Capítulo 9
Função logarítmica

Para pensar

1. De acordo com o gráfico, o ruído de um helicóptero em voo tem 4.000 Hz de frequência e 80 dB de intensidade.

2. A diferença entre as intensidades sonoras de uma escola de samba e um helicóptero é dada por:

120 dB − 80 dB = 40 dB

Assim, a energia sonora de uma escola de samba corresponde a $10^4 = 10.000$ vezes a de um helicóptero.

Exercícios propostos

1. a) $\log_2 256$ é o expoente x da potência de base 2 tal que $2^x = 256$.

Temos:

$2^x = 256 \Leftrightarrow 2^x = 2^8$

$\therefore x = 8$

Assim, $\log_2 256 = 8$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$ é o expoente x da potência de base 7 tal que $7^x = \frac{1}{49}$.

Temos:

$7^x = \frac{1}{49} \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2}$

$\therefore x = -2$

Assim, $\log_7 \frac{1}{49} = -2$.

c) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{125}{8}$ é o expoente x da potência de base $\frac{5}{2}$ tal que $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{125}{8}$.

Temos:

$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{125}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^3$

$\therefore x = 3$

Assim, $\log_{\frac{5}{2}} \frac{125}{8} = 3$.

d) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{16}{81}$ é o expoente x da potência de base $\frac{3}{2}$ tal que $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$.

Temos:

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

$\therefore x = -4$

Assim, $\log_{\frac{3}{2}} \frac{16}{81} = -4$.

e) $\log 10.000$ é o expoente x da potência de base 10 tal que $10^x = 10.000$.

Temos:

$10^x = 10.000 \Leftrightarrow 10^x = 10^4$

$\therefore x = 4$

Assim, $\log 10.000 = 4$.

f) $\log_{256} 128$ é o expoente x da potência de base 256 tal que $256^x = 128$.

Temos:

$(256)^x = 128 \Leftrightarrow 2^{8x} = 2^7$

$\therefore x = \frac{7}{8}$

Assim, $\log_{256} 128 = \frac{7}{8}$.

g) $\log_{\frac{8}{27}} \frac{16}{81}$ é o expoente x da potência de base $\frac{8}{27}$ tal que $\left(\frac{8}{27}\right)^x = \frac{16}{81}$.

Temos:

$\left(\frac{8}{27}\right)^x = \frac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$\therefore x = \frac{4}{3}$

Assim, $\log_{\frac{8}{27}} \frac{16}{81} = \frac{4}{3}$.

h) $\log \sqrt[5]{100}$ é o expoente x da potência de base 10 tal que $10^x = 100^{\frac{1}{5}}$.

Temos:

$10^x = 100^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 10^x = 10^{\frac{2}{5}}$

$\therefore x = \frac{2}{5}$

Assim, $\log \sqrt[5]{100} = \frac{2}{5}$.

i) $\log_{0,5} 0{,}125$ é o expoente x da potência de base 0,5 tal que $0{,}5^x = 0{,}125$.

Temos:

$0{,}5^x = 0{,}125 \Leftrightarrow 0{,}5^x = 0{,}5^3$

$\therefore x = 3$

Assim, $\log_{0,5} 0{,}125 = 3$.

2. a) $\log_2 k = 8 \Leftrightarrow 2^8 = k$

$\therefore k = 256$

Assim, $k = 256$.

b) $\log_3 m = 8 \Leftrightarrow m = 3^8$

$\therefore m = 6.561$

Assim, $m = 6.561$.

c) $\log_2 y = 2{,}3214 \Leftrightarrow y = 2^{2,3214}$

$\therefore y = 4{,}9982$

Assim, $y = 4{,}9982$.

d) $\log_3 t = 2{,}3214 \Leftrightarrow t = 3^{2,3214}$

$\therefore t = 12{,}8112$

Assim, $t = 12{,}8112$.

e) $\log u = 2{,}3214 \Leftrightarrow 10^{2,3214} = u$

$\therefore u = 209{,}6042$

Assim, $u = 209{,}6042$.

f) Pela propriedade P1:

$\log_2 2 = 1$

$\therefore v = 1$

g) Pela propriedade P1:

$\log_3 3 = 1$

$\therefore p = 1$

h) Pela propriedade P1:

$\log 10 = 1$

$\therefore q = 1$

i) $\log_3 59.049 = r \Leftrightarrow 3^r = 59.049$
Pela tabela dada:
$59.049 = 3^{10}$
Logo:
$3^r = 3^{10} \Rightarrow r = 10$
Assim, $\log_3 59.049 = 10$.

j) $\log 39{,}8107 = s \Leftrightarrow 10^s = 39{,}8107$
Pela tabela dada:
$39{,}8107 = 10^{1{,}6}$
Logo:
$10^s = 10^{1{,}6} \Rightarrow s = 1{,}6$
Assim, $\log 39{,}8107 = 1{,}6$.

3. a) $\log_3 8 = \log_3 2^3$
Pela propriedade P3:
$\log_3 2^3 = 3 \log_3 2 = 3 \cdot 0{,}63 = 1{,}89$
Portanto, $\log_3 8 = 1{,}89$.

b) $\log_3 \frac{1}{16} = \log_3 16^{-1} = \log_3 2^{-4}$
Pela propriedade P3:
$\log_3 2^{-4} = -4 \cdot \log_3 2 = -4 \cdot 0{,}63 = -2{,}52$
Portanto, $\log_3 \frac{1}{16} = -2{,}52$.

c) $\log_3 \sqrt[3]{4} = \log_3 4^{\frac{1}{3}} = \log_3 2^{\frac{2}{3}}$
Pela propriedade P3:
$\log_3 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_3 2 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}63 = 0{,}42$
Portanto, $\log_3 \sqrt[3]{4} = 0{,}42$.

d) $9^{\log_3 4} = 3^{2 \cdot \log_3 4}$
Pela propriedade P3:
$2 \cdot \log_3 4 = \log_3 4^2 = \log_3 16$
Pela propriedade P5:
$3^{2 \cdot \log_3 4} = 3^{\log_3 16} = 16$
Assim, $9^{\log_3 4} = 16$.

4. a) $\log_2 a = 2 \Leftrightarrow a = 2^2$
$\therefore a = 4$
Assim, $a = 4$.

b) Calculando $\log_{25} 5$, temos:
$\log_{25} 5 = x \Leftrightarrow 5^{2x} = 5$
$\therefore x = \frac{1}{2}$
Então, $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$.
Portanto, pela propriedade P3:
$\log_{25} 5^b = b + 1 \Leftrightarrow b \cdot \log_{25} 5 = b + 1$
Então:
$b \cdot \frac{1}{2} = b + 1$
$\therefore b = -2$

c) Calculando $\log_9 3$, temos:
$\log_9 3 = x \Leftrightarrow 3^{2x} = 3$
$\therefore x = \frac{1}{2}$
Então, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$.
Portanto:
$c \cdot \log_9 3 = 2c + 1 \Leftrightarrow c \cdot \frac{1}{2} = 2c + 1$
$\therefore c = -\frac{2}{3}$

d) Pela propriedade P3:
$(\log d)^2 + \log d^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\log d)^2 + 2 \cdot \log d + 1 = 0$
Fazendo $\log d = t$, temos:
$t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$
Assim:
$\log d = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = d$
$\therefore d = 0{,}1$

5. $x = \log_2 3 \Leftrightarrow 2^x = 3$
Calculando $8^x + 4^{2x-1}$ para $2^x = 3$, temos:
$$8^x + 4^{2x-1} = 2^{3x} + 2^{4x-2} = (2^x)^3 + \frac{(2^x)^4}{2^2} = 3^3 + \frac{3^4}{4} = 47{,}25$$
Alternativa **b**.

6. Para $x = 12{,}5$, temos:
$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x \Rightarrow \log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08 \cdot 12{,}5$
$\therefore \log\left(\frac{L}{15}\right) = -1 \Rightarrow \frac{L}{15} = 10^{-1}$
$\therefore L = 1{,}5$
Assim, a intensidade L será de 1,5 lumens.
Alternativa **d**.

7. Sendo $x = 8^{105} = 2^{315}$, pela propriedade P3:
$\log x = \log 2^{315} \Leftrightarrow \log x = 315 \cdot \log 2$
Como $\log 2 = 0{,}3$, obtemos:
$\log x = 315 \cdot 0{,}3 = 94{,}5$
Portanto:
$x = 10^{94{,}5} = 10^{94 + 0{,}5} = 10^{94} \cdot 10^{0{,}5}$
Sabendo que $\log 3{,}2 = 0{,}5$, temos $10^{0{,}5} = 3{,}2$.
$\therefore x = 3{,}2 \cdot 10^{94}$

8. a) $N(0) = 125 \cdot 2^0 = 125$
Logo, no início da observação havia 125 indivíduos.

b) $N(3) = 125 \cdot 2^3 = 1.000$
Logo, ao final de 3 horas, a partir do instante zero, havia 1.000 indivíduos.

c) $3.125 = 125 \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 25$
$\therefore t = \log_2 25 \Rightarrow t = \log_2 5^2$
$\therefore t = 2 \log_2 5 \Rightarrow t \approx 2 \cdot 2{,}32$
$\therefore t \approx 4{,}64$
Logo, a população atingiu 3.125 indivíduos após 4,64 h do instante zero.

d) Para converter 0,64 h em minutos, aplicamos a regra de três:

h		min
1	———	60
0,64	———	x

$\therefore x = 38{,}4$ min
Para converter 0,4 min em segundos, aplicamos a regra de três:

min		s
1	———	60
0,4	———	y

$\therefore y = 24$ s
Assim, concluímos que 4,64 h equivalem a 4 h 38 min 24 s.

9. Dados $T = 140$, $T_0 = 740$ e $T_{AR} = 40$, temos:

$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR} \Rightarrow$

$\Rightarrow 140 = (740 - 40) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + 40$

$\therefore 10^{-\frac{t}{12}} = \frac{1}{7}$

Pela definição de logaritmo:

$\log \frac{1}{7} = -\frac{t}{12} \Leftrightarrow t = -12 \cdot \log 7^{-1}$

Pela propriedade P3, temos:

$\therefore t = -12 \cdot \log 7^{-1} = -12 \cdot (-1) \cdot \log 7$

$\therefore t = 12 \log 7$

Alternativa **c**.

10. Dados $M = 1.430$, $C = 1.000$ e $i = 10\% = 0{,}1$, temos:

$M = C\,(1 + i)^n \Rightarrow 1.430 = 1.000\,(1 + 0{,}1)^n$

$\therefore 1{,}43 = 1{,}1^n$

Pela definição de logaritmo:

$\log_{1{,}1} 1{,}43 = n$

Alternativa **b**.

11. Sendo $m(t)$ a mata restante do desmatamento em função do tempo t, em ano, e com m_0 sendo a mata no início, temos:

$m(t) = m_0\,(1 - i)^t \Rightarrow m(t) = m_0\,(0{,}98)^t$

Quando o desmatamento atingir metade da mata, $m(t) = 0{,}5m_0$; assim:

$m(t) = m_0\,(0{,}98)^t \Rightarrow 0{,}5m_0 = m_0\,(0{,}98)^t$

$\therefore 0{,}5 = (0{,}98)^t$

Pela definição de logaritmo, temos:

$0{,}5 = (0{,}98)^t \Rightarrow t = \log_{0{,}98} 0{,}5$

Portanto, o desmatamento terá atingido metade da mata que havia nessa região após $\log_{0{,}98} 0{,}5$ anos.

12. Para $M_W = 7{,}3$, temos:

$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log(M_0) \Rightarrow \frac{2}{3}\log(M_0) = 18$

$\therefore \log(M_0) = 27 \Leftrightarrow M_0 = 10^{27}$

Alternativa **e**.

13. **a)** $\log_6 22 = \log_6 (2 \cdot 11)$

Pela propriedade P6:

$\log_6 (2 \cdot 11) = \log_6 2 + \log_6 11 = 1{,}34 + 0{,}37 = 1{,}71$

Assim, $\log_6 22 = 1{,}71$.

b) Pela propriedade P7:

$\log_6 \frac{2}{11} = \log_6 2 - \log_6 11 = 0{,}37 - 1{,}34 = -0{,}97$

Portanto, $\log_6 \frac{2}{11} = -0{,}97$.

c) $\log_6 5{,}5 = \log_6 \frac{11}{2}$

Pela propriedade P7:

$\log_6 \frac{11}{2} = \log_6 11 - \log_6 2 = 1{,}34 - 0{,}37 = 0{,}97$

Portanto, $\log_6 5{,}5 = 0{,}97$.

d) Pela propriedade P8:

$\log_2 11 = \frac{\log_6 11}{\log_6 2} = \frac{1{,}34}{0{,}37} \approx 3{,}62$

Portanto, $\log_2 11 \approx 3{,}62$.

e) Pela propriedade P8:

$\log_{11} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 11} = \frac{0{,}37}{1{,}34} \approx 0{,}28$

Portanto, $\log_{11} 2 \approx 0{,}28$.

f) $\log_6 16 = \log_6 2^4$

Pela propriedade P3:

$\log_6 2^4 = 4 \cdot \log_6 2 = 4 \cdot 0{,}37 = 1{,}48$

Portanto, $\log_6 16 = 1{,}48$.

14. $\log 6 = \log \frac{30}{5}$

Pela propriedade P7:

$\log \frac{30}{5} = \log 30 - \log 5 = \log (3 \cdot 10) - \log 5$

Pela propriedade P6:

$\log (3 \cdot 10) - \log 5 = \log 3 + \log 10 - \log 5 =$

$= 0{,}48 + \log 10 - 0{,}69 = \log 10 - 0{,}21$

Pela propriedade P1:

$\log 10 - 0{,}21 = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$

Portanto, $\log 6 = 0{,}79$.

15. Aplicando a propriedade P8 em $\log_7 25$, temos:

$x = \log_7 25 \cdot \log_5 7 \Leftrightarrow x = \frac{\log_5 25}{\cancel{\log_5 7}} \cdot \cancel{\log_5 7}$

$\therefore x = \log_5 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2$

$\therefore x = 2$

Assim, $x = 2$.

16. Pela definição de logaritmo, temos:

$5^a = 3 \Leftrightarrow \log_5 3 = a$

Assim, pela propriedade P8:

$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (5^2 \cdot 3)}{\log_5 3}$

Pelas propriedades P6 e P3:

$\frac{\log_5 (5^2 \cdot 3)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 5^2 + \log_5 3}{\log_5 3} = \frac{2 \cdot \log_5 5 + \log_5 3}{\log_5 3}$

Pela propriedade P1 e sabendo que $\log_5 3 = a$:

$\frac{2 \cdot \log_5 5 + \log_5 3}{\log_5 3} = \frac{2 \cdot 1 + a}{a}$

$\therefore \log_3 75 = \frac{2 + a}{a}$

Alternativa **a**.

17. Pela propriedade P6:

$\log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5 =$

$= \log (50 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 2{,}5) = \log 100.000$

Pela propriedade P3:

$\log 100.000 = \log 10^5 = 5 \cdot \log 10$

Pela propriedade P1:

$5 \cdot \log 10 = 5 \cdot 1 = 5$

Alternativa **c**.

18. a) Sendo $x = \log_3 18 + \log_3 30 - \log_3 4 - \log_3 5$, temos:

Pelas propriedades P6, P3 e P1:

$\log_3 18 = \log_3 (3^2 \cdot 2) = \log_3 3^2 + \log_3 2 =$

$= 2 \cdot \log_3 3 + \log_3 2 = 2 \cdot 1 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$

Pelas propriedades P6 e P1:

$\log_3 30 = \log_3 (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5 =$

$= 1 + \log_3 2 + \log_3 5$

Pela propriedade P3:

$\log_3 4 = \log_3 2^2 = 2 \cdot \log_3 2$

Assim:

$x = (2 + \log_3 2) + (1 + \log_3 2 + \log_3 5) -$

$- 2 \cdot \log_3 2 - \log_3 5 = 2 + \cancel{\log_3 2} + 1 + \cancel{\log_3 2} +$

$+ \cancel{\log_3 5} - \cancel{2 \cdot \log_3 2} - \cancel{\log_3 5}$

$\therefore x = 3$

b) Sendo $y = 2 \cdot \log_2 6 + \log_2 5 - \log_2 3 - 2 \cdot \log_4 15$, temos:

Pelas propriedades P6 e P1:

$\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$

Pelas propriedades P8, P7, P6, P3 e P1:

$$\log_4 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 4} = \frac{\log_2 (3 \cdot 5)}{\log_2 2^2} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{2}$$

Assim:

$y = 2 \cdot (1 + \log_2 3) + \log_2 5 - \log_2 3 -$

$- 2 \cdot \left(\dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{2}\right) = 2 + 2 \cdot \log_2 3 + \log_2 5 -$

$- \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 5$

$\therefore y = 2$

19. a) $\text{pH} = -\log \dfrac{3}{10^8} = -(\log 3 - \log 10^8) =$

$= -(\log 3 - 8 \log 10) = -(0{,}48 - 8 \cdot 1)$

$\therefore \text{pH} = 7{,}52$

b) Como o pH é maior que 7, concluímos que a solução é alcalina.

20. Sendo $A(t)$ a área, em quilômetro quadrado, do deserto em função do tempo t, em ano, temos:

$A(t) = 50(1 + 0{,}024)^t \Rightarrow A(t) = 50(1{,}024)^t$

Hoje a área do deserto é 50 km^2, então quando essa área dobrar ela terá 100 km^2. Assim:

$100 = 50(1{,}024)^t \Rightarrow (1{,}024)^t = 2$

Pela definição de logaritmo:

$t = \log_{1{,}024} 2$

Pela propriedade P8:

$$t = \log_{1{,}024} 2 = \frac{\log 2}{\log 1{,}024} = \frac{0{,}301}{\log \dfrac{1.024}{1.000}}$$

Pela propriedade P7:

$$t = \frac{0{,}301}{\log 1.024 - \log 1.000} = \frac{0{,}301}{\log 2^{10} - \log 10^3}$$

Pela propriedade P3:

$$t = \frac{0{,}301}{10 \cdot \log 2 - 3 \cdot \log 10}$$

Pela propriedade P1:

$$t = \frac{0{,}301}{2 \cdot \log 2 - 3 \cdot 1} = \frac{0{,}301}{10 \cdot 0{,}301 - 3}$$

$\therefore t = 30{,}1$

Portanto, a área desse deserto vai dobrar em 30,1 anos.

21. Sendo $C(t)$ a função que indica o número de indivíduos da cultura de microrganismos em função do tempo t, em hora, temos:

$C(t) = 100.000(1 + 0{,}2)^t$

Para que a cultura atinja 300.000 indivíduos, temos:

$300.000 = 100.000(1 + 0{,}2)^t \Rightarrow 3 = 1{,}20^t$

Pela definição de logaritmo:

$t = \log_{1{,}2} 3$

Pela propriedade P8:

$$t = \frac{\log 3}{\log 1{,}2} = \frac{0{,}48}{\log \dfrac{12}{10}}$$

Pela propriedade P7:

$$t = \frac{0{,}48}{\log 12 - \log 10} = \frac{0{,}48}{\log (2^2 \cdot 3) - 1}$$

Pela propriedade P6:

$$t = \frac{0{,}48}{\log 2^2 + \log 3 - 1}$$

Pela propriedade P3:

$$t = \frac{0{,}48}{2 \cdot \log 2 + \log 3 - 1} = \frac{0{,}48}{2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 - 1}$$

$\therefore t = 6$

Portanto, a cultura atingirá 300.000 indivíduos em 6 horas.

