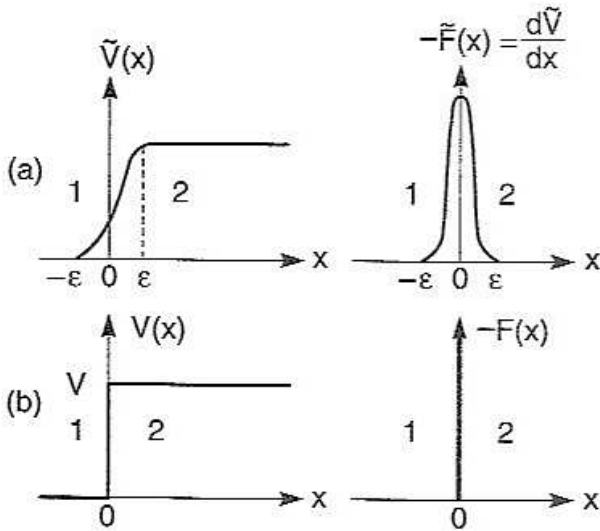


Fig. 10.2 Degrau de potencial como limite

Podemos pensar em  $V(x)$  como limite de um potencial  $\tilde{V}(x)$  em que a transição entre os dois valores da (10.11) se dá de forma contínua, numa região  $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), quando  $\epsilon \downarrow 0$  (fig. 10.2). A força clássica

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (10.12)$$

é o limite da força  $\tilde{F}(x)$ , e representa (fig. 10.2) uma força impulsiva, que no limite é  $= 0$  para  $x \neq 0$  e  $\rightarrow -\infty$  p/  $x = 0$ .

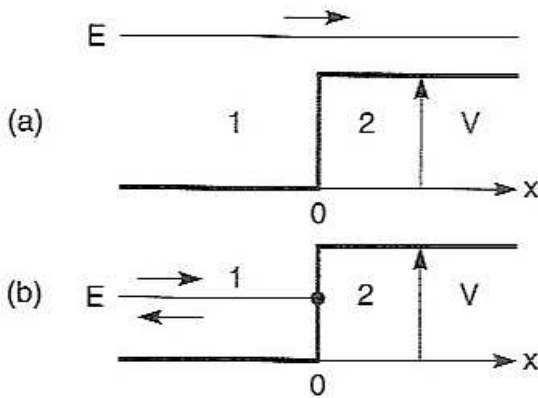


Fig. 10.3 Movimento clássico num degraude potencial

Na mecânica clássica, a força  $F(x) < 0$  tenderia a *reduzir* o momento  $p$  de uma partícula que se movesse da esquerda para a direita, no momento de sua passagem pela origem (desaceleração), se a energia  $E$  da partícula é  $> V$  [fig. 10.3(a)]. O momento da partícula nas regiões 1 e 2 é dado nesse caso por

$$p_1 = \sqrt{2mE}, \quad p_2 = \sqrt{2m(E - V)} < p_1 \quad (10.13)$$

Se  $E < V$  [fig. 10.3(b)], a origem é um *ponto de retorno*: a partícula, vindo da região 1 com  $p_1 > 0$ , será “totalmente refletida” em  $x = 0$ .

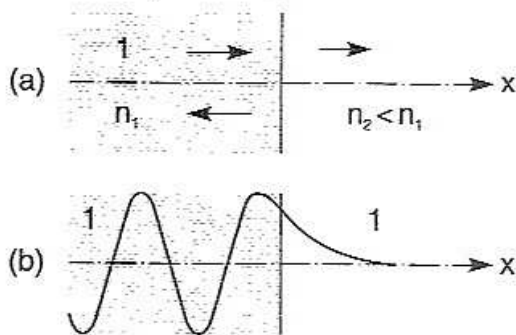


Fig. 10.4 Análogo ótico do degraude potencial

Do ponto de vista da analogia com a ótica, no caso (a), teríamos um índice de refração relativo  $n_{12} = p_2/p_1 < 1$ , e uma onda incidente vinda da região 1 seria *parcialmente refletida e parcialmente transmitida*. No caso (b), como nas (10.9) e (10.10), haveria reflexão total, mas com uma onda evanescente (exponencialmente atenuada) no meio 2 (“oticamente menos denso”).

Vejamos agora o que acontece na mecânica quântica.

$$(a) \quad E > V$$

Nesse caso, a equação de Schrödinger (10.4) nas regiões 1 e 2 fica

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1}{d x^2} + k_1^2 \varphi_1 = 0 \quad (x < 0), \quad k_1 = \frac{p_1}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 m E}}{\hbar} \\ \frac{d^2 \varphi_2}{d x^2} + k_2^2 \varphi_2 = 0 \quad (x > 0), \quad k_2 = \frac{p_2}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 m (E - V)}}{\hbar} \end{aligned} \quad (10.14)$$

com as soluções gerais

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x} \\ \varphi_2(x) &= C e^{i k_2 x} + D e^{-i k_2 x} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Para definir uma solução, temos de especificar *condições de contorno*, tanto no *infinito* ( $x \rightarrow \pm \infty$ ) como na *origem* ( $x = 0$ ), onde  $V(x)$  é descontínuo.

#### *Condições no infinito*

Como na mecânica clássica, podemos ter uma partícula (ou feixe de partículas) incidente da esquerda para a direita (neste caso  $D = 0$ ) ou vice-versa (neste caso  $A = 0$ ). O caso geral é uma superposição dos dois, e basta considerar o 1.º caso, em que  $A$  é dado e  $B$  e  $C$  têm de ser obtidos:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \underbrace{A e^{i k_1 x}}_{\text{incidente}} + \underbrace{B e^{-i k_1 x}}_{\text{refletido}} \\ \varphi_2(x) &= C e^{i k_2 x} \quad (\text{transmitido}) \end{aligned} \quad (10.16)$$

O fato de haver duas soluções independentes com a mesma energia  $E$  (uma com  $D = 0$  e outra com  $A = 0$ ) corresponde à mesma *dupla degenerescência* já encontrada para partículas livres: a possibilidade de movimento em dois sentidos opostos.

*Condição de contorno em  $x = 0$*

O potencial  $V(x)$  é descontínuo em  $x = 0$ .

Por outro lado, como a solução é estacionária, a (10.1) dá

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_E(x, t)|^2 = \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_E(x)|^2 = 0 \quad (10.17)$$

ou seja, a densidade de probabilidade é independente do tempo (estacionária).

Se tomarmos então, na (9.57),  $x_2 = \varepsilon$ ,  $x_1 = -\varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, vem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(x, t) dx = 0 = j(\varepsilon, t) - j(-\varepsilon, t)$$

ou seja, fazendo  $\varepsilon \downarrow 0$  (por valores positivos),

$$\boxed{j(+0, t) = j(-0, t)} \quad (10.18)$$

*A corrente de probabilidade deve permanecer contínua na origem, apesar da descontinuidade do potencial (por mais forte razão, isto vale em  $\forall$  outro ponto  $x$ ).*

Isso implica, pela expressão de  $j$ ,

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1(-0) &= \varphi_2(+0) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(-0) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(+0) \end{aligned}} \quad (10.19)$$

ou seja, *a função de onda e sua primeira derivada em relação a  $x$  devem ser contínuas.*

Pelas (10.16), isso dá

$$\left. \begin{aligned} A + B &= C \\ i k_1(A - B) &= i k_2 C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) C \\ B &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) C \end{aligned}$$

o que leva a

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \text{amplitude de reflexão} \\ \frac{C}{A} &= \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} = \text{amplitude de transmissão} \end{aligned}} \quad (10.20)$$

Pela (9.58), as correntes incidente, refletida e transmitida são dadas por [cf. (10.16)]:

$$j_{\text{inc}} = |A|^2 v_1, \quad j_{\text{refl}} = -|B|^2 v_1, \quad j_{\text{trans}} = |C|^2 v_2 \quad (10.21)$$

onde  $v_j = \hbar k_j / m$  ( $j = 1, 2$ ). Na interpretação em termos de feixes de partículas, as correntes são proporcionais aos números por unidade de tempo de partículas incidentes, refletidas e transmitidas, respectivamente. Logo, as *probabilidades de reflexão* ( $r$ ) e *transmissão* ( $t$ ) são dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} r &= -\frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{inc}}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \\ t &= \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{inc}}} = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{C}{A} \right|^2 \end{aligned}} \quad (10.22)$$

e as (10.20) dão

$$\begin{aligned}
 r &= \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \\
 t &= \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}
 \end{aligned}
 \tag{10.23}$$

que satisfazem a

$$\boxed{r + t = 1}
 \tag{10.24}$$

conforme deveria ser (soma das probabilidades = 1).

Em termos do “índice de refração” relativo

$$\boxed{n = \frac{k_2}{k_1} = \frac{p_2}{p_1}}
 \tag{10.25}$$

a (10.23) dá

$$\boxed{r = \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 \quad t = \frac{4n}{(n + 1)^2}}
 \tag{10.26}$$

que são idênticos à refletividade e à transmissividade de uma interface entre dois meios transparentes na incidência  $\perp$  [cf. (5.72)]

Temos então um efeito tipicamente quântico, conseqüência das propriedades ondulatórias das partículas: na mecânica clássica, uma partícula com  $E > V$  é “totalmente transmitida”, ao passo que quanticamente ela tem uma probabilidade  $> 0$  de ser *refletida* (embora tenha energia suficiente para ultrapassar o degrau de potencial).

Em particular, se for  $(E - V) \ll V$ , ou seja, se a energia estiver muito pouco acima do topo do degrau, a (10.14) mostra que será  $p_2 \ll p_1$  (a partícula é fortemente desacelerada pelo degrau, na mecânica clássica) e a (10.23)  $\Rightarrow r \approx 1$ , ou seja a reflexão é quase total, situação típica para uma onda numa descontinuidade forte (para  $E \gg V$ , temos  $r \rightarrow 0$ : a partícula quase não é afetada pelo potencial).

$$\boxed{(b) \ 0 \leq E < V}$$

Nesse caso, a solução anterior continua valendo, mas temos de tomar, na (10.14) [cf. (10.9)],

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} = \pm i \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} = \pm i |k_2| \quad (10.27)$$

de modo que a 2.<sup>a</sup> das (10.16) dá

$$\varphi_2(x) = C e^{i k_2 x} = C e^{\mp |k_2| x} \quad (x > 0)$$

Mas o sinal inferior é inaceitável, pois corresponde a um *crescimento exponencial* para  $x \rightarrow \infty$ . Logo,

$$k_2 = i |k_2|, \quad \varphi_2(x) = C e^{-|k_2| x} = C e^{-\sqrt{2m(V-E)} x / \hbar} \quad (10.28)$$

que corresponde a uma onda evanescente.

A (10.20) dá

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - i |k_2|}{k_1 + i |k_2|} = e^{-2i\eta}, \quad \eta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{|k_2|}{k_1} \right) \quad (10.29)$$

(o quociente de dois complexos conjugados é um *fator de fase*). Substituindo na (10.22),

$$r = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1 \quad (10.30)$$

ou seja, temos neste caso *reflexão total*, como na mecânica clássica.

Levando a (10.29) na (10.16), obtemos

$$\varphi_1(x) = A \left[ e^{i k_1 x} + e^{-i(k_1 x + 2\eta)} \right] = A e^{-i\eta} \underbrace{\left[ e^{i(k_1 x + \eta)} + e^{-i(k_1 x + \eta)} \right]}_{2 \cos(k_1 x + \eta)}$$

ou ainda, como  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{C}{\cos \eta} \cos(k_1 x + \eta) \\ \varphi_2(x) &= C e^{-|k_2| x} \end{aligned} \quad (10.31)$$



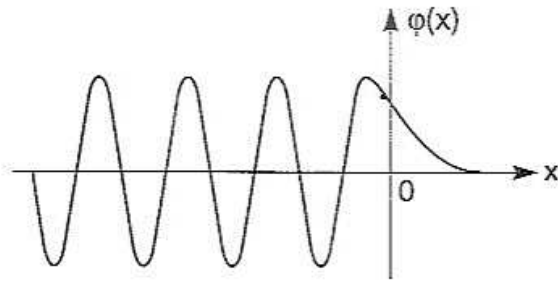


Fig. 10.5 Penetração na região proibida

mostrando que a solução na região 1 é uma *onda estacionária* (interferência entre incidente e refletida), que penetra na região 2 (fig. 10.5) como uma onda evanescente, análoga às que encontramos na reflexão total (Sec. 5.10). A *profundidade de penetração* é da ordem de

$$\frac{1}{|k_2|} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}} \quad (10.32)$$

tanto maior quanto mais próxima estiver a energia do topo do degrau,  $E = V$ .

Temos portanto uma probabilidade  $\neq 0$  de que a partícula seja encontrada na *região classicamente proibida*,  $E < V$ . Esse é um efeito tipicamente ondulatório. Como na reflexão total, a solução estacionária não permite ver como ocorre a penetração na região proibida: para isto, teríamos de construir um *pacote de ondas*, superpondo diferentes energias (incluindo soluções com  $E > V$ , para as quais a região é permitida).

Observamos ainda que, para  $E < V$ , não existem soluções com partículas incidentes da região 2 para a 1, de modo que, neste caso, os autovalores da energia *não são degenerados*.

#### Limite de parede impenetrável ( $V \rightarrow \infty$ )

Se fizermos  $V \rightarrow \infty$ , a (10.32) mostra que a profundidade de penetração  $\rightarrow 0$ , a (10.28) que  $\varphi_2(x) \rightarrow 0$ , e a (10.29) que  $B/A \rightarrow -1$  ( $\eta \rightarrow \pi/2$ ), de forma que as (10.16) ficam

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2iA \operatorname{sen}(k_1 x) \\ \varphi_2(x) = 0 \end{cases} \quad (10.33)$$

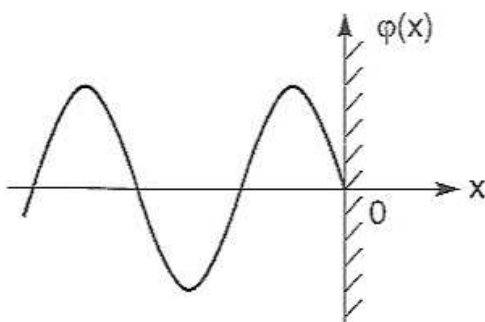


Fig. 10.6 Parede impenetrável

correspondendo à condição de contorno

$$\psi(0, t) = 0 \quad (10.34)$$

associada a uma *parede impenetrável* (fig. 10.6). Nesse caso limite, a derivada  $\partial\psi/\partial x$  é descontínua na origem.

### 10.3 Partícula confinada

Na Seção 10.2, ilustramos soluções dos tipos  $E_1$  e  $E_2$  da fig. 10.1, correspondentes a movimentos ilimitados, característicos de processos de *espalhamento*, em que a energia tem um *espectro contínuo*.

Vamos ver agora um exemplo simples de solução do tipo  $E_3$ , em que o movimento da partícula é *confinado* a uma região limitada do espaço: classicamente, é um movimento oscilatório.

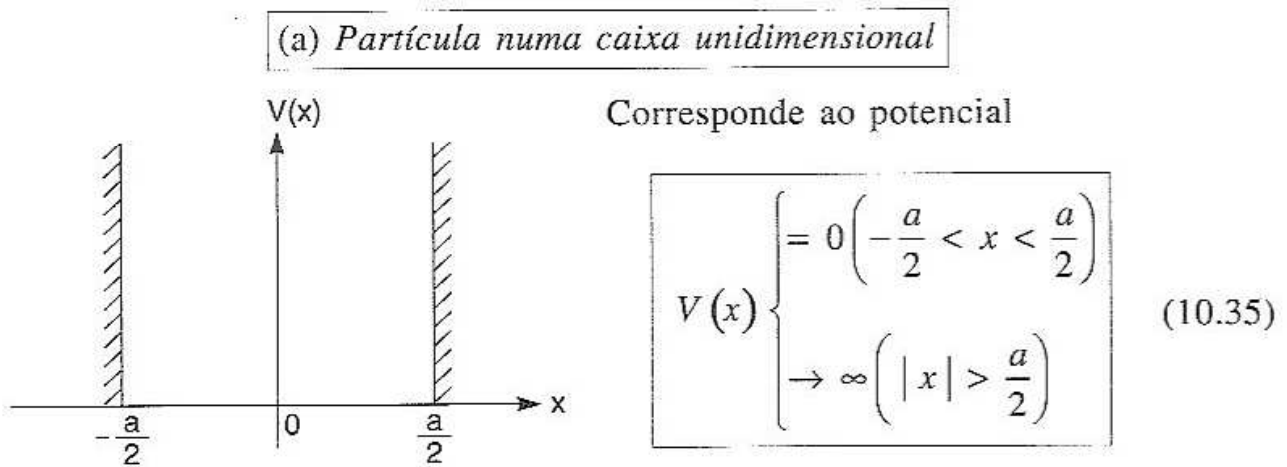


Fig. 10.7 Caixa de paredes impenetráveis

ilustrado na fig. 10.7.

Na mecânica clássica, poderíamos pensar numa bolinha que oscila entre duas paredes impenetráveis, colidindo e sendo totalmente refletida por cada uma delas. A largura da caixa é  $a$ .

Do ponto de vista de ondas clássicas, temos propagação entre duas paredes totalmente refletoras.

A função de onda  $\varphi(x)$  só é  $\neq 0$  dentro da caixa, onde satisfaz

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \left(|x| \leq \frac{a}{2}\right) \quad (10.36)$$

Nas paredes, pela (10.34), devem ser satisfeitas as *condições de contorno*

$$\varphi\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0 \quad (10.37)$$

A solução geral da (10.36) é

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (10.38)$$

Para aplicar as (10.37), é conveniente introduzir a notação

$$z = e^{ika/2} \quad \left\{ \begin{array}{l} z^* = e^{-ika/2} \end{array} \right. \quad (10.39)$$

As (10.37) ficam então

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ x = -\frac{a}{2} \end{array} \right\} \begin{cases} zA + z^*B = 0 \\ z^*A + zB = 0 \end{cases} \quad (10.40)$$

Para que esse sistema homogêneo nas incógnitas  $A$  e  $B$  tenha solução não-trivial, tem de ser

$$0 = \begin{vmatrix} z & z^* \\ z^* & z \end{vmatrix} = z^2 - z^{*2} = e^{ika} - e^{-ika} = 2i \operatorname{sen}(ka) \quad (10.41)$$

o que só é possível para

$$k \equiv k_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.42)$$

pois  $n = 0$  daria  $\varphi(x) = A + B = 0$ , solução trivial.

Logo,

$$z = z_n = e^{in\pi/2} = \begin{cases} \pm 1 & (n \text{ par}) \\ \pm i & (n \text{ ímpar}) \end{cases} \quad (10.43)$$

Para  $n$  par,  $z$  é real, de modo que as (10.40) dão, juntamente com a (10.38),

$$A + B = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -B \\ \varphi_n(x) = A \left( e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right) \end{array} \right.$$

$$\text{e } n \text{ ímpar, } z = -z^* \quad \left. \right\} A - B = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = B \\ \varphi_n(x) = A \left( e^{ik_n x} + e^{-ik_n x} \right) \end{array} \right.$$

Finalmente

$$\left. \begin{array}{l} n = 1, 3, 5, \dots \left\{ \varphi_n(x) = N_n \cos(k_n x) \right\} \\ n = 2, 4, 6, \dots \left\{ \varphi_n(x) = N'_n \text{sen}(k_n x) \right\} \end{array} \right\} \left( k_n \equiv \frac{n\pi}{a} \right) \quad (10.44)$$

onde  $N_n$  e  $N'_n$  são fatores de normalização; valores negativos de  $n$  não dão auto-funções novas.

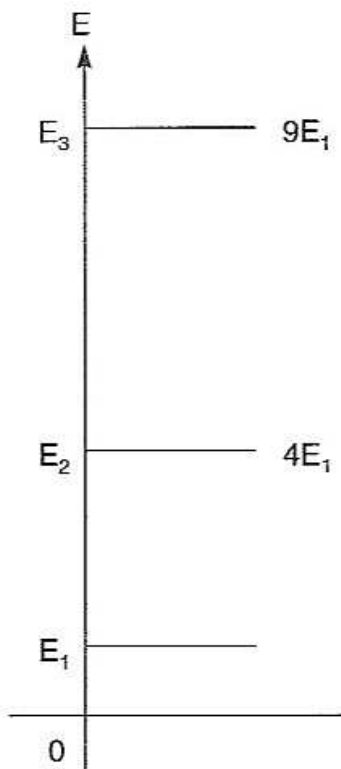
Pela (10.36), os autovalores correspondentes da energia são

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \overbrace{\left( \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} \right)}^{E_1} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10.45)$$

### Propriedades das soluções

#### (i) Espectro discreto

Na mecânica clássica, uma partícula poderia oscilar entre as paredes com qualquer energia  $E \geq 0$ .



Quanticamente, o espectro de energia é *discreto*: a energia é *quantizada*, podendo assumir somente os valores (10.45), que dão os *níveis de energia* da partícula (fig. 10.8). Para cada nível, há uma só auto-função independente, ou seja, os níveis são *não-degenerados*.