22. Usando a equação $M = C(1{,}2)^n$, vamos determinar os valores de x, y e z.

Observando as coordenadas do ponto E:

$1{,}2C = C(1{,}2)^x \Rightarrow x = 1$

Observando as coordenadas do ponto F:

$1{,}44C = C(1{,}2)^y \Rightarrow (1{,}2)^2 = (1{,}2)^y$

$\therefore y = 2$

Observando as coordenadas do ponto G:

$2C = C(1{,}2)^z \Rightarrow 2 = (1{,}2)^z$

$$\therefore z = \log_{1{,}2} 2 = \frac{\log 2}{\log 1{,}2} = \frac{\log 2}{\log \dfrac{12}{10}} =$$

$$= \frac{\log 2}{\log 12 - \log 10} = \frac{\log 2}{\log (2^2 \cdot 3) - \log 10} =$$

$$= \frac{\log 2}{2 \log 2 + \log 3 - 1}$$

$$\therefore z = \frac{0{,}3}{2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 - 1} \Rightarrow z = 3{,}75$$

a) Pelo gráfico, a abscissa de $G(z, 2C)$ corresponde ao tempo que o capital demorará para ser duplicado.

Como $z = 3{,}75$, concluímos que aproximadamente após 3,75 anos o capital será duplicado.

b) Considerando as aproximações apresentadas, temos, pelo teorema de Tales, que o montante produzido em 1,5 ano será a média aritmética entre os montantes produzidos em 1 e 2 anos:

$$\frac{1{,}2C + 1{,}44C}{2} = \frac{2{,}64C}{2} = 1{,}32C.$$

Logo, o montante produzido em 1,5 ano será 1,32C.

23. a) $\ln e = \log_e e$

Pela propriedade P1:

$\log_e e = 1$

Então, $\ln e = 1$.

b) $\ln e^4 = \log_e e^4$
Pela propriedade P3:
$\log_e e^4 = 4 \cdot \log_e e$
Pela propriedade P1:
$4 \cdot \log_e e = 4 \cdot 1 = 4$
Então, $\ln e^4 = 4$.

c) $\ln \frac{1}{e} = \log_e \frac{1}{e} = \log_e e^{-1}$
Pela propriedade P3:
$\log_e e^{-1} = -1 \cdot \log_e e$
Pela propriedade P1:
$-1 \cdot \log_e e = (-1) \cdot 1 = -1$
Então, $\ln \frac{1}{e} = -1$.

24. a) $\ln 6 = \log_e 6 = \log_e (2 \cdot 3)$
Pela propriedade P6:
$\log_e (2 \cdot 3) = \log_e 2 + \log_e 3 =$
$= \ln 2 + \ln 3 = 0{,}6 + 1{,}1 = 1{,}7$
Portanto, $\ln 6 = 1{,}7$.

b) $\ln 1{,}5 = \log_e 1{,}5 = \log_e \frac{3}{2}$
Pela propriedade P7:
$\log_e \frac{3}{2} = \log_e 3 - \log_e 2 =$
$= \ln 3 - \ln 2 = 1{,}1 - 0{,}6 = 0{,}5$
Portanto, $\ln 1{,}5 = 0{,}5$.

c) $\ln \sqrt{12} = \log_e \sqrt{12} = \log_e 12^{\frac{1}{2}}$
Pela propriedade P3:
$\log_e 12^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_e (2^2 \cdot 3)$
Pela propriedade P6:
$\frac{1}{2} \cdot \log_e (2^2 \cdot 3) = \frac{1}{2} (\log_e 2^2 + \log_e 3)$
Pela propriedade P3:
$\frac{1}{2} (\log_e 2^2 + \log_e 3) = \frac{1}{2} (2 \cdot \log_e 2 + \log_e 3)$
Então:
$\frac{1}{2} (2 \cdot \log_e 2 + \log_e 3) = \frac{1}{2} (2 \cdot \ln 2 + \ln 3) =$
$= \frac{1}{2} (2 \cdot 0{,}6 + 1{,}1) = 1{,}15$
Portanto, $\ln\sqrt{12} = 1{,}15$.

d) $\log_6 e$
Pela propriedade P8:
$\log_6 e = \frac{\log_e e}{\log_e 6} = \frac{1}{\log_e 2 \cdot 3}$
Pela propriedade P6:
$\frac{1}{\log_e (2 \cdot 3)} = \frac{1}{\log_e 2 + \log_e 3}$
Então:
$\frac{1}{\log_e 2 + \log_e 3} = \frac{1}{\ln 2 + \ln 3} = \frac{1}{1{,}7} \approx 0{,}59$
Portanto, $\log_6 e \approx 0{,}59$.

25. Para $P = \frac{P_0}{4}$, temos:
$P = P_0 \cdot e^{-\frac{t}{250}} \Rightarrow \frac{P_0}{4} = P_0 \cdot e^{-\frac{t}{250}}$
$\therefore e^{-\frac{t}{250}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_e 4^{-1} = -\frac{t}{250}$
Pela propriedade P3:
$\log_e 4^{-1} = -\frac{t}{250} \Rightarrow -1 \cdot \log_e 2^2 = -\frac{t}{250}$
$\therefore -1 \cdot 2 \cdot \log_e 2 = -\frac{t}{250} \Rightarrow -2 \cdot \ln 2 = -\frac{t}{250}$
$\therefore 2 \cdot 0{,}693 = \frac{t}{250} \Rightarrow t = 346{,}5$
Alternativa **e**.

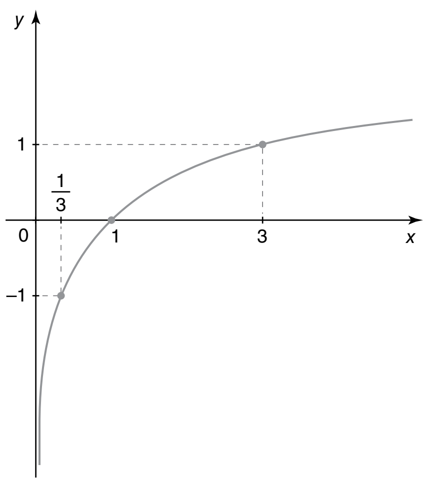
26. Dados C = 1.000 e i = 10% = 0,1, temos:
$M = C(1 + i)^n \Rightarrow M = 1.000\ (1 + 0{,}1)^n$
$\therefore M = 1.000 \cdot 1{,}1^n$
Para $M = 2.000$, ou seja, o dobro do capital, temos:
$2.000 = 1.000 \cdot 1{,}1^n \Rightarrow 1{,}1^n = 2$
$\therefore \log_{1,1} 2 = n$
Pela propriedade P8:
$\log_{1,1} 2 = n \Rightarrow n = \frac{\log_e 2}{\log_e 1{,}1} = \frac{\ln 2}{\log_e \frac{11}{10}}$
Pelas propriedades P6 e P7:
$n = \frac{\ln 2}{\log_e 11 - \log_e (2 \cdot 5)} = \frac{\ln 2}{\ln 11 - \log_e 2 - \log_e 5}$
$n = \frac{\ln 2}{\ln 11 - \ln 2 - \ln 5} = \frac{0{,}693}{2{,}398 - 0{,}693 - 1{,}609}$
$\therefore n \approx 7{,}22$
Portanto, o montante atingiu o dobro do capital investido após aproximadamente 7,22 anos.

27. $f(x) = \log_3 (x + 1)$
$g(x) = \log_2 x$
$h(x) = \log (4x)$
Assim:
- $f(26) = \log_3 (26 + 1) = \log_3 27 = \log_3 3^3 =$
$= 3 \cdot \log_3 3 = 3 \cdot 1 = 3$
- $g(0{,}125) = \log_2 0{,}125 = \log_2 \frac{125}{1.000} = \log_2 \frac{1}{8} =$
$= \log_2 2^{-3} = -3 \cdot \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$
- $h(25) = \log (4 \cdot 25) = \log 100 = 2$

Portanto:
$f(26) - g(0{,}125) + h(25) = 3 - (-3) + 2 = 8$
Alternativa **a**.

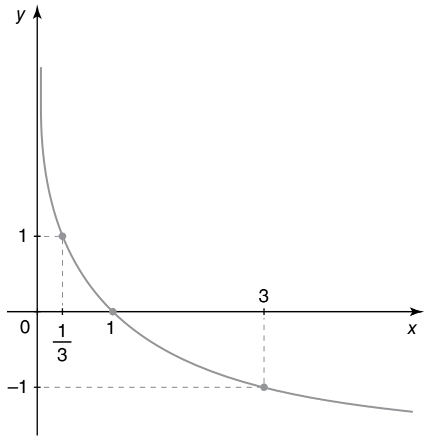
28. a) $f(x) = \log_3 x$ é uma função logarítmica. Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$f(x)$
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1



b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ é uma função logarítmica. Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

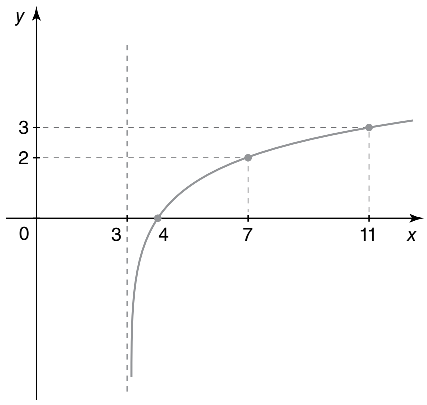
x	$f(x)$
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1



c) $h(x) = \log_2 (x - 3)$ é uma função logarítmica. No entanto, precisamos definir a condição de existência: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos dessa função, sendo $x > 3$ e, a partir dele, esboçar o gráfico de f.

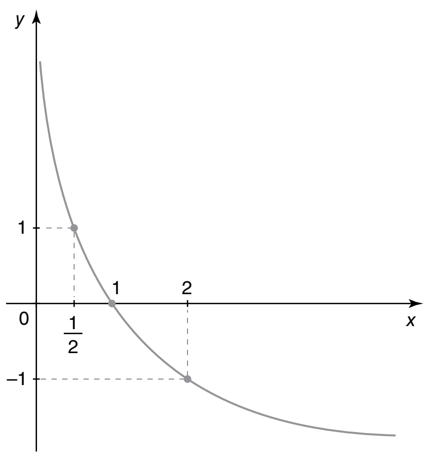
x	$h(x)$
4	0
7	2
11	3



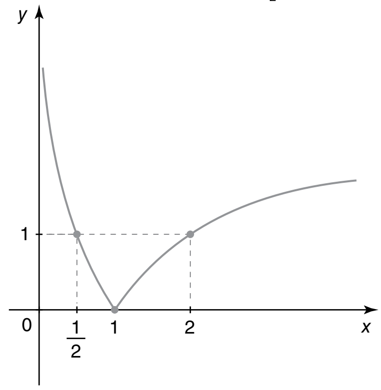
d) $t(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$

Construímos o gráfico de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, que é uma função logarítmica. Por meio de uma tabela podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir dele, esboçar o gráfico de g.

x	$g(x)$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $t(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$:



29. Observando o gráfico concluímos que os pontos $\left(a, \frac{2}{5}\right)$ e $\left(b, \frac{3}{5}\right)$ pertencem ao gráfico de função $f(x) = \log x$. Assim, pela propriedade P6 dos logaritmos:

$\log (a \cdot b) = \log a + \log b = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

Alternativa **a**.

30. a) Como na função f a base do logaritmo (9) é positiva e maior que 1, então f é uma função crescente.

b) Como na função g a base do logaritmo (0,4) é positiva e menor que 1, então g é uma função decrescente.

c) Como na função h a base do logaritmo $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é positiva e maior que 1, então h é uma função crescente.

d) Como na função t a base do logaritmo $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é positiva e menor que 1, então t é uma função decrescente.

31. a) V, pois a função $f(x) = \log_3 x$ é injetora.

b) V, pois a função $f(x) = \log_3 x$ é crescente.

c) F, pois a função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ é decrescente.

d) V, pois a função $f(x) = \log_{0,7} x$ é decrescente.

e) V, pois a função $f(x) = \log_{\sqrt{1,5}} x$ é crescente.

32. a) Condição de existência:

$5x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{5}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{6}{5}\right\}$.

b) Condição de existência:

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$\therefore\ x < 2$ ou $x > 3$

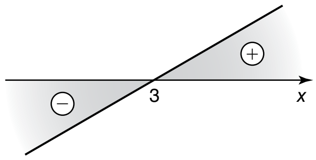
Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

c) $t(x) = \log_5 \frac{2x - 6}{x - 2}$

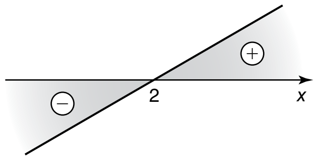
Como a base do logaritmo (5) é positiva e diferente de 1, basta impormos a condição sobre o logaritmando, isto é:

$\frac{2x - 6}{x - 2} > 0$

Estudando o sinal de $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x - 2$, temos:
Estudo de sinal de $f(x) = 2x - 6$:



Estudo de sinal de $g(x) = x - 2$:

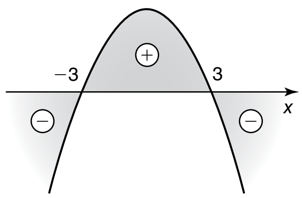


Representando f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

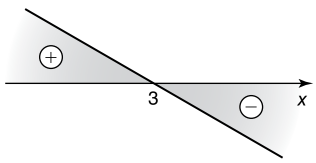
	$x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
f	−	−	+
g	−	+	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+

Logo, $D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

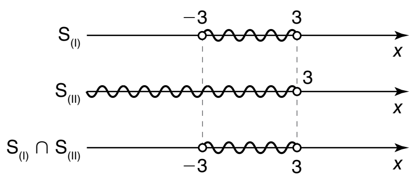
d) $h(x) = \log_3 (9 - x^2) + \log_6 (3 - x)$
Condições de existência:
$9 - x^2 > 0$ e $3 - x > 0$
Estudando o sinal de $f(x) = 9 - x^2$:



Pelo esquema acima, podemos concluir que o conjunto solução para (I) $9 - x^2 > 0$ é:
$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$
Estudando o sinal de $g(x) = 3 - x$:



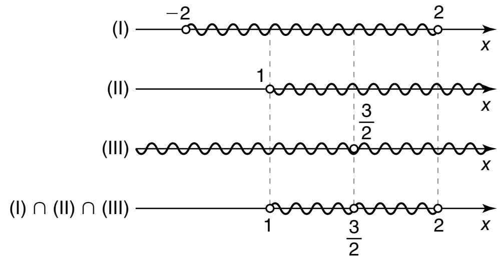
Pelo esquema acima, podemos concluir que o conjunto solução para (II) $3 - x > 0$ é:
$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
A intersecção de S_I e S_{II} é o domínio da função h:



Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$.

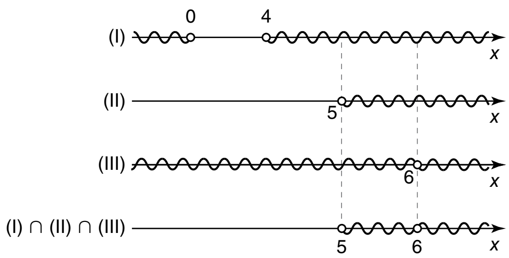
e) Condições de existência: $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 & \text{(I)} \\ 2x - 2 > 0 & \text{(II)} \\ 2x - 2 \neq 1 & \text{(III)} \end{cases}$

O domínio de u é a intersecção dos conjuntos solução de (I), (II) e (III):



Logo, $D(u) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ e } x \neq \frac{3}{2}\right\}$.

f) Condição de existência: $\begin{cases} x^2 - 4x > 0 & \text{(I)} \\ x - 5 > 0 & \text{(II)} \\ x - 5 \neq 1 & \text{(III)} \end{cases}$



Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$

33. $f(x) = a \cdot \log_{\frac{1}{8}} (x - b)$

a) Pelo gráfico, temos que os pares $(4, 0)$ e $\left(5, -\frac{4}{3}\right)$ pertencem à função f. Assim:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot \log_{\frac{1}{8}} (4 - b) & \text{(I)} \\ -\frac{4}{3} = a \cdot \log_{\frac{1}{8}} (5 - b) & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos:
$a \cdot \log_{\frac{1}{8}} (4 - b) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } \log_{\frac{1}{8}} (4 - b) = 0$

$\log_{\frac{1}{8}} (4 - b) = 0 \Rightarrow 4 - b = 1$

$\therefore\ a = 0 \text{ ou } b = 3$

Se $a = 0$, substituindo esse valor em (II), temos:

$-\frac{4}{3} = 0 \cdot \log_{\frac{1}{8}} (5 - b)$ (falso)

Se $b = 3$, substituindo esse valor em (II), temos:

$-\frac{4}{3} = a \cdot \log_{\frac{1}{8}} (5 - 3) \Rightarrow -\frac{4}{3} = a \cdot \log_{\frac{1}{8}} 2$

Pela propriedade P3:

$-\frac{4}{3} = a \cdot \log_{\frac{1}{8}} 2 \Rightarrow -\frac{4}{3} = \log_{\frac{1}{8}} 2^a$

Pela definição de logaritmo:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^a \Rightarrow (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 2^a$

$\therefore\ a = 4$

Logo, $a = 4$ e $b = 3$.

b) $f(x) = 4 \log_{\frac{1}{8}} (x - 3)$

A reta vertical que cruza o eixo Ox no ponto de abscissa 7 é a reta $x = 7$. Assim, temos:

$f(x) = 4 \log_{\frac{1}{8}} (x - 3) \Rightarrow f(7) = 4 \log_{\frac{1}{8}} (7 - 3) =$

$= 4 \log_{\frac{1}{8}} 4$

Mas $\log_{\frac{1}{8}} 4 = -\frac{2}{3}$.

$\therefore f(7) = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$

Logo, o ponto de intersecção é $\left(7, -\frac{8}{3}\right)$.

c) A reta horizontal que cruza o eixo Oy no ponto de ordenada 8 é a reta $y = 8$. Assim, temos:

$f(x) = 4 \log_{\frac{1}{8}} (x - 3) \Rightarrow 8 = 4 \log_{\frac{1}{8}} (x - 3)$

$\therefore \log_{\frac{1}{8}} (x - 3) = 2 \Rightarrow (x - 3) = \left(\frac{1}{8}\right)^2$

$\therefore x = \frac{193}{64}$

Logo, o ponto de intersecção é $\left(\frac{193}{64}, 8\right)$.

d) Para $x = k$, temos:

$f(k) = 4 \log_{\frac{1}{8}} (k - 3)$

Precisamos verificar para quais valores reais de k esse logaritmo existe, ou seja, sua condição de existência:

$k - 3 > 0 \Rightarrow k > 3$

Logo, essa reta e o gráfico de f têm um ponto comum para $k > 3$.

e) Para $y = p$, temos:

$p = 4 \log_{\frac{1}{8}} (x - 3)$

Como p é uma função logarítmica, sua imagem é o conjunto $\mathbb{R}$. Logo, essa reta e o gráfico de f têm ponto em comum para todo p real.

34. A altura do retângulo da esquerda é dada pela ordenada de y quando $x = 2$; assim:

$y = \log_2 2 = 1$

Portanto, a área desse retângulo é $1 \cdot 1$, ou seja, 1.

A altura do retângulo da direita é dada pela ordenada de y quando $x = 4$; assim:

$y = \log_2 4 = 2$

Portanto, a área desse retângulo é $1 \cdot 2$, ou seja, 2.

Logo, a soma das áreas dos retângulos destacados é 3.

35. Se a função $f(x) = \log_{\frac{a+b}{2b}} x$ é crescente, a base $\left(\frac{a+b}{2b}\right)$ é maior que 1. Assim:

$\frac{a+b}{2b} > 1 \Rightarrow a + b > 2b$

$\therefore a + b > b + b \Rightarrow a > b$

Logo, no momento da conclusão do estudo, o volume de água na represa (a) era maior que o volume estimado para um mês depois (b).

36. a) Sendo $A(t)$ a área ocupada pela planta em função do tempo t, temos:

$A(t) = 1 \cdot (1 - 0{,}5)^t = 0{,}5^t$

Logo:

para $t = 1 \Rightarrow A(1) = 0{,}5 = a$

para $t = 2 \Rightarrow A(2) = 0{,}25 = b$

para $t = 3 \Rightarrow A(3) = 0{,}125 = c$

para $t = 4 \Rightarrow A(4) = 0{,}0625 = d$

Portanto, $a = 0{,}5\ km^2$, $b = 0{,}25\ km^2$, $c = 0{,}125\ km^2$ e $d = 0{,}0625\ km^2$.

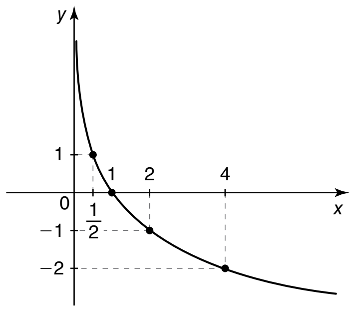
b) Pelo enunciado, temos:

$x = 1\,(1 - 0{,}5)^y \Rightarrow x = 0{,}5^y$ e, portanto,

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

c) Como $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função logarítmica, por meio de uma tabela podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2



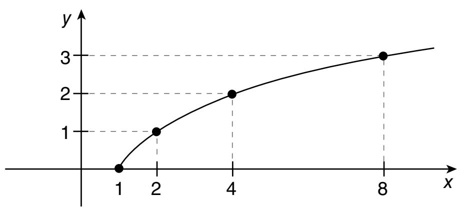
O gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f, pois possui apenas ordenadas não negativas e limitadas por se tratar de uma função que determina a área da região ocupada pela planta.

37. a)

Tempo (ano)	Preço (D$)
0	1
1	2
2	4
3	8
y	2^y

b) $y = \log_2 x$

c)



38. a) $y = \log_3 x$

Substituímos x por y e y por x, obtendo:

$x = \log_3 y$

Isolamos a variável y:

$x = \log_3 y \Rightarrow y = 3^x$

Logo, $f^{-1}(x) = 3^x$.

b) $y = \log \sqrt{x + 1}$

Substituímos x por y e y por x, obtendo:

$x = \log \sqrt{y + 1}$

Isolamos a variável y:

$x = \log \sqrt{y + 1} \Rightarrow x = \log (y + 1)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x = \frac{1}{2} \log (y + 1) \Rightarrow \log (y + 1) = 2x$

$\therefore y + 1 = 10^{2x} \Rightarrow y = 10^{2x} - 1$

Logo, $g^{-1}(x) = 10^{2x} - 1$.

c) $y = \log_2 5 + \log_2 (2x + 1)$
Substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = \log_2 5 + \log_2 (2y + 1)$
Isolamos a variável y:
$x = \log_2 5 + \log_2 (2y + 1) \Rightarrow x = \log_2 [5(2y + 1)]$
$\therefore x = \log_2 (10y + 5) \Rightarrow 10y + 5 = 2^x$
$\therefore y = \dfrac{2^x - 5}{10}$
Logo, $h^{-1}(x) = \dfrac{2^x - 5}{10}$.

d) $y = \log_5 2 - \log_5 (x + 1)$
Substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = \log_5 2 - \log_5 (y + 1)$
Isolamos a variável y:
$x = \log_5 2 - \log_5 (y + 1) \Rightarrow x = \log_5 \dfrac{2}{y + 1}$
$\therefore \dfrac{2}{y + 1} = 5^x \Rightarrow y = \dfrac{2}{5^x} - 1$
Logo, $p^{-1}(x) = \dfrac{2}{5^x} - 1$.

e) $y = \ln x$
Como $\ln x = \log_e x$, podemos escrever:
$y = \log_e x$
Substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = \log_e y$
Isolamos a variável y:
$x = \log_e y \Rightarrow y = e^x$
Logo, $q^{-1}(x) = e^x$.

f) $y = \ln x + \ln 5$
Como $\ln x = \log_e x$ e $\ln 5 = \log_e 5$, podemos escrever:
$y = \log_e x + \log_e 5$
Substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = \log_e y + \log_e 5$
Isolamos a variável y:
$x = \log_e y + \log_e 5 \Rightarrow x = \log_e 5y$
$\therefore 5y = e^x \Rightarrow y = \dfrac{e^x}{5}$
Logo, $s^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{5}$.

39. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$
Substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = \dfrac{e^y + 1}{e^y}$
Isolamos a variável y:
$e^y \cdot x = e^y + 1 \Rightarrow e^y \cdot (x - 1) = 1$
$\therefore e^y = \left(\dfrac{1}{x - 1}\right) \Rightarrow y = \log_e \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$
$\therefore y = \ln \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$
Logo, a inversa de f é $f^{-1}(x) = \ln \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$.
Alternativa **e**.

40. $f(x) = 2^{ax + b}$
Pelo gráfico, temos que os pares ordenados $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e (1, 1) pertencem à função f. Assim:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} = 2^{a \cdot 0 + b} \\ 1 = 2^{a \cdot 1 + b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^b = 2^{-2} & \text{(I)} \\ 2^{a + b} = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$
De (I), temos que $b = -2$.
Substituindo b por -2 em (II), obtemos:
$2^{a + (-2)} = 1 \Rightarrow 2^{a - 2} = 2^0$
$\therefore a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$
Logo, $a = 2$ e $b = -2$. E a função f será $f(x) = 2^{2x - 2}$, ou seja, $y = 2^{2x - 2}$.
Para encontrar a inversa de f, substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = 2^{2y - 2}$
Isolamos a variável y:
$x = 2^{2y - 2} \Rightarrow 2y - 2 = \log_2 x$
$\therefore y = \dfrac{\log_2 x + 2}{2}$
Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{2 + \log_2 x}{2}$
Observando que essa função também pode ser representada por $f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \sqrt{x}$, temos duas alternativas corretas.
Alternativas **b** e **d**.

41. Como $f(x) = b^x$ e $f^{-1}(x) = \log_b x$, temos, de acordo com os gráficos:
$$\begin{cases} f(2) = \dfrac{16}{9} \\ f^{-1}\left(\dfrac{64}{27}\right) = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{16}{9} & \text{(I)} \\ \log_b \dfrac{64}{27} = k & \text{(II)} \end{cases}$$
De (I), temos $b = \dfrac{4}{3}$.
Substituindo b por $\dfrac{4}{3}$, em (II), obtemos:
$\log_{\frac{4}{3}} \dfrac{64}{27} = k \Rightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^k = \dfrac{64}{27}$
$\therefore \left(\dfrac{4}{3}\right)^k = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow k = 3$
Logo, $b = \dfrac{4}{3}$ e $k = 3$.

42. $f(x) = c \cdot \log_b x$
- A alternativa **a** é correta, pois como o gráfico de f passa pelo ponto com coordenadas (3, 3). Assim:
$3 = c \cdot \log_b 3 \Rightarrow \log_b 3^c = 3$
$\therefore b^3 = 3^c$
- A alternativa **c** é correta, pois da definição de logaritmo no item **a**, temos:
$b^3 = 3^c \Rightarrow \log_3 b^3 = c$
$\therefore c = 3 \cdot \log_3 b$
- A alternativa **d** é correta, pois:
$f\left(\sqrt[3]{x}\right) = c \cdot \log_b \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = c \cdot \log_b x^{\frac{1}{3}}$
$\therefore y = \dfrac{c}{3} \cdot \log_b x \Rightarrow y = \dfrac{c}{3} \cdot \dfrac{\log_3 x}{\log_3 b}$
Pelo item **c**, temos que $c = 3 \cdot \log_3 b$. Substituindo na equação acima, temos:
$y = \dfrac{3 \cdot \log_3 b}{3} \cdot \dfrac{\log_3 x}{\log_3 b} \Rightarrow y = \log_3 x$
$\therefore f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \log_3 x$
- A alternativa **e** é correta, pois:
$f(x) = c \cdot \log_b x \Rightarrow y = c \cdot \dfrac{\log_3 x}{\log_3 b}$
Pelo item **c**, temos que $\log_3 b = \dfrac{c}{3}$. Substituindo na equação acima, temos:
$y = c \cdot \dfrac{\log_3 x}{\frac{c}{3}} \Rightarrow y = 3 \cdot \log_3 x$
Como na função $f(x) = 3 \cdot \log_3 x$ a base (3) é positiva, a função é crescente.

- A alternativa **b** é incorreta, pois a inversa de $f(x) = c \cdot \log_b x$, que pelo item **e** é equivalente a $y = 3 \cdot \log_3 x$, é:
  Substituímos x por y e y por x, obtendo:
  $x = 3 \cdot \log_3 y$
  Isolamos a variável y:
  $x = 3 \cdot \log_3 y \Rightarrow \frac{x}{3} = \log_3 y$
  $\therefore\ y = 3^{\frac{x}{3}}$
  Ou seja, $f^{-1}(x) = 3^{\frac{x}{3}}$.
  Alternativa **b**.

43. **a)** Pela fórmula do montante acumulado a juro composto e taxa constante, temos:
$f(x) = 1.000\ (1 + 0{,}2)^x$
Logo, a lei que expressa o montante $f(x)$ em função do tempo x de aplicação é $f(x) = 1.000\ (1{,}2)^x$.

b) Para obter a função $g(x)$, substituímos x por $g(x)$ e $f(x)$ por x na lei encontrada no item **a**; então:
$x = 1.000\ (1{,}2)^{g(x)} \Rightarrow (1{,}2)^{g(x)} = \frac{x}{1.000}$
$\therefore\ g(x) = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$

c) Para obter a inversa f^{-1} da função $f(x)$ obtida no item **a**, substituímos y por x e x por y em $y = 1.000\ (1{,}2)^x$; então:
$x = 1.000\ (1{,}2)^y$
Isolando a variável y:
$(1{,}2)^y = \frac{x}{1.000} \Rightarrow y = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$
Logo, $f^{-1}(x) = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$, ou seja, a inversa da função f do item **a** é a função g do item **b**.

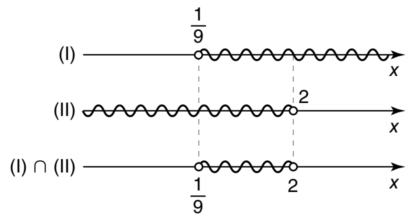
44. **a)** Indicando a população final por y, a população inicial por p, a taxa de crescimento dessa população por i e o tempo por x, esquematizamos:
$y = ?$
$p = 202$ milhões
$i = 1{,}1\% = 0{,}011$
$x = 11$ anos
Temos:
$y = 202(1 + 0{,}011)^{11} = 228{,}26$
$y = 228{,}26$ milhões de habitantes

b) $y = 202 \cdot (1{,}011)^x$

c) $y = 202 \cdot (1{,}011)^x \Rightarrow (1{,}011)^x = \frac{y}{202}$
$\therefore\ x = \log_{1,011} \frac{y}{202}$

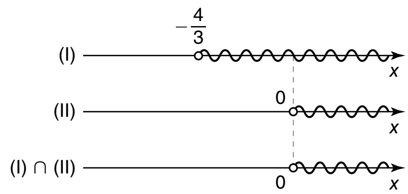
45. **a)** $\log_3 (5x - 6) = 2$
Condição de existência:
$5x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{5}$
Pela definição de logaritmo:
$\log_3 (5x - 6) = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 5x - 6$
$\therefore\ x = 3$
Observando que $x = 3$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{3\}$.

b) $\log_7 (9x - 1) = \log_7 (4 - 2x)$
Condição de existência:
$$\begin{cases} 9x - 1 > 0 \\ 4 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{9} & \text{(I)} \\ x < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $\frac{1}{9} < x < 2$.
Resolução da equação:
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$\log_7 (9x - 1) = \log_7 (4 - 2x) \Leftrightarrow 9x - 1 = 4 - 2x$
$\therefore\ x = \frac{5}{11}$
Observando que $x = \frac{5}{11}$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{5}{11}\right\}$.

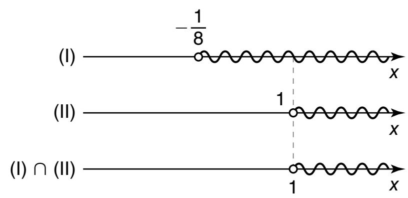
c) $\log_2 (2x) + \log_2 (3x + 4) = 6$
Condição de existência:
$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 3x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > -\frac{4}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 0$.

Resolução da equação:
Pela propriedade P6 das funções logarítmicas:
$\log_2 (2x) + \log_2 (3x + 4) = 6 \Leftrightarrow \log_2 2x\ (3x + 4) = 6$
Pela definição de logaritmo:
$\log_2 2x\ (3x + 4) = 6 \Leftrightarrow 2x\ (3x + 4) = 2^6$
Então:
$6x^2 + 8x - 64 = 0$
$\therefore\ x = \frac{8}{3}$ ou $x = -4$
Observando que somente $x = \frac{8}{3}$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

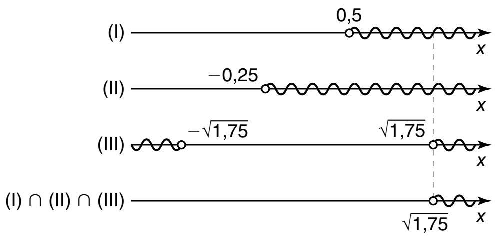
d) $\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2$
Condição de existência:
$$\begin{cases} 8x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{8} & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 1$.

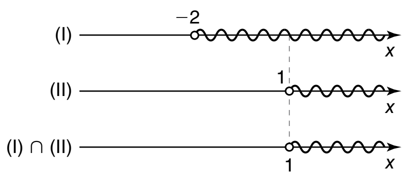
Resolução da equação:
Pela propriedade P7 das funções logarítmicas:
$\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2 \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{(8x + 1)}{(x - 1)} = 2$
Pela definição de logaritmo:
$\log_3 \dfrac{8x + 1}{x - 1} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{8x + 1}{x - 1} = 3^2$
Então:
$8x + 1 = 9(x - 1)$
$\therefore x = 10$
Observando que $x = 10$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{10\}$.

e) $\log_{1,5} (x - 0,5) + \log_{1,5} (x + 0,25) =$
$= \log_{1,5} (x^2 - 1,75) + 1$
Condição de existência:
$$\begin{cases} x - 0,5 > 0 \\ x + 0,25 > 0 \\ x^2 - 1,75 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0,5 & \text{(I)} \\ x > -0,25 & \text{(II)} \\ x < -\sqrt{1,75} \text{ ou } x > \sqrt{1,75} & \text{(III)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > \sqrt{1,75}$.
Lembrando que $\log_{1,5} 1,5 = 1$, temos pela propriedade P6 das funções logarítmicas:
$\log_{1,5} (x - 0,5) \cdot (x + 0,25) = \log_{1,5} (x^2 - 1,75) \cdot 1,5$
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$(x - 0,5) \cdot (x + 0,25) = (x^2 - 1,75) \cdot (1,5) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 0,25x - 0,125 = 1,5x^2 - 2,625$
$\therefore 0,5x^2 + 0,25x - 2,5 = 0$
$\therefore x = 2 \text{ ou } x = -\dfrac{5}{2}$
Observando que somente $x = 2$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{2\}$.

f) $\ln (x - 1) + \ln (x + 2) = \ln 4$
$\log_e (x - 1) + \log_e (x + 2) = \log_e 4$
Condição de existência:
$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 & \text{(I)} \\ x > -2 & \text{(II)} \end{cases}$$

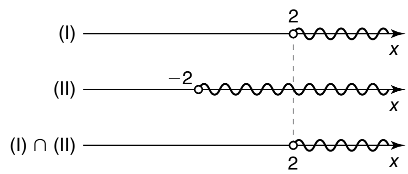


Logo, a condição de existência se resume a $x > 1$.

Resolução da equação:
Pela propriedade P6 das funções logarítmicas:
$\log_e (x - 1) + \log_e (x + 2) = \log_e 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_e [(x - 1)(x + 2)] = \log_e 4$
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$\log_e [(x - 1)(x + 2)] = \log_e 4 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 4$
Então:
$x^2 + x - 6 = 0$
$\therefore x = 2 \text{ ou } x = -3$
Observando que somente $x = 2$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{2\}$.

46. $\log_2 (12 - 2^x) = 2x$
Pela definição de logaritmo:
$\log_2 (12 - 2^x) = 2x \Rightarrow 2^{2x} = 12 - 2^x$
$\therefore (2^x)^2 = 12 - 2^x$
Substituindo 2^x por t, obtemos:
$t^2 = 12 - t \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0$
$\therefore t = -4 \text{ ou } t = 3$
Assim:
- $2^x = t \Rightarrow 2^x = -4$
  $\nexists x$ real
- $2^x = t \Rightarrow 2^x = 3$
  Pela definição de logaritmo:
  $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$
  Alternativa **e**.

47. a) $\log_2 (x - 2) = \log_4 (2x + 4)$
Condição de existência:
$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 & \text{(I)} \\ x > -2 & \text{(II)} \end{cases}$$



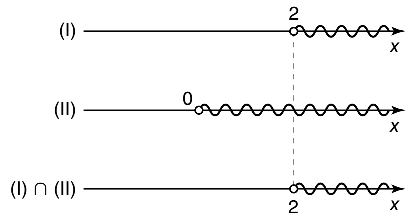
Logo, a condição de existência se resume a $x > 2$.
Resolução da equação:
Pela propriedade P8:
$\log_2 (x - 2) = \log_4 (2x + 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \dfrac{\log_2 (2x + 4)}{\log_2 4}$, ou, ainda,
$\log_2 (x - 2) = \dfrac{\log_2 (2x + 4)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \log_2 (x - 2) = \log_2 (2x + 4)$
Pela propriedade P3:
$\log_2 (x - 2)^2 = \log_2 (2x + 4)$
Finalmente, pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$(x - 2)^2 = (2x + 4) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$
$\therefore x = 0 \text{ ou } x = 6$
Observando que somente $x = 6$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{6\}$.

b) $\log_2 (x - 2) + 2 \cdot \log_4 x = 3 \log_8 (2x)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \\ x > 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Como (II) é igual a (III), representaremos apenas (II) na intersecção.



Logo, a condição de existência se resume a $x > 2$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P8:

$\log_2 (x - 2) + 2 \log_4 x = 3 \log_8 (2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) + 2 \cdot \left(\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) = 3 \cdot \left(\dfrac{\log_2 2x}{\log_2 8}\right)$

Que equivale a $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = \log_2 2x$.

Pela propriedade P6:

$\log_2 (x - 2) + \log_2 x = \log_2 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 [x(x - 2)] = \log_2 2x$

Aplicando a propriedade P1 das funções logarítmicas, obtemos:

$x^2 - 2x = 2x$

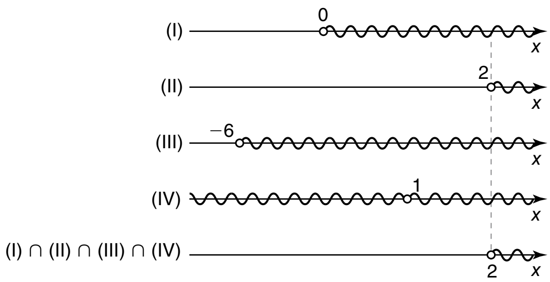
$\therefore x = 0$ ou $x = 4$

Observando que apenas $x = 4$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{4\}$.

c) $\log_x (3x) + \log_x (x - 2) = \log_x (x + 6)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > 2 & \text{(II)} \\ x > -6 & \text{(III)} \\ x \neq 1 & \text{(IV)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 2$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P6:

$\log_x (3x) + \log_x (x - 2) = \log_x (x + 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x [3x (x - 2)] = \log_x (x + 6)$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$3x (x - 2) = x + 6 \Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$

Observando que apenas $x = 3$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{3\}$.

48. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 1 & \text{(I)} \\ 4^{y-1} = 128 & \text{(II)} \end{cases}$

Condição de existência:

$x > 0$ e $y > 0$

De (II), temos:

$4^{y-1} = 128 \Rightarrow 2^{2(y-1)} = 2^7$

$\therefore 2y - 2 = 7 \Rightarrow y = \dfrac{9}{2}$

Substituindo y por $\dfrac{9}{2}$ na equação (I), obtemos:

$\log_2 x + \log_4 \dfrac{9}{2} = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 - \log_4 \dfrac{9}{2}$

$\therefore \log_2 x = \log_4 4 - \log_4 \dfrac{9}{2}$

Pela propriedade P7 dos logaritmos:

$\log_2 x = \log_4 4 - \log_4 \dfrac{9}{2} \Rightarrow \log_2 x = \log_4 \left(4 : \dfrac{9}{2}\right)$

$\therefore \log_2 x = \log_4 \dfrac{8}{9}$

Pela propriedade P8:

$\log_2 x = \log_4 \dfrac{8}{9} \Rightarrow \log_2 x = \dfrac{\log_2 \frac{8}{9}}{\log_2 4}$

$\therefore \log_2 x = \dfrac{\log_2 \frac{8}{9}}{2}$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$\log_2 x = \dfrac{1}{2} \log_2 \dfrac{8}{9} \Rightarrow \log_2 x = \log_2 \left(\dfrac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

Aplicando a propriedade P1 das funções logarítmicas, obtemos:

$x = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, $x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e $y = \dfrac{9}{2}$.

Assim, concluímos que o produto xy é igual a $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{9}{2}$, ou seja, $3\sqrt{2}$.

Alternativa **a**.

49. Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 50 > 0 \\ \dfrac{x + 40}{2} > 0 \\ x \geqslant 0 \text{ (pois } x \text{ representa o número de semanas)} \end{cases}$$

Logo, a condição de existência se resume a $x \geqslant 0$.

Devemos ter $f(x) = g(x)$; assim:

$\log_3 (2x + 50) = 1 + \log_3 \dfrac{x + 40}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (2x + 50) = \log_3 3 + \log_3 \dfrac{x + 40}{2}$

$\therefore \log_3 (2x + 50) = \log_3 \dfrac{3(x + 40)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 50 = \dfrac{3(x + 40)}{2}$

$\therefore x = 20$

Como esse valor de x satisfaz a condição de existência, concluímos que as duas populações atingirão o mesmo número de indivíduos em 20 semanas.

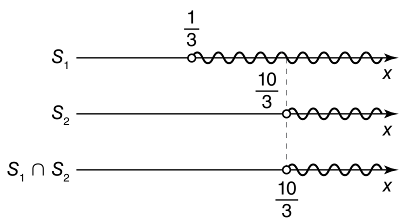
50. Pelo enunciado, temos:

$C \cdot (1 + i)^t = \frac{C}{2} \cdot (1 + i)^{2t} \Rightarrow 2 \cdot (1 + i)^t = (1 + i)^{2t}$

Fazendo $(1 + i)^t = k$, obtemos:
$2k = k^2 \Rightarrow k^2 - 2k = 0$
$\therefore\ k = 0$ ou $k = 2$
Assim:

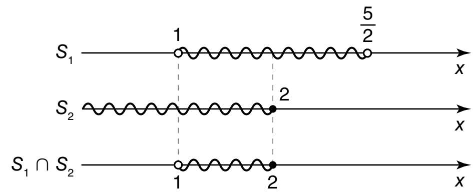
- $k = 0 \Rightarrow (1 + i)^t = 0$
  $\therefore\ 1 + i = 0 \Rightarrow i = -1$
  Solução inválida, pois i é uma constante positiva.
- $k = 2 \Rightarrow (1 + i)^t = 2$
  $\therefore\ t = \log_{1+i} 2$
  Temos que $t = 2 - \log_2 (1 + i)$ e $t = \log_{1+i} 2$; assim:
  $2 - \log_2 (1 + i) = \log_{1+i} 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2 - \log_2 (1 + i) = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 (1 + i)}$
  $\therefore\ 2 - \log_2 (1 + i) = \dfrac{1}{\log_2 (1 + i)}$
  Fazendo $\log_2 (1 + i) = y$, obtemos:
  $2 - y = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$
  $\therefore\ y = 1$
  Assim:
  $\log_2 (1 + i) = 1 \Rightarrow 1 + i = 2$
  $\therefore\ i = 1$
  Logo, a taxa percentual i corresponde a 100%.

51. a) $\log_3 (3x - 1) > 2$
Condição de existência:
$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$
Preparação da inequação:
Representamos o número 2 como logaritmo de base 3, isto é:
$2 = 2 \cdot \log_3 3 = \log_3 3^2 = \log_3 9$
Assim, a inequação proposta é equivalente a:
$\log_3 (3x - 1) > \log_3 9$
Resolução da inequação:
Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (3) é maior que 1, o sentido da desigualdade (>) se mantém para os logaritmandos, ou seja:
$\log_3 (3x - 1) > \log_3 9 \Rightarrow 3x - 1 > 9$
$\therefore\ x > \dfrac{10}{3}$
O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos valores reais x tais que $x > \dfrac{1}{3}$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos valores reais x tais que $x > \dfrac{10}{3}$:



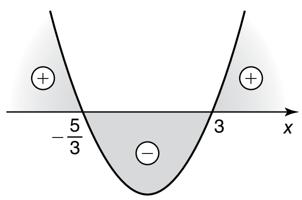
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{10}{3}\right\}$.

b) $\log_{0,8} (5 - 2x) \leqslant \log_{0,8} (x - 1)$
Condição de existência:
$$\begin{cases} 5 - 2x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{5}{2} & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$
A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência:
$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \dfrac{5}{2}\right\}$.
Resolução da equação:
Pela propriedade P3 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (0,8) está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade ($\leqslant$) é invertido para os logaritmandos, ou seja:
$\log_{0,8} (5 - 2x) \leqslant \log_{0,8} (x - 1) \Rightarrow 5 - 2x \geqslant x - 1$
$\therefore\ x \leqslant 2$
Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.
O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 com o conjunto S_2:



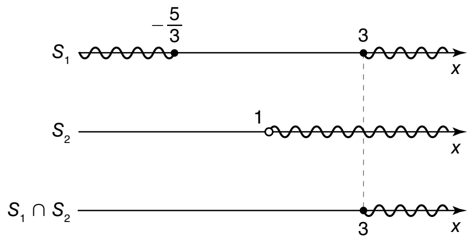
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$.

c) $\log_4 (x - 1) + \log_4 (3x - 1) \geqslant 2$
Condição de existência:
$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 & \text{(I)} \\ x > \dfrac{1}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$
A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 1$
Preparação da inequação:
Representamos o número 2 como logaritmo de base 4, isto é:
$2 = 2 \cdot \log_4 4 = \log_4 4^2 = \log_4 16$
Assim, a inequação proposta é equivalente a:
$\log_4 (x - 1) + \log_4 (3x - 1) \geqslant \log_4 16$
Pela propriedade P6 dos logaritmos:
$\log_4 (x - 1) + \log_4 (3x - 1) \geqslant \log_4 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_4 (x - 1)(3x - 1) \geqslant \log_4 16$
Ou, ainda: $\log_4 (3x^2 - 4x + 1) \geqslant \log_4 16$
Resolução da inequação:
Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (4) é maior que 1, o sentido da desigualdade ($\geqslant$) se mantém para os logaritmandos, ou seja:
$\log_4 (3x^2 - 4x + 1) \geqslant \log_4 16 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 \geqslant 16$
$\therefore\ 3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0$
Estudando o sinal da função $f(x) = 3x^2 - 4x - 15$, temos:



Logo: $3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\dfrac{5}{3}$ ou $x \geqslant 3$

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > 1$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x \leqslant -\frac{5}{3}$ ou $x \geqslant 3$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{2}} 3$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 1$

Preparação da inequação:

Pela propriedade P7 dos logaritmos:

$\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{(x + 1)}{(x - 1)} > \log_{\frac{1}{2}} 3$

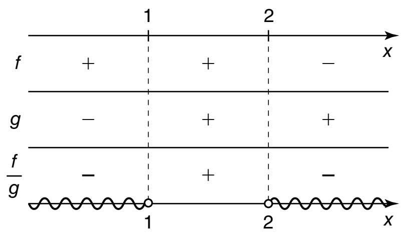
Resolução da inequação:

Pela propriedade P3 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos $\left(\frac{1}{2}\right)$ está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade ($>$) é invertido para os logaritmandos, ou seja:

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{(x + 1)}{(x - 1)} > \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow \frac{x + 1}{x - 1} < 3$

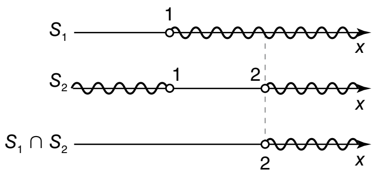
Ou, ainda: $\frac{x + 1}{x - 1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-2x + 4}{x - 1} < 0$

Estudando o sinal das funções $f(x) = -2x + 4$, $g(x) = x - 1$ e $\frac{f}{g}$, temos:



Logo, $x < 1$ ou $x > 2$.

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > 1$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x < 1$ ou $x > 2$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

e) $\ln (2x - e) + \ln x > 2$

$\log_e (2x - e) + \log_e x > 2$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x - e > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{e}{2} & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > \frac{e}{2}$

Preparação da inequação:

Representamos o número 2 como logaritmo de base e, isto é:

$2 = 2 \cdot \log_e e = \log_e e^2$

Assim, a inequação proposta equivale a:

$\log_e (2x - e) + \log_e x > \log_e e^2$

Pela propriedade P6 dos logaritmos:

$\log_e (2x - e) + \log_e x > \log_e e^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_e [(2x - e) \cdot x] > \log_e e^2$

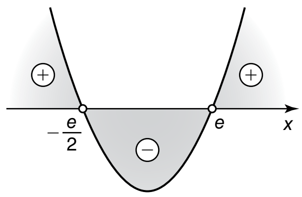
Resolução da inequação:

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (e) é maior que 1, o sentido da desigualdade ($>$) se mantém para os logaritmandos, ou seja:

$\log_e [(2x - e) \cdot x] > \log_e e^2 \Rightarrow x(2x - e) > e^2$

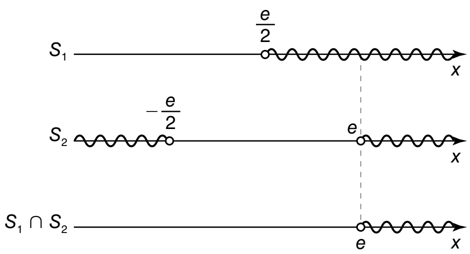
$\therefore\ 2x^2 - ex - e^2 > 0$

Estudando o sinal da função $f(x) = 2x^2 - ex - e^2$, temos:



Logo, $x < -\frac{e}{2}$ ou $x > e$.

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > \frac{e}{2}$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais tais que $x < -\frac{e}{2}$ ou $x > e$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > e\}$.

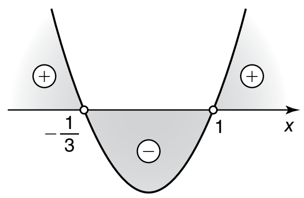
f) $1 + \log_2 x < \log_4 (x + 1)^2$

Condição de existência:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 > 0 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

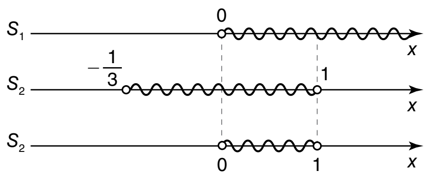
Para qualquer valor de x, (I) será satisfeita; porém, (II) só será satisfeita se $x > 0$; então, a intersecção de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 0$

Preparação da inequação:
Representamos o número 1 como logaritmo de base 2, isto é:
$1 = 1 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^1 = \log_2 2$
Assim, a inequação proposta é equivalente a:
$\log_2 2 + \log_2 x < \log_4 (x + 1)^2$
Pela propriedade P8:
$$\log_2 2 + \log_2 x < \frac{\log_2 (x+1)^2}{\log_2 4} \Rightarrow$$
$\Rightarrow 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 x^2 < \log_2 (x + 1)^2$
Pela propriedade P3:
$\log_2 2^2 + \log_2 x^2 < \log_2 (x + 1)^2$
Pela propriedade P6:
$\log_2 (4 \cdot x^2) < \log_2 (x + 1)^2$
Resolução da inequação:
Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (2) é maior que 1, o sentido da desigualdade (<) se mantém para os logaritmandos, ou seja:
$\log_2 4x^2 < \log_2 (x + 1)^2 \Rightarrow 4x^2 < (x + 1)^2$
$\therefore\ 3x^2 - 2x - 1 < 0$
Estudando o sinal da função $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, temos:



Logo, $3x^2 - 2x - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > 0$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais x tais que $-\frac{1}{3} < x < 1$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

52. Pelos dados do enunciado, temos:
$300(1{,}04)^n > 600 \Rightarrow (1{,}04)^n > 2$
Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:
$(1{,}04)^n > 2 \Rightarrow \log(1{,}04)^n > \log 2$
Pela propriedade P3 dos logaritmos:
$\log (1{,}04)^n > \log 2 \Rightarrow n \cdot \log 1{,}04 > \log 2$
$$\therefore\ n > \frac{\log 2}{\log 1{,}04} \Rightarrow n > \frac{\log 2}{\log \frac{104}{100}}$$
Pela propriedade P7:
$$n > \frac{\log}{\log \frac{104}{100}} \Rightarrow n > \frac{\log 2}{-\log 100 + \log 104}$$
$$\therefore\ n > \frac{\log 2}{-2 + \log 104}$$
Alternativa **b**.

53. A área destruída é dada por:
$A = 2.000 \cdot (1 + 0{,}1)^t = 2.000 \cdot 1{,}1^t$
$\frac{A}{2.000} = 1{,}1^t$
$\log_{1,1} \frac{A}{2.000} = \log_{1,1} 1{,}1^t = t$
Logo, se $t > 5$, então $\log_{1,1} \frac{A}{2.000} > 5$
Alternativa **d**.

54. Indicando a população final por y, a população inicial por y_0, a estimativa de crescimento do número de alunos por i e o tempo por t; esquematizamos:
$y_0 = 5.000$
$i = 10\% = 0{,}1$ (taxa anual)
Temos:
$y = y_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow y = 5.000 \cdot (1 + 0{,}1)^t$
$\therefore\ y = 5.000 \cdot (1{,}1)^t$
Queremos o tempo previsto para que a população ultrapasse 10.000, ou seja, $y > 10.000$. Assim:
$5.000 \cdot (1{,}1)^t > 10.000 \Rightarrow (1{,}1)^t > 2$
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$(1{,}1)^t > 2 \Rightarrow \log (1{,}1)^t > \log 2$
Pela propriedade P3 dos logaritmos:
$\log (1{,}1)^t > \log 2 \Rightarrow t \cdot \log 1{,}1 > 0{,}3$
$\therefore\ t \cdot 0{,}04 > 0{,}3 \Rightarrow t > 7{,}5$
Portanto, após 7,5 anos a população estudantil ultrapassará 10.000 alunos. Como não há esta alternativa, devemos considerar que o tempo deve ser no mínimo 7,5 anos, ou seja, 8 anos.
Alternativa **c**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) $1{,}83337 \cdot 2{,}06196 = 10^{0,26325} \cdot 10^{0,31428} =$
$= 10^{0,26325 + 0,31428} = 10^{0,57753} = 3{,}78033$

b) $3{,}78033 : 2{,}06196 = 10^{0,57753} : 10^{0,31428} =$
$= 10^{0,26325} = 1{,}83337$

c) $(2{,}06196)^4 = (10^{0,31428})^4 = 10^{1,25712} = 18{,}07674$

d) $\sqrt{2{,}06196} = (10^{0,31428})^{\frac{1}{2}} = 10^{0,15714} = 1{,}43595$

2. a) $\log_{216} 36 = x \Leftrightarrow 216^x = 36$
$\therefore\ 6^{3x} = 6^2 \Rightarrow 3x = 2$
$\therefore\ x = \frac{2}{3}$
Assim, $\log_{216} 36 = \frac{2}{3}$.

b) $\log_{100} 10.000 = x \Leftrightarrow 100^x = 100^2$
$\therefore\ x = 2$
Assim, $\log_{100} 10.000 = 2$.

c) $\log_{\frac{25}{81}} \frac{729}{125} = x \Leftrightarrow \left(\frac{25}{81}\right)^x = \frac{729}{125}$
$\therefore\ \left(\frac{5}{9}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{9}\right)^{-3} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$
Então, $\log_{\frac{25}{81}} \frac{729}{125} = -\frac{3}{2}$.

d) $\log_6 6 = x \Leftrightarrow 6^x = 6$
$\therefore\ x = 1$
Assim, $\log_6 6 = 1$.

e) $\log_7 1 = x \Leftrightarrow 7^x = 1$
$\therefore\ x = 0$
Assim, $\log_7 1 = 0$.

f) $\log_7 7^{10} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{10}$

$\therefore x = 10$

Assim, $\log_7 7^{10} = 10$.

g) $\log_{\sqrt[5]{2}} \sqrt{2} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{2}\right)^x = \sqrt{2}$

$\therefore 2^{\frac{x}{5}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Assim, $\log_{\sqrt[5]{2}} \sqrt{2} = \dfrac{5}{2}$.

h) $\log_{0,04} 0{,}008 = x \Leftrightarrow 0{,}04^x = 0{,}008$

$\therefore \left(\dfrac{4}{100}\right)^x = \dfrac{8}{1.000} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{10}\right)^{2x} = \left(\dfrac{2}{10}\right)^3$

$\therefore 2x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Assim, $\log_{0,04} 0{,}008 = \dfrac{3}{2}$.

i) $\log_{\sqrt[3]{128}} 2\sqrt[5]{2} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{128}\right)^x = 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^6}$

$\therefore \sqrt[3]{128^x} = \sqrt[5]{2^6} \Rightarrow 2^{\frac{7x}{3}} = 2^{\frac{6}{5}}$

$\therefore \dfrac{7x}{3} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow x = \dfrac{18}{35}$

Assim, $\log_{\sqrt[3]{128}} 2\sqrt[5]{2} = \dfrac{18}{35}$.

3. Queremos que $\sqrt[3]{6x}$ seja inteiro, assim como x. Assim:

$\sqrt[3]{6x} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot x}$

Daí concluímos que o menor valor inteiro que x pode assumir é $x = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Portanto:

$\log_6 x = \log_6 36 = 2$

Alternativa **b**.

4.
- $\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16$

  $\therefore 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

  Assim:

  $\log_2 16 = 4$

- $\log_4 32 = x \Leftrightarrow 4^x = 32$

  $\therefore 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

  Assim:

  $\log_4 32 = \dfrac{5}{2}$

  Portanto:

  $\log_2 16 - \log_4 32 = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$

5. a) $b = \log_2 0{,}8 \Rightarrow b \approx -0{,}3219$

b) $f(3) = t \cdot 3^{-0,3219} \Rightarrow f(3) \approx 0{,}7021t$

$f(5) = t \cdot 5^{-0,3219} \Rightarrow f(5) \approx 0{,}5967t$

$f(6) = t \cdot 6^{-0,3219} \Rightarrow f(6) \approx 0{,}5617t$

$f(7) = t \cdot 7^{-0,3219} \Rightarrow f(7) \approx 0{,}5345t$

Concluímos, então, que os valores aproximados das ordenadas dos pontos de abscissas 3, 5, 6 e 7 são, respectivamente, 0,7021t, 0,5967t, 0,5617t e 0,5345t

c) Temos que: $b = \log_2 0{,}6 \Rightarrow b \approx -0{,}7370$

Assim, obtemos:

$f(5) = 10 \cdot 5^{-07370} \Rightarrow f(5) \approx 3{,}0540$

Concluímos, então, que o tempo aproximado de fabricação da 5ª unidade é de 3 horas.

6. a) $\log 625 = \log 5^4$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$\log 5^4 = 4 \log 5 = 4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$

Então, $\log 625 = 2{,}8$.

b) $\log \dfrac{1}{25} = \log 5^{-2}$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$\log 5^{-2} = -2 \log 5 = -2 \cdot 0{,}7 = -1{,}4$

Então, $\log \dfrac{1}{25} = -1{,}4$.

c) $\log \sqrt{125} = \log 5^{\frac{3}{2}}$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$\log 5^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} \log 5 = \dfrac{3}{2} \cdot 0{,}7 = 1{,}05$

Então, $\log \sqrt{125} = 1{,}05$.