*O espectro discreto é característico do confinamento.*

Fig. 10.8 Níveis de energia da partícula confinada

## (ii) A “energia de incerteza”

A energia mínima que a partícula pode ter (*estado fundamental*) é

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} \quad (10.46)$$

Vamos ver que essa energia mínima está associada ao princípio de incerteza. Com efeito, as paredes impenetráveis confinam a partícula à região  $|x| < a/2$ , de forma que a *incerteza na posição* da partícula é

$$\Delta x \leq a \quad (10.47)$$

Pela relação de incerteza, isso implica numa incerteza em momento

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2 a} \quad (10.48)$$

e numa energia mínima (a energia da partícula é puramente cinética)

$$\frac{(\Delta p)^2}{2 m} = \frac{\hbar^2}{8 m a^2} \quad (10.49)$$

A (10.46) é dessa ordem de grandeza. Logo, a energia do estado fundamental pode ser pensada como “*energia de localização*” ou “*energia de incerteza*”. Note o caráter “positivo” da relação de incerteza.

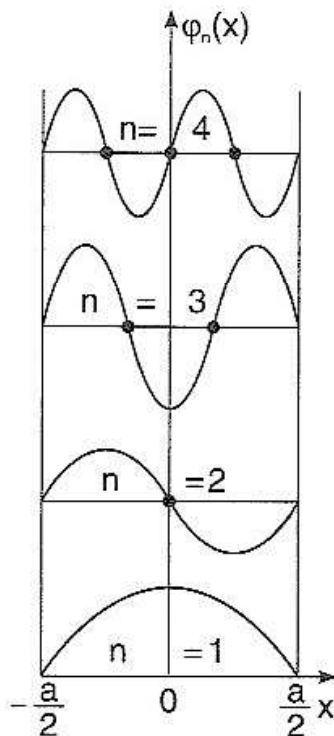


Fig. 10.9 Autofunções da partícula confinada

## (iii) Autofunções

As (10.44) mostram que as autofunções (fig. 10.9) são idênticas aos *modos normais* de vibração de uma corda vibrante presa nas extremidades (*Fís. Bás. 2, Sec. 5.7*), que satisfazem exatamente à mesma eq. (10.36) e às mesmas condições de contorno (10.37).

O caráter discreto do espectro de oscilações é característico das *ondas confinadas* (membranas vibrantes, cavidades ressonantes): é uma propriedade *ondulatória*. Como de Broglie havia observado, essa é a origem dos números inteiros nos autovalores da energia.

(iv) *Número de nodos*

Não contando os nodos (zeros) nos extremos  $\pm a/2$ , vemos que a função de onda do *estado fundamental* ( $n = 1$ ) não tem nodos; para o estado  $E_n$ , que é o  $(n - 1)$ -ésimo *estado excitado*, há  $(n - 1)$  nodos.

Intuitivamente, a razão desse resultado é que funções de onda com mais nodos oscilam mais, portanto têm momento (proporcional ao gradiente) e energia cinética mais elevados.

(v) *Paridade*

Com a escolha de origem que fizemos, o potencial (10.35) é uma função *par* de  $x$ :

$$\boxed{V(-x) = V(x)} \quad (10.50)$$

Como  $\partial^2/\partial x^2$  não se altera pela transformação  $x \rightarrow -x$ , o mesmo vale para o hamiltoniano

$$\boxed{\hat{H}(-x) = \hat{H}(x)} \quad (10.51)$$

Logo,

$$\boxed{\hat{H}\varphi_E(x) = E\varphi_E(x) \Rightarrow \hat{H}\varphi_E(-x) = E\varphi_E(-x)} \quad (10.52)$$

ou seja,  $\varphi_E(-x)$  é uma autofunção associada ao *mesmo valor*  $E$  da energia.

Como as autofunções, nesse caso, não são degeneradas, isso implica

$$\varphi_E(-x) = \lambda \varphi_E(x) \quad (10.53)$$

onde  $\lambda$  é uma constante. Trocando  $x$  por  $-x$ , vem:  $\varphi_E(x) = \lambda \varphi_E(-x)$ , e, substituindo na (10.53),

$$\varphi_E(-x) = \lambda^2 \varphi_E(-x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 = 1 \\ \lambda = \pm 1 \end{array} \right. \quad (10.54)$$

Levando na (10.53),



$$\boxed{\varphi_E(-x) = \pm \varphi_E(x)} \quad (10.55)$$

Logo, as autofunções têm *paridade definida*, isto é, são necessariamente *pares* ou *ímpares*, como conseqüência da *invariância* do hamiltoniano na transformação (10.51) ( $x \rightarrow -x$ ). Efetivamente, na (10.44),  $n$  ímpar leva a autofunções *pares* e  $n$  par a autofunções *ímpares* [ $\varphi_n(-x) = -\varphi_n(x)$ ].

(vi) *Ortonormalidade e "completeza"*.

Para calcular os fatores de normalização nas (10.44), usamos a condição de normalização:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} N_n^2 \\ N_n'^2 \end{Bmatrix} \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \begin{Bmatrix} \cos^2 \\ \text{sen}^2 \end{Bmatrix} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) dx = \\ & = \begin{Bmatrix} N_n^2 \\ N_n'^2 \end{Bmatrix} \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} dx}_{=a} \pm \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx}_{=0} \right] = 1 \end{aligned}$$

que leva a

$$\boxed{N_n = N_n' = \sqrt{\frac{2}{a}}} \quad (10.56)$$

de modo que

$$\boxed{\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}} \quad (10.57)$$

formam uma *base ortonormal* de funções (completa) no intervalo  $(-a/2, a/2)$ , permitindo que qualquer função  $\varphi(x)$  quadraticamente integrável (normalizável) que se anula nos extremos desse intervalo possa ser expandida sob a forma

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{a} x \right] + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi}{a} x \right) \right\} \quad (10.58)$$

onde os coeficientes de expansão  $a_n$  e  $b_n$  se calculam projetando sobre os vetores da base

$$a_n = \langle \varphi_n | \varphi \rangle_{n \text{ ímpar}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \varphi(x) \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{a} x \right] dx$$

$$b_n = \langle \varphi_n | \varphi \rangle_{n \text{ par}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \varphi(x) \operatorname{sen} \left[ \frac{2n\pi}{a} x \right] dx \quad (10.59)$$

Do ponto de vista matemático, a (10.58) representa uma *expansão em série de Fourier*, e as (10.59) dão os *coeficientes de Fourier* dessa expansão. Trata-se de uma generalização ao *espaço de Hilbert* (dimensão infinita) da representação de um vetor em termos de suas componentes em eixos ortogonais.

### (b) Partícula sobre um arco circular

Como segundo exemplo de movimento confinado, vamos considerar um sistema quântico que seria o análogo de uma partícula clássica vinculada a se mover sobre um arco circular (fig. 10.10) de raio  $a$  (como uma conta que desliza sobre um aro)

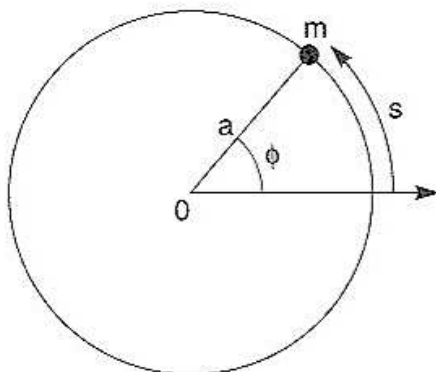


Fig. 10.10 Partícula num aro circular

A coordenada que corresponde a  $x$  é

$$s = a\phi \quad (10.60)$$

o *arco* de círculo descrito pela partícula após percorrer um ângulo  $\phi$  a partir de uma direção fixa.

Por conseguinte, o que corresponde aqui ao operador *momento* é

$$\hat{p}_\phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{i\hbar}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (10.61)$$

Supomos que, além do vínculo, nenhuma outra força atua sobre a partícula, de modo que o hamiltoniano é o de uma partícula *livre ao longo do círculo*,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}_\phi^2 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (10.62)$$

O sistema, nesse sentido, ainda é unidimensional, mas a diferença com a reta é que a circunferência se fecha, *confinando* a partícula a uma região finita. Embora  $\phi$  possa crescer indefinidamente, os pontos  $\phi$  e  $\phi + 2j\pi$  ( $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) correspondem ao mesmo ponto do espaço, de forma que podemos impor uma condição de *periodicidade* à função de onda:

$$\psi(\phi + 2j\pi) = \psi(\phi) \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.63)$$

Procuramos inicialmente os autovalores e autoestados do momento  $\hat{p}_\phi$ :

$$\hat{p}_\phi \psi_\lambda(\phi) = \lambda \psi_\lambda(\phi) \quad (10.64)$$

onde estamos chamando de  $\lambda$  os autovalores. Pela (10.61), a (10.64) equivale a

$$-\frac{i\hbar}{a} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \phi} = \lambda \psi_\lambda \left\{ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \phi} = \left( \frac{i\lambda a}{\hbar} \right) \psi_\lambda \right.$$

o que dá a solução

$$\psi_\lambda(\phi) = N \exp\left(\frac{i\lambda a}{\hbar} \phi\right) \quad (10.65)$$

$N$  sendo um fator de normalização.

A condição de periodicidade (10.63), com  $j = 1$ , dá

$$\psi_\lambda(\phi + 2\pi) = \exp\left(\frac{2\pi i \lambda a}{\hbar}\right) \psi_\lambda(\phi) = \psi_\lambda(\phi)$$

$$\therefore \exp\left(\frac{2\pi i \lambda a}{\hbar}\right) = 1 = \exp(2\pi i n)$$

levando aos *autovalores*

$$\lambda_n = \frac{n \hbar}{a} \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (10.66)$$

e às autofunções (já normalizadas)

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi} \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (10.67)$$

que obviamente satisfazem à condição de periodicidade.

### Momento angular

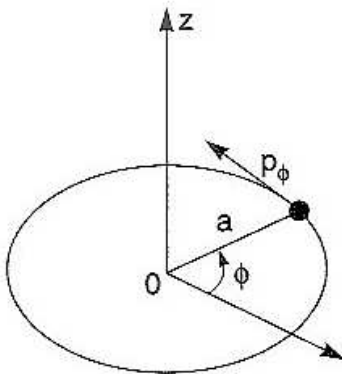


Fig. 10.11 Momento angular

Se tomarmos um eixo Oz perpendicular ao plano do círculo, passando pelo centro (fig. 10.11), podemos definir o operador *momento angular da partícula em relação ao eixo Oz*, por analogia com a mecânica clássica, como

$$\hat{l}_z = a \hat{p}_\phi = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (10.68)$$

e a (10.67) dá

$$\hat{l}_z \psi_n(\phi) = n \hbar \psi_n(\phi) \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (10.69)$$

Logo, as autofunções de  $\hat{p}_\phi$  são também *autoestados do momento angular*  $\hat{l}_z$ , e vemos que *o momento angular é quantizado em unidades de  $\hbar$*  (caso especial de um dos postulados de Bohr); a quantização (espectro discreto) aparece aqui como consequência direta do *confinamento* a uma região finita, expresso através da condição de periodicidade da função de onda no ângulo  $\phi$ .

Finalmente, como, pelas (10.62) e (10.68)

$$\hat{H} = \frac{1}{2 m a^2} \left( \hat{l}_z \right)^2 \quad (10.70)$$

os autoestados de  $\hat{l}_z$  também são *estados estacionários*, com

$$\hat{H} \psi_n(\phi) = \frac{1}{2 m a^2} (n \hbar)^2 \psi_n = E_n \psi_n(\phi) \quad (10.71)$$

onde os autovalores da energia, como consequência do confinamento, formam um espectro *discreto*,

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2 m a^2} n^2 \quad (10.72)$$

com

$$E_n = E_{-n} \quad (10.73)$$

ou seja, cada nível de energia é *duplamente degenerado* (exceto  $n = 0$ ), com as duas autofunções independentes  $\psi_n$  e  $\psi_{-n}$ .

Fisicamente, essas autofunções, correspondem aos dois sentidos opostos de percurso do círculo (como  $p$  e  $-p$  ao longo da reta).

Podemos entretanto substituir  $\psi_n$  e  $\psi_{-n}$  por duas combinações lineares independentes. Em particular,

$$\begin{aligned} \psi_n + \psi_{-n} &\propto \cos(n\phi) \\ \psi_n - \psi_{-n} &\propto \text{sen}(n\phi) \end{aligned} \quad (10.74)$$

permitem definir outro conjunto equivalente de autofunções de  $\hat{H}$ , que não são autofunções de  $\hat{p}_\phi$  nem de  $\hat{l}_z$ . Se as tomarmos dessa forma, elas terão nodos ao longo do círculo ( $0 \leq \phi < 2\pi$ ), cujo número aumenta com a energia do nível, de forma análoga ao que encontramos para o confinamento entre duas paredes impenetráveis.

## 10.4 Barreira de potencial retangular

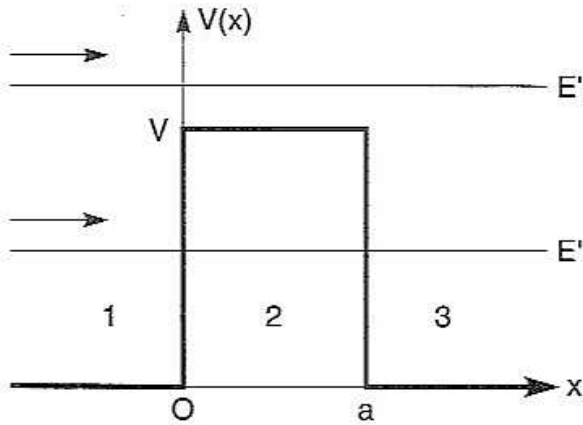


Fig. 10.12 Barreira retangular

Consideremos agora o potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \equiv \text{região 1} \\ V > 0 & (0 < x < a) \equiv \text{região 2} \\ 0 & (x > a) \equiv \text{região 3} \end{cases} \quad (10.75)$$

Temos duas situações possíveis:  $E = E' > V$  e  $0 < E'' < V$ ; em ambos os casos, vamos considerar estados estacionários com uma partícula (ou feixe) vindo da esquerda (fig. 10.12), e discutir a *probabilidade de transmissão* para a região 3.

$$(a) \ E > V$$

Vamos introduzir as notações [cf. (10.14)]

$$\begin{aligned} k_0 &\equiv \sqrt{2mE} / \hbar \\ k &\equiv \sqrt{2m(E - V)} / \hbar \equiv n k_0 \end{aligned} \quad (10.76)$$

As soluções nas regiões 1, 2, e 3 são análogas às que vimos para o degrau de potencial:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= A e^{i k_0 x} + B e^{-i k_0 x} \\ \varphi_2(x) &= C e^{i k x} + D e^{-i k x} \\ \varphi_3(x) &= E e^{i k_0 x} \end{aligned} \quad (10.77)$$

onde a *amplitude de transmissão*  $T$ , que estamos interessados em calcular, é definida por

$$T = E / A \quad (10.78)$$



pois  $A$  é a amplitude da onda incidente.

Temos agora *dois* pontos onde aplicar as condições de contorno:  $x = 0$  e  $x = a$ , com

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = ik_0 \left( Ae^{ik_0 x} - Be^{-ik_0 x} \right)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = ik \left( Ce^{ikx} - De^{-ikx} \right)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = ik_0 E e^{ik_0 x}$$

Vamos introduzir as notações

$$z_0 \equiv e^{ik_0 a}, \quad z \equiv e^{ika} \quad (10.79)$$

As condições de contorno dão então:

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow A + B = C + D \\ \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_2}{dx} \Rightarrow A - B = \frac{k}{k_0} (C - D) = n(C - D) \end{array} \right. \quad (10.80)$$

e

$$x = a \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = \varphi_3 \Rightarrow zC + \frac{1}{z}D = z_0 E \\ \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{d\varphi_3}{dx} \Rightarrow zC - \frac{1}{z}D = \frac{k_0}{k} z_0 E = \frac{z_0}{n} E \end{array} \right. \quad (10.81)$$

As (10.81) permitem exprimir  $C$  e  $D$  em função de  $E$ :

$$\begin{aligned}
 zC &= \frac{1}{2} z_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right) E & \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{z_0}{2n z} (n+1) E \\ D = \frac{z z_0}{2n} (n-1) E \end{array} \right. \\
 \frac{1}{z} D &= \frac{1}{2} z_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right) E & \left. \right.
 \end{aligned}
 \tag{10.82}$$

Por outro lado, as (10.80) dão:

$$A = \frac{1}{2} \left[ (n+1)C - (n-1)D \right]
 \tag{10.83}$$

e, pelas (10.82),

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z_0}{2n} \left[ \frac{(n+1)^2}{z} - (n-1)^2 z \right] E \\
 &= \frac{z_0}{4n z} (n+1)^2 \left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 z^2 \right] E
 \end{aligned}$$

permitindo obter a (10.78):

$$T = \frac{E}{A} = \frac{4n}{(n+1)^2} \frac{z}{z_0} \cdot \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 z^2 \right]}$$

ou, pelas (10.79),

$$T = e^{i(k-k_0)a} \cdot \frac{4n}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 e^{2ika} \right]}
 \tag{10.84}$$

Esse resultado tem uma interpretação física imediata. Lembrando as expressões (10.26) da refletividade  $r$  e transmissividade  $t$  do *degrau* de potencial, a (10.84) se escreve



Na ótica, o índice de refração depende em geral da frequência  $\omega$  (dispersão). Aqui, analogamente, é preciso levar em conta que  $k$  depende da energia  $E$ . Pela (10.76),

$$k a = \sqrt{2 m (E - V)} \frac{a}{\hbar} \quad (10.89)$$

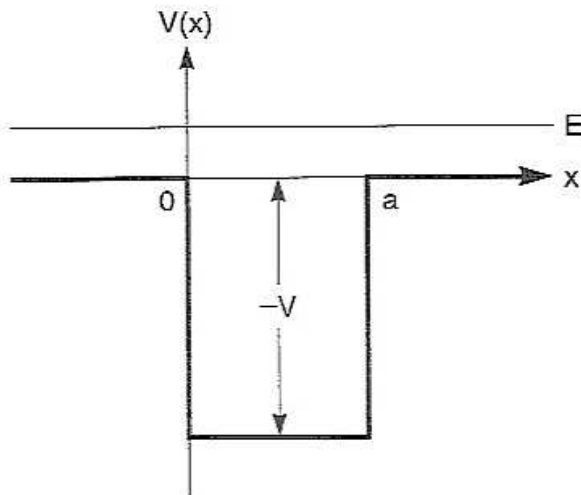


Fig. 10.13 Poço retangular

Embora tenhamos tomado uma *barreira* na (10.75), a solução também se aplica a estados com  $E > 0$  para um *poço de potencial retangular* (fig. 10.13), bastando substituir

$$V \rightarrow -V \quad (10.90)$$

tomando sempre  $V > 0$ . O índice de refração fica

$$n = \sqrt{1 \mp \frac{V}{E}} \quad \begin{cases} -(barreira) \equiv n < 1 \\ +(poço) \equiv n > 1 \end{cases} \quad (10.91)$$

e, pela (10.26),

$$r = \left( \frac{\sqrt{E \mp V} - \sqrt{E}}{\sqrt{E \mp V} + \sqrt{E}} \right)^2 \quad (10.92)$$

Vimos na ótica que os picos de transmissão tornam-se estreitos quando  $r$  é muito próximo de 1. Pela (3.37), a semilargura de um pico é da ordem de

$$2\varepsilon = 2(1 - r) \quad (10.93)$$

A (10.92) mostra que  $r$  é próximo de 1 nas seguintes situações:

$$\begin{cases} (i) \text{ Barreira, } 0 < E - V \ll E \leftarrow (\text{pouco acima do topo}) \\ (ii) \text{ Poço, } 0 < E \ll V \end{cases} \quad (10.94)$$

Analogamente, pela (10.88), os mínimos de transmissividade são proporcionais a  $(1 - r)^2$ , que é pequeno nas mesmas situações (10.94).

Pelas (10.88) e (10.89), os máximos de transmissão correspondem a energias  $E_j$  tais que

$$\sqrt{2m(E_j \mp V)} a / \hbar = j\pi \quad (j = 1, 2, \dots)$$

ou seja

$$E_j \mp V = j^2 \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (10.95)$$

Como o 2.º membro cresce com  $j^2$ , as (10.94) só podem em geral ser satisfeitas para os valores mais baixos de  $j$ . Para  $E \gg V$ , os picos tornam-se muito largos e o contraste entre máximos e mínimos é pequeno.