7. Arrumando o radicando de A, temos:

$$\frac{90}{9^{n+2} + 3^{2n+2}} = \frac{90}{3^{2n} \cdot 3^4 + 3^{2n} \cdot 3^2} = \frac{90}{3^{2n}(3^4 + 3^2)} =$$

$$= \frac{90}{3^{2n} \cdot 90} = \frac{1}{3^{2n}}$$

Calculando $\log_{\frac{1}{9}} A$, temos:

$$\log_{\frac{1}{9}} A = \log_{\frac{1}{9}} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{2n}}} = \log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{3^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{9} = 1$$

Alternativa **d**.

8. Dados:

$\log_a x = 2$

$\log_x y = 3$

$\log_a \sqrt[5]{x \cdot y^3} = ?$

Pela definição de logaritmo, temos:

$\log_x y = 3 \Leftrightarrow x^3 = y$

Substituindo y por x^3 na expressão $\log_a \sqrt[5]{x \cdot y^3}$:

$\log_a \sqrt[5]{x \cdot y^3} = \log_a \sqrt[5]{x \cdot (x^3)^3} = \log_a x^2 = 2 \cdot \log_a x$

Como $\log_a x = 2$, concluímos:

$\log_a \sqrt[5]{x \cdot y^3} = 4$

9. a) $\log_6 44 = \log_6 (4 \cdot 11)$

Pela propriedade P6:

$\log_6 (4 \cdot 11) = \log_6 4 + \log_6 11 =$

$= 2 \log_6 2 + \log_6 11 = 2 \cdot 0{,}37 + 1{,}34 = 2{,}08$

Então, $\log_6 44 = 2{,}08$.

b) $\log_6 \dfrac{121}{8} = \log_6 11^2 - \log_6 2^3 =$

$= 2 \cdot 1{,}34 - 3 \cdot 0{,}37 = 2{,}68 - 1{,}11 = 1{,}57$

Então, $\log_6 \dfrac{121}{8} = 1{,}57$.

c) $\log_6 \sqrt[7]{2} = \log_6 2^{\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{7} \log_6 2 = \dfrac{0{,}37}{7} \approx 0{,}053$

d) $\log_{22} 3 = \dfrac{\log_6 3}{\log_6 22} = \dfrac{\log_6 \frac{6}{2}}{\log_6 (2 \cdot 11)} =$

$= \dfrac{\log_6 6 - \log_6 2}{\log_6 2 + \log_6 11} = \dfrac{1 - 0{,}37}{0{,}37 + 1{,}34} =$

$= \dfrac{0{,}63}{1{,}71} \approx 0{,}37$

Então, $\log_{22} 3 \approx 0{,}37$.

e) $\log_6 4\sqrt{11} = \log_6 2^2 + \log_6 11^{\frac{1}{2}} =$

$= 2 \log_6 2 + \dfrac{1}{2} \log_6 11 = 2 \cdot 0{,}37 + \dfrac{1{,}34}{2} =$

$= 0{,}74 + 0{,}67 = 1{,}41$

Então, $\log_6 4\sqrt{11} = 1{,}41$.

f) $\log_{\sqrt{2}} 22 = \dfrac{\log_6 (11 \cdot 2)}{\log_6 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\log_6 11 + \log_6 2}{\frac{1}{2}\log_6 2} =$

$= \dfrac{1{,}34 + 0{,}37}{\frac{0{,}37}{2}} = \dfrac{1{,}71}{0{,}185} \approx 9{,}24$

Então, $\log_{\sqrt{2}} 22 \approx 9{,}24$.

10. $\log 35 = \log (7 \cdot 5) = \log 7 + \log \dfrac{10}{2} =$

$= \log 7 + \log 10 - \log 2 = 0{,}84 + 1 - 0{,}30 = 1{,}54$

Portanto, $\log 35 = 1{,}54$.

11. $A \cdot \log_{200} 5 + B \cdot \log_{200} 2 = C$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$A \cdot \log_{200} 5 + B \cdot \log_{200} 2 = C \Rightarrow \log_{200} 5^A + \log_{200} 2^B = C$

Pela propriedade P6:

$\log_{200} 5^A + \log_{200} 2^B = C \Rightarrow \log_{200} (5^A \cdot 2^B) = C$

Pela definição de logaritmos:

$\log_{200} (5^A \cdot 2^B) = C \Rightarrow 200^C = 5^A \cdot 2^B$

$\therefore (2^3 \cdot 5^2)^C = 5^A \cdot 2^B \Rightarrow 2^{3C} \cdot 5^{2C} = 2^B \cdot 5^A$

$\therefore 3C = B$ e $2C = A$

Então:

$A + B + C = 2C + 3C + C = 6C$

Alternativa **e**.

12. $(\log a)^2 - (\log b)^2 = \log (ab)$

Pelo caso de fatoração diferença de quadrados de dois termos e pela propriedade P6 dos logaritmos, temos:

$(\log a)^2 - (\log b)^2 = \log (ab) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log a + \log b)(\log a - \log b) = \log (ab)$

$\therefore \log (ab) \cdot \log \dfrac{a}{b} - \log (ab) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log (ab) \cdot \left(\log \dfrac{a}{b} - 1\right) = 0$

$\therefore \log (ab) = 0$ ou $\log \dfrac{a}{b} - 1 = 0 \Rightarrow ab = 1$ ou $\dfrac{a}{b} = 10$

$\therefore a = \dfrac{1}{b}$ ou $a = 10b$

Alternativa **b**.

13. Temos:

$\log 8 = a \Rightarrow \log 2^3 = a$

$\therefore 3 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \dfrac{a}{3}$

Logo:

$\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2$

$\therefore \log 5 = 1 - \dfrac{a}{3}$

Alternativa **e**.

14. $10^n \leqslant 12^{418}$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$10^n \leqslant 12^{418} \Rightarrow \log 10^n \leqslant \log 12^{418}$

$\therefore n \log 10 \leqslant 418 \log 12 \Rightarrow n \leqslant 418 \log (2^2 \cdot 3)$

$\therefore n \leqslant 418(2 \cdot 0{,}3 + 0{,}48) \Rightarrow n \leqslant 451{,}44$

Deste modo, concluímos que o maior inteiro que satisfaz essa inequação é o 451.

Alternativa **d**.

15. Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$12^x = 15^y \Rightarrow \log 12^x = \log 15^y$

$\therefore x \log 12 = y \log 15 \Rightarrow x(2 \log 2 + \log 3) =$

$= y(\log 3 + \log 10 - \log 2)$

$\therefore x(2 \cdot 0{,}3 + 0{,}48) = y(0{,}48 + 1 - 0{,}3) \Rightarrow 1{,}08x = 1{,}18y$

$\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{1{,}18}{1{,}08} = \dfrac{59}{54}$

Alternativa **a**.

16. $x - y = \log_4 7 - \log_{16} 49 = \log_4 7 - \dfrac{\log_4 49}{\log_4 16} =$

$= \log_4 7 - \dfrac{\log_4 49}{2} = \log_4 7 - \log_4 \sqrt{49} = 0$

Alternativa **e**.

17. $E = \dfrac{\log_2 27 + \log_2 3}{\log_2 45 - \log_2 5} = \dfrac{\log_2 81}{\log_2 9} = \dfrac{\log_2 9^2}{\log_2 9} =$

$= \dfrac{2 \log_2 9}{\log_2 9} = 2$

18. Chamando de x a expressão dada, temos:

$b^{\frac{\log a}{\log b}} = x$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$b^{\frac{\log a}{\log b}} = x \Rightarrow \log b^{\frac{\log a}{\log b}} = \log x$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$\log b^{\frac{\log a}{\log b}} = \log x \Rightarrow \dfrac{\log a}{\log b} \cdot \log b = \log x$

$\therefore \log a = \log x$

Novamente pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$\log a = \log x \Rightarrow a = x$

Então:

$b^{\frac{\log a}{\log b}} = a$

Alternativa **a**.

19. $x = \ln 5 \Rightarrow x = \log_e 5$

Pela definição de logaritmo:

$x = \log_e 5 \Rightarrow e^x = 5$

Assim:

$e^x + e^{2x} = 5 + 5^2 = 30$

20. $\log_e 8 = \dfrac{\log 8}{\log e} = \dfrac{\log 2^3}{\frac{1}{\log_e 10}} = \dfrac{3\log 2}{\frac{1}{\log_e 10}} = \dfrac{3 \cdot 0{,}3}{\frac{1}{2{,}3}} = 2{,}07$

Logo, $\ln 8 = 0{,}207$.

21. Arrumando primeiro as expressões $\ln e^2$ e $\ln 10$:

$\ln e^2 = \log_e e^2 = 2 \log_e e = 2$

$\ln 10 = \log_e 10 = \dfrac{\log 10}{\log e} = \dfrac{1}{\log e}$

Assim:

$E = e + e^2 + \ln e^2 + \ln 10 = e + e^2 + 2 + \dfrac{1}{\log e}$

$\therefore E \approx 14{,}409923$

22. a) $e^{4x} - 10 = 0 \Rightarrow e^{4x} = 10$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$e^{4x} = 10 \Rightarrow \log_e e^{4x} = \log_e 10$

Pela propriedade P3 dos logaritmos:

$\log_e e^{4x} = \log_e 10 \Rightarrow 4x \log_e e = \log_e (2 \cdot 5)$

Pela propriedade P6 dos logaritmos:

$4x \log_e e = \log_e (2 \cdot 5) \Rightarrow 4x = \ln 2 + \ln 5$

$\therefore x = 0{,}5755$

b) $e^{2y} - 5e^y - 24 = 0$
Substituindo e^y por z na equação anterior:
$z^2 - 5z - 24 = 0 \Rightarrow z = 8$ ou $z = -3$
Assim:
- $z = 8 \Rightarrow e^y = 8$
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$e^y = 8 \Rightarrow y \log_e e = 3 \log_e 2$
$\therefore y = 3 \ln 2 \Rightarrow y = 2{,}079$
- $z = 3 \Rightarrow e^y = -3$
Como e é um valor positivo, $\nexists y$ real que satisfaça tal igualdade.
Concluímos então que $y = 2{,}079$.

23. Pelos gráficos, temos:
- f é uma função logarítmica crescente de base b e, portanto, $b > 1$.
- g é uma função logarítmica decrescente de base c e, portanto, $0 < c < 1$.

Alternativa **c**.

24. $y = \log_b x$
Pelo gráfico, temos que os pares ordenados (1, 0) e (0,25; 1) pertencem à função y. Assim:
$$\begin{cases} 0 = \log_b 1 \Rightarrow b^0 = 1 \\ -1 = \log_b 0{,}25 \Rightarrow 5 \end{cases}$$
De (I) temos que $b^0 = 1$, que é verdadeira para qualquer b real.
De (II) temos:
$b^{-1} = 0{,}25 \Rightarrow b^{-1} = 4^{-1}$
$\therefore b = 4$
Alternativa **d**.

25. Pelo gráfico, temos:
$$\begin{cases} \log_a 4 = 4 \\ \log_b 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 4 \\ b^{-2} = 4 \end{cases}$$
$\therefore a = \sqrt{2}$ e $b = \dfrac{1}{2}$
Logo:
a) $ab = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$
Como $0 < ab < 1$, concluímos que a função f é decrescente.
b) $2a - b = 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \approx 2{,}3$
Como $2a - b > 1$, concluímos que a função g é crescente.

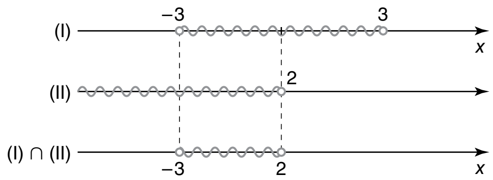
26. Adotando o par ordenado (0, 4) como ponto E, temos que a área do quadrilátero $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas do triângulo ABE e do quadrilátero $BCDE$. Pelo gráfico, temos ainda:
$B = \log_2 4 \Rightarrow B = 2$
$C = \log_2 8 \Rightarrow C = 3$
$0 = \log_2 A \Rightarrow A = 1$
Assim:
Área do triângulo $ABE = \dfrac{(4-1)2}{2} = 3$
Área do quadrilátero $BCDE = \dfrac{(3+2)4}{2} = 10$
Logo, a área do quadrilátero $ABCD$ será 13 unidades área.

27. Pelo gráfico, temos:
$A = \log a$
$B = \log b$
$C = \log c$
Sabemos que $AO = BC$ e pela figura $AO = A$ e $BC = C - B$; assim:
$A = C - B \Rightarrow \log a = \log c - \log b$
Pela propriedade P7:
$\log a = \log c - \log b \Rightarrow \log a = \log \dfrac{c}{b}$
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:
$\log a = \log \dfrac{c}{b} \Rightarrow a = \dfrac{c}{b}$
$\therefore ab = c$
Alternativa **d**.

28. Do gráfico, temos:
$2\ln 2 = 1{,}38$ e $2\ln 5 = 3{,}22$
Logo:
$\ln 100 = \ln (2 \cdot 5)^2 \Rightarrow \ln 100 = 2\ln 2 + 2\ln 5 = 4{,}6$
Alternativa **a**.

29. $Rb^x = Ka^x \Rightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^x = \dfrac{K}{R}$
Pela definição de logaritmo:
$\left(\dfrac{b}{a}\right)^x = \dfrac{K}{R} \Rightarrow x = \log_{\frac{b}{a}} \dfrac{K}{R}$
Alternativa **a**.

30. $f(x) = \log (9 - x^2) + \log (2 - x)$
Condição de existência:
$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \text{ (I)} \\ x < 2 \text{ (II)} \end{cases}$$
O domínio de f é a intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II):



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$.
Dentro desse intervalo temos os números inteiros −2, −1, 0 e 1, ou seja, 4 números.
Alternativa **b**.

31. **a)** Substituindo x por y e y por x na função $y = 5 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x}$ e, depois, isolando a variável y, temos:
$x = 5 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4y} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4y} = 5 - x$
$\therefore 4y = \log_{\frac{1}{3}} (5 - x) \Rightarrow y = \dfrac{1}{4} \log_{\frac{1}{3}} (5 - x)$
Logo, a inversa da função $y = 5 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x}$ é $y = \dfrac{1}{4} \log_{\frac{1}{3}} (5 - x)$.

b) Substituindo x por y e y por x na função $y = -4 + 3\log_2(x-1)$ e, depois, isolando y, temos:

$x = -4 + 3\log_2(y-1) \Rightarrow \dfrac{x+4}{3} = \log_2(y-1)$

$\therefore y - 1 = 2^{\frac{x+4}{3}}$

$\therefore y = 2^{\frac{x+4}{3}} + 1$

Logo, a inversa da função $y = -4 + 3\log_2(x-1)$ é $y = 2^{\frac{x+4}{3}} + 1$.

c) Trocando y por x e x por y em $y = -4 + e^{2x}$ e, depois, isolando y, temos:

$x = -4 + e^{2y} \Rightarrow x + 4 = e^{2y}$

$\therefore 2y = \ln(x+4) \Rightarrow y = \dfrac{\ln(x+4)}{2}$

Logo, a inversa da função $y = -4 + e^{2x}$ é $y = \dfrac{\ln(x+4)}{2}$.

d) Trocando y por x e x por y na função $y = -1 + \ln x$ e, depois, isolando y, temos:

$x = -1 + \ln y \Rightarrow x + 1 = \ln y$

$\therefore y = e^{x+1}$

Logo, a inversa da função $y = -1 + \ln x$ é $y = e^{x+1}$.

32. $y = \log_2 x^5 + \log_2 x^4 - \log_2 x^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 5\log_2 x + 4\log_2 x - 8\log_2 x$

$\therefore y = \log_2 x$

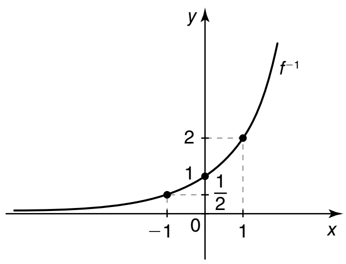
Para encontrar a inversa dessa função, trocamos y por x e x por y, obtendo:

$x = \log_2 y$

Isolando a variável y, concluímos:

$y = 2^x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^x$

Assim, o gráfico de f^{-1} é:



33. Dados:

$f(x) = a + \log_b x$

$f(2) = 0$

$f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1$

(01) Correta, pois substituindo o par ordenado (2, 0) na função encontramos:

$0 = a + \log_b 2 \Rightarrow -a = \log_b 2$

$\therefore b^{-a} = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{b^a} = 2$

$\therefore 2 \cdot b^a = 1$

(02) Correta, pois:

- $2 \cdot b^a = 1 \Rightarrow a = \log_b \dfrac{1}{2}$

  Substituindo a por $\log_b \dfrac{1}{2}$ na função $f(x) = a + \log_b x$:

  $f(x) = \log_b \dfrac{1}{2} + \log_b x = \log_b \dfrac{x}{2}$

  $\therefore f(x) = \log_b \dfrac{x}{2}$ (I).

- Substituindo o par ordenado $\left(\dfrac{1}{5}, -1\right)$ na função $f(x) = a + \log_b x$, encontramos:

  $-1 = a + \log_b \dfrac{1}{5} \Rightarrow -a - 1 = \log_b \dfrac{1}{5}$

  $\therefore b^{-(a+1)} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{b^a \cdot b} = \dfrac{1}{5}$

  $\therefore b^a \cdot b = 5$

  Substituindo b^a por $\dfrac{1}{2}$ na equação anterior, temos:

  $b^a \cdot b = 5 \Rightarrow \dfrac{b}{2} = 5$

  $\therefore b = 10$ (II)

  Por (I) e (II), concluímos que $f(x) = \log_{10} \dfrac{x}{2}$.

(04) Correta, pois, utilizando a função $f(x) = \log_{10} \dfrac{x}{2}$ do item **(02)**:

$f(xy) = \log \dfrac{xy}{2}$

$f(2y) = \log \dfrac{2y}{2} = \log y$

Assim:

$f(x) + f(2y) = \log \dfrac{x}{2} + \log y = \log \dfrac{xy}{2} = f(xy)$

(08) Incorreta, pois utilizando a função $f(x) = \log \dfrac{x}{2}$ do item **(02)**:

$f(10^x) = \log \dfrac{10^x}{2} = x \log 10 - \log 2 = x - \log 2$

(16) Incorreta, pois calculando a inversa de $f(x)$ temos:

$x = \log \dfrac{y}{2} \Rightarrow x = \log y - \log 2$

$\therefore \log y = x + \log 2 \Rightarrow y = 10^{x + \log 2}$

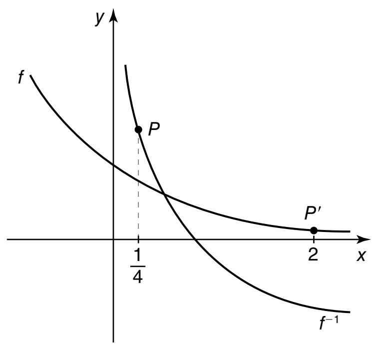
Assim, a função inversa de $f(x)$ é $f^{-1}(x) = 10^{x + \log 2}$.

$f^{-1}(0) = 10^{\log 2} = 2$

$f^{-1}(-1) = 10^{-1 + \log 2} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

- A soma é: 07.

34.



a) Como P e P′ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que $P\left(\dfrac{1}{4}, 2\right)$ e $P'\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$.

b) A função $f(x) = a^x$ é decrescente; logo, $0 < a < 1$.

$P'\left(2, \dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{4} = a^2$

$\therefore a = \dfrac{1}{2}$

c) Para obter a inversa de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, substituímos y por x e x por y e, depois, isolamos y:

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore f^{-1}(x) = y = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) Sendo f e f^{-1} duas funções inversas quaisquer, temos a equivalência:

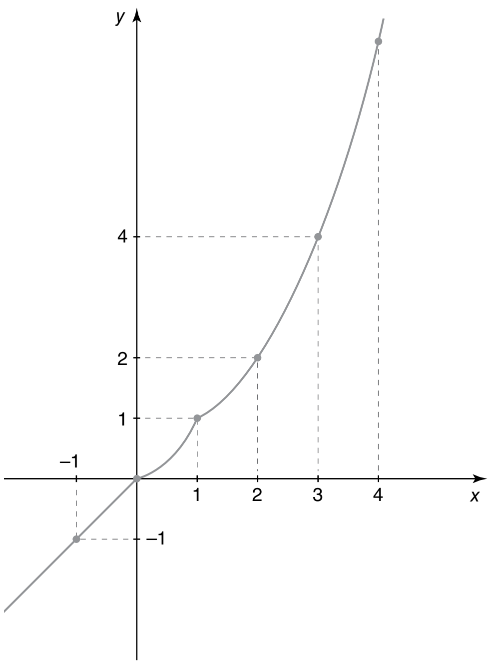
$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

Assim, se (x, y) é ponto comum aos gráficos de f e f^{-1}, temos que (x, y) = (y, x) e, portanto, x = y, isto é, o ponto comum pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

35. a) Adotando alguns valores para x, temos:

x	*f*(*x*)
−1	−1
0	0
1	1
2	2
3	4
4	8

Assim, temos o seguinte gráfico:



b) Para encontrar a inversa dessa função, trocamos y por x e x por y e isolamos a variável y para os três intervalos:

- Para $x \leqslant 0$:
  $x = y$
- Para $0 \leqslant x \leqslant 1$:
  $x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$
- Para $x \geqslant 1$:
  $x = 2^{(y-1)} \Rightarrow y - 1 = \log_2 x$
  $y = \log_2 x + 1$
  Assim, a função inversa de $f(x)$ será:
  $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + \log_2 x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

36. a) Condição de existência:

$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 + 7 > 0 \end{cases}$

Como para qualquer x real teremos $x^2 + 7 > 0$, a condição de existência se resume a $x > -1$.

Resolução da equação:

Por P3 e P7, temos:

$2 \log_4 (x + 1) - \log_4 (x^2 + 7) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 7} = -1$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{x^2+7} = 4^{-1}$

$\therefore \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 7} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^2 + 7$

$\therefore 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -3$

Observando que $x = -3$ não satisfaz a condição de existência e $x = \frac{1}{3}$ satisfaz, concluímos:

$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) Condição de existência:

$\begin{cases} x > \frac{3}{5} & \text{(I)} \\ x > 5 & \text{(II)} \\ x > -1 & \text{(III)} \end{cases}$

Fazendo (I) ∩ (II) ∩ (III), concluímos que a condição de existência se resume a $x > 5$.

Resolução da equação:

Por P3 e P6, temos:

$\log_{\frac{1}{2}} (5x - 3) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = 2 \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (5x - 3)(x - 5) = \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)^2$

Por P1 das funções logarítmicas, temos:

$(5x - 3)(x - 5) = (x + 1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 - 25x - 3x + 15 = x^2 + 2x + 1$

$\therefore 4x^2 - 30x + 14 = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = \frac{1}{2}$

Como $x = \frac{1}{2}$ não satisfaz a condição de existência e $x = 7$ satisfaz, concluímos: $S = \{7\}$

c) Condição de existência:

$\begin{cases} x > -6 & \text{(I)} \\ x > 6 & \text{(II)} \\ x > -\frac{2}{3} & \text{(III)} \end{cases}$

Fazendo (I) ∩ (II) ∩ (III), obtemos $x > 6$.

Resolução da equação:

Lembrando que $1 = \log_2 2$, por P6 e P7, temos:

$\log_2 (x + 6) + \log_2 (x - 6) = \log_2 (12x + 8) - \log_2 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x + 6)(x - 6) = \log_2 \frac{(12x + 8)}{2}$

Por P1 das funções logarítmicas:

$(x + 6)(x - 6) = \dfrac{12x + 8}{2} \Rightarrow x^2 - 36 = \dfrac{12x + 8}{2}$

$\therefore\ 2x^2 - 12x - 80 = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = -4$

Como $x = -4$ não satisfaz a condição de existência e $x = 10$ satisfaz, concluímos: $S = \{10\}$

d) Condição de existência:

$\begin{cases} x > -3 & \text{(I)} \\ x > 2 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) ∩ (II), temos: $x > 2$.

Resolução da equação:

Por P7:

$\ln(x + 3) - \ln(x - 2) = 1 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right) = 1$

$\therefore\ \dfrac{x + 3}{x - 2} = e \Rightarrow x + 3 = ex - 2e$

$\therefore\ x(1 - e) = -3 - 2e \Rightarrow x(e - 1) = 3 + 2e$

$\therefore\ x = \dfrac{3 + 2e}{e - 1}$

Como esse valor satisfaz a condição de existência, concluímos: $S = \left\{\dfrac{3 + 2e}{e - 1}\right\}$

37. a) Condição de existência:

$\begin{cases} x > -2 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) ∩ (II), temos: $x > 0$.

Resolução da equação:

Por P8:

$\log_4 (x + 2) + \log_2 3 = \log_2 x\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log_2 (x + 2)}{\log_2 4} + \log_2 3 = \log_2 x\sqrt{5}$

$\therefore\ \log_2 (x + 2) + 2\log_2 3 = 2\log_2 x\sqrt{5}$

Por P3:

$\log_2 (x + 2) + \log_2 9 = \log_2 \left(x\sqrt{5}\right)^2$

Por P6:

$\log_2 9(x + 2) = \log_2 \left(x\sqrt{5}\right)^2$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$9(x + 2) = x^2 \cdot 5 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0$

$\therefore\ x = 3$ ou $x = -\dfrac{6}{5}$

Como $x = -\dfrac{6}{5}$ não satisfaz a condição de existência e $x = 3$ satisfaz, concluímos: $S = \{3\}$

b) $\log_9 x^2 - \log_3 2 = \log_3 \left(\dfrac{x}{2}\right)$

Condição de existência:

$\begin{cases} x^2 > 0 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{2} > 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) ∩ (II), temos $x > 0$.

Resolução da equação:

Por P3:

$2\log_9 x - \log_3 2 = \log_3 \left(\dfrac{x}{2}\right)$

Por P8:

$2\left(\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}\right) - \log_3 2 = \log_3 \left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x - \log_3 2 = \log_3 \left(\dfrac{x}{2}\right)$

Por P7:

$\log_3 \dfrac{x}{2} = \log_3 \dfrac{x}{2}$

$\therefore\ S = \mathbb{R}_+^*$

38. a) $\log_x (x + 3) + \log_x (3x) - \log_x (x + 1) = \log_x (5x)$

Condição de existência:

$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 3x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 5x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \\ x > -1 & \text{(III)} \\ x \neq 1 & \text{(IV)} \end{cases}$

De (I) ∩ (II) ∩ (III) ∩ (IV), temos: $x > 0$ e $x \neq 1$.

Resolução da equação:

$\log_x (x + 3) + \log_x (3x) - \log_x (x + 1) = \log_x (5x)$

Pelas propriedades P6 e P7:

$\log_x \left(\dfrac{(x + 3) \cdot 3x}{x + 1}\right) = \log_x (5x) \Rightarrow \dfrac{3x\,(x + 3)}{x + 1} = 5x$

$\therefore\ 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 0$ (não convém)

$\therefore\ x = 2$

Assim, $S = \{2\}$.

b) Condição de existência:

$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ ou } x > 2 \\ x > -1 \\ x > 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Fazendo a intersecção desses conjuntos de valores, obtemos a condição de existência: $x > 2$

Resolução da equação:

Por P6:

$\log_x (x^2 - 3x + 2) = \log_x (x + 1) + \log_x (x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x (x^2 - 3x + 2) = \log_x [(x + 1)(x - 1)]$

Por P1 das funções logarítmicas:

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow -3x + 3 = 0$

$\therefore\ x = 1$

Como $x = 1$ não satisfaz a condição de existência, concluímos que $S = \varnothing$.

39. Como $2^{2x} + 12$ é positivo para qualquer x real, temos que existe $\log_2 (2^{2x} + 12)$ para qualquer x real.

$\log_2 (2^{2x} + 12) = 4x \Rightarrow 2^{2x} + 12 = 2^{4x}$

$\therefore\ (2^{2x})^2 - 2^{2x} - 12 = 0$

Fazendo a mudança de variável, $2^{2x} = y$, obtemos:

$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -3$

Retornando à variável original:

$2^{2x} = 4 \Rightarrow x = 1$

ou

$2^{2x} = -3 \Rightarrow \nexists\, x$

Alternativa **c**.

40. Condição de existência: $x \neq 3$ e $x > 2$

$1 = \log_2 (x - 2) - \log_2 (x^2 - 6x + 9) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \log_2 \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x + 9}$

$\therefore \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x + 9} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = x - 2$

$\therefore 2x^2 - 13x + 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = \dfrac{5}{2}$

Logo, o produto das raízes é 10.

Alternativa **c**.

41. Condição de existência:

$9x - 35 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{35}{9}$

$27x - 81 > 0 \Rightarrow x > 3$

Fazendo a intersecção desses conjuntos de valores, obtemos a condição de existência para x: $x > \dfrac{35}{9}$

Condição de existência: $x > \dfrac{35}{9}$ e $y > 1$

$\begin{cases} \log_y (9x - 35) = 6 \\ \log_{3y} (27x - 81) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 35 = y^6 \\ 27x - 81 = (3y)^3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 9x - 35 = y^6 \\ 27x - 81 = 27y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 35 = (y^3)^2 \text{ (I)} \\ x - 3 = y^3 \text{ (II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$9x - 35 = (x - 3)^2 \Rightarrow 9x - 35 = x^2 - 6x + 9$

$\therefore x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow x = 11$ ou $x = 4$

Como os dois valores encontrados são maiores que $\dfrac{35}{9}$, ambos valem para x. Voltando na equação (II):

- Se $x = 11$:

  $x - 3 = y^3 \Rightarrow 11 - 3 = y^3$

  $\therefore y^3 = 2^3 \Rightarrow y = 2$

- Se $x = 4$

  $x - 3 = y^3 \Rightarrow 4 - 3 = y^3$

  $\therefore y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$

  Como $y = 1$ não satisfaz a condição de existência e $y = 2$ satisfaz, concluímos que a solução para esse sistema será (11, 2).

42. $\begin{cases} 2 \log_2 a + 4 \log_2 b = 5 \text{ (I)} \\ \log_4 a - \log_4 b = -3 \text{ (II)} \end{cases}$

De (I), temos:

$2 \log_2 a + 4 \log_2 b = 5 \Rightarrow \log_2 a^2b^4 = 5 \log_2 2$

$\therefore a^2 b^4 = 2^5$ (III)

De (II), temos:

$\log_4 a - \log_4 b = -3 \Rightarrow \log_4 \dfrac{a}{b} = -3 \log_4 4$

$\therefore \dfrac{a}{b} = 4^{-3} \Rightarrow a = b \cdot 2^{-6}$ (IV)

Substituindo (IV) em (III):

$a^2b^4 = 2^5 \Rightarrow b^2 \cdot 2^{-12} \cdot b^4 = 2^5$

$\therefore b^6 = 2^{17} \Rightarrow (b^3)^2 = \left(2^{\frac{17}{2}}\right)$

$\therefore b^3 = 2^{\frac{17}{2}}$

Encontrando o valor de a^3:

Por (IV), temos:

$a = b \cdot 2^{-6} \Rightarrow a^3 = b^3 \cdot 2^{-18}$

$\therefore a^3 = \dfrac{b^3}{2^{18}}$

Assim:

$a^3b^3 = \dfrac{b^3}{2^{18}} \cdot 2^{\frac{17}{2}} = \dfrac{2^{\frac{17}{2}}}{2^{18}} \cdot 2^{\frac{17}{2}} = \dfrac{2^{17}}{2^{18}} = \dfrac{1}{2}$

Ou seja, $a^3b^3 = \dfrac{1}{2}$.

43. $\begin{cases} \log_2 \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{2}\right) \text{ (I)} \\ \log x + \log y = 0 \text{ (II)} \end{cases}$

Temos:

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{2 + xy}{2x}$ (III)

De (II):

$\log x + \log y = 0 \Rightarrow \log(xy) = 0$

$\therefore xy = 1$ (IV)

Usando (III) e (IV) em (I):

$\log_2 \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{2 + xy}{2x}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{2 + xy}{2x}\right)$

$\therefore \log_2 \left(\dfrac{3}{2x}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{3}{2x}\right) \Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{3}{2x}\right) = \dfrac{\log_2 \left(\dfrac{3}{2x}\right)}{\log_2 \dfrac{1}{2}}$

$\therefore \log_2 \left(\dfrac{3}{2x}\right) = -\log_2 \left(\dfrac{3}{2x}\right) \Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{3}{2x}\right) = \log_2 \left(\dfrac{2x}{3}\right)$

Assim:

$\dfrac{3}{2x} = \dfrac{2x}{3} \Rightarrow 4x^2 = 9$

$\therefore x = \dfrac{3}{2}$

E y será o seu inverso. Logo, a solução do sistema será o par ordenado $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$.

44. $\begin{cases} \log_8 x + \log_4 y^2 = 6 \\ \log_4 x^2 + \log_8 y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} + \dfrac{\log_2 y^2}{\log_2 4} = 6 \\ \dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 y}{\log_2 8} = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{3} + \dfrac{\log_2 y^2}{2} = 6 \\ \dfrac{\log_2 x^2}{2} + \dfrac{\log_2 y}{3} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log_2 x + 3 \log_2 y^2 = 36 \\ 3 \log_2 x^2 + 2 \log_2 y = 60 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \log_2 x^2 + \log_2 y^6 = 36 \\ \log_2 x^6 + \log_2 y^2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x^2y^6 = 36 \\ \log_2 x^6y^2 = 60 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x^2y^6 = 2^{36} \\ x^6y^2 = 2^{60} \end{cases}$

Multiplicando, membro a membro, as equações desse sistema, obtemos:

$x^8y^8 = 2^{96} \Rightarrow xy = \sqrt[8]{2^{96}} = 2^{12}$

$\therefore \sqrt{xy} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$

45. Condição de existência: $x > 2$ e $y > 0$

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 0 \\ \log (x - 2) + \log y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 3y)^2 = 0 \\ \log (x - 2)y = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3y \text{ (I)} \\ (x - 2)y = 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II):

$(x - 2)y = 1 \Rightarrow (3y - 2)y = 1$

$\therefore 3y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ ou $y = 1$

Como $y = -\frac{1}{3}$ não satisfaz a condição de existência, concluímos que $y = 1$.

Voltando em (I):

$x = 3y = 3$

Logo, a diferença $x - y$ será $3 - 1$, ou seja, 2.

Alternativa **b**.

46. Para encontrarmos os pontos de intersecção, basta igualar as funções e resolver a equação encontrada.

$2 \log x = \log 2x$

Condição de existência: $x > 0$

Resolução da equação:

$2 \log x = \log 2x \Rightarrow \log x^2 = \log 2x$

$\therefore x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\therefore x = 0$ ou $x = 2$

Verificamos que $x = 0$ não satisfaz a condição de existência; portanto, $x = 2$.

Desse modo, concluímos que os gráficos se interceptam em apenas um ponto.

Alternativa **b**.

47. a) Condição de existência:

$$\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} & \text{(I)} \\ x > 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), obtemos: $x > 5$ (III)

Resolução da inequação:

Por P6:

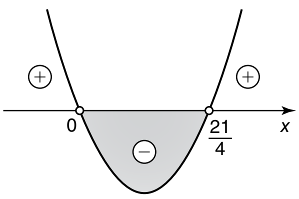
$\log_5 (4x - 1) + \log_5 (x - 5) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 [(4x - 1) \cdot (x - 5)] < \log_5 5$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos:

$(4x - 1)(x - 5) < 5 \Rightarrow 4x^2 - 21x + 5 - 5 < 0$

$\therefore 4x^2 - 21x < 0$



$\therefore 0 < x < \frac{21}{4}$ (IV)

Fazendo a intersecção do conjunto de valores (IV) com o conjunto de valores da condição de existência (III), obtemos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < \frac{21}{4}\right\}$

b) Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), obtemos: $x > 0$

Resolução da inequação:

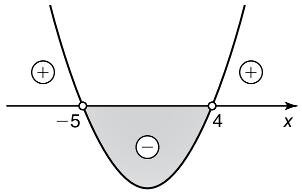
Por P6 e P7:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 x - \log_2 5 < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \frac{x(x + 1)}{5} < \log_2 4$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$\frac{x(x + 1)}{5} < 4 \Rightarrow x^2 + x - 20 < 0$



$\therefore -5 < x < 4$

Considerando a condição de existência ($x > 0$), concluímos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

c) Condição de existência: $x > -5$

Resolução da inequação:

$\ln (x + 5) + 1 \leqslant \ln 5 \Rightarrow \ln (x + 5) + \ln e \leqslant \ln 5$

Por P6:

$\ln e\,(x + 5) \leqslant \ln 5$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$e\,(x + 5) \leqslant 5 \Rightarrow ex + 5e \leqslant 5$

$\therefore x \leqslant \frac{5 - 5e}{e}$

Como $\frac{5 - 5e}{e} < 0$ e a condição de existência é $x > 0$, concluímos: $S = \varnothing$

48. Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > -6 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) $\cap$ (II), temos: $x > 0$

Resolução da inequação:

Por P8:

$\log_9 (3x) \leqslant \log_3 (x + 6) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\log_3 3x}{\log_3 9} \leqslant \log_3 (x + 6) - \log_3 3$

Por P7:

$\frac{\log_3 3x}{2} \leqslant \log_3 \frac{x + 6}{3} \Rightarrow \log_3 3x \leqslant 2 \log_3 \frac{x + 6}{3}$

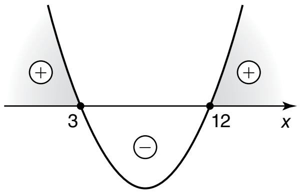
Por P3:

$\log_3 3x \leqslant \log_3 \left(\frac{x + 6}{3}\right)^2$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$3x \leqslant \left(\frac{x + 6}{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 36 \geqslant 0$ (III)

Estudando a variação de sinal da função
$f(x) = x^2 - 15x + 36$, temos:



Logo, os valores de x que satisfazem (III) são tais que $x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 12$ (IV).
A intersecção do conjunto de valores (IV) com o conjunto de valores da condição de existência forma o conjunto solução S da inequação proposta:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 12\}$

49. Condição de existência: $x > -3$ (I)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x+3)} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x+3)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

Como é uma equação exponencial com $0 < \frac{1}{2} < 1$, o sentido da desigualdade é invertido para os expoentes:
$\log_5 (x + 3) < 0 \Rightarrow \log_5 (x + 3) < \log_5 1$
Como a base (5) dos logaritmos é maior que 1, o sentido da desigualdade se mantém para os logaritmandos:
$x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2$ (II)
Fazendo a intersecção de (I) e (II), concluímos que $-3 < x < -2$.
Alternativa **a**.