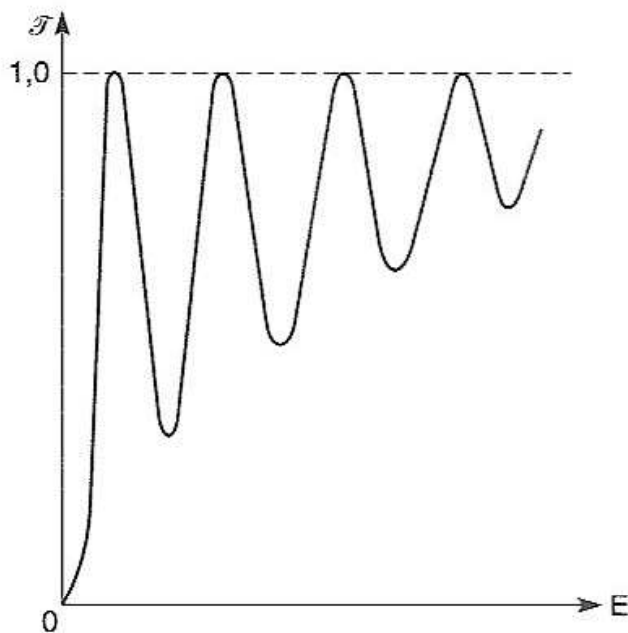


Fig. 10.14 Transmissividade em função da energia

O andamento típico de  $\mathcal{T}$  como função de  $E$  para o caso de um *poço* está representado na fig. 10.14. Em contraste com o caso da ótica (Seç. 3.4), não há periodicidade em  $E$  e as franjas vão ficando cada vez mais largas e menos nítidas. O caso da barreira, com  $E > V$ , é análogo.

Os picos mais estreitos, para os valores mais baixos da energia, são chamados de *ressonâncias de transmissão*. Qual é a razão desse nome?

Num limite em que se tivesse  $r = 1$  (reflexão total nas interfaces  $x = 0$  e  $x = a$ ), os máximos de transmissão em

$$k_j = j\pi / a \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (10.96)$$

corresponderiam aos níveis de energia discretos (10.42).

Logo, os picos podem ser considerados como um fenômeno de *ressonância* com essas energias, da mesma forma que as ressonâncias de um tubo de órgão na

acústica, p. ex. (*Fís. Bás. 2*, Seç. 6.4): a frequência das “oscilações forçadas” coincide com a das “oscilações livres”.

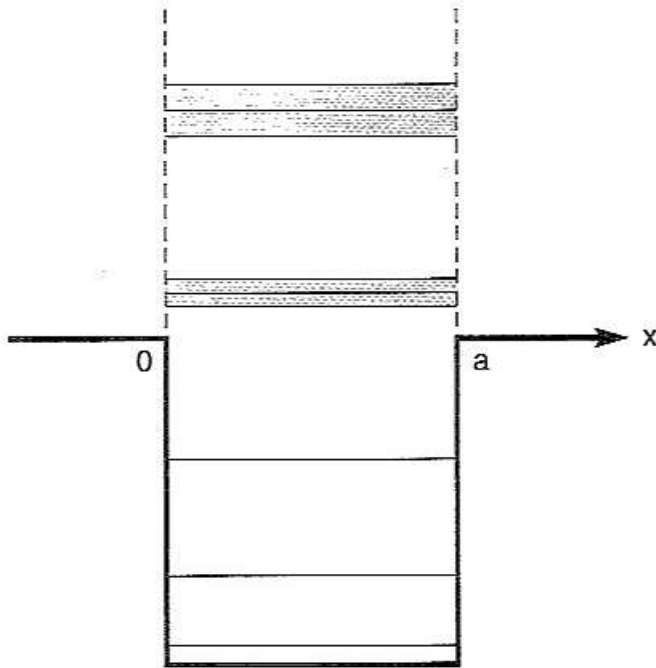


Fig. 10.15 Ressonâncias como níveis virtuais

Para um poço, podemos pensar nas ressonâncias como um prolongamento ao espectro contínuo do espectro discreto de níveis de energia ligados (fig. 10.15): no contínuo, cada “nível” ressonante tem uma largura  $\Delta E$  em energia correspondente à (10.93) para os níveis estreitos. A origem dessa largura é a transmissão para a região externa [ $\varepsilon = t$  na (10.93)], como seria a extremidade aberta no caso de um tubo de órgão.

No espalhamento de elétrons de baixa energia ( $E \sim 0,1 \text{ eV}$ ) por átomos de gases nobres (Ne, Ar), observam-se

*ressonâncias de transmissão*: para determinadas energias, os átomos comportam-se como se fossem praticamente transparentes aos elétrons. Esse fenômeno, conhecido como *efeito Ramsauer*, é análogo ao que acabamos de discutir, mas seu tratamento adequado requer a teoria do espalhamento tridimensional.

$$(b) \quad 0 < E < V : \text{Tunelamento (barreira)}$$

Esse caso corresponde à energia  $E''$  na fig. 10.12. Como na (10.27) para o degrau de potencial, a solução anterior permanece válida, bastando tomar

$$k_2 = i|k_2| = i\sqrt{2m(V-E)}/\hbar \equiv iK \quad (K > 0) \quad (10.97)$$

A 2.ª eq. na (10.77) fica então

$$\varphi_2(x) = C e^{-Kx} + D e^{Kx} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (10.98)$$

mas aqui, ao contrário do degrau, não se pode excluir a exponencial crescente, porque  $x$  não se estende até  $+\infty$  (região finita).



Como na (10.9), também o “índice de refração” se torna imaginário:

$$n = k_2 / k_0 \equiv iK / k_0 = i\eta \quad (\eta > 0) \quad (10.99)$$

A (10.85), com essas substituições, fica

$$T = e^{\frac{\kappa}{-\eta k_0} a - i k_0 a} \cdot \left[ \frac{4i\eta}{(i\eta + 1)^2} \right] \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{i\eta - 1}{i\eta + 1} \right)^2 e^{-2\kappa a}} \right] \quad (10.100)$$

Vamo-nos limitar a uma “barreira espessa”, supondo

$$Ka \gg 1 \quad (10.101)$$

pois podemos então desprezar o termo em  $e^{-2\kappa a}$  no denominador da (10.100), o que leva a

$$\mathcal{T} = |T|^2 \approx \frac{16\eta^2}{(\eta^2 + 1)^2} e^{-2\kappa a} \quad (10.102)$$

Pelas (10.97) e (10.99),

$$\eta^2 = \frac{V}{E} - 1, \quad \eta^2 + 1 = \frac{V}{E} \left\{ \mathcal{T} \approx \frac{16E(V-E)}{V^2} e^{-2\sqrt{2m(V-E)}\frac{a}{\hbar}} \right\} \quad (10.103)$$

Classicamente, uma partícula com  $E < V$  não poderia penetrar na região 2 (proibida): sofreria *reflexão total*. Quanticamente, a partícula pode “tunelar” através da barreira : a probabilidade de transmissão (10.102) - (10.103) é pequena, mas  $\neq 0$ .

Esse efeito de *tunelamento* é tipicamente ondulatório, análogo à *reflexão total frustrada* (Seç. 5.9). Quanto mais estreita a barreira e/ou mais próxima estiver a energia  $E$  do topo  $V$  da barreira, maior a probabilidade de tunelamento.

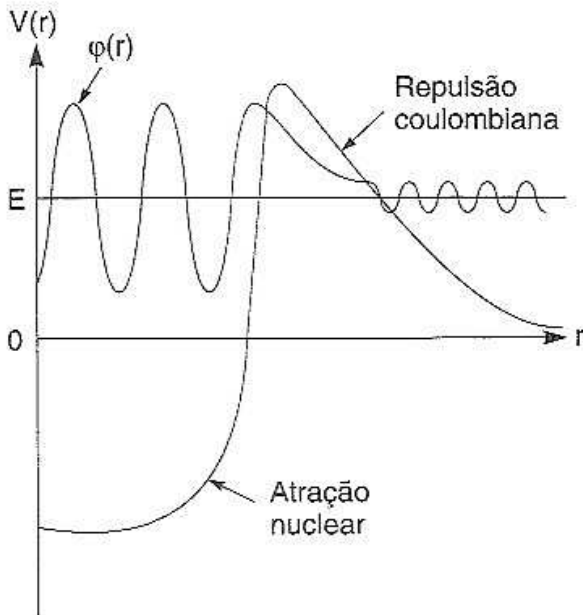
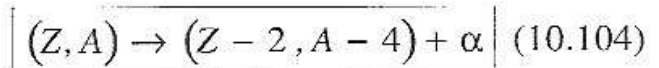


Fig. 10.16 Modelo de Gamow da desintegração alfa

O tunelamento quântico se manifesta numa grande variedade de fenômenos. Uma das primeiras aplicações foi a teoria de G. Gamow da *desintegração alfa*, em que um núcleo de n.º atômico  $Z$  e n.º de massa  $A$  emite uma partícula  $\alpha$  (núcleo de He):



O modelo de potencial [ *tridimensional*:  $V = V(r)$  ] está ilustrado na fig. 10.16: a partícula  $\alpha$ , de carga  $+2e$ , precisa vencer a barreira coulombiana de carga

$(Z - 2)e$ , do núcleo residual, por tunelamento. A grande sensibilidade da exponencial na (10.103) à variação de  $V - E$  explica por que as meias-vidas para desintegração  $\alpha$  variam desde  $\sim 10^{-7}$  s até  $\geq 10^{10}$  anos.

Outras aplicações são a *emissão de campo*, a emissão “a frio” de elétrons de um metal sob a ação de um campo elétrico; microscópios de emissão e de tunelamento, tunelamento em semicondutores, etc...

## 10.5 Estado fundamental do átomo de hidrogênio

Como exemplo importante de um estado ligado tridimensional, vamos tratar o estado fundamental do átomo de hidrogênio.

Temos nesse caso um problema de dois corpos (próton e elétron), com seis graus de liberdade espaciais (as três coordenadas de cada uma das duas partículas). A equação de Schrödinger seria uma “equação de ondas” num espaço 6 – dimensional (para  $n$  partículas,  $3n$  – dimensional), mostrando que interpretações “intuitivas” da mecânica quântica em termos de propagação de ondas exigiriam uma “intuição multidimensional”.

Entretanto, como no problema clássico de dois corpos com forças centrais, é possível separar o problema em termos do movimento do centro de massa e do movimento relativo, este descrito pelo potencial coulombiano (central); o CM se comporta como uma partícula quântica livre de massa igual à massa total.

Interessa-nos a equação de Schrödinger para o movimento relativo, que é a equação de Schrödinger tridimensional para o potencial coulombiano, associada a um estado estacionário de energia  $E$ :

$$\hat{H} \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + V(r) \varphi = E \varphi \quad (10.105)$$

onde, como na (7.34),

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \equiv -\frac{q^2}{r} \quad (10.106)$$

Na (10.106), como no problema clássico de dois corpos,  $m$  deveria ser a massa reduzida (*Fís. Bás. 1*, Seç. 10.10) do sistema elétron-próton, dada por

$$m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad (10.107)$$

Como  $m_p/m_e \gg 1$  ( $\sim 2 \times 10^3$ ), porém,  $m \approx m_e$ , a massa do elétron [mas a precisão espectroscópica requer o uso da (10.107)].

Para estados estacionários ligados (com o zero de energia correspondendo a  $r \rightarrow \infty$ ), temos

$$E = -|E| \quad (10.108)$$

e temos de procurar soluções *normalizáveis* da (10.105), que só existem para valores *discretos* de  $E$  (autovalores), os *níveis de energia* do H.

A solução geral da (10.105) depende das 3 coordenadas ( $r, \theta, \phi$ ) do elétron em relação ao núcleo. A dependência de  $\theta$  e  $\phi$  é dada por funções que em geral têm caráter oscilatório, e por conseguinte têm *nodos*, como as (10.74). Como esperamos que a energia cresça com o n.º de nodos, como nos exemplos vistos, e só estamos interessados no *estado fundamental* (de energia mínima), procuraremos uma solução *independente de*  $\theta$  e  $\phi$  ( $\therefore$  sem nodos na dependência angular):

$$\varphi = \varphi(r) \quad (10.109)$$

Daí decorre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \varphi'(r) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \varphi = \mathbf{r} \frac{d\varphi/dr}{r} \end{array} \right. \quad (10.110)$$

e, usando a identidade (9.85),

$$\Delta \varphi = \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \frac{d\varphi/dr}{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (10.111)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2\varphi}{dr^2} \right]$$

levando a

$$\Delta \varphi = \frac{3}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \left\{ \Delta \varphi(r) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right. \quad (10.112)$$

o que também pode ser obtido calculando  $\partial^2/\partial x^2$ ,  $\partial^2/\partial y^2$ ,  $\partial^2/\partial z^2$ .

Levando esses resultados na equação de Schrödinger (10.105), resulta

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{q^2}{r} \varphi = -|E|\varphi \right] \quad (10.113)$$

Seja

$$\left[ |E| \equiv \frac{\hbar^2}{2m} K^2 \right] \quad (10.114)$$

e vamos introduzir o *raio de Bohr* (7.47),

$$\left[ a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{mq^2} \right] \quad (10.115)$$

A (10.113) fica então

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{2}{a_0 r} \varphi - K^2 \varphi = 0} \quad (10.116)$$

da qual temos de encontrar uma solução normalizável para determinar o autovalor  $K$  [que dá a energia, pela (10.114)].

Para  $r \rightarrow \infty$ , a (10.116) deve reduzir-se a

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - K^2 \varphi = 0 \quad \left\{ \varphi \rightarrow A e^{-Kr} + B e^{Kr} \quad (r \rightarrow \infty) \right.$$

onde  $K \equiv +\sqrt{K^2} (> 0)$ . Mas o 2.º termo é uma exponencial *crescente* (não-normalizável), de forma que temos de ter  $B = 0$ . Podemos procurar então uma solução tentativa sem zeros (nodos) da forma

$$\boxed{\varphi(r) = N e^{-Kr}} \quad (10.117)$$

o que dá  $d\varphi/dr = -K\varphi$ . Levando na (10.116), vemos que ela é satisfeita se tomarmos

$$\boxed{K = 1/a_0} \quad (10.118)$$

o que pela (10.114), leva ao autovalor

$$\boxed{|E| = \frac{\hbar^2}{2 m a_0^2}} \quad (10.119)$$

que é a *energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio*, já obtida na teoria de Bohr [cf.(7.52)]. Aqui, porém, é um resultado exato da mecânica quântica.

Resta calcular o fator de normalização  $N$  na (10.117). Devemos ter, dada a simetria esférica,

$$\begin{aligned}
 1 &= \int |\varphi(r)|^2 d^3 r = 4\pi \int_0^\infty |\varphi(r)|^2 r^2 dr = 4\pi |N|^2 \cdot \int_0^\infty e^{-2Kr} r^2 dr \\
 &= \underbrace{r^2 \cdot \frac{e^{-2Kr}}{-2K}}_{=0} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2K} \cdot 2r \frac{e^{-2Kr}}{-2K} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2K^2} \int_0^\infty e^{-2Kr} dr = \frac{1}{4K^3} \\
 &\quad \underbrace{\frac{e^{-2Kr}}{-2K}}_{=0} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2K}
 \end{aligned}$$

ou seja, pela (10.118),

$$1 = \frac{4\pi |N|^2}{4K^3} = \frac{\pi |N|^2}{(1/a_0)^3} = \pi a_0^3 |N|^2 \left\{ \boxed{N = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}} \right. \quad (10.120)$$

o que dá, finalmente, pela (10.117),

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}} \quad (10.121)$$

A probabilidade de encontrar o elétron entre  $r$  e  $r + dr$ , ou seja, dentro de uma casca esférica de volume  $4\pi r^2 dr$  com centro no núcleo (próton) é

$$\boxed{dP = 4\pi r^2 |\varphi(r)|^2 dr = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} dr} \quad (10.122)$$

A densidade de probabilidade  $dP/dr$  é máxima para

$$0 = \frac{d}{dr} \left( r^2 e^{-2r/a_0} \right) = 2r e^{-2r/a_0} - \frac{2}{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} = 2r e^{-2r/a_0} \left( 1 - \frac{r}{a_0} \right)$$

ou seja, para

$$\boxed{r = a_0} \left\{ \left( \frac{dP}{dr} \right)_{\max} = \frac{4}{a_0} e^{-2} \right. \quad (10.123)$$



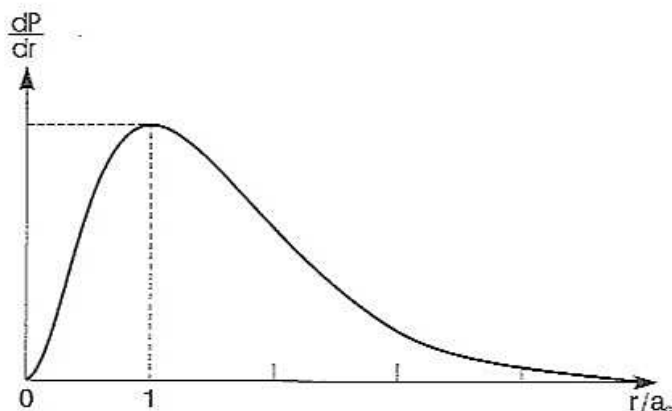


Fig. 10.17 Densidade de probabilidade radial mais provável do elétron ao núcleo.

A fig. 10.17 ilustra o andamento da densidade de probabilidade radial. Vemos que é máxima para uma distância do núcleo igual ao raio de Bohr. Entretanto, longe de termos uma órbita circular plana com este raio, temos uma “nuvem de probabilidade” esfericamente simétrica, cuja densidade cai exponencialmente para  $r \gg a_0$ , onde o raio de Bohr corresponde à distância

O valor esperado do raio atômico é  $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0$  (Probl. 4).

#### Relação com o princípio de incerteza

Para um elétron à distância  $r$  do núcleo, a energia potencial é

$$V(r) = -\frac{q^2}{r} \quad (10.124)$$

Por outro lado, um elétron confinado dentro de uma esfera de raio  $r$  possui, pelo princípio de incerteza, uma energia cinética mínima

$$T(r) \sim \frac{(\Delta p)^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{2mr^2} \quad (10.125)$$

ou seja, uma energia total

$$E(r) = T(r) + V(r) \gtrsim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{r} \quad (10.126)$$

Para  $r \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow \infty$ . Para  $r \rightarrow \infty$ ,  $E \rightarrow 0$ , por valores negativos ( $V$  domina em relação a  $T$ ). Logo,  $E(r)$  deve passar por um mínimo, o que acontece para

$$0 = \frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{q^2}{r^2} = \frac{q^2}{r^2} \left( 1 - \frac{\hbar^2 / m q^2}{r} \right) \left\{ \boxed{r = a_0} \right\} \quad (10.127)$$

Logo, a energia do átomo de hidrogênio no estado fundamental é a energia mínima compatível com sua localização (“energia de incerteza”).

Estados excitados têm nodos (Probl. 9), o que aumenta a energia cinética.

### Momento angular

O operador quântico (vetorial) associado ao momento angular é definido por extensão da mecânica clássica (princípio de correspondência):

$$\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \hat{\mathbf{r}} \times \nabla \quad (10.128)$$

Resulta então da (10.110) que, para *qualquer* função de onda esfericamente simétrica,

$$\hat{\mathbf{l}}\varphi(r) = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \varphi(r) = -i\hbar \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (10.129)$$

ou seja, *simetria esférica corresponde a momento angular zero*. Diz-se que a função de onda é nesse caso uma *onda s*.

Temos aqui outra diferença entre o estado fundamental do hidrogênio na mecânica quântica e na teoria de Bohr [nesta, o estado fundamental tinha momento angular =  $\hbar$  : cf.(7.50)]

Para obter os estados excitados do átomo de hidrogênio, é preciso desenvolver a teoria quântica do momento angular no caso geral, o que se faz em cursos mais avançados de mecânica quântica.

## 10.6 Spin e Princípio de Exclusão

Além do momento angular orbital (10.128), o elétron tem também um *momento angular intrínseco*, como o fóton, associado à polarização. Para o fóton, como vimos na Seç. 8.9, a projeção do momento angular intrínseco sobre uma dada direção (a direção em que ele se propaga) tem autovalores  $\pm \hbar$ . Dizemos então que o fóton tem *spin* 1 (momento angular intrínseco medido em unidades de  $\hbar$ ).

No caso do elétron, que é, ao contrário do fóton, uma partícula carregada, o spin dá origem a uma propriedade característica da rotação de uma carga (embora não se possa pensar no elétron como se fosse uma espécie de giroscópio carregado): a existência de um *momento de dipolo magnético* intrínseco, como um imã microscópico.

Em consequência dele, um feixe de elétrons é afetado por um campo magnético inhomogêneo, como dipolos elétricos se deslocam num campo elétrico inhomogêneo (*Fís. Bás.* 3, Sec. 4.5). Uma experiência realizada por O. Stern e W. Gerlach em 1921, fazendo um feixe atravessar um campo  $\mathbf{B}$  fortemente inhomogêneo, mostrou que o feixe se divide em duas componentes, associadas a dois únicos valores possíveis da projeção do spin na direção de  $\mathbf{B}$ :  $+\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ . Em 1925, G. Uhlenbeck e S. Goudsmit propuseram a idéia de que o elétron é uma partícula de *spin*  $1/2$ .

Assim, na mecânica quântica não-relativística, o elétron deve ser descrito não apenas por uma, mas por um *par* de funções de onda (vetor coluna de duas componentes), para incluir os efeitos de seu spin (polarização intrínseca). Uma representação desse tipo foi proposta por W. Pauli. Portanto, uma descrição *completa* do estado de um elétron é dada por um vetor de estado que também inclui a descrição da polarização (spin).

Uma partícula de spin  $1/2$ , como o elétron, obedece a um *novo* princípio da física quântica, também formulado por Pauli, o *princípio de exclusão*: 2 elétrons (mais geralmente, duas *partículas de spin*  $1/2$ ) *não podem ocupar o mesmo estado quântico*. Por exemplo, não podem ocupar a mesma posição  $\mathbf{r}$  e ter spins ( $\uparrow\uparrow$ ) paralelos (mesma polarização): podem ocupá-la se tiverem spins ( $\uparrow\downarrow$ ) *antiparalelos* (polarizações opostas). O mesmo se aplica a dois elétrons de mesmo *momento*  $\mathbf{p}$ .

O princípio de exclusão tem consequências extremamente importantes, quando consideramos átomos com mais de um elétron. Assim, no átomo de He, que tem dois elétrons, ambos podem ocupar o mesmo nível de energia no estado fundamental, um estado *s* análogo ao do hidrogênio, mas para isso devem ter spins opostos ( $\uparrow\downarrow$ ).

Por outro lado, para o Li, que tem 3 elétrons, o 3.º elétron não pode mais ocupar o mesmo estado tipo hidrogênio dos outros 2: tem de ir para um estado mais excitado, onde tende a estar mais distante do núcleo. Por conseguinte, esse elétron está mais fracamente ligado, e deve ser mais fácil ionizar o Li que o H.

Com efeito, a energia de ionização do H, como vimos, é de 13,6 eV. A do He é de 24,6 eV ; a do Li é de 5,4 eV.

Do ponto de vista químico, o He é um *gás nobre*, com reatividade muito baixa. Seus dois elétrons formam uma *camada fechada* (camada K). Já o Li é um elemento alcalino, com forte reatividade química, que transfere facilmente seu elétron mais externo para formar um íon positivo e uma ligação iônica, como no fluoreto de lítio.

Vemos assim que o princípio de exclusão desempenha um papel fundamental na explicação das *propriedades químicas dos elementos*, e o mesmo vale para a explicação de tabela periódica de Mendeleev.

O princípio de exclusão também é essencial para explicar a *estabilidade da matéria*. Se não fosse pelo princípio de exclusão, nada impediria que *vários* átomos de H, em lugar de formar moléculas, juntassem todos os prótons de seus núcleos, com uma única nuvem de muitos elétrons em torno deles, formando uma configuração mais estável, pelo aumento da atração coulombiana. Em lugar disso, podemos ter no máximo dois elétrons, de spins opostos, funcionando como “cola” para ligar dois prótons: é a molécula de  $H_2$ , e a base da *ligação química covalente*.

É ainda o princípio de exclusão que atua na explicação do *ferromagnetismo*, o alinhamento dos spins e momentos magnéticos, em materiais como o ferro, que é a origem dos ímãs permanentes.

## 10.7 Movimento de elétrons em cristais

Uma das aplicações mais importantes da mecânica quântica ao estudo da estrutura da matéria é a *física da matéria condensada* (ou *física de estado sólido*), uma das áreas mais ativas da física atual. Para ilustrar alguns conceitos básicos da área, vamos considerar, num modelo altamente simplificado, o espectro de energia associado ao movimento de um elétron num “cristal unidimensional”.

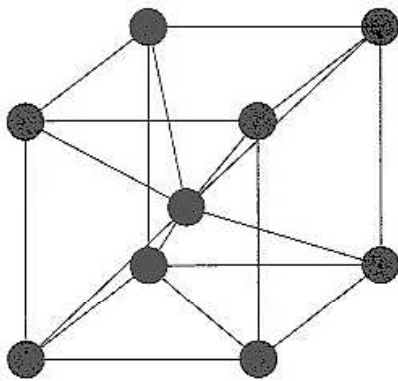


Fig. 10.18 Rede cúbica centrada

Um cristal, como vimos ao discutir a difração de raios X, é uma *rede periódica tridimensional*, cujos elementos são átomos ou grupamentos atômicos. O metal alcalino mais simples, p. ex., que é o Li, cristaliza formando uma *rede cúbica centrada*, conforme ilustrado na fig: 10.18, onde cada átomo tem 8 vizinhos.

Como vimos, cada átomo de Li tem um elétron mais fracamente ligado (na camada mais externa). Como cada átomo está ligado a 8 vizinhos, e cada ligação une 2 átomos, há 4 ligações por átomo. Uma ligação covalente, como a da molécula de  $H_2$ , é formada por 2 elétrons de spins opostos. Como só há um elétron externo por átomo, há apenas 1/8 da carga necessária para uma ligação covalente, tornando muito fácil que o elétron da camada mais externa migre de um átomo para outro.

Assim, o que é característico de um metal é que existem elétrons *quase livres* para deslocar-se através da rede cristalina. Essa grande mobilidade dos elétrons é uma das principais razões porque os metais são bons condutores de eletricidade; ainda antes da mecânica quântica foi formulada a *teoria dos elétrons livres* para explicar a condutividade de um metal.

Para ter uma idéia do *tipo de espectro de energia* de um elétron num cristal, vamos considerar um modelo *unidimensional* da rede periódica, representado na fig. 10.19.

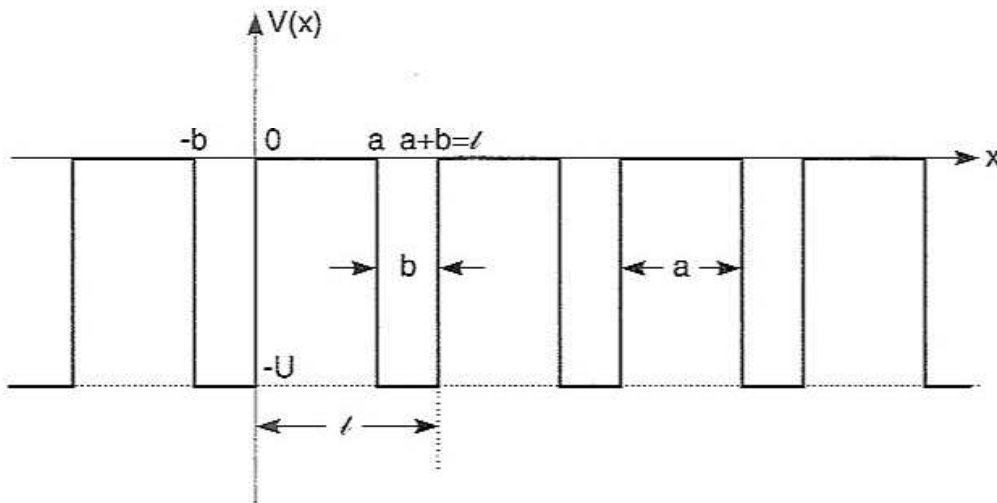


Fig. 10.19 Rede periódica unidimensional

O potencial  $V(x)$  associado à rede, que é sentido por um elétron, é uma série de poços retangulares atrativos, de profundidade  $U$  e largura  $b$  (representando os “íons”),\* com *período espacial*

$$l = a + b \quad (10.127)$$

#### O teorema de Bloch

O hamiltoniano associado ao movimento do elétron na rede é

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (10.128)$$

\* O potencial  $V(x)$  representa o efeito de todas as partículas do cristal, exceto o elétron considerado.

Um cristal macroscópico é formado por um grande número de átomos. Desprezando efeitos de superfície, vamos inicialmente supô-lo infinito; neste modelo unidimensional, isto equivale a dizer que  $V(x)$  é uma função *periódica* em toda a reta:

$$\boxed{V(x+l) = V(x) \quad (-\infty < x < \infty)} \quad (10.129)$$

o que implica

$$\boxed{\hat{H}(x+l) = \hat{H}(x) \quad (\forall x)} \quad (10.130)$$

Vamos definir o *operador de translação*  $\hat{\mathcal{T}}$  aplicado a uma função  $f(x)$  por

$$\boxed{\hat{\mathcal{T}} f(x) = f(x+l)} \quad (10.131)$$

Seja  $\varphi(x)$  um *estado estacionário* de  $\hat{H}$  com energia  $E$ :

$$\boxed{\hat{H}(x)\varphi(x) = E\varphi(x)} \quad (10.132)$$

Pela (10.131 aplicada à função  $\hat{H}(x)f(x)$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}} \hat{H}(x)f(x) &= \hat{H}(x+l)f(x+l) = \hat{H}(x)f(x+l) \\ &= \hat{H}(x)\hat{\mathcal{T}} f(x), \quad \forall f \end{aligned}$$

ou seja

comutador  
↓

$$\boxed{[\hat{\mathcal{T}}, \hat{H}(x)] f(x) = 0, \quad \forall f(x)}$$

o que implica

$$\boxed{[\hat{\mathcal{T}}, \hat{H}(x)] = 0} \quad (10.133)$$

Mas, pelo que vimos na Seç. 8.10, esta é uma condição necessária e suficiente para que os operadores  $\hat{\mathcal{T}}$  e  $\hat{H}(x)$  tenham um conjunto completo de autofunções em comum.



Logo, os estados estacionários (10.132) podem ser escolhidos como *autofunções de*  $\hat{\mathcal{T}}$ :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{\mathcal{T}} \varphi(x) = \lambda \varphi(x) \\ \hat{H} \varphi(x) = E \varphi(x) \end{cases}} \quad \lambda = \text{autovalor} \quad (10.134)$$

onde  $\lambda$  não precisa ser real ( $\hat{\mathcal{T}}$  não é um observável).

Pela definição de  $\hat{\mathcal{T}}$ , isto dá

$$\boxed{\varphi(x+l) = \lambda \varphi(x)} \quad (\forall x) \quad (10.135)$$

Mas, pela condição de normalização, devemos ter

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+l)|^2 dx = |\lambda|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx$$

$(x+l = x')$        $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+l)|^2 dx}_{= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x')|^2 dx'}$        $\longleftarrow$

o que dá

$$\boxed{|\lambda|^2 = 1} \quad (10.136)$$

permitindo portanto escrever  $\lambda$  como um *fator de fase*:

$$\boxed{\lambda \equiv e^{ikl}} \quad (10.137)$$

onde  $k$  é real e é definido por esta relação e pela (10.135).

Definindo  $u_k(x)$  por

$$\boxed{\varphi(x) \equiv e^{ikx} u_k(x)} \quad (10.138)$$

as (10.135) e (10.137) dão

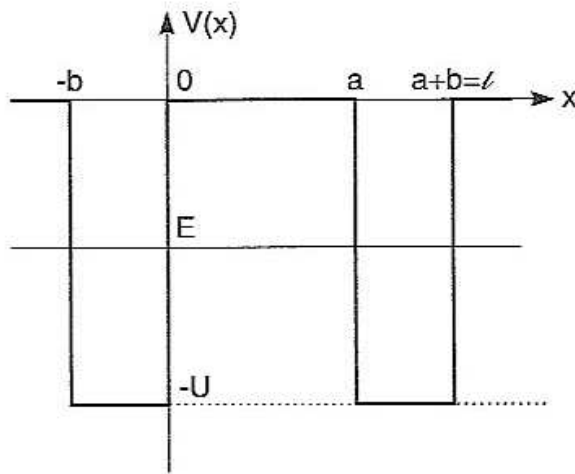
$$\varphi(x+l) = e^{ik(x+l)} u_k(x+l) = e^{ikl} \varphi(x) = e^{ik(x+l)} u_k(x)$$

$$\therefore \quad \boxed{u_k(x+l) = u_k(x)} \quad (10.139)$$

As (10.138) e (10.139) constituem um caso particular, unidimensional, do *teorema de Bloch*. Elas mostram que os estados estacionários do elétron num potencial periódico ( $-\infty < x < \infty$ ) têm a forma de *ondas* de comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$  ( $k$  real) e de amplitude  $u_k(x)$  *periódica*, ou seja, podendo variar *dentro* de uma unidade da rede (sítio), mas a mesma em cada sítio.

Assim, o elétron fica “livre” no sentido de estar *deslocalizado*: há a mesma probabilidade de ser encontrado no entorno de cada um dos sítios. A relação  $\varphi(x+l) = e^{ikl} \varphi(x)$  mostra ainda que  $kl$  representa a *defasagem* entre duas unidades vizinhas da rede.

### Solução do problema de contorno



Basta agora considerar o problema dentro de um período (fig. 10.20).

Tomando

$$\boxed{0 > E > -U \left\{ \begin{array}{l} E = -\frac{\hbar^2}{2m} K^2 < 0 \\ E + U = \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 > 0 \end{array} \right.}$$

Fig. 10.20 Nível de energia num período da rede

(10.140)

obtemos, como na (10.77), as soluções

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x) &= A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x} & (-b < x < 0) \\ &= C e^{Kx} + D e^{-Kx} & (0 < x < a) \end{aligned}} \quad (10.141)$$

que, pelas (10.138), correspondem a

$$\boxed{\begin{aligned} u_k(x) &= A e^{i(k_0-k)x} + B e^{-i(k_0+k)x} & (-b < x < 0) \\ u_k(x) &= C e^{(K-ik)x} + D e^{-(K+ik)x} & (0 < x < a) \end{aligned}} \quad (10.142)$$

onde  $u_k(x)$  é *periódica* de período  $l$ .

As funções  $\varphi$  e  $d\varphi/dx$  têm de ser contínuas nos pontos de descontinuidade; logo, o mesmo vale para  $u_k(x)$ . Devido à periodicidade de  $u_k(x)$ , basta aplicar as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a$ ; isto implica que permanecem válidas em  $x = \pm l, a \pm l$ , etc.

Em  $x = 0$ , obtemos:

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ i(k_0 - k)A - i(k_0 + k)B = (K - ik)C - (K + ik)D \end{cases} \quad (10.143)$$

Para aplicar as condições em  $x = a$ , notamos que, pela periodicidade, a solução à direita de  $a$  é

$$u_k(x) = \underbrace{u_k(x-l)}_{-b < x < 0} = A e^{i(k_0-k)(x-l)} + B e^{-i(k_0+k)(x-l)} \quad (10.144)$$

$(a < x < a + b = l)$

o que, juntamente com a segunda (10.142), dá, em  $x = a$ , com  $a - l \equiv -b$ ,

$$\begin{aligned} A e^{-i(k_0-k)b} + B e^{i(k_0+k)b} &= C e^{(K-ik)a} + D e^{-(K+ik)a} \\ i(k_0 - k)A e^{-i(k_0-k)b} - i(k_0 + k)B e^{i(k_0+k)b} &= (K - ik)C e^{(K-ik)a} \\ &\quad - (K + ik)D e^{-(K+ik)a} \end{aligned} \quad (10.145)$$

Multiplicando ambos os membros por  $e^{ik_0 a}$  e com as notações

$$\begin{aligned} e^{ik_0 b} &\equiv z_0, \quad e^{-ik_0 b} \equiv z_0^* \\ e^{Ka} &\equiv \xi, \quad e^{-Ka} \equiv \frac{1}{\xi} \end{aligned} \quad (10.146)$$

obtemos

$$\begin{cases} e^{ikl} \left( z_0^* A + z_0 B \right) = \xi C + \frac{1}{\xi} D \\ i e^{ikl} \left[ \left( k_0 - k \right) z_0^* A - \left( k_0 + k \right) z_0 B \right] = (K - ik)\xi C - (K + ik)\frac{1}{\xi} D \end{cases} \quad (10.147)$$

As (10.143) e (10.147) são um sistema *homogêneo* de 4 equações lineares nas 4 incógnitas  $A, B, C, D$ . Para que haja solução não-trivial, o determinante do sistema tem de anular-se, o que dá a condição de autovalores.

Após um cálculo bastante trabalhoso, resulta a condição

$$F(E) \equiv \frac{(K^2 - k_0^2)}{2 K k_0} \operatorname{sh}(K a) \operatorname{sen}(k_0 b) + \operatorname{ch}(K a) \cos(k_0 b) = \cos(k l) \quad (10.148)$$

$l = a + b$   
↓

Como acontece nos problemas tratados anteriormente, o resultado permanece válido quando a energia  $E$  é  $> 0$ ,  $E = \hbar^2 / 2 m \kappa^2$ , com  $\kappa$  real, bastando fazer a substituição [cf. (10.140), (10.141)]  $K \rightarrow i \kappa$  na (10.148).

Pelas (10.140),  $k_0$  e  $K$  se exprimem em função da energia  $E$ , de forma que o 1.º membro da (10.148) é uma função  $F(E)$ . No 2.º membro,  $k$  é um parâmetro tal que [cf. (10.135) e (10.137)]

$$\varphi(x + l) = e^{i k l} \varphi(x) \quad (10.149)$$

correspondendo à variação de fase da função de onda entre sítios vizinhos.

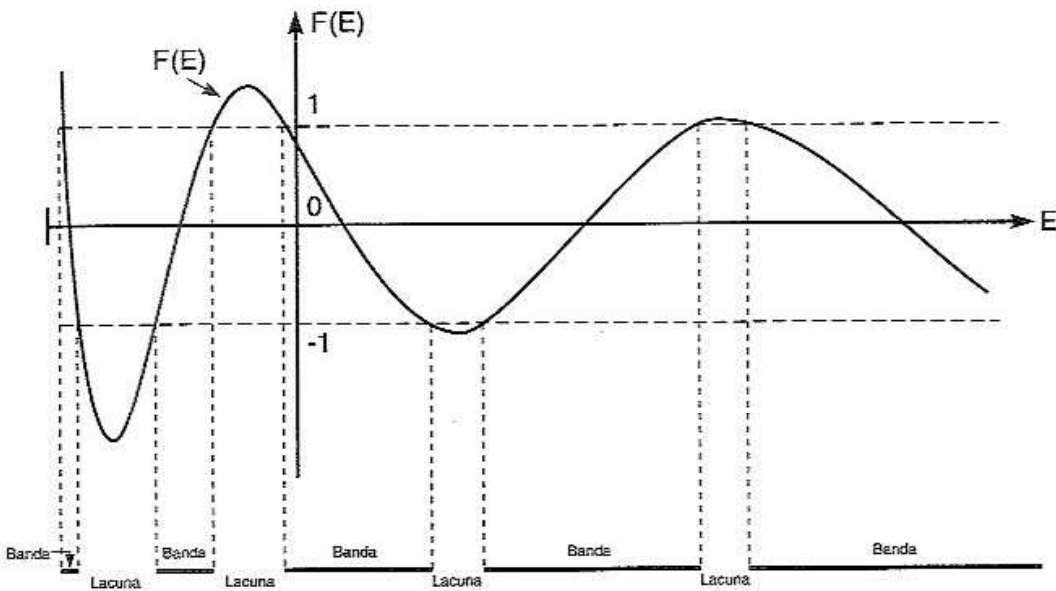


Fig. 10.21 Bandas de energia permitidas

A fig. 10.21 mostra o gráfico de  $F(E)$  para valores típicos dos parâmetros. Como o domínio de variação de  $\cos(kl)$  está entre  $-1$  e  $+1$ , só existem soluções da equação de autovalores (10.148) dentro desse domínio. Vemos na figura que isso só acontece dentro de uma série de faixas desconexas da energia  $E$ .

Obtemos assim um resultado fundamental: o espectro de energia associado a um cristal unidimensional é um *espectro de bandas*, separadas por lacunas “proibidas”, onde não há níveis de energia. (Dentro de cada banda, nesse modelo em que o “cristal” é infinito, a energia varia continuamente). Essa é uma propriedade geral da *propagação de ondas em estruturas periódicas*, válida também, p. ex., para filtros elétricos (ondas de voltagem ou corrente), como vimos (*Fís. Bás.* 3, Seç. 10.9).

Para energias  $E < 0$ , que corresponderiam a estados ligados discretos nos poços de potencial individuais, as bandas são estreitas: os níveis de energia mais profundos em cada poço, correspondentes aos elétrons mais fortemente ligados aos sítios da rede, são os menos afetados pela presença dos outros sítios.

A estrutura de bandas persiste para  $E > 0$ , acima dos topos dos poços de potencial, mas as lacunas ficam cada vez mais estreitas à medida que  $E$  cresce.

#### Número de níveis numa banda

Até agora, tratamos do “cristal unidimensional” como se fosse infinito. Na realidade, um cristal macroscópico tem tantos átomos que os efeitos de superfície, associados às condições de contorno na superfície do cristal, são praticamente desprezíveis, ou seja, quase não influem nas propriedades *volumétricas* do material.