50. Condição de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

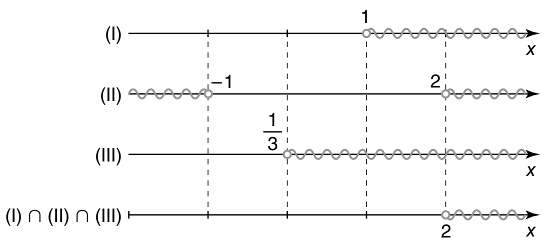
Fazendo (I) ∩ (II), obtemos: $x > 1$ (III)
Resolução do sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 (x-1) > 1 \\ \log_2 (x-1) - \log_2 x < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x(x-1) > \log_2 2 & \text{(IV)} \\ \log_2 \dfrac{(x-1)}{x} < \log_2 4 & \text{(V)} \end{cases}$$

Como a base (2) é maior que 1, o sinal da desigualdade se mantém para os logaritmandos. Assim:
$x(x - 1) > 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0$
$\therefore x < -1$ ou $x > 2$ (IV)
$\frac{x-1}{x} < 4 \Rightarrow x - 1 < 4x$
$\therefore x > -\frac{1}{3}$ (V)

Fazendo a intersecção de (III), (IV) e (V):



Assim: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

51. Condição de existência:

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 & \text{(I)} \\ 1 + x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos: $-1 < x < 1$
De (II), temos: $x > -1$
De (I) ∩ (II), temos: $-1 < x < 1$
Resolução da inequação:

$$\left|\log_{16} (1 - x^2) - \log_4 (1 + x)\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\log_4 (1 - x^2)}{\log_4 16} - \log_4 (1 + x)\right| < \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \frac{\log_4 (1 - x^2)}{2} - \log_4 (1 + x) < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < \log_4 (1 - x^2) - 2 \log_4 (1 + x) < 1$$

$$\therefore -1 \log_4 4 < \log_4 \frac{(1 - x^2)}{(1 + x)^2} < 1 \log_4 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_4 \frac{1}{4} < \log_4 \frac{1 - x}{1 + x} < \log_4 4$$

Como a base (4) é maior que 1, o sinal da desigualdade se mantém para os logaritmandos. Assim:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - x}{1 + x} > \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{1 - x}{1 + x} < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{5} \\[2ex] x > -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Fazendo a intersecção desses dois conjuntos de valores, concluímos que o conjunto solução desse sistema será: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}\right\}$

52. $2^n > 5^{20} \Rightarrow n \log 2 > 20 \log 5$

$$\therefore n > \frac{20(\log 10 - \log 2)}{\log 2} = \frac{20 - 20 \log 2}{\log 2}$$

$$\therefore n > \frac{20}{\log 2} - 20 \Rightarrow n > 20 \cdot \left(\frac{1}{\log 2} - 1\right)$$

Considerando o intervalo de log 2 dado pelo enunciado $0{,}3 < \log 2 < 0{,}302$:

- Para $\log 2 = 0{,}3$, temos:

  $$20 \cdot \left(\frac{1}{\log 2} - 1\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{0{,}3} - 1\right) \approx 46{,}7$$

- Para $\log 3 = 0{,}302$, temos:

  $$20 \cdot \left(\frac{1}{\log 2} - 1\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{0{,}302} - 1\right) \approx 46{,}2$$

  Assim:
  $n > 46{,}7$
  Como n deve assumir um valor inteiro, concluímos que $n = 47$.

Exercícios contextualizados

53. $\frac{\log P - 2}{2{,}6} = \frac{10}{13} \Rightarrow \log P - 2 = 2$
$\therefore \log P = 4 \Rightarrow P = 10.000$
Logo, o PIB *per capita* (P) é de US\$ 10.000,00.
Alternativa **d**.

54. $P(t) = 25 \cdot 2^t$
Para $P = 625$, temos:
$625 = 25 \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 5^2$

Pela definição de logaritmo:

$2^t = 5^2 \Rightarrow t = \log_2 5^2 = 2 \log_2 5$

Como $\log_2 5 \approx 2{,}32$:

$t \approx 2 \cdot 2{,}32 = 4{,}64$

Ou seja, 4,64 horas. Passando 0,64 hora para minutos:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ h} & \text{———} & 60 \text{ min} \\ 0{,}64 \text{ h} & \text{———} & x \end{array}$$

$x = 38{,}4$ min

Assim, a população atingiu 625 bactérias em 4 horas e 38 minutos.

Alternativa **c**.

55. $M = m + 5 \log_3 (3d^{-0{,}48})$

Para uma magnitude aparente de 0,2, ou seja, $m = 0{,}2$ e magnitude absoluta de $-6{,}8$, ou seja, $M = -6{,}8$, temos:

$-6{,}8 = 0{,}2 + 5 \log_3 (3d^{-0{,}48}) \Rightarrow -\frac{7}{5} = \log_3 3 + \log_3 d^{-0{,}48}$

$\therefore -\frac{7}{5} - 1 = -0{,}48 \log_3 d \Rightarrow 0{,}48 \log_3 d = \frac{12}{5}$

$\therefore \log_3 d = \frac{12}{5} \cdot \frac{100}{48} \Rightarrow \log_3 d = 5$

$\therefore d = 3^5 = 243$

Logo, a distância de Rigel ao planeta Terra é de 243 *parsecs*. Passando para quilômetro:

$d = 243 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 729 \cdot 10^{13} = 7{,}29 \cdot 10^{15}$

Portanto, $d = 7{,}29 \cdot 10^{15}$ quilômetros.

56. $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$

Para $I_0 = 10^{-12}$ e $I = 1$, temos:

$S = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120$

Assim, o nível sonoro é de 120 dB.

Alternativa **e**.

57. **a)** $I_1 = I_0 \cdot 10^{-A} \Rightarrow I_1 = \frac{I_0}{10^A}$

$\therefore 10^A = \frac{I_0}{I_1}$

Pela definição de logaritmo, temos que $A = \log \frac{I_0}{I_1}$.

b) $I_1 = 10\% I_0 \Rightarrow I_1 = 0{,}1 I_0$

Assim:

$A = \log \frac{I_0}{0{,}1 I_0} = \log 10 = 1$

Portanto, a absorvência nesse caso será de 1 unidade, ou seja, 100%.

58. **a)** Para o instante $t = 0$ temos $Q = 1$. Assim:

$Q(t) = \log\left(\frac{10^k}{t+1}\right) \Rightarrow 1 = \log\left(\frac{10^k}{0+1}\right)$

$\therefore 1 = \log 10^k \Rightarrow k = 1$

Logo, a constante k vale 1.

b) A experiência terminará quando $Q = 0$. Assim:

$Q(t) = \log\left(\frac{10}{t+1}\right) \Rightarrow 0 = \log\left(\frac{10}{t+1}\right)$

$\therefore 10^0 = \frac{10}{t+1} \Rightarrow t = 9$

Logo, ao final de 9 horas a experiência terminará.

59. Dado $i = 10$, temos:

$h = \log\left(10^{0{,}7} \cdot \sqrt{10}\right) = \log (10^{0{,}7} \cdot 10^{0{,}5}) = \log 10^{1{,}2}$

Pela propriedade P3:

$h = \log 10^{1{,}2} \Leftrightarrow h = 1{,}2 \log 10$

Pela propriedade P1:

$h = 1{,}2 \log 10 \Leftrightarrow h = 1{,}2 \cdot 1$

$\therefore h = 1{,}2$ m

Assim, uma criança de 10 anos, dessa cidade, terá altura de 120 cm.

Alternativa **a**.

60. **a)** $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$

b) Para $m(t) = \frac{m_0}{8}$, temos:

$m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}} \Rightarrow \frac{m_0}{8} = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$

$\therefore 10^{-\frac{t}{70}} = 8^{-1} \Rightarrow \log 10^{-\frac{t}{70}} = \log 8^{-1}$

$\therefore -\frac{t}{70} = -0{,}9 \Rightarrow t = 63$

Logo, demorará 63 anos para que esse elemento se decomponha até atingir um oitavo da massa inicial.

61. Sendo A o número de prótons do universo, temos:

$A = 136 \cdot 2^{256} \Rightarrow \log A = \log (136 \cdot 2^{256})$

$\therefore \log A = \log 136 + 256 \log 2$

$\therefore \log A = \log (2^3 \cdot 17) + 256 \cdot \log 2$

$\therefore \log A = 3 \log 2 + \log 17 + 256 \cdot \log 2$

Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 17 = 1{,}23$, temos:

$\log A = 0{,}90 + 1{,}23 + 76{,}8 \Rightarrow \log A = 78{,}93$

$\therefore A = 10^{78{,}93} \approx 10^{80}$

Alternativa **c**.

62. **a)** Para $t = 0$, temos:

$m(t) = 0{,}5 + \log (2t + 1) \Rightarrow m(0) = 0{,}5 + \log 1$

$\therefore m(0) = 0{,}5$

Logo, a massa média de um indivíduo dessa espécie ao nascer é de 0,5 quilograma ou 500 gramas.

b) Para $t = 7$, temos:

$m(t) = 0{,}5 + \log (2t + 1) \Rightarrow m(7) = 0{,}5 + \log 15$

$\therefore m(7) = 0{,}5 + \log 3 + \log 5$

Adotando $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 5 = 0{,}7$, temos:

$m(7) = 0{,}5 + 0{,}48 + 0{,}7 = 1{,}68$

Logo, a massa média de um indivíduo dessa espécie, ao atingir a idade adulta, é de 1,68 quilograma ou 1.680 gramas.

63. Deduzindo a fórmula:

Para $t = 0$, temos $m = 10$

Para $t = 1.600$, temos $m = 5$

Para $t = 3.200$, temos $m = 2{,}5$

Para $t = 4.800$, temos $m = 1{,}25$

Assim, podemos concluir que a função que relaciona a massa m, em grama, desse isótopo de acordo com o tempo t, em ano, e a massa inicial m_0, em grama, pode ser dada por:

$m(t) = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{1.600}}}$

Assim, para $m(t) = 1$ e $m_0 = 10$, temos:

$$m(t) = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{1.600}}} \Rightarrow 1 = \frac{10}{2^{\frac{t}{1.600}}}$$

$$\therefore \log 1 = \log 10 - \log 2^{\frac{t}{1.600}} \Rightarrow \frac{t \log 2}{1.600} = \log 10$$

$$\therefore t \log 2 = 1.600 \Rightarrow t = \frac{1.600}{0{,}301}$$

$$\therefore t \approx 5.316$$

Logo, será necessário aproximadamente 5.316 anos para que 10 g desse isótopo se reduza a 1 g.

64. a) $T = T_a + c5^{-kt}$

- Para $t = 0$, $T = T_0 = 150$ e $T_a = 25$. Assim:
  $150 = 25 + c5^{-k \cdot 0} \Rightarrow c = 125$
- Para $t = 1$, $T = T_1 = 30$. Assim:
  $30 = 25 + 125 \cdot 5^{-k \cdot 1} \Rightarrow 125 \cdot 5^{-k} = 5$
  $\therefore 5^{-k} = 5^{-2} \Rightarrow k = 2$

  Logo, a constante c vale 125 e a constante k vale 2, e a Lei de Resfriamento de Newton é $T = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$.

b) Para $T = 26$ °C, temos:

$26 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t} \Rightarrow 5^{-2t} = 5^{-3}$

$\therefore t = 1{,}5$

Logo, a temperatura do corpo atinge 26 °C após 1 h 30 min.

c) Para $T = 75$ °C, temos:

$$75 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t} \Rightarrow 5^{-2t} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore 5^{1-2t} = 2 \Rightarrow (1 - 2t) \log 5 = \log 2$$

$$1 - 2t = \frac{\log 2}{\log 10 - \log 2} \Rightarrow 1 - 2t = \frac{3}{7}$$

$$\therefore t = \frac{2}{7} \Rightarrow t \approx 0{,}286$$

Logo, a temperatura do corpo atinge 75 °C no instante 0,286 hora, aproximadamente, ou seja, 17,16 minutos.

65. $n(t) = 8 - 8(0{,}9)^t$

a) Para $t = 1$, temos:

$n(1) = 8 - 8 \cdot 0{,}9 = 0{,}8$

Logo, ao final do primeiro dia 0,8 milhões de pessoas conheceram o produto, ou seja, 800.000 pessoas.

b) Para $n(t) = 7$, temos:

$7 = 8 - 8(0{,}9)^t \Rightarrow 0{,}9^t = 0{,}125$

$\therefore t \log 0{,}9 = \log 0{,}125 \Rightarrow t \approx 19{,}6$

Logo, aproximadamente no 20º dia o número de pessoas conhecedoras do produto atingiu 7 milhões.

66. Sendo $A(t)$ o ativo dessa empresa em função do tempo t, em ano, e A_0 o ativo inicial, temos:

$A(t) = A_0 (1 + 0{,}1)^t$

Para o período em que esse ativo triplicou, $A = 3A_0$; assim:

$3A_0 = A_0 \cdot 1{,}1^t \Rightarrow \log 3 = t(\log 11 - \log 10)$

$$\therefore t = \frac{0{,}48}{1{,}04 - 1} \Rightarrow t = 12$$

Logo, após 12 anos o ativo triplicou, ou seja, em 2013.

67. a) Determinando a temperatura no instante em que o ocorreu a falha, $T(0)$, e uma hora depois, $T(1)$, temos:

$T(0) = 2^0 + 400 \cdot 2^{-0} = 401$

$T(1) = 2^1 + 400 \cdot 2^{-1} = 202$

Logo, as temperaturas são 401 °C e 202 °C, respectivamente.

b) Substituindo $T(t)$ por 40, temos:

$40 = 2^t + 400 \cdot 2^{-t}$

Fazendo $2^t = y$:

$$40 = y + \frac{400}{y} \Rightarrow y^2 - 40y + 400 = 0$$

$\therefore y = 20$

Como $2^t = y$, temos:

$2^t = 20 \Rightarrow t = \log_2 20$

$\therefore t = \log_2 (5 \cdot 2^2) = \log_2 5 + 2 \log_2 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2{,}3 + 2 \cdot 1$

$\therefore t = 4{,}3$

Logo, houve falha por 4,3 horas.

68. a) $$f(t) = g(t) \Rightarrow \frac{400}{5 + 3 \cdot 2^{-0{,}2t}} = \frac{800}{10{,}1 + 5 \cdot 2^{-0{,}2t}}$$

Fazendo a mudança de variável: $2^{-0{,}2t} = k$, obtemos:

$$\frac{400}{5 + 3k} = \frac{800}{10{,}1 + 5k} \Rightarrow \frac{1}{5 + 3k} = \frac{2}{10{,}1 + 5k}$$

$\therefore 10{,}1 + 5k = 10 + 6k \Rightarrow k = 0{,}1$

Retornando à variável original:

$2^{-0{,}2t} = 0{,}1 \Rightarrow -0{,}2t = \log_2 0{,}1$

$\therefore -0{,}2t \approx -3{,}31 \Rightarrow t \approx 16{,}6$

Para $t = 16{,}6$, temos:

$$f(16{,}6) = \frac{400}{5 + 3 \cdot 2^{-0{,}2 \cdot 16{,}6}} \approx 75{,}5$$

Logo, os gráficos têm um único ponto comum, dado, aproximadamente, por (16,6; 75,5)

b) Pelo ponto obtido no item **a**, concluímos que 16,6 dias, aproximadamente, após o início do mês as represas apresentavam o mesmo volume de 75,5 bilhões de litros de água, aproximadamente.

69. Sendo $m(t)$ a massa do leite, em quilograma, em função do tempo t, em minuto, temos:

$m(t) = 10.000(1 - 0{,}02)^t$

Para a total desidratação do leite, devem sobrar 10% da massa de leite líquido, que é de 10.000 quilogramas. Assim, temos $m(t) = 1.000$. Podemos então fazer:

$1.000 = 10.000(0{,}98)^t \Rightarrow 10^{-1} = 0{,}98^t$

$\therefore t = \log_{0{,}98} 10^{-1} \approx 114$

Logo, o tempo necessário para a total desidratação desse leite é de aproximadamente 114 minutos.

70. $$P(t) = \frac{40}{3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t}}$$

a) Para $t = 0$, temos:

$$P(0) = \frac{40}{3 + 5 \cdot 2^0} = 5$$

Logo, estima-se que a população atual dessa cidade seja de 5 milhões de habitantes.

b) Para $t = 8$, temos:

$$P(8) = \frac{40}{3 + 5 \cdot 2^{-1}} \approx 7{,}273$$

Logo, estima-se que a população dessa cidade daqui a 8 anos seja de 7,273 milhões de habitantes, aproximadamente.

c) Para $P(t) = 6{,}25$, temos:

$$6{,}25 = \frac{40}{3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t}} \Rightarrow 3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t} = \frac{40}{6{,}25}$$

$\therefore\ 3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t} = 6{,}4 \Rightarrow 2^{-0{,}125t} = 0{,}68$

$\therefore\ -0{,}125t \log 2 = \log 0{,}68 \Rightarrow t = \dfrac{\log 0{,}68}{-0{,}125 \log 2}$

$\therefore\ t \approx 4{,}451$

Logo, estima-se que a população dessa cidade será de 6,25 milhões de habitantes daqui a aproximadamente 4,451 anos.

d) Para $P(t) = 15$, temos:

$$15 = \frac{40}{3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t}} \Rightarrow 3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t} = \frac{40}{15}$$

$\therefore\ 3 + 5 \cdot 2^{-0{,}125t} \approx 2{,}7 \Rightarrow 5 \cdot 2^{-0{,}125t} < 0$

Como a equação é impossível, concluímos que a população não atingirá o triplo da população atual.

71. $y(2) = \left[\ln (ab^3)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot 2 \Rightarrow y(2) = \left[\frac{1}{2}\ln (ab^3)\right] \cdot 2$

$\therefore\ y(2) = \ln (ab^3) = \ln a + \ln b^3 =$

$= \ln a + 3 \ln b$

$\therefore\ y(2) = 2 + 3 \cdot 4 = 14$

Alternativa **e**.

72. Devemos ter: $C(t) = 0{,}4d \Rightarrow d \cdot (0{,}8)^t = 0{,}4d$

$\therefore\ d \cdot (0{,}8)^t = 0{,}4d$

$\therefore\ (0{,}8)^t = 0{,}4 \Rightarrow \ln (0{,}8)^t = \ln (0{,}4)$

$\therefore\ t \ln (0{,}8) = \ln (0{,}4) \Rightarrow t(\ln 8 - \ln 10) = \ln 4 - \ln 10$

$\therefore\ t(2{,}08 - 2{,}30) = 1{,}39 - 2{,}30 \Rightarrow -0{,}22t = -0{,}91$

$\therefore\ t \approx 4{,}1$

Logo, a concentração atinge 40% da dose administrada 4,1 horas após a injeção, aproximadamente, o que equivale a 4 horas e 6 minutos.

73. O número $f(t)$ de pessoas que já sabiam da notícia após t horas de sua divulgação é dado por:

$$f(t) = \frac{A}{1 + 4e^{-\frac{At}{40}}}$$

a) O número de pessoas que tomaram conhecimento do plano no instante em que ele foi noticiado ($t = 0$) é dado por $f(0)$.

$$f(0) = \frac{A}{1 + 4e^0} = \frac{A}{5}$$

Portanto, no instante em que foi noticiado, $\frac{1}{5} = 20\%$ da população tomou conhecimento do plano.

b) Sabe-se que, após 1 hora, 50% da população estava ciente da notícia.

$$f(1) = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{1 + 4e^{-\frac{A}{40}}} = \frac{A}{2}$$

$\therefore\ 1 + 4e^{-\frac{A}{40}} = 2 \Rightarrow e^{-\frac{A}{40}} = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$

$\therefore\ \ln e^{-\frac{A}{40}} = \ln 2^{-2} \Rightarrow -\dfrac{A}{40} = -2 \ln 2$

$\therefore\ A = 80 \ln 2 = 55{,}2$

Portanto, a população do país é 55,2 milhões de habitantes.

74. $y = a \cdot e^{kx}$

Para $x = 0$, temos $y = 7$. Assim:

$y = a \cdot e^{kx} \Rightarrow a = 7$

$\therefore\ y = 7e^{kx}$

Pelo gráfico, concluímos que, para o ano de 2009, $y = 315$, ou seja, para $x = 7$, $y = 315$. Assim:

$y = 7e^{kx} \Rightarrow 315 = 7 \cdot e^{7k}$

$\therefore\ e^{7k} = 45 \Rightarrow 7k \ln e = 2 \ln 3 + \ln 5$

$\therefore\ 7k = 2 \cdot 1{,}1 + 1{,}6 \Rightarrow k = \dfrac{19}{35}$

$\therefore\ y = 7 \cdot e^{\frac{19x}{35}}$

Queremos saber a partir de que ano a venda superou 840 milhões de dólares, ou seja, $y > 840$. Assim:

$7 \cdot e^{\frac{19x}{35}} > 840 \Rightarrow e^{\frac{19x}{35}} > 120$

$\therefore\ \dfrac{19x}{35} \ln e > 3 \ln 2 + \ln 3 + \ln 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{19x}{35} > 3 \cdot 0{,}7 + 1{,}1 + 1{,}6$

$\therefore\ \dfrac{19x}{35} > 4{,}8 \Rightarrow x > 8{,}8$

Assim, após aproximadamente 9 anos a venda superou 840 milhões de dólares, ou seja, em 2011.