Podemos então escolher condições de contorno que minimizam os efeitos da superfície. As mais simples são *condições de contorno periódicas*: para uma cadeia linear de  $N$  átomos, com  $x = 0$  e  $x = Nl$  nos extremos, elas correspondem a impor

$$\boxed{\varphi(0) = \varphi(Nl)} \quad Nl = \text{“comprimento do cristal”} = L \quad (10.150)$$

ou seja, pela (10.138),

$$\underbrace{u_k(0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{iguais pela (10.139)}}} = e^{ikNl} \underbrace{u_k(Nl)}_{\substack{\uparrow \\ \text{iguais pela (10.139)}}} \quad \left\{ \boxed{e^{ikNl} = 1} \right. \quad (10.151)$$

o que dá autovalores discretos para  $k$ :

$$\boxed{k_n = n \cdot \frac{2\pi}{Nl}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.152)$$

Como a condição para os autovalores de  $E$  só depende de  $kl$ , os níveis de energia não se alteram pela substituição

$$k \rightarrow k + p \cdot \frac{2\pi}{l} \quad (p = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.153)$$

de modo que, para obter todos os níveis, basta confinar  $k$  a um intervalo de comprimento  $2\pi/l$ , tal como

$$-\frac{\pi}{l} < k \leq \frac{\pi}{l} \quad (10.154)$$

Esse intervalo é varrido quando, na (10.152),  $n$  varre exatamente  $N$  valores inteiros sucessivos. Logo, existem,  $N$  níveis em cada banda,  $N$  sendo o número total de átomos do cristal (neste modelo, em que há 1 átomo por sítio).

A razão de ser desse resultado é que a banda se origina de um nível ligado de um único poço, mas o elétron correspondente pode estar em qualquer um dos  $N$  poços, o que leva a  $N$  situações possíveis.

Como  $F(E)$  na (10.148) só depende de  $k$  através de  $\cos(kl)$ , as soluções para  $E$  são funções pares de  $k$ . Pela fig. 10.21, as extremidades das bandas de energia correspondem a [cf. (10.154)]

$$\cos(kl) = \pm 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, \pm \frac{\pi}{l} \end{array} \right. \quad (10.155)$$

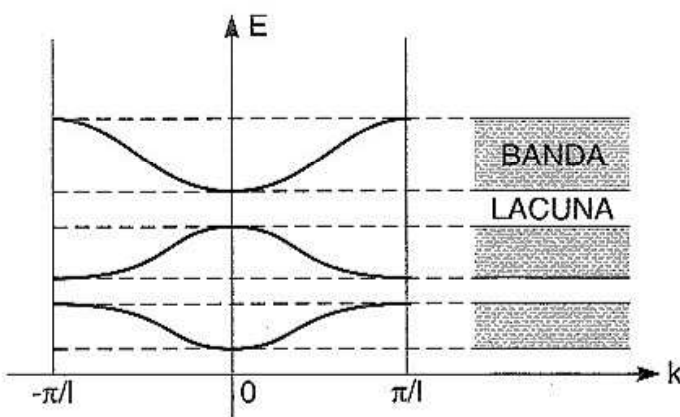


Fig. 10.22 Energia como função de  $k$

Logo, curvas típicas de  $E$  em função de  $k$  (para  $E < 0$ ) têm a forma indicada na fig. 10.22.

Qual é a origem física da formação de lacunas para  $k = \pm \pi/l$ ? A (10.138) mostra que  $k$  desempenha um papel análogo ao do número de onda da onda eletrônica no cristal, ou seja,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_m l = m\pi \Leftrightarrow m\lambda = 2l \end{array} \right. \quad (10.156)$$



que é a condição para *reflexão de Bragg* da onda eletrônica nos sítios do cristal unidimensional (“incidência”  $\perp$ ,  $d \sin \theta = d = l$ ).

Para  $k = \pm \pi/l$ , as soluções estacionárias não são as ondas  $e^{\pm i(\pi/l)x}$ , mas *ondas estacionárias* obtidas superpondo uma onda incidente com sua reflexão de Bragg,

$$\begin{aligned} \varphi_+ &\propto e^{i\frac{\pi x}{l}} + e^{-i\frac{\pi x}{l}} = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \\ \varphi_- &\propto e^{i\frac{\pi x}{l}} - e^{-i\frac{\pi x}{l}} = 2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) \end{aligned} \quad (10.157)$$

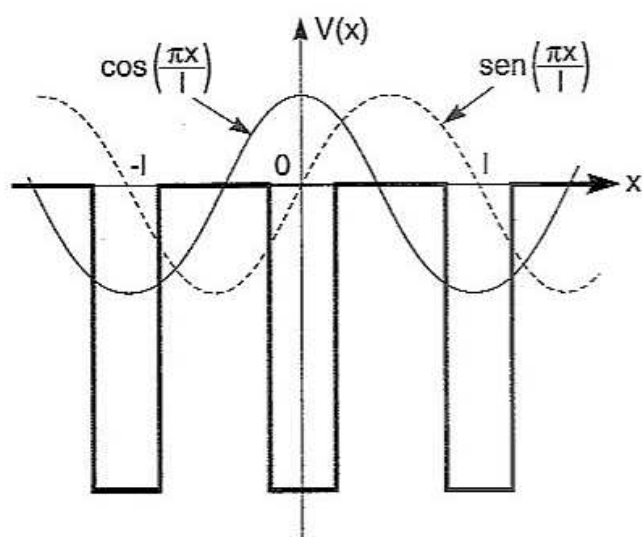


Fig. 10.23 Origem da lacuna de energia

Como  $|\varphi_{\pm}(x)|^2$  é a densidade de probabilidade eletrônica, vemos que, para  $\varphi_+$ , ela é máxima onde o potencial é mais atrativo ( $x = 0, \pm l, \dots$ ); para  $\varphi_-$ , é nula nesses pontos e máxima (fig. 10.23) onde  $V(x) = 0$ . Essa é a origem da lacuna de energia, e vemos que ela deve ser da ordem de grandeza da profundidade do poço associado a cada sítio.

#### Aplicação: metais, isolantes e semicondutores

Os elétrons que estivemos discutindo são aqueles mais fracamente ligados aos átomos, chamados de *elétrons de valência* (que também são responsáveis pelas ligações químicas: daí o nome). Para o Li, há um elétron de valência por átomo, ou seja,  $N$  elétrons.

Vimos também que  $N$  é o número de níveis de energia em cada banda, no modelo simples em que há um só átomo em cada célula unitária do cristal. Pelo princípio de exclusão, segue-se que cada nível comporta 2 elétrons de spins opostos, ou seja,  $2N$  elétrons por banda.

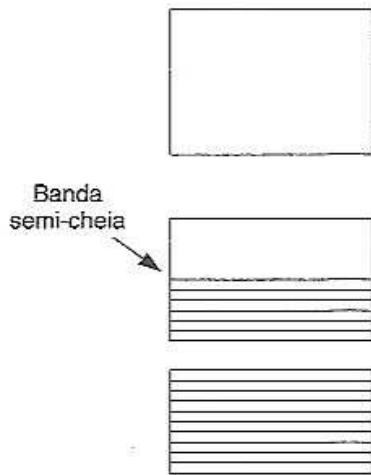


Fig. 10.24 Bandas para um metal

Os átomos dos *metais nobres* (cobre, prata, ...) também têm um número *ímpar* de elétrons de valência e um átomo em cada célula unitária. Logo, também terão uma banda semi-cheia, o que é responsável pelas suas propriedades metálicas e condutividade elevada.

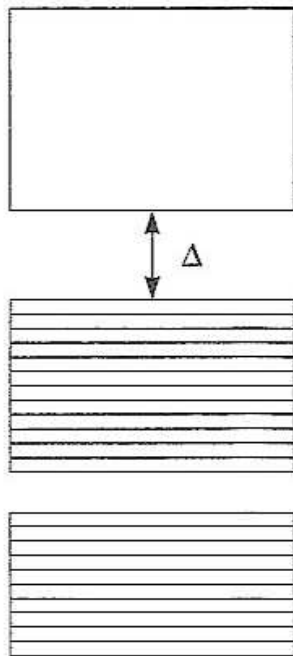


Fig. 10.25 Bandas para um isolante

No caso do Li, só há  $N$  elétrons disponíveis (1 por átomo), de modo que a banda fica *semi-cheia* (fig. 10.24): é muito fácil então um elétron ser excitado a níveis vizinhos não-ocupados. Em particular, isso acontece quando se aplica um campo elétrico: o material é *condutor*. Isso vale para todos os cristais de *metais alcalinos*, como Li, Na, K, Rb: são substâncias *metálicas*.

Elementos com um número *par* de elétrons de valência, como o enxofre (que tem 4) podem satisfazer o princípio de Pauli preenchendo *totalmente* os níveis de uma banda (fig. 10.25). Nesse caso, para que possam ser excitados elétrons à banda superior vazia, é necessário fornecer-lhes uma energia igual à *lacuna*  $\Delta$ , que no enxofre é de 2,4 eV.

Como a energia térmica média à temperatura ambiente é  $\sim 0,025$  eV, o fator de Boltzmann  $\exp(-\Delta/KT)$  torna desprezível a probabilidade de transposição da lacuna; não é possível criar uma corrente elétrica com campos elétricos normais aplicados: o material é *isolante*.

Por outro lado, fótons na região azul do espectro têm energia suficiente para excitar elétrons através da lacuna, sendo portanto absorvidos: daí a coloração amarela de um cristal de enxofre.

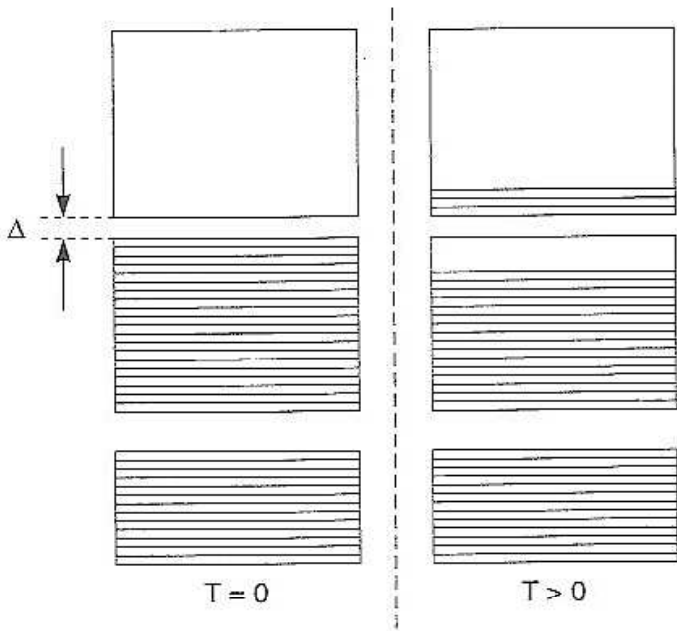


Fig. 10.26 Bandas para um semicondutor intrínseco

or que a de um isolante, embora ainda muitas ordens de grandeza menor que a de um metal.

Têm grande importância em microeletrônica os *semicondutores dopados*, que contêm concentrações pequenas e controladas de átomos de *impurezas*, quebrando a regularidade da rede cristalina. A presença de impurezas afeta os níveis de energia e fornece novos portadores de corrente. Isso é aplicado nos transistores.

## 10.8 A interpretação da mecânica quântica

Alguns dos aspectos mais peculiares da física quântica surgem quando se consideram *estados correlacionados de 2 partículas*.

Vamos exemplificá-los voltando ao exemplo da *polarização de fótons*. Vamos considerar um sistema de 2 *fótons que se propagam na mesma direção z*, embora não necessariamente no mesmo sentido (vamos aplicar os resultados a fótons em sentidos opostos).

Na representação em que o vetor de estado de polarização linear na direção  $\theta$  é  $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ , uma *base* é formada pelos vetores de estado

$$\begin{aligned} x &\equiv |\rightarrow\rangle = |\theta = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y &\equiv |\uparrow\rangle = \left| \theta = \frac{\pi}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.158}$$

Num *semicondutor puro (intrínseco)*, a lacuna  $\Delta$  entre a última banda totalmente preenchida (*banda de valência*) e a primeira vazia acima dela (*banda de condução*) é muito menor (fig. 10.26), tipicamente da ordem de 0,5 eV.

À temperatura  $T = 0$ , o material seria *isolante*. Entretanto, à temperatura ambiente, já há uma fração dos elétrons termicamente excitada do topo da banda de valência para o fundo da banda de condução: o material tem uma condutividade  $\sigma$  à temperatura ambiente tipicamente  $\sim 10^{10}$  vezes maior

que representam fótons linearmente polarizados nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Para descrever o sistema de 2 fótons, é preciso ter vetores coluna de 4 componentes, pois temos de representar amplitudes de probabilidade para que, com analisadores orientados nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, cada um dos 2 fótons seja encontrado com cada uma dessas polarizações (4 possibilidades).

Uma base conveniente se obtém usando o *produto direto* dos vetores da base (10.158). O produto direto de 2 vetores coluna é definido por

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)_1 \otimes \left( \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right)_2 = \left( \begin{array}{cc} a & A \\ a & B \\ b & A \\ b & B \end{array} \right) \end{array} \quad (10.159)$$

fóton 1      fóton 2

Um vetor da base é o produto direto

$$x(1) x(2) = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{Amplitude de probabilidade de achar} \\ \text{o fóton 1 linearmente polarizado na} \\ \text{direção } x \text{ e o fóton 2 também} \end{array}$$

Analogamente, obtemos os demais. A base é então

$$\begin{array}{cc} \underbrace{x(1) x(2)}_{|\rightarrow\rangle_1 \otimes |\rightarrow\rangle_2} = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) & \underbrace{x(1) y(2)}_{|\rightarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ \underbrace{y(1) x(2)}_{|\uparrow\rangle_1 \otimes |\rightarrow\rangle_2} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) & \underbrace{y(1) y(2)}_{|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \end{array} \quad (10.160)$$

e o vetor de estado geral de polarização para 2 fótons é

$$|\psi\rangle = \psi_{xx} x(1)x(2) + \psi_{xy} x(1)y(2) + \psi_{yx} y(1)x(2) + \psi_{yy} y(1)y(2) = \begin{pmatrix} \psi_{xx} \\ \psi_{xy} \\ \psi_{yx} \\ \psi_{yy} \end{pmatrix} \quad (10.161)$$

onde, p/ ex.,  $\psi_{yx}$  é a amplitude de probabilidade de achar o fóton 1 linearmente polarizado na direção  $y$  e 2 na direção  $x$ .

Consideremos agora o estado (normalizado)

$$|S\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [x(1)x(2) + y(1)y(2)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.162)$$

que se chama *emaranhado*, porque não pode ser decomposto num produto de um estado do fóton 1 por um estado do fóton 2. Pela interpretação física vista na (10.161), esse é um estado em que há probabilidade 1/2 de achar *ambos* os fótons polarizados na direção  $x$  e probabilidade 1/2 de achar *ambos* polarizados na direção  $y$ , ou seja, em que *as polarizações lineares dos dois fótons estão correlacionadas: ambas têm a mesma direção* ( $x$  ou  $y$ ).

Assim, se (usando um analisador) verificamos que o fóton 1 tem polarização  $y$ , podemos afirmar, com *certeza*, que o fóton 2 também tem a mesma polarização  $y$ .

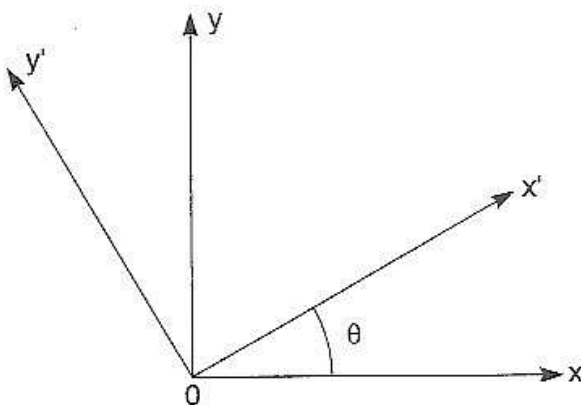


Fig. 10.27 Rotação de eixos

Consideremos agora (fig. 10.27) outro par de eixos ( $x' y'$ ) no plano ( $xy$ ), onde  $x'$  faz com  $x$  um ângulo  $\theta$ . Se tomarmos novos vetores de base nas direções  $x'$  e  $y'$ , teremos

$$\boxed{x' = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ \text{sen} \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}} \quad (10.163)$$

e podemos definir o estado

$$\boxed{|S'\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x'(1)x'(2) + y'(1)y'(2) \right]} \quad (10.164)$$

o que dá

$$\begin{aligned} |S'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \cos \theta \text{ sen } \theta \\ \text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \theta \\ -\text{sen } \theta \cos \theta \\ -\cos \theta \text{ sen } \theta \\ \cos^2 \theta \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta \\ 0 \\ 0 \\ \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{|S'\rangle = |S\rangle} \quad (10.165)$$

ou seja

$$\boxed{|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x(1) x(2) + y(1)y(2) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x'(1) x'(2) + y'(1)y'(2) \right]} \quad (10.166)$$

Assim, no estado  $S$ , as polarizações lineares dos dois fótons são paralelas, qualquer que seja a direção  $\theta$  escolhida.

### O paradoxo EPR

Consideremos um átomo num estado excitado que, numa transição para outro estado, emite 2 fótons em direções opostas, no estado de polarização  $|S\rangle$  (veremos logo um exemplo concreto).



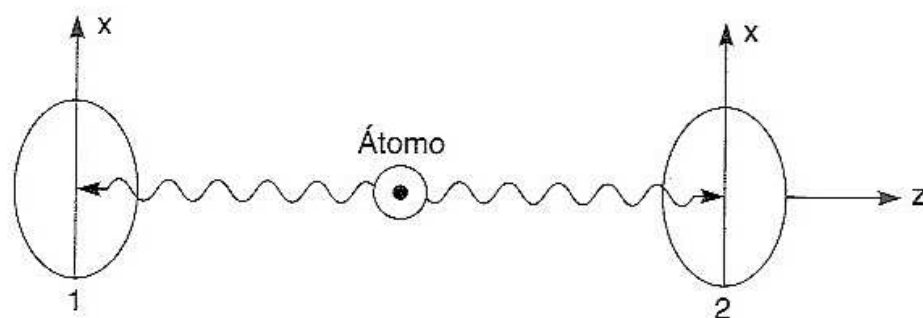


Fig. 10.28 O paradoxo EPR

Nesse caso, se tivermos (fig. 10.28) dois analisadores de polarização, de um lado e do outro do átomo, com seus eixos paralelos à direção  $x$ , e se o fóton 1 *passa* pelo seu analisador, ou seja, é linearmente polarizado na direção  $x$ , podemos *garantir* que o fóton 2 também será linearmente polarizado na mesma direção  $x$ .

Como os analisadores 1 e 2 podem estar tão distantes um do outro quanto quisermos, tenderíamos a achar que a determinação da polarização do fóton 1, *sem perturbar em nada* a polarização do fóton 2, permite-nos predizê-la. Segundo A. Einstein, B. Podolski e N. Rosen [*Phys. Rev.* **47**, 777 (1935)], deveríamos poder dizer então que o fóton 2 tem uma polarização linear bem definida na direção  $x$ .

Mas vimos na (10.166) que o mesmo se aplica a qualquer outra direção  $x'$ , que forma um  $\angle \theta$  arbitrário com  $x$ , p. ex.,  $\theta = \pi/4$ : o fóton 2 teria então também uma polarização linear bem definida nesta outra direção.

Por outro lado, vimos na Seç. 8.10 [cf. (8.122)] que polarizações lineares em direções diferentes (não perpendiculares) são *observáveis incompatíveis*: um fóton não pode ter simultaneamente valores bem definidos para elas. Embora formulado originalmente de forma diferente, esse é o *paradoxo EPR*, e a conclusão desses autores foi que a mecânica quântica seria uma teoria *incompleta*, pois não permite representar estados em que coexistem valores bem definidos da polarização linear em diferentes direções, embora seja possível predizê-los “sem perturbação”.

David Bohm, em 1952, formulou uma “interpretação causal” da mecânica quântica, admitindo a existência de “variáveis ocultas”, que teriam valores bem definidos (como, no exemplo acima, polarizações lineares em diferentes direções), mas sobre as quais a teoria quântica só daria informações incompletas. Como se poderia testar então a existência dessas variáveis?

Em 1965, John S. Bell mostrou que haveria testes experimentais realizáveis (em princípio) para esse fim. Numa experiência do tipo acima, orientando os analisadores em 3 direções diferentes, formando ângulos de  $120^\circ$  entre si, e medindo probabilidades de que os 2 fótons passem pelos respectivos analisadores quando

formam um determinado ângulo, é possível mostrar que, para uma combinação  $\sigma$  bem definida dessas probabilidades, qualquer teoria *local* (sem ações à distância) de variáveis ocultas leva a uma desigualdade (desigualdade de Bell) que, neste caso, é da forma

$$\boxed{|\sigma| \leq 2} \quad (10.167)$$

ao passo que a mecânica quântica leva a

$$\boxed{|\sigma|_{MQ} \leq 2\sqrt{2}} \quad (10.168)$$

permitindo, portanto, violar a (10.167).

Um experimento crucial foi realizado em 1982 por A. Aspect, P. Grangier e G. Roger [*Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982)]. Eles utilizaram pares de fótons emitidos numa transição no  $^{40}\text{Ca}$ , em que o par é produzido no estado  $|S\rangle$ . Para os ângulos que empregaram, a previsão da mecânica quântica era [violando a (10.167)]

$$\sigma_{MQ} = 2,70$$

e o resultado experimental foi

$$\sigma_{exp} = 2,697 \pm 0,015$$

violando claramente a desigualdade de Bell (10.167).