75. $P(t) = \dfrac{12}{1 + 3{,}74914e^{-1{,}42804t}}$

a) Para $t = 0$, temos:

$$P(0) = \frac{12}{1 + 3{,}74914e^{-1{,}42804 \cdot 0}} \approx 2{,}527$$

Logo, no início de 1950 a população mundial era de aproximadamente 2,527 bilhões de habitantes.

b) Para $t = 1$, temos:

$$P(1) = \frac{12}{1 + 3{,}74914e^{-1{,}42804 \cdot 1}} \approx 6{,}319$$

Logo, no início de 2000 a população mundial era de aproximadamente 6,319 bilhões de habitantes.

c) O ano de 2050 corresponde a $t = 2$. Assim:

$$P(2) = \frac{12}{1 + 3{,}74914e^{-1{,}42804 \cdot 2}} \approx 9{,}872$$

Logo, no início de 2050 a população mundial será de aproximadamente 9,872 bilhões de habitantes.

d) Para $P = 8$, temos:

$$\frac{12}{1 + 3{,}74914e^{-1{,}42804t}} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1 + 3{,}74914e^{-1{,}42804t}} = 2$$

$\therefore\ 2 + 7{,}49828e^{-1{,}42804t} = 3 \Rightarrow e^{-1{,}42804t} \approx 0{,}13336$

$-1{,}42804t \cdot \ln e = \ln 0{,}13336 \Rightarrow t \approx 1{,}4$

Logo, a população mundial será de 8 bilhões de habitantes em 2020, aproximadamente.

76. a) Sendo $A(t)$ a área alagada em função do tempo t, temos:

$A(t) = 1 \cdot 2^t$

Logo:

para $t = 1 \Rightarrow A(1) = 1 \cdot 2 = 2 = a$

para $t = 2 \Rightarrow A(2) = 1 \cdot 4 = 4 = b$

para $t = 3 \Rightarrow A(3) = 1 \cdot 8 = 8 = c$

para $t = 4 \Rightarrow A(4) = 1 \cdot 16 = 16 = d$

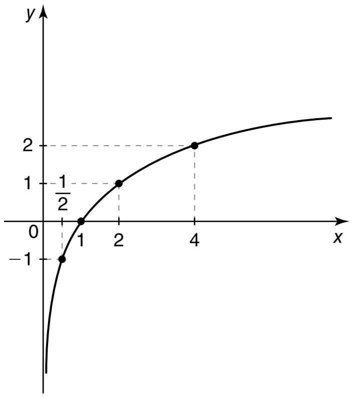
Portanto, $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$ e $d = 16$.

b) Pelo enunciado, temos:

$x = 2^y$ e, portanto, $y = \log_2 x$.

c) Como $f(x) = \log_2 x$ é uma função logarítmica, por meio de uma tabela podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$\log_2 x$
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



O gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f, pois possui apenas ordenadas não negativas e limitadas por se tratar de uma função que determina a área de uma região.

77. $f(t) = 7 \cdot (1{,}04)^{t-90}$, para $90 < t < 130$

Queremos determinar a temperatura t quando a pressão interna for $f(t) = 15{,}33$. Ou seja:

$15{,}33 = 7 \cdot (1{,}04)^{t-90} \Rightarrow 2{,}19 = 1{,}04^{t-90}$

$\therefore \log 2{,}19 = (t - 90) \cdot \log 1{,}04 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 219 - \log 100 = (t - 90) \cdot (\log 104 - \log 100)$

$\therefore 2{,}340 - 2 = (t - 90) \cdot (2{,}017 - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}340 = (t - 90) \cdot (0{,}017)$

$\therefore 20 = t - 90 \Rightarrow t = 110$

Logo, a temperatura no interior da panela é 110 °C.

Alternativa **a**.

78. Pelo gráfico, temos que para $x = 100$, $y = 0$. E que não há valor determinado para $x = 0$. Desse modo, concluímos que $x \neq 0$. Assim, para a função do item **a**, o par ordenado (100, 0) pertence à função e sua condição de existência é $x \neq 0$. Para a função do item **b**, x pode assumir valor 0; para as funções dos itens **c** e **d**, a base é negativa, o que contraria a condição de existência da função logarítmica; e para a função do item **e**, concluímos que o par ordenado (100, 0) não lhe pertence.

Alternativa **a**.

79. a) $t = \log_{1{,}0008} \frac{D}{50}$

b) Queremos determinar em quantos anos a área desértica crescerá 10%, ou seja, $1{,}1 \cdot 50 = 55$. Assim:

$55 = 50 \cdot (1{,}0008)^t \Rightarrow 1{,}1 = (1{,}0008)^t$

$\therefore \log 1{,}1 = t \log 1{,}0008 \Rightarrow t \approx 119$

Logo, em aproximadamente 119 anos.

80. a) $f(x) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}1)^x \Rightarrow f(x) = 1.000 \cdot (1{,}1)^x$

b) $y = 1.000 \cdot (1{,}1)^x$

Trocamos x por y e y por x, depois isolamos y:

$x = 1.000 \cdot (1{,}1)^y \Rightarrow (1{,}1)^y = \frac{x}{1.000}$

$\therefore y = \log_{1{,}1} \frac{x}{1.000}$

Logo, a inversa da função f é dada por:

$f^{-1}(x) = \log_{1{,}1} \frac{x}{1.000}$

c) A lei f^{-1} expressa a temperatura, em grau Celsius, em função do volume de água consumida, em litro.

81. Sendo m a massa de lixo produzido, em milhar de tonelada, em função do tempo t, em ano, temos:

$m = 64 \cdot (1{,}024)^t$

Queremos a equação de t em função de m. Assim:

$m = 64 \cdot (1{,}024)^t \Rightarrow \frac{m}{64} = (1{,}024)^t$

$\therefore \log m - \log 64 = t(\log 1.024 - \log 1.000) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log m - 6 \cdot 0{,}301 = t(10 \cdot 0{,}301 - 3)$

$\therefore \log m - 1{,}806 = 0{,}01t \Rightarrow t = 100 \log m - 180{,}6$

Alternativa **d**.

82. Aplicando a fórmula do montante acumulado a taxa constante de juro, obtemos:

$$\begin{cases} M_A = 32 \cdot (1{,}01)^t \\ M_B = 16 \cdot (1{,}02)^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \log_{1{,}01} \frac{M_A}{32} \\ t = \log_{1{,}02} \frac{M_B}{16} \end{cases}$$

Assim:

$$\log_{1{,}01} \frac{M_A}{32} = \log_{1{,}02} \frac{M_B}{16} \Rightarrow \log_{1{,}01} \frac{M_A}{32} = \frac{\log_{1{,}01} \frac{M_B}{16}}{\log_{1{,}01} 1{,}02}$$

$$\therefore \log_{1{,}01} \frac{M_A}{32} = \frac{\log_{1{,}01} \frac{M_B}{16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{1{,}01} \frac{M_A}{32} = \log_{1{,}01} \left(\frac{M_B}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{M_A}{32} = \sqrt{\frac{M_B}{16}} \Rightarrow M_A = 8\sqrt{M_B}$$

Alternativa **d**.

83. a) Para $t = 0$, temos:

$f(0) = 2 \cdot 3^{0+1} = 6$

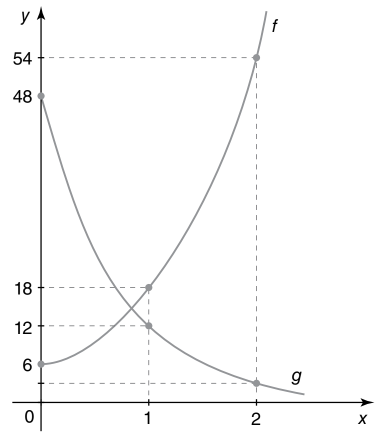
$g(0) = 3 \cdot 2^{4 - 2 \cdot 0} = 48$

Assim, no instante inicial do experimento havia 6 bactérias do tipo I e 48 do tipo II.

b)

x	$f(x)$
0	6
1	18
2	54

x	$g(x)$
0	48
1	12
2	3



c) Queremos o mesmo número de bactérias na lâmina, ou seja, $f(t) = g(t)$. Assim:

$2 \cdot 3^{t+1} = 3 \cdot 2^{4-2t} \Rightarrow 3^t = 2^{3-2t}$

$t = \log_3 2^{3-2t} \Rightarrow t = (3-2t) \cdot \log_3 2$

$\therefore t = (3-2t) \cdot \dfrac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow t = (3-2t) \cdot \dfrac{0{,}30}{0{,}48}$

$\therefore t \approx 0{,}83$

Logo, o número de bactérias será o mesmo após 0,83 h, aproximadamente, o que equivale 50 minutos, aproximadamente.

84. Chamando de $f(t)$ a função que representa a população de A, em milhão de habitantes e de $g(t)$ a função que representa a população de B, em milhão de habitantes, ambas em função do tempo t, em ano, temos:

$f(t) = 9 \cdot (1{,}03)^t$

$g(t) = 11 \cdot (1{,}02)^t$

Queremos saber em quanto tempo essas populações serão iguais. Assim:

$f(t) = g(t) \Rightarrow 9 \cdot (1{,}03)^t = 11 \cdot (1{,}02)^t$

$\therefore \left(\dfrac{1{,}03}{1{,}02}\right)^t = \dfrac{11}{9} \Rightarrow t \ln\left(\dfrac{1{,}03}{1{,}02}\right) = \ln\left(\dfrac{11}{9}\right)$

$\therefore t \approx \dfrac{0{,}20}{0{,}01} = 20$

Alternativa **e**.

85. Para $P = 30$, temos:

$30 = 5 \cdot 1{,}02^t \Rightarrow t = \log_{1{,}02} 6$

$\therefore t = \dfrac{\ln 6}{\ln 1{,}02} = \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 1{,}02} = \dfrac{0{,}70 + 1{,}10}{0{,}02} = 90$

Logo, o tempo decorrido, a partir de 1987, para que a Terra atinja a população máxima que poderia ser sustentada é de 90 anos.

86. $R = 12 + \log_{10}(I)$

(1) Verdadeira, pois para $R = 0$, temos:

$0 = 12 + \log_{10}(I) \Rightarrow -12 = \log_{10}(I)$

$\therefore I = 10^{-12}$

(2) Falsa, pois calculando a intensidade de um avião a jato, ou seja, para $R = 160$ decibéis $= 16$ bels e a intensidade do ruído do tráfego em uma esquina movimentada, ou seja, $R = 80$ decibéis $= 8$ bels, temos:

$16 = 12 + \log_{10}(I) \Rightarrow 4 = \log_{10}(I)$

$\therefore I = 10^4$

$8 = 12 + \log_{10}(I) \Rightarrow -4 = \log_{10}(I)$

$\therefore I = 10^{-4}$

E 10^4 não é o dobro de 10^{-4}.

(3) Verdadeiro, pois de acordo com o enunciado, acima de 80 decibéis a intensidade passa a ser nociva ao ouvido humano e, pelo item (02), sabemos que para essa medida de ruído a intensidade é 10^{-4}.

- A soma é: 4

87. $Q = Q(t) = Q_0 (1 - e^{-\lambda t})$

a) $Q = Q_0 (1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow \dfrac{Q}{Q_0} = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$

$\therefore e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \dfrac{Q}{Q_0} \Rightarrow \ln e^{-\frac{t}{2}} = \ln\left(1 - \dfrac{Q}{Q_0}\right)$

$\therefore -\dfrac{t}{2} = \ln\left(1 - \dfrac{Q}{Q_0}\right) \Rightarrow t = -2\ln\left(1 - \dfrac{Q}{Q_0}\right)$

Logo, $t(Q) = -2\ln\left(1 - \dfrac{Q}{Q_0}\right)$.

b) Usando a expressão encontrada no item **a**, temos para $Q(t) = 0{,}9\,Q_0$:

$t = -2\ln\left(1 - \dfrac{0{,}9\,Q_0}{Q_0}\right) \Rightarrow t = -2\ln 0{,}1$

$\therefore t = -2(\ln 1 - \ln 10) = -2(0 - 2{,}3) = 4{,}6$

Logo, seriam necessários 4,6 segundos.

88. A expressão que relaciona o montante M, em real, em função do tempo t, em dia, é dada por:

$M = 1.000(1{,}002)^t$

Isolando a variável t, temos:

$M = 1.000(1{,}002)^t \Rightarrow \dfrac{M}{1.000} = (1{,}002)^t$

$\therefore t = \log_{1{,}002}\left(\dfrac{M}{1.000}\right)$

Como queremos $t > 10$:

$\log_{1{,}002}\left(\dfrac{M}{1.000}\right) > 10$

Alternativa **d**.

89. Sendo P a população mundial, em bilhão de habitantes, após t anos, temos:

$P = 6(1 + 0{,}016)^t$. Para que a população ultrapasse 7 bilhões de habitantes, devemos ter:

$6\,(1{,}016)^t > 7 \Rightarrow (1{,}016)^t > \dfrac{7}{6}$

$\therefore t > \log_{1{,}016}\dfrac{7}{6} \Rightarrow t > 9{,}71$ (aproximadamente)

Logo, a população ultrapassará 7 bilhões de habitantes 9,71 anos depois do ano 2000, aproximadamente, ou seja, no decorrer de 2009.

90. **a)** $p(t) = F(1 - 0{,}19)^t \Rightarrow p(t) = F(0{,}81)^t$

b) Queremos $p(t) < 0{,}05F$; assim:

$F(0{,}81)^t < 0{,}05F \Rightarrow (0{,}81)^t < 0{,}05$

$\therefore t \log 0{,}81 < \log 0{,}05 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(\log 3^4 - \log 10^2) < \log 5 - \log 10^2$

$\therefore t(4 \cdot 0{,}477 - 2) < \log 10 - \log 2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}092t < 1 - 0{,}301 - 2$

$\therefore t > 14{,}14$

Logo, o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, é 15 anos.

91. Sendo I_p a intensidade da luz que o filtro deixa passar e I_i a intensidade da luz que incide, temos:

1 filtro: $I_p = \dfrac{4}{5} I_i$

2 filtros: $I_p = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{4}{5} I_i\right) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 I_i$

Daí, concluímos que $I_p(n) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n I_i$, em que n representa o número de filtros.

Queremos que a intensidade passada seja menos de 10% da intensidade que incide, ou seja, $I_p < 0{,}1 I_i$. Assim:

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^n I_i < 0{,}1 I_i \Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^n < 0{,}1$

$\therefore n\,(2\log 2 - \log 10 + \log 2) < \log 1 - \log 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(0{,}602 - 1 + 0{,}301) < 0 - 1$

$\therefore -0{,}097n < -1 \Rightarrow n > 10{,}31$

Logo, o menor valor que satisfaz tal condição é $n = 11$.

Alternativa **c**.

Pré-requisitos para o capítulo 10

1. a) Temos que: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{1} = \frac{40}{8}$ e $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Assim:

$\frac{2}{8} < \frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} < \frac{40}{8}$

Portanto:

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4} < 5$

b) Temos que: $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{27}$, $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{625}$ e $\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{9}$. Assim:

$\sqrt[12]{625} > \sqrt[12]{64} > \sqrt[12]{27} > \sqrt[12]{9}$

Portanto:

$\sqrt[3]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[4]{3} > \sqrt[6]{3}$

2. a) De acordo com a função temos que o primeiro termo será $1^2 + 1$, o segundo será $2^2 + 1$, o terceiro será $3^2 + 1$, e assim por diante. Assim, para $n = 11$, temos:

$f(11) = 11^2 + 1 = 122$,

ou seja, o 11º termo é 122

b) Como a função f é crescente, temos que a ordem decrescente dos valores $f(n)$, para $1 \leqslant n \leqslant 30$, é: $f(30), f(29), f(28), \cdot ..., f(1)$. Assim, o 26º é $f(5)$, ou seja:

$f(5) = 5^2 + 1 = 26$

3. a) Precisamos encontrar uma função que não dependa do termo anterior. Assim, de acordo com a função $f(n)$ dada, para $1 \leqslant n \leqslant 49$, temos:

$f(1) = 6$

$f(2) = 6 + 6 = 12$

$f(3) = 6 + 12 = 18$

Concluímos que $f(n) = 6n$.

De acordo com o enunciado, entendemos que queremos encontrar $f(k)$, sendo ele o valor central. Como entre 1 e 49 há 49 termos, o valor central será o 25º termo. Assim, para $k = 25$, temos:

$f(25) = 6 \cdot 25 = 150$

b) Neste caso temos, ao todo, 17 termos. Sendo n a quantidade de valores menores que $f(k)$, podemos montar a seguinte equação:

$17 - (n + 1) = 3n \Rightarrow n = 4$

Logo, queremos o 5º termo. Utilizando a função encontrada no item **a**, temos:

$f(5) = 6 \cdot 5 = 30$

4. a) $g(5) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) =$

$= 3 + 6 + 9 + 12 + 15$

$\therefore g(5) = 45$

b) $g(6) = g(5) + f(6) = 45 + 18 = 63$

$g(4) = g(5) - f(5) = 45 - 15 = 30$

Assim:

$g(6) - g(4) = 63 - 30 = 33$

5. a) 5, 8, 11, 14, 17, 20

b) 256, 128, 64, 32, 16

6. a) A medida da base média de um triângulo é a metade da medida do lado paralelo a essa base; logo:

$MN = \frac{8}{2}$ cm $= 4$ cm

b) A medida da base média de um trapézio é a média aritmética entre as medidas das bases do trapézio; logo:

$PQ = \frac{10 + 14}{2}$ cm $= 12$ cm

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Pela propriedade da mudança de base dos logaritmos, temos:

$\log_{0,9998791} 0{,}337 = \frac{\log_{10} 0{,}337}{\log_{10} 0{,}9998791}$. Para efetuar esse cálculo em uma calculadora científica, pressionamos a esta sequência de teclas:

log 0 · 3 3 7 : log 0 · 9 9 9 8 7 9 1 =

Nota: As calculadoras não adotam as mesmas convenções de cálculo; por isso, se alguma calculadora acusar erro de sintaxe, é porque ela adota outra convenção na sequência de teclas. Nesse caso, consulte o manual da calculadora.

2. O tempo t, em ano, para que uma massa m de C14 seja reduzida a $0{,}5m$, é dado por:

$0{,}5m = m(1 - 0{,}0001209)^t$

de onde obtemos:

$0{,}5 = (0{,}9998791)^t \Rightarrow t = \log_{0,9998791} 0{,}5$

$\therefore t \approx 5.732$

Logo, a meia-vida do C14 é de 5.700 anos, aproximadamente.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno não considerou $\log_e \frac{70}{95}$ como negativo; mas como $\log_e \frac{70}{95}$ é negativo, $-\frac{\log_e \frac{70}{95}}{0{,}49}$ é positivo.

Resolução correta:

Para $P = 70$, temos:

$70 = 95e^{-0{,}49t} \Rightarrow e^{-0{,}49t} = \frac{70}{95}$

$\therefore -0{,}49t = \log_e\left(\frac{70}{95}\right) \Rightarrow t = -\frac{\log_e\left(\frac{70}{95}\right)}{0{,}49}$

$\therefore t = -\frac{\log_e 70 - \log_e 95}{0{,}49} = \frac{\log_e 95 - \log_e 70}{0{,}49}$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos $\ln 95 \approx 4{,}55$ e $\ln 70 \approx 4{,}25$; logo:

$t \approx \frac{4{,}55 - 4{,}25}{0{,}49} \Rightarrow t \approx 0{,}61$

Concluímos, então, que a pressão 70 mmHg será atingida em 0,61 s.