Num experimento posterior [A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982)], as orientações dos analisadores de polarização dos fótons 1 e 2 eram alteradas aproximadamente *ao acaso*, a intervalos de 10 ns, com os detectores separados por uma distância  $L$  de 12 m, o que dá  $L/c \sim 40$  ns. Logo, nenhum sinal podia ser transmitido de um detetor para o outro durante o tempo de vôo dos fótons. Apesar disso, as correlações e a violação da desigualdade de Bell persistiram!\*

---

\* Em 1997, N. Gisin *et al.* observaram as correlações para fótons separados por distâncias da ordem de 10 km!

Nesse sentido, portanto, as correlações são *não-locais*, e uma teoria de variáveis ocultas teria de ter ações instantâneas à distância para ser compatível com elas, o que, para Einstein, não seria uma solução satisfatória, pois, em suas palavras: “Só se pode achar uma escapatória supondo que a medida de 1 (telepativamente) altera a situação real de 2 ou negando situações reais independentes a objetos separados por um intervalo do gênero espaço. Ambas as alternativas me parecem inteiramente inaceitáveis”.

Embora as correlações EPR sejam não-locais, não violam o princípio relativístico de que nenhum sinal pode propagar-se com velocidade  $> c$  (Seç. 6.6). Com efeito, para observar as *correlações* entre os detetores 1 e 2, é preciso *comparar* as observações feitas, e para isto é preciso, *independentemente*, transmitir um sinal (por exemplo, eletromagnético) entre 1 e 2 contendo esta informação.

O efeito EPR tem uma aplicação prática na criptografia, onde se quer transmitir uma mensagem cifrada de um ponto 1 para outro ponto 2, de tal forma que a “chave” usada para decifrar a mensagem não possa ser interceptada e decodificada.

A chave, que é uma seqüência *ao acaso* de bits (0 ou 1), tem de ser transmitida entre os 2 pontos “à prova de interceptação”. Os resultados de uma experiência EPR, onde 0 e 1 podem, por exemplo, corresponder às polarizações lineares  $x$  e  $y$ , satisfazem a esta condição justamente porque não transmitem nenhum sinal, representando *puro acaso*. A informação está contida na *correlação* entre os resultados observados em 1 e 2. Esse método de *criptografia quântica* já está sendo empregado [A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991)].

### Descoerência

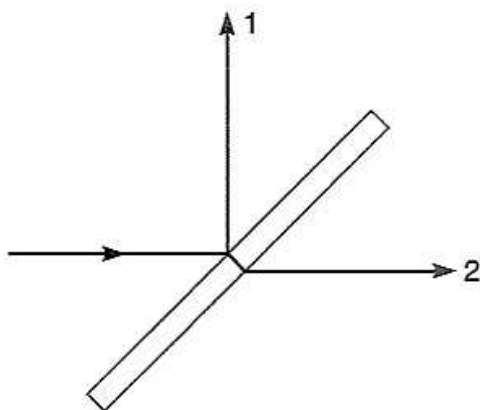


Fig. 10.29 Divisão de feixe

Consideremos *um* fóton que incide sobre uma lâmina transparente (fig. 10.29), de tal forma que a refletividade e a transmitividade sejam iguais (ambas 50%). Quanticamente, o vetor de estado resultante é uma superposição *coerente* de  $|1\rangle$  (fóton no feixe refletido) e  $|2\rangle$  (fóton no feixe transmitido), como, p. ex.,  $(1/\sqrt{2})(|1\rangle + |2\rangle)$ .

Um tal estado é muito diferente de uma “mistura estatística”, em que o fóton estaria com igual probabilidade em  $|1\rangle$  ou em  $|2\rangle$ , sem que saibamos onde se encontra.

Com efeito, na superposição quântica coerente, é possível, usando um dispositivo do tipo de um interferômetro de Michelson, voltar a reunir os feixes 1 e 2 e observar *interferência* entre dois caminhos possíveis. Nesse sentido, podemos dizer que o fóton está *ao mesmo tempo* nos feixes 1 e 2, evoluindo pela equação de Schrödinger.

Isso pode não ser muito surpreendente para um objeto microscópico, como o fóton. Mas, se a mecânica quântica e o princípio de superposição também se aplicam a objetos macroscópicos, conforme acreditamos, por que razão eles não aparecem em superposições coerentes de estados macroscopicamente distintos?

Esse aparente paradoxo foi formulado em 1935 por Schrödinger, nos seguintes termos:

“Um gato está encerrado numa câmara de aço, juntamente com o seguinte mecanismo diabólico (inacessível ao gato); dentro de um contador Geiger, há uma pequena quantidade de material radioativo, tão pequena que no decurso de uma hora *talvez* um único átomo se desintegre, mas com igual probabilidade de que isto não aconteça. Se acontecer, o contador, através de um relé, ativa um martelo, que quebra um frasco de ácido prússico. Deixando o sistema isolado durante uma hora, resulta que o gato estará vivo caso nenhum átomo se desintegre ao longo deste período, mas que uma única desintegração basta para envenená-lo. A função de onda do sistema todo representa essa situação como uma superposição do gato vivo e do gato morto em partes iguais”

A superposição quântica coerente, nesse caso como no exemplo acima, do fóton, difere de uma distribuição estatística, em que as probabilidades dos dois estados seriam iguais, pela possibilidade, em princípio, de observar interferências entre eles.

Recentemente houve progressos importantes na elucidação desse problema. As variáveis empregadas na descrição de um sistema macroscópico constituem apenas uma *fração* diminuta do conjunto total de variáveis (microscópicas) que seriam necessárias para caracterizar completamente o seu estado quântico. Todas as demais variáveis não são observadas, o que representa uma *perda de informação*.

Esse é um processo comparável ao que ocorre na dissipação de energia macroscópica por atrito, em que energia mecânica é convertida em calor por transferência a graus de liberdade internos.



Para que um sistema seja observado, é preciso que ele seja aberto, ou seja, que interaja com o ambiente que o rodeia (o “resto do Universo”). Esse ambiente não é observado, e a informação que recebe do sistema macroscópico é assim perdida. Note a referência a “deixar o sistema isolado” no trecho acima de Schrödinger.

Pode-se mostrar [cf. W. H. Zurek, *Phys. Today* **44**, 36 (1991)] que esse “atrito da informação” é o processo responsável pela perda da coerência quântica na escala macroscópica. Ele é chamado de *descoerência*, e ocorre numa escala de tempo muitas ordens de grandeza menor do que os tempos usualmente observáveis, passando assim despercebido. O *tempo de descoerência* é inversamente proporcional ao “grau de macroscopicidade” do sistema.

Entretanto, tomando precauções especiais para reduzir a interação com o ambiente, foi possível, recentemente, observar o efeito e medir o tempo de descoerência num sistema de alguns fótons contido dentro de uma cavidade ressonante a baixas temperaturas [M. Brune *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996); veja também S. Haroche *et al.*, *La Recherche* **301**, 50 (setembro de 1997)].

A interação com o ambiente parece ser responsável, ao menos em parte, pelo caráter probabilístico da teoria quântica, o aspecto “Deus joga dados” que tanto desagradava a Einstein. Seria o preço a pagar pelo “pecado original” de estudar um sistema de forma isolada, fazendo abstração de sua interação com o resto do Universo, que é uma das bases do método científico (*Fís. Bás.* **1**, Seç. 1.3).

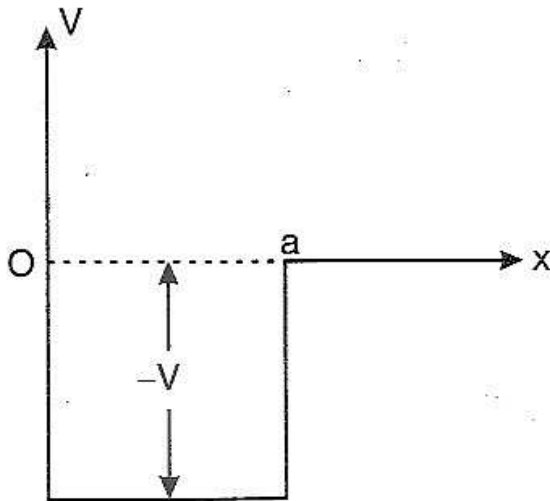
É um grande mérito — e não um defeito — da teoria quântica ter atingido a fronteira onde se torna aparente o efeito dessa interação sobre o mundo físico.

## PROBLEMAS

1. No problema do degrau de potencial (Seç. 10.2), mostre que não podem existir estados estacionários com  $E < 0$ .

*Sugestão:* Escreva as soluções nas regiões 1 e 2 e mostre que não é possível satisfazer as condições de contorno em  $x = 0$ .

2. No problema da barreira retangular (Seç. 10.4), calcule a *amplitude de reflexão*  $R = B/A$  e a *probabilidade de reflexão*  $\mathcal{R}$ . Mostre que  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ .



3. Uma partícula de massa  $m$  está confinada, em uma dimensão, por um poço de potencial retangular, limitado à esquerda por uma barreira impenetrável (fig.), correspondendo ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0), \\ -V & (0 < x < a), \\ 0 & (x > a). \end{cases}$$

onde  $V > 0$ .

(a) Para  $-V < E = -|E|$ , escreva as soluções estacionárias de energia  $E$  da equação de Schrödinger dentro e fora do poço de potencial.

(b) Aplicando as condições de contorno, demonstre que os autovalores da energia são as raízes da equação

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{2m(V - |E|)}}{\hbar} a \right] = -\sqrt{\frac{V - |E|}{|E|}}$$

4. Demonstre que o valor esperado da distância do elétron ao núcleo no estado fundamental do átomo de hidrogênio é  $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0$ .

5. Calcule os valores esperados da energia cinética  $\langle T \rangle$  e da energia potencial  $\langle V \rangle$  no estado fundamental do átomo de hidrogênio e verifique que satisfazem ao teorema do virial:  $\langle V \rangle = -2 \langle T \rangle$ .

**Sugestão:** Use a (10.112).

6. Um elétron está confinado dentro de uma camada delgada num semicondutor. Tratando-a como uma lâmina de espessura  $a$  entre paredes impenetráveis [cf. (10.35)], estime  $a$ , sabendo que a diferença de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado é de 0,05 eV.

7. Um feixe de elétrons de 2 eV incide sobre uma barreira de potencial retangular de 4 eV de altura e 10 Å de espessura. Qual é a probabilidade de transmissão? Qual seria para elétrons de 3 eV?



8. Uma partícula se encontra confinada numa caixa com paredes impenetráveis de largura  $a$ , em uma dimensão. Para  $t = 0$ , ela se encontra, com certeza, na metade direita da caixa, havendo igual probabilidade de ser encontrada em qualquer ponto dessa metade.

(a) Obtenha uma função de onda inicial que descreva a partícula.

(b) Qual é a probabilidade de que uma medida da energia, para  $t = 0$ , encontre-a no estado fundamental?

**Sugestão:** aplique a Regra II.

9. A solução mais simples, com nodos, da equação de Schrödinger para auto-estados  $s$  do átomo de H [eq. (10.116)] é da forma

$$\varphi(r) = (Ar + B)\exp(-\kappa r)$$

Procure uma solução dessa forma. Mostre que o nível de energia correspondente (estado  $2s$ ) é idêntico ao  $1.^{\circ}$  estado excitado na teoria de Bohr.

## RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

### CAPÍTULO 2

1. (a)  $\operatorname{tg} \theta_{1B} = n_{12}$  ; (b)  $\theta_{1B} = 53^\circ$  (ar/água) ;  $\theta_{1B} = 56,7^\circ$  (ar/vidro).

2.  $2\theta$  .

3.  $(n - 1)$  para  $n$  par;  $n$  para  $n$  ímpar (exceto para uma fonte situada na bissetriz, quando são  $n - 1$ ).

4. (a) 87,5 cm ; (b) 80 cm.

$$5. \quad d = h \operatorname{sen} \theta_1 \left( 1 - \frac{n \cos \theta_1}{\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1}} \right)$$

8. (c)  $137,5^\circ$

$$9. \quad \theta_{\max} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

15. 1,14 cm

17. (a)  $R = 4d_1/3 \approx 33,3 \text{ cm}$  ; (b)  $p = d_1/3 \approx 8,3 \text{ cm}$

18.  $p = \pm \frac{(\pm A - 1)}{A} f$  ;  $q = -(\pm A - 1)f$ , onde sinais superiores e inferiores se correspondem.

19. (a)  $f = -1 \text{ m}$  ; (b)  $f = +6,27 \text{ m}$ . A lente passa de divergente a convergente: a classificação se inverte para índice de refração relativo  $< 1$ .

$$20. q = R \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{(n_{12})^2 - \sin^2 \theta_1} - \cos \theta_1} \right] ;$$

na aproximação paraxial, tende a  $f' = \left( \frac{n_{12}}{n_{12} - 1} \right) R$

$$22. f = \frac{D^2}{8(n_{12} - 1)t}$$

$$23. \frac{n_1}{p} + \frac{n_3}{q} = \frac{(n_2 - n_1)}{R_1} + \frac{(n_3 - n_2)}{R_2}$$

$$26. x = \frac{n_0}{n'} \alpha_0 \ln \left[ \frac{(n_0 + n'z) + \sqrt{(n_0 + n'z)^2 - (n_0 \alpha_0)^2}}{n_0 (1 + \beta_0)} \right]$$

$$27. n = 2$$

$$28. (a) p = 2f \quad ; \quad (b) m = -1$$

### CAPÍTULO 3

$$1. y = \frac{\lambda D}{4d}$$

$$2. d = \frac{m \lambda}{(n - 1)}$$

$$4. 8,8 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$5. (a) h \approx \frac{\rho^2}{2R} \quad ; \quad (b) \rho_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$7. E(t) = \frac{\Delta\omega}{1 + (t\Delta\omega)} \quad ; \quad \Delta t = \frac{1}{\Delta\omega}$$

## CAPÍTULO 4

$$2. \lambda = 6.006 \text{ \AA}$$

$$5. 113 \text{ km} \approx 6,5\% \text{ do raio da Lua.}$$

$$6. (a) \text{ Da ordem de } 100 \text{ m. } (b) 9,8 \times 10^{-8} \text{ rad} \sim 0,02''$$

$$10. (a) 55.000 \quad ; \quad (b) \theta \approx 31,6^\circ \quad ; \quad \delta\theta \approx 5,6 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$12. (a) \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (3N+1) \frac{\Delta}{2} \right]}{\text{sen} \left( \frac{\Delta}{2} \right)} - \frac{\text{sen} \left[ (N+1) \cdot \frac{3\Delta}{2} \right]}{\text{sen} \left( \frac{3\Delta}{2} \right)} \right\}^2$$

$$13. 85$$

## CAPÍTULO 5

$$1. a = \frac{1}{v} = \frac{n}{c} \quad ; \quad S' = S \quad ; \quad U'_E = U_M \quad U'_M = U_E$$

$$5. (a) \text{ Circular levógira, amplitude } 2a \quad ; \quad (b) \text{ Elíptica dextrógira, eixos } 3a \text{ e } a.$$

6. (a)  $d = \frac{1}{4} \lambda_0 / (n_2 - n_1)$  ; (b) circular ; (c)  $d = 0,027 \text{ mm}$

7. Em ambos os casos, a intensidade não varia com a rotação do analisador ; (b) Para luz natural, continua não havendo variação ; para polarização circular, a intensidade transmitida varia e se anula para duas orientações (opostas) do analisador.

8.  $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$

9.  $\hat{n}_{12} \cdot (\kappa_2 \mathbf{E}_2 - \kappa_1 \mathbf{E}_1) = \sigma / \epsilon_0$

10.  $T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$  ;  $T_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$$T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{2}{n+1} \quad (\theta_1 = 0)$$

11. (b)  $t_{\perp} = \frac{\sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}$  ;  $t_{\parallel} = \frac{\sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$  ;

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (\theta_1 = 0)$$

13. (a)  $r_{\perp} = \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2$  ; (b)  $t_{\perp} = \frac{4n^2}{(n^2 + 1)^2}$  ; (c)  $P = - \frac{(n^2 - 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2}$

## CAPÍTULO 6

6. (a)  $x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0)$  ;  $x_2' = x_2$  ;  $x_3' = x_3$  ;  $x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1)$

9.  $\text{tg } \theta = \gamma \text{tg } \theta_0$

10. É de 216 milhões de reais

11. (a) 533 ; (b) 99,9998%

12.  $v / v_0 = \left(1 - \frac{v}{c}\right) / \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

13. (b) 2,23 T

14. (a)  $x(t) = \frac{m_0 c^2}{F_0} \sqrt{1 + \left(\frac{F_0 t}{m_0 c}\right)^2}$  ; (b)  $x(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m_0} t^2$  ; (c)  $x(t) \rightarrow ct$

15.  $E_1 = \frac{1}{2} \left[ M_0 + \frac{(M_1^2 - M_2^2)}{M_0} \right] c^2$  ;  $E_2 = \frac{1}{2} \left[ M_0 - \frac{(M_1^2 - M_2^2)}{M_0} \right] c^2$

16. (a)  $M_0 = \sqrt{2(1 + \alpha)} m_0$  ; (b)  $V = \alpha v / (1 + \alpha)$

17. (a)  $\text{tg } \theta = \frac{\text{tg } \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  ; (b)  $L = L_0 \left[ \left(1 - \beta^2\right) \cos^2 \theta' + \text{sen}^2 \theta' \right]^{1/2}$  ;  $\beta \equiv \frac{V}{c}$

19. (a)  $V = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}$  ; (b)  $\left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}\right) M_0 c^2$

22. c



**CAPÍTULO 7**

1. (a) 300 m ; (b)  $4,1 \times 10^{-9}$  eV ; (c)  $7,5 \times 10^{30}$

2. (a) 4,2 eV ; (b) 4,1 eV

3. 17,6 MeV

4.  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v \operatorname{sen} \theta}{v_0 - v \cos \theta}$

5. 32,5 eV

7. (b) 6,403 Å

9. (b) 0,027%

10.  $E_n = n \hbar \omega$  ; frequência  $\omega$

11. (a)  $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{M r_0^2}$  ; (b)  $E_1 \cong 7,6 \times 10^{-3}$  eV

12. (a)  $1,242 \times 10^{-13}$  cm (b) 1,5 Å

14. (a)  $E_n = -2 \frac{m e^4}{(4 \pi)^2 n^2 (\epsilon_0)^2 \hbar^2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ; (b)  $-E_1 = 54,4$  eV

**CAPÍTULO 8**

2.  $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ;  $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Nesta representação, os vetores de estado de polarização circular direita e esquerda são os vetores de base.

$$7. (a) p = \cos^2 \theta_1 \cos^2 (\theta_2 - \theta_1) ; (b) \theta_1 = \frac{\theta_2}{2}$$

$$8. (b) \theta = -\pi/4.$$

$$11. [\hat{P}_\theta, \hat{J}_z] = -i\hbar \begin{pmatrix} -\text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) \end{pmatrix}$$

## CAPÍTULO 9

$$2. \left[ \hat{x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] = -2 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$3. \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^n \right] = n \hat{x}^{n-1}$$

$$4. \hat{P}^+ = \hat{P} ; \hat{T}_a^+ = \hat{T}_{-a}$$

$$5. \rho = |C_+|^2 + |C_-|^2 + 2 \text{Re}(C_-^* C_+ e^{2ikx}) \quad (k \equiv p / \hbar)$$

$$j = \left( |C_+|^2 - |C_-|^2 \right) v \quad (v \equiv p / m)$$

## CAPÍTULO 10

$$2. R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right) \left( \frac{e^{i\Delta} - 1}{1 - r e^{i\Delta}} \right) \quad \mathcal{R} = \frac{4 r \text{sen}^2(ka)}{t^2 + 4 r \text{sen}^2(ka)}$$

$$5. \quad \langle T \rangle = \frac{q^2}{2 a_0} \quad ; \quad \langle V \rangle = -\frac{q^2}{a_0}$$

$$6. \quad a \approx 4,8 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$7. \quad 2 \text{ eV: } 2,04 \times 10^{-6} \quad ; \quad 3 \text{ eV: } 1,07 \times 10^{-4}$$

$$8. \quad (\text{a}) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a/2) \\ \sqrt{2/a} & (a/2 < x < a) \end{cases} \quad ; \quad (\text{b}) \quad p = \frac{4}{\pi^2}$$

$$9. \quad \varphi(r) = N (r - 2 a_0) \exp\left(-\frac{r}{2 a_0}\right) \quad ; \quad E = \frac{1}{4} E_1$$

## BIBLIOGRAFIA

A Relação abaixo representa bibliografia adicional para o presente volume, a ser acrescida das referências já citadas nos volumes anteriores. Os itens assinalados com asterisco (\*) são os mais próximos da apresentação aqui adotadas e são recomendados para o estudo de tópicos adicionais.

### *Ótica*

- Born, M. e Wolf, E., *Principles of Optics*, Pergamon Press, London (1959).  
 Hecht, E. e Zajac, A., *Optics*, Addison-Wesley, Reading (1979).  
 Jenkins, F.A. e White, H. E., *Fundamentals of Optics*, 4.a ed., McGraw-Hill, N.York (1976).  
 Klein, M.V., *Optics*, Wiley, N. York (1970).  
 \*Nussenzveig, H. M., *Ondas Eletromagnéticas*, vol. I, CBPF, Rio de Janeiro (1964).  
 \*Rossi, B., *Optics*, Addison-Wesley, Reading (1957).  
 Sommerfeld, A., *Optics*, Academic, N. York (1954).

### *Relatividade*

- \*Berry, M., *Principles of Cosmology and Gravitation*, Cambridge Univ. Press (1976).  
 Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, 3.a ed., Princeton Univ. Press (1950).  
 \*French, A. P., *Special Relativity*, W. W. Norton, N. York (1968).  
 \*Møller, C., *The Theory of Relativity*, 2.a ed., Clarendon Press, Oxford (1972).  
 Pauli, W., *Theory of Relativity*, Pergamon, London (1958).  
 Robertson, H. P. e Noonan, T. W., *Relativity and Cosmology*, W. B. Saunders, Philadelphia (1968).  
 J. Schwinger, *Einstein's Legacy*, W. H. Freeman, San Francisco (1968).  
 Taylor, E. F. e Wheeler, J., *Spacetime Physics*, W. H. Freeman, San Francisco (1966).

*Mecânica Quântica*

- Bohm, D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, N. York (1951).
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. e Laloë, F., *Quantum Mechanics*, 2 vols., Wiley, N.York (1977).
- Dicke, R. H. e Wittke, J. P., *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1960).
- Dirac, P. A. M., *Quantum Mechanics*, 4.a ed., Oxford Univ. Press (1958).
- \*French, A. P., e Taylor, E. F., *An Introduction to Quantum Physics*, Chapman & Hall, London (1979).
- Gasiorowicz, S., *Física Quântica*, Guanabara 2, Rio de Janeiro (1979).
- Heisenberg, W., *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover, N. York ((1930).
- Landau, L. D. e Lifshitz, E. M., *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory*, Pergamon, Oxford (1965).
- \*Landshoff, P. e Metherell, A., *Simple Quantum Physics*, Cambridge Univ. Press (1979).
- \*Martin, J. L., *Basic Quantum Mechanics*, Oxford Univ. Press (1981).
- Messiah, A., *Quantum Mechanics*, 2 vols., Wiley, N. York (1959).
- Oldenberg, O., *Introduction to Atomic Physics*, McGraw-Hill, N. York (1949).
- Saxon, D. S., *Elementary Quantum Mechanics*, Holden-Day, San Francisco (1968).
- Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, 3.a ed., McGraw-Hill, N. York (1968).
- \*Wichmann, E. E., *Quantum Physics*, McGraw-Hill, N. York (1971).
- História, Trabalhos Originais*
- Einstein, A., et al., *The Principle of Relativity*, Dover, N. York (1958).
- Hey, T. e Walters, P., *The Quantum Universe*, Cambridge Univ. Press (1987).
- Huygens, C., *Treatise on Light*, Dover, N. York (1962).
- Jammer, M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, N. Y. (1966).
- Leite Lopes, J. e Escoubès, B., *Sources et Évolution de la Physique Quantique*, Masson, Paris (1995).
- Newton, I., *Opticks*, Dover, N. York (1952).
- Schrödinger, E., *Collected Papers on Wave Mechanics*, Blackie, London (1928).
- van der Waerden, B. L., *Sources of Quantum Mechanics*, Dover, N. York (1968).

# ÍNDICE

## A

- Aberração 205, 240  
 Aberração cromática 32,35  
 Aberração esférica 19  
 Abertura angular 78  
 Abertura circular 109, 112  
 Abertura retangular 103  
 Absolutamente separados 202  
 Absorção de um fóton 268  
 Ação 247  
 "Acessos" de fácil reflexão ou fácil transmissão 292  
 Ações à distância 411  
 Acomodação 32  
 Acuidade visual 32  
 Aglomerados de galáxias 238  
 Alastramento do pacote de ondas 351  
 Amplitude complexa 52  
 Amplitude de difração 101  
 Amplitude de espalhamento 123  
 Amplitude de reflexão 365, 414  
 Amplitude de probabilidade 288, 293, 302, 334, 408  
 Amplitude (real) 52  
 Amplitudes de reflexão 157  
 Amplitude de transmissão 292, 365, 379  
 Amplitudes de transmissão 157  
 Amplitudes reais, 145  
 Analisador 162, 163, 408  
 Analisadores de polarização 410  
 Analogia ótico-mecânica 42, 272  
 Anéis de Newton 64, 81  
 Ângulo crítico 15, 165  
 Ângulo de Brewster 45  
 Ângulo de incidência 7  
 Ângulo de reflexão 7  
 Ângulo de refração 7  
 Ângulo visual 32  
 Aproximação de Kirchhoff 92, 111  
 Aproximação paraxial 19  
 Arco-íris primário 47  
 Área de coerência 79  
 Asas de borboletas 64  
 Aspecto visual de objetos em movimento 193  
 Atividade ótica natural 149, 322  
 Átomos de Rydberg 265  
 Atmosfera 36  
 Aumento angular 33-35, 111  
 Aumento lateral 21, 25, 30  
 Aumento linear 34  
 Aumento longitudinal 49  
 Aumento total 34  
 Ausência de peso 225  
 Autoestado 317, 320  
 Autoestado simultâneo 320, 322  
 Autoestados 309, 315, 325, 376  
 Autoestados do momento 348, 353  
 Autoestados do momento angular 377  
 Autofunção imprópria 345, 348  
 Autofunções 372, 398  
 Autofunções da energia 349  
 Autofunções do momento 344  
 Autofunções ímpares 374  
 Autofunções pares 374  
 Autovalor 308, 317  
 Autovalor degenerado 321  
 Autovalores 309, 310, 315, 320, 371, 376, 377  
 Autovalores da energia 378  
 Autovalores discretos 402  
 Autovetor 308  
 Autovetores 309  
 Azimute 160  
 Azimute de incidência 160, 163

## B

- Balanço de energia médio 171  
 Banda de condução 406  
 Banda de valência 406  
 Banda semi-cheia 405  
 Bandas de energia permitidas 401  
 Barreira coulombiana 387  
 Barreira de potencial retangular 379  
 Base 325, 345  
 Base ortonormal 302, 308, 320, 326, 375  
 Base ortonormal comum de autovetores 321  
 Bastonetes 32  
 "Big-bang" 239  
 Birrefringência circular 303  
 Bolhas de sabão 63  
 Bombeamento atômico 271  
 "Bra" 294  
 "Bracket" (colchete de Dirac) 294  
 Buraco negro 238  
 Buracos negros 237



## C

- Caixa de paredes impenetráveis 369  
 Calcita 164  
 Camada fechada 394  
 Caminho ótico 11  
 Caminhos indistinguíveis 290  
 Campo eletromagnético 223  
 Campo gravitacional central 234  
 "Canal" de TV 77  
 Caráter probabilístico da teoria quântica 414  
 Carga nuclear 259  
 Catástrofe ultravioleta 247  
 Célula unitária 404, 405  
 Centro de curvatura 18  
 Centro de massa 387  
 Chapa fotográfica 132  
 Cinemática quântica 323  
 Coeficientes de expansão 375  
 Coeficientes de Fourier 375  
 Coerência 73, 78, 129  
 Coerência de ordem superior 79  
 Coerência transversal 78, 106  
 Completeza 374  
 Computador 319, 397  
 Colapso gravitacional 237  
 Colimação 78  
 Colimador 119  
 Colisões inelásticas 271  
 Compatibilidade 321  
 Componente 304  
 Componentes 302  
 Comportamento corpuscular 283  
 Comportamento ondulatorio 283  
 Comprimento de coerência 77, 78  
 Comprimento de onda 6  
 Comprimento de onda Compton do elétron 256, 279  
 Comprimento de onda de de Broglie 272, 281  
 Comprimento de onda no meio 52  
 Comprimento de onda no vácuo 52  
 Comprimento próprio 192  
 Comprimentos transversais 187  
 Comutatividade 321  
 Condição de autovalores 401  
 Condição de Bragg 127  
 Condição de frequência 271  
 Condição de frequência de Bohr 268  
 Condição de normalização 294, 334, 335, 351  
 Condição de periodicidade 376  
 Condição de Laue 124-127  
 Condição de quantização de Bohr 268, 272, 315  
 Condições de contorno 152, 154, 363, 368, 369, 380  
 Condições de contorno periódicas 402  
 Condições de interferência 58, 62  
 Condições no infinito 363  
 Condutividade de um metal 396  
 Condutor 405  
 Cone de luz 202, 237, 238  
 Cones 32  
 Confinamento 378  
 Conjugado hermiteano 306, 337  
 Conjunto ortonormal 299  
 Conservação de energia 140  
 Conservação do momento 208  
 Conservação do quadrimomento 223  
 Conservação global da probabilidade 345  
 Conservação local 345  
 Constante de Boltzmann 248  
 Constante dielétrica 138  
 Constante de estrutura fina 280  
 Constante de fase 53  
 Constante de Hubble 207, 239  
 Constante de Planck 247, 267  
 Constante de Rydberg 265, 267, 280  
 Constante de Rydberg para o hidrogênio 261  
 Constante eletromagnética 139  
 Constante gravitacional 228  
 Constante ótica 139  
 Constantes de fase 145  
 Contração de Lorentz 192, 231  
 Contraste das franjas 66  
 Convenção de sinais 23, 26  
 Convergência 21  
 Cores das manchas de óleo 64, 81  
 Cores de interferência 63  
 Córnea 32  
 Coroas de difração 113  
 Correlações EPR 412  
 Correlações não-locais 412  
 Corrente de probabilidade 347, 364  
 Corrente de saturação 250  
 Cosmologia 238  
 Covariantes 222  
 Criptografia quântica 412  
 Cristal 395, 397  
 Cristal birrefringente 312  
 Cristal de calcita 299  
 Cristal ideal 122  
 Cristal unidimensional 402  
 Cristalino 32  
 Critério de Rayleigh 110, 120  
 Curva de Lissajous 145  
 Curvatura 20, 232, 233, 244  
 Curvatura do espaço-tempo 230  
 Curvatura do espaço-tempo quadridimensional 233

## D

Decomposição espectral 119  
 Defasagem 382  
 Definição de Einstein da simultaneidade 184  
 Deflexão gravitacional da luz 226, 237  
 Degenerescência 348  
 Degrau de potencial 361, 381  
 Deslocamento Compton 254, 256  
 Densidade de corrente 349  
 Densidade de corrente de energia 140, 141, 216  
 Densidade de corrente  
   de probabilidade 345, 353  
 Densidade de energia 141  
 Densidade de momento 216  
 Densidade de polarização 138  
 Densidade de probabilidade 334, 345, 351, 391  
 Densidade de probabilidade radial 392  
 Densidade total de energia eletromagnética 140  
 Densidades de energia elétrica e magnética 141  
 Descoerência 412, 414  
 Desigualdade de Bell 411  
 Desigualdade de Schwarz 297, 328  
 Desintegração alfa 387  
 Desvio 46  
 Desvio Doppler para o vermelho 260  
 Desvio gravitacional 227  
 Desvio lateral 46  
 Desvio mínimo 46  
 Desvio para o vermelho 207, 226, 227  
 Desvio quadrático médio 317  
 Deutério 280  
 Dextrógira 151  
 Diagrama de termos 269  
 Diâmetro angular 79  
 Dicróico 164  
 Diferença de caminho 101, 127  
 Diferença de fase 55, 101, 145  
 Difração 1, 6, 83  
 Difração de Bragg 274  
 Difração de elétrons 273-275  
 Difração de Fraunhofer 84, 98  
 Difração de Fresnel 84, 93  
 Difração de Fresnel no eixo  
   de uma abertura circular 96  
 Difração de partículas neutras 275  
 Difração de raios X 122, 275, 395  
 Difração no eixo de um disco circular 98  
 Difração por uma esfera 113  
 Difração por uma fenda 106  
 Dilatação dos intervalos de tempo 195, 207, 240  
 Dimensão do espaço dos estados 299  
 Dinâmica relativística 208  
 Dioptrias 49

Direção de observação 99  
 Direção de propagação 53  
 Direções principais 172  
 Disco central 110  
 Disco central de difração 110  
 Disco circular 111, 112  
 Dispersão 7, 119, 120, 139, 350, 351, 383  
 Dispositivos complementares 111, 112  
 Distância focal 20  
 Distância imagem 20  
 Distância mais provável 392  
 Distância objeto 20  
 Distância própria 202  
 Distribuição espectral da radiação térmica 246  
 Distribuição estatística 413  
 Divergência 20  
 Divergência superficial 153  
 Divisão de feixe 412  
 Dualidade onda-partícula 289  
 Dupla degenerescência 364  
 Dupla refração 299

## E

Efeito Compton 254, 279  
 Efeito Doppler 177, 203, 205, 207, 227  
 Efeito Doppler acústico 206  
 Efeito Doppler relativístico 206  
 Efeito Doppler transversal 207  
 Efeito fotoelétrico 2, 182, 249, 292  
 Efeito Mössbauer 227  
 Efeito Ramsauer 385  
 Efeitos cinemáticos da TL 191  
 Eixo de um filtro de polarização 173  
 Eixos cruzados 163  
 Elemento de matriz 305  
 Elemento de matriz diagonal 307  
 Elementos diagonais 305, 309  
 Elétron de recuo 279  
 Elétron "ótico" 275  
 Elétrons de valência 404, 405  
 Elétrons quase livres 396  
 Elevador de Einstein 225  
 Elipsóide refletor 13  
 Emissão "a frio" 387  
 Emissão de campo 387  
 Emissão de um fóton 268  
 Energia cinética 213, 214  
 "Energia de incerteza" 372, 393  
 Energia de ionização 270  
 Energia de localização 372  
 Energia de repouso 215  
 Energia do estado fundamental 270

- Energia de excitação 270, 271  
 Energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio 390  
 Energia quantizada 371  
 Energia relativística 212, 223  
 Energia térmica 248  
 Energia térmica média 405  
 Envoltória 5  
 Equação da continuidade 346  
 Equação das lentes delgadas 30  
 Equação de evolução 326  
 Equação de Einstein do efeito fotoelétrico 252  
 Equação de evolução quântica 324  
 Equação de evolução temporal 336  
 Equação de ondas 138  
 Equação de Schrödinger 275, 387, 389  
 Equação de Schrödinger dependente do tempo 336  
 Equação de Schrödinger estacionária 277  
 Equação de Schrödinger para estados estacionários 278  
 Equação de Schrödinger tridimensional 351  
 Equação de Schrödinger unidimensional 333  
 Equação diferencial dos raios 39, 42  
 Equação diferencial para o raio 38  
 Equação secular 310  
 Equações de Einstein 234  
 Equações de Maxwell 137  
 Escala absoluta de tamanho 290  
 Escala atômica de tamanho 267  
 Espaçamento das franjas 58  
 Espaço de Hilbert (dimensão infinita) 375  
 Espaço-tempo 199, 202, 219, 220  
 Espaço-tempo de Minkowski 234  
 "Espalhamento" 83, 270  
 Espalhamento de partículas  $\alpha$  258  
 Espalhamento por um átomo 123  
 Espectro 345  
 Espectro de absorção 260  
 Espectro de bandas 402  
 Espectrômetro de Bragg 128, 254  
 Espectro contínuo 126, 260, 270, 345, 359  
 Espectro de emissão 260  
 Espectro discreto 371, 378  
 Espectro do H 260  
 Espectros 119  
 Espectros atômicos 260  
 Espectroscopia 121  
 Espelho convexo 23  
 Espelho esférico 18  
 Espelho esférico côncavo 18  
 Espelho plano 16  
 Estabilidade da matéria 395  
 Estado clássico 293  
 Estado de polarização linear 293  
 Estado emaranhado 408  
 Estado excitado 270, 373  
 Estado fundamental 268, 271, 372, 373, 388  
 Estado fundamental do átomo de hidrogênio 387  
 Estado geral de polarização 294, 303  
 Estado quântico 344  
 Estado quântico de polarização de um fóton 293, 295  
 Estado sólido 395  
 Estados correlacionados de duas partículas 406  
 Estados de polarização 291, 296  
 Estados estacionários 263, 268, 269, 275, 276, 325, 353  
 Estados estacionários em uma dimensão 359  
 Estados estacionários ligados 388  
 Estrelas 106  
 Estrutura de bandas 402  
 Estrutura fina e hiperfina 70  
 Estrutura hiperfina 72  
 Étalon 72  
 "Éter" 2, 171, 181, 182, 206  
 Eventos 199, 201  
 Expansão do Universo 238, 239, 260  
 Expansão em série de Fourier 375  
 Experimento de J. Bose 170  
 Experimento de Young 51, 56, 114  
 Experimento de Young com elétrons 286  
 Experimento de Young com ondas clássicas 284  
 Experimento de Young com partículas clássicas 285  
 Experimento de Michelson e Morley 178  
 Experimentos de Franck e Hertz 270
- ## F
- Fase 4  
 Fase da onda 52  
 Fase de uma onda 204  
 Fator de Boltzmann 248, 405  
 Fator de dilatação temporal 229  
 Fator de escala cósmico 239  
 Fator de fase 294, 296, 325, 367, 398  
 Fator de forma atômico 124  
 Fator de interferência 101, 114, 115, 124, 125, 136  
 Fator de interferência de N fendas 117  
 Fator de normalização 390  
 Fator de obliquidade 85, 89  
 Fator de propagação 203

Fatores de normalização 371, 374  
 Fator temporal 54  
 Feixe de referência 129, 130  
 Feixe estacionário de partículas 348  
 Feixe extraordinário 299  
 Feixe ordinário 299  
 Ferromagnetismo 395  
 Fibras óticas 16  
 Figura de difração 84  
 Figura de difração da rede 118  
 Figura de difração de Fraunhofer 101  
 Figura de difração de um par de fendas 115  
 Figura de difração de uma  
   abertura circular 110  
 Figura de difração de uma abertura  
   triangular 106  
 Figura de difração de uma  
   rede bidimensional 126  
 Filme anti-refletor 174  
 Filmes anti-refletores 63  
 Filme de um quarto de onda 63  
 Filtro de polarização 291  
 Filtros de polarização 163  
 Filtros de polarização linear 292  
 Filtros elétricos 402  
 Física da matéria condensada 395  
 Fluido de galáxias 238  
 Flutuação 317  
 Flutuações de intensidade 79  
 Focalização 97  
 Foco 13  
 Foco de um espelho esférico 20  
 Foco imagem 25  
 Foco objeto 25  
 Fonte coerente 284  
 Fonte extensa 65  
 Fonte linear 107  
 Fonte linear incoerente 113  
 Fonte puntiforme 101  
 Fontes de luz extensa 65  
 Fontes incoerentes 74  
 Força de Lorentz 213  
 Força impulsiva 362  
 Forças de contato 208  
 Forças de inércia 176, 224  
 Forças inerciais 229  
 Forma gaussiana 30  
 Formalismo covariante 208  
 Forma newtoniana 31  
 Formula de Airy 111  
 Fórmula de Balmer 264, 267  
 Fórmula de Newton 26, 47  
 Fórmulas de Euler 165  
 Fórmulas de Fresnel 154  
 Fotocélulas 249

Fotocorrente 253  
 Fotoelétrons 250  
 Fotografia 128  
 Fóton 216, 253, 255, 393  
 Fóton circularmente polarizado 297  
 Fóton linearmente polarizado 292  
 Fótons 2  
 Fóvea 32  
 Franjas de igual espessura 63  
 Franjas de igual inclinação 71  
 Franjas de interferência 52, 58, 382  
 Franjas de interferência de igual inclinação 65  
 Frente de onda 4, 183  
 Frentes de onda 128  
 Freqüência 52  
 Freqüência de ciclotron 242  
 Freqüências relativas 300  
 Função de onda 287  
 Função de onda de referência 132  
 Função de onda objeto 132  
 Função de trabalho 251, 279  
 Funções de onda 335  
 Futuro absoluto 200

## G

Gás nobre 394  
 Gênero espaço 202  
 Gênero luz 202  
 Gênero tempo 201  
 Geodésica 232, 234  
 Geodésica no espaço-tempo 236  
 Geodésicas 237  
 Geometria do espaço-tempo 234  
 Geometria euclidiana 231  
 Geometria não-euclidiana 232  
 Geometria riemanniana 233  
 Grande explosão ("big-bang") 239  
 Grandeza observável 298  
 Grandezas aditivas 311  
 Grau de polarização 162  
 Grau de macroscopicidade 414  
 Graus de liberdade independentes 352, 354

## H

Hamiltoniano 376  
 Helicidade 149  
 Hipótese de Ritz 181  
 Holografia 128  
 Holograma 129, 130, 133

## I

Idade do universo 239  
 Imagem 13, 17  
 Imagem ereta 18  
 Imagem pseudoscópica 133  
 Imagem reversa 18  
 Imagem virtual 17  
 Impurezas 406  
 Incerteza 317  
 Incidência  $\perp$  159  
 Incidência rasante 159  
 Índice de refração 52, 139, 360,  
 366, 383, 386  
 Índice de refração absoluto 10  
 Índice de refração relativo 7  
 Inércia da energia 216  
 Instrumentos óticos 32  
 Integral de Fourier 345, 349  
 Integral de Fourier tridimensional 353  
 Intensidade 143  
 Intensidade da luz 52  
 Intensidade resultante 54  
 Interação instantânea à distância 224  
 Interface refratora plana 27  
 Interferência 284  
 Interferência construtiva 55  
 Interferência da luz 51  
 Interferência de feixes múltiplos 59  
 Interferência destrutiva 55  
 Interferência em lâminas delgadas 59  
 Interferômetro de Fabry-Perot 71  
 Interferômetro de Michelson 72, 178, 413  
 Interferômetro estelar 79  
 Interferômetro estelar de Michelson 82  
 Interferência 1, 85  
 Interferômetros 69  
 Interpretação causal 410  
 Interpretação da mecânica quântica 406  
 Interpretação probabilística 288  
 Intervalo 199, 219  
 Intervalo de tempo próprio 201  
 Intervalo infinitesimal de tempo próprio 222  
 Intervalos de gênero tempo 238  
 Invariância da fase 240  
 Invariância do hamiltoniano 374  
 Invariante 199, 204, 223  
 Íris 32, 106  
 Isolante 405, 406  
 Isolantes 404

## K

"Ket" 294, 300

## L

Lacuna 405, 406  
 Lacuna de energia 404  
 Lacunas 402, 403  
 Lâmina de faces paralelas 170, 382  
 Largura das franjas 68  
 Largura espectral 77, 82, 349  
 Largura temporal 76, 82  
 Laser 2, 78, 129  
 Lei básica da interferência 55  
 Lei da conservação da probabilidade 346  
 Lei da reciprocidade 165  
 Lei da reflexão 7  
 Lei da refração 7  
 Lei de Brewster 161  
 Lei de conservação do momento 210  
 Lei de Coulomb 259  
 Lei fundamental da dinâmica 212, 337  
 Lei de Galileu de composição  
 de velocidades 176, 178  
 Lei de Hubble 239  
 Lei de Malus 164  
 Lei relativística de composição  
 de velocidades 196, 198, 240, 241  
 Leis de conservação 208  
 Lente biconvexa 28  
 Lente convergente 14  
 Lente de Fresnel 97, 134  
 Lente eletrostática 44  
 Lentes "azuladas" 63  
 Lentes delgadas 27  
 Lentes magnéticas 44  
 Levógira 151  
 Ligação covalente 395  
 Ligação iônica 394  
 Ligação química covalente 395  
 Limiar de excitação 271  
 Limite da série 261  
 Limite da sombra 134  
 Limite do poder separador 70, 111, 120  
 Limite clássico 314  
 Linha de universo 202, 234, 236  
 Linha espectral 265  
 Linhas antinodais 59  
 Linhas de corrente da energia na reflexão  
 total 169  
 Linhas de nível 64  
 Linhas espectrais 260  
 Linhas nodais 59  
 Localização por um diafragma 354  
 Lupa 33  
 Luz circularmente polarizada 147, 297, 312  
 Luz circularmente polarizada direita 148  
 Luz circularmente polarizada esquerda 148



Luz do laser 78  
 Luz elípticamente polarizada 149, 167  
 Luz laser 132  
 Luz linearmente polarizada 146  
 Luz monocromática 52  
 Luz natural 161  
 Luz parcialmente polarizada 162  
 Luz térmica 78  
 Luz totalmente polarizada 162

## M

Mancha brilhante de Poisson 113  
 Mancha de Poisson 98  
 "Manchas de Laue" 126  
 Maser de hidrogênio 228  
 Massa de repouso 212, 223  
 Massa gravitacional 224  
 Massa inercial 209, 218, 224  
 Massa própria 212  
 Massa reduzida 267, 388  
 Massa relativística 242  
 Material dicróico 164  
 Matriz 306  
 Matriz coluna 293  
 Matriz conjugada hermiteana 306  
 Matriz hermiteana 310  
 Matriz linha 293  
 Matrizes 301, 305  
 Máximo principal 125, 127  
 Máximos de transmissão 384  
 Máximos principais 116, 118, 124, 125  
 Mecânica newtoniana 185  
 Mecânica ondulatória 276, 277  
 Mecânica relativística 208  
 Meio estratificado 36  
 Meio inhomogêneo 35  
 Meios anisotrópicos 164  
 Meios transparentes 137  
 Mensurabilidade simultânea 321  
 Metais 404  
 Metais alcalinos 405  
 Metais nobres 405  
 Método das zonas de Fresnel 86, 87, 93  
 Método dos pós microcristalinos 128  
 Métrica 233  
 Métrica de Minkowski 230, 234  
 Métrica de Schwarzschild 236, 237  
 Métrica do espaço-tempo 230  
 Métrica pseudo-euclídeana 220  
 Microscópio composto 33  
 Microscópio eletrônico 44, 111  
 Microscópio de Heisenberg 355

Microscópios de emissão e de tunelamento 387  
 Miópe (hipermétrope) 32  
 Mistura estatística 413  
 Mobilidade 396  
 Momento angular intrínseco 393  
 Modelo atômico de Bohr 262, 268, 275  
 Modelo atômico de Rutherford 259  
 Modelo de Bohr 269  
 Modelo de Gamow da desintegração alfa 387  
 Modelo de J. J. Thomson 262  
 Modelo de Thomson 258  
 Modos normais 372  
 Molécula diatômica 280  
 Momento angular 267, 377, 393  
 Momento angular do fóton 311, 314, 315, 324  
 Momento angular orbital 393  
 Momento de dipolo magnético 393  
 Momento relativístico 208, 223  
 Movimento confinado 361  
 Movimento relativo 387  
 Mudança de fase na reflexão 61  
 Multiplicidade de representações 303  
 Multi-reflexões 382  
 Músculo ciliar 32

## N

Nervo ótico 32  
 Neutrino 216  
 Níveis de energia 269, 371, 388  
 Níveis de energia rotacional 280  
 Nós 378, 388  
 Norma 223, 295, 318  
 Normalização 296  
 Notação de Dirac 301  
 Núcleo de galáxias 238  
 Número atômico 259  
 Número de fótons 292  
 Número de franjas 180  
 Número de nós 373  
 Número de onda 52  
 Número de onda reduzido 52  
 Número de reflexões 68  
 Número de zonas de Fresnel 97  
 Número quântico 265  
 Nuvem de probabilidade 392

## O

Objetiva 34, 35  
 Objeto real 34



Observação binária 296, 298, 309  
 Observações incompatíveis 320, 322  
 Observáveis 298, 311  
 Observáveis incompatíveis 342, 410  
 Observável 320  
 Observável energia da partícula 342  
 Observável polarização linear 309  
 Observável quântico 311  
 Ocular 34  
 Olho humano 32  
 Onda conjugada 132, 133  
 Onda de referência 133  
 Onda esférica 53, 101  
 Onda espalhada 123  
 Onda estacionária 368  
 Onda evanescente 167, 170, 362, 367, 368  
 Onda plana 52, 140  
 Onda plana monocromática 144  
 Onda  $s$  393  
 Ondas confinadas 372  
 Ondas de de Broglie 272  
 Ondas estacionárias 404  
 Ondas evanescentes 361  
 Ondas materiais 276  
 Ondas monocromáticas 85, 141  
 Operador 301  
 Operador anti-hermiteano 338  
 Operador de evolução 326, 327  
 Operador de projeção 303, 304  
 Operador de translação 397  
 Operadores de projeção 308, 329  
 Operadores lineares 323  
 Operadores hermiteanos 319  
 Operadores posição e momento 340  
 Operador hamiltoniano 337  
 Operador hermiteano 307-309  
 Operador identidade 304  
 Operador linear 301, 305, 307  
 Operador momento 342, 343, 352, 376  
 Órbita de Bohr 279  
 Órbitas circulares 263  
 Órbitas eletrônicas 268  
 Ordem de interferência 117  
 Ordem do espectro 119, 120  
 Ortonormalidade 374  
 Ortonormalização 321  
 Oscilação forçada do elétron 313  
 Oscilador de Hertz 247, 262  
 Oscilador harmônico bidimensional 280  
 Ótica eletrônica 44  
 Ótica geométrica 1  
 Ótica quântica 79

## P

"Pacote de ondas" 76, 82, 368  
 Pacote de ondas tridimensional 354  
 Pacotes de ondas 349  
 Par de fendas 113  
 Par elétron-pósitron 219  
 Parabolóide refletor 14  
 Paradoxo das gêmeas 229  
 Paradoxo EPR 409, 410  
 Paralaxe 79  
 Parede impenetrável 368  
 Paridade 357, 373  
 Paridade definida 374  
 Parte espacial 222  
 Parte temporal 223  
 Partícula confinada 369  
 Partícula numa caixa unidimensional 369  
 Partícula relativística 255  
 Partícula sobre um aro circular 375  
 Partículas  $\alpha$  257  
 Partículas livres 347  
 Passado absoluto 200  
 Penetração da luz 167  
 Penetração na região proibida 368  
 Período 52  
 Período de revolução 269  
 Período espacial 396  
 Pico de difração dianteiro 110, 113  
 Picos de transmissão 383  
 Pincel luminoso 4  
 Placa de um quarto de onda 172  
 Plano de incidência 7  
 Plano de polarização 147  
 Plano de vibração 147  
 Plano focal imagem 31  
 Plano focal objeto 31  
 Planos reticulares 127  
 Plumagem de beija-flores 64  
 Poço de potencial retangular 383  
 Poder de convergência 24  
 Poder separador 70, 110, 119-122, 290  
 Poder separador da rede 120  
 Poder rotatório 324  
 Poder rotatório específico 323  
 Polaroid 164  
 Polariscópio de Nörrenberg 163  
 Polarização  $\perp$ , 137  
 Polarização  $\perp$  158  
 Polarização  $\parallel$  158  
 Polarização circular 148, 296  
 Polarização de fótons 291, 311, 406

Polarização do fóton 299  
 Polarização elíptica 149, 172  
 Polarização linear do fóton 309  
 Polarização linear do fóton na direção  $\theta$  329  
 Polarização por reflexão 160, 162  
 Polarizações circulares independentes 298  
 Polarizações lineares ortogonais 299  
 Polarizador 162, 163, 291  
 Pólo 87, 93  
 Ponto de fase estacionária 87  
 Ponto de retorno 362  
 Ponto próximo 32  
 Pontos de inversão 360  
 Porcentagem de reflexão 65  
 Portadores de corrente 406  
 Posição de partícula 340  
 Pósitron 219, 279  
 Postulado de quantização 249  
 Postulados de Bohr 377  
 Potência 49  
 Potencial coulombiano 387  
 Potencial de freamento 250  
 Potencial de ionização 272  
 Precessão do periélio 236  
 Pressão de radiação 216  
 Princípio cosmológico 239  
 Princípio da Fase Estacionária 86  
 Princípio de Babinet 111, 112  
 Princípio de causalidade 200  
 Princípio de combinação de Rydberg e Ritz 262  
 Princípio de constância da velocidade da luz 182  
 Princípio de correspondência 265, 266, 311, 314, 340, 343, 344  
 Princípio de Equivalência 224, 225, 231  
 Princípio de exclusão 394, 395, 404  
 Princípio de Fermat 11, 13, 28, 44, 234  
 Princípio de Huygens 1, 4  
 Princípio de Huygens-Fresnel 85-87, 92, 129  
 Princípio de incerteza 344, 372, 392  
 Princípio de Maupertuis 45  
 Princípio de Pauli 405  
 Princípio de relatividade 177, 210  
 Princípio de relatividade da Mecânica 176  
 Princípio de relatividade de Galileu 225  
 Princípio de relatividade restrita 182  
 Princípio de superposição 413  
 Prisma 46  
 Prisma de reflexão total 16  
 Prismas de Nicol 164  
 Probabilidade de reflexão 414  
 Probabilidade de transmissão 379, 382, 386  
 Probabilidades de reflexão e transmissão 365

"Problema da Fase" 128  
 Problema de dois corpos 387  
 Processos radioativos 218  
 Produto de matrizes 306  
 Produto direto 407  
 Produto escalar 294, 295, 300  
 Produto escalar de dois vetores de estado 335  
 Produto externo 300  
 Profundidade de penetração 168, 170, 368  
 Projeção 304  
 Propagação retilínea 11, 87  
 Propriedades ondulatórias dos elétrons 272  
 Pupila 32

## Q

Quadraticamente integrável 375  
 Quadrimomento 223  
 Quadritensor 223  
 Quadri vetor 222, 223  
 Quanta 2  
 Quanta de energia 252  
 Quantização da matéria 253  
 Quantização do momento angular 268  
 Quantização (espectro discreto) 377  
 Quantum de energia 247  
 Quantum de luz 252

## R

Radiação de fundo primordial 239  
 Radiação térmica 2, 260  
 Raias de Fraunhofer 260  
 Raio central 25  
 Raio da órbita 265  
 Raio de Bohr 265, 267, 389, 392  
 Raio de curvatura 18, 20  
 Raio de luz 4  
 Raio de Schwarzschild 236, 237, 244  
 Raio do átomo 259  
 Raio do núcleo 259  
 Raio luminoso 5  
 Raio refletido 7  
 Raio refratado 7  
 Raios catódicos 122  
 Raios das órbitas 265  
 Raios paraxiais 19, 24  
 Raios X 122, 254  
 Reconstrução da onda do objeto 131, 133  
 Reconstrução das frentes de onda 129  
 Rede bidimensional 122

Rede cúbica centrada 395  
 Rede de difração 116  
 Rede de difração holográfica 130  
 Rede periódica 122  
 Rede periódica tridimensional 395  
 Rede periódica unidimensional 396  
 Rede tridimensional 122  
 Redes de reflexão 121  
 Redes holográficas 122  
 Referenciais inerciais 175  
 Referenciais localmente inerciais 226  
 Referenciais não-inerciais 224  
 Referencial do CM 209  
 Referencial em queda livre 225  
 Referencial localmente inercial 230  
 Refletividade 65, 158, 164, 366, 381  
 Refletividade para luz natural 161  
 Refletividade total 65  
 Refletividades 165  
 Reflexão 6, 154  
 Reflexão de Bragg 404  
 Reflexão espacial 17, 127  
 Reflexão regular 121  
 Reflexão total 15, 165, 361, 367, 386  
 Reflexão total frustrada 170, 386  
 Refração 6, 154  
 Região classicamente permitida 360, 361  
 Região classicamente proibida 368  
 Região de difração de Fraunhofer 96  
 Registro de holograma 129  
 Regra de comutação de Heisenberg 342  
 Regras de comutação canônicas 352  
 Relação de de Broglie 344  
 Relação de Einstein 218, 335  
 Relação de incerteza 315, 318, 320, 350, 354  
 Relação de incerteza de Heisenberg 342  
 Relação de Maxwell 139  
 Relação objeto-imagem 25  
 Relações de de Broglie 276  
 Relatividade da simultaneidade 183, 185, 205  
 Relatividade geral 223  
 Relógio atômico 186, 228  
 Réplicas 121  
 Representação contínua 334  
 Representação matricial 304, 315  
 Representações 296, 301  
 Ressonâncias como níveis virtuais 385  
 Ressonâncias de transmissão 384, 385  
 Retina 32  
 Rotação do plano de polarização 151  
 Rotacional superficial 154  
 Reversibilidade dos raios 164  
 Reversibilidade dos raios luminosos 20  
 Ruído 78

## S

Sacarímetros 152  
 Sela 233  
 Semicondutor puro 406  
 Semicondutores 404  
 Semicondutores dopados 406  
 Semilargura 69, 70, 119  
 Semilargura de um pico 383  
 Série de Balmer 261  
 Série de Lyman 269  
 Séries espectrais 262  
 Significado físico do comutador 322  
 Simetria esférica 393  
 Simultaneidade de eventos 183  
 Simultaneidade de eventos distantes 185  
 Sincronização 184  
 Sistema de 2 fótons 406  
 Solução estacionária 170  
 Solução de Schwarzschild 234, 235  
 Solução normalizável 390  
 Spin 1 393  
 Spin  $\frac{1}{2}$  394  
 Spin e Princípio de Exclusão 393  
 Superfície com curvatura negativa 233  
 Superfície de curvatura positiva 232  
 Superfície "oticamente plana" 64  
 Superposição 302  
 Superposição coerente 412  
 Superposição contínua 75  
 Superposição de espectros 119, 121  
 Superposição quântica 316  
 Superposição quântica coerente 413

## T

Tabela periódica de Mendeleev 395  
 Tabela periódica dos elementos 259  
 Taxa de absorção de fótons 314  
 Telescópio 111  
 Telescópio refrator 35  
 Tempo absoluto 185  
 Tempo de coerência 75, 77, 349, 414  
 Tempo próprio 195  
 Tensor campo eletromagnético 223  
 Teorema de Bloch 396, 399  
 Teorema de Earnshaw 257, 262  
 Teorema de Ehrenfest 343, 351, 357  
 Teorema do virial 415  
 Teoria corpuscular da luz 1  
 Teoria da dispersão 312

Teoria da emissão 181  
 Teoria da relatividade restrita 2  
 Teoria de Kirchhoff da difração 93  
 Teoria dos "acessos" 9  
 Teoria dos elétrons livres 396  
 Teoria eletromagnética da luz 2, 137  
 Teoria local 411  
 Teoria ondulatória da luz 1, 253  
 3.ª lei de Kepler 266  
 Termo de interferência 55  
 Termos espectrais 262, 264  
 Torque 314  
 Traçado de raios 21  
 Transformação de Galileu 176, 185, 190, 198  
 Transformação de Lorentz 186  
 Transformação de Lorentz especial 189  
 Transformação de Lorentz geral 191  
 Translação 357  
 Transistores 406  
 Transmissividade 173, 366, 381, 384  
 Transmissividade total 65  
 Transversalidade 138  
 Tunelamento 171, 385, 386  
 Tunelamento em semicondutores 387  
 Tunelamento quântico 387

## V

Valor esperado 300, 309, 310, 315, 392  
 Valor esperado e derivada temporal 339  
 Valor médio 300, 307, 316  
 Valor médio temporal 54  
 Valor médio de uma grandeza observável 308  
 Valor próprio 192, 212  
 Valores médios 299, 343  
 Valores médios temporais 142  
 Variação da massa com a velocidade 213  
 Variação de massa 218  
 Variável coletiva 311  
 Variáveis ocultas 410, 411  
 Velha teoria quântica 275  
 Velocidade de fase 52  
 Velocidade de grupo 350  
 Velocidade de recessão 207  
 Velocidade limite 184, 190, 200  
 Velocidade relativa 198  
 Vértice de espelho esférico 18  
 Vetor coluna 293, 306  
 Vetor de estado 264, 296, 337, 394, 412  
 Vetor deslocamento 138  
 Vetor de estado normalizado 295, 323  
 Vetor de onda 52  
 Vetor de Poynting 142, 216

Vetor de Poynting complexo 143, 169, 171  
 Vetor de Poynting (real) 140  
 Vetores de base 122  
 Vetores de estado 293  
 Vetores de estado de polarização circular 302  
 Vida média 269  
 Visibilidade 66  
 Volume de coerência 80  
 Volume próprio 192

## Z

Zonas de Fresnel 89, 96, 134



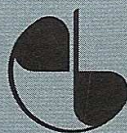
Este curso universitário de Física Básica destina-se aos estudantes de engenharia, física, matemática, química e áreas correlatas. O objetivo é dar uma discussão detalhada e cuidadosa dos conceitos e princípios básicos da física, com ênfase na compreensão das idéias fundamentais. Procura-se desenvolver a intuição e a capacidade de raciocínio físico, bem como motivar e interessar os estudantes.

O volume 4, "Ótica, Relatividade, Física Quântica", apresenta os principais resultados da ótica geométrica, ótica ondulatória e ótica eletromagnética, uma introdução à relatividade, e as idéias básicas da física quântica: as linhas gerais de sua evolução histórica, uma formulação cuidadosa dos princípios fundamentais e a aplicação ao tratamento de sistemas simples, ilustrando os mais importantes efeitos quânticos. Há cerca de 130 problemas propostos, todos com respostas.

#### O Autor

Moysés Nussenzveig, professor emérito da Universidade Federal do Rio de Janeiro, foi também professor titular das Universidades de Rochester e São Paulo, da PUC-Rio e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, professor ou pesquisador visitante do Institute for Advanced Study de Princeton, da Universidade de Paris, do Goddard Space Flight Center da NASA, do Collège de France e da École Normale Supérieure.

É prêmio Max Born e "Fellow" da Optical Society of America, "Fellow" da American Physical Society, homenageado na Universidade de Tel Aviv com a Cátedra Moysés Nussenzveig de Mecânica Estatística, Prêmio Nacional de Ciência e Tecnologia e detentor da Grã-Cruz da Ordem Nacional do Mérito Científico.



**EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.**

ISBN 978-85-212-0163-2



9 788521 201632