Aula 13

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 13: Geometria de posição.

Sumário

Opa, surpresa?! Sim, jovem, olá novamente a todos os meus queridos e focados alunos e alunas. A aula que tens em mãos é uma aula de **geometria de posição**, um item presente em seu edital e que gostaríamos de deixar como um apêndice pedagógico ao final de seu curso. Deixe-me explicar melhor o que quis dizer com isso.

Esse conteúdo nunca antes figurou em sua prova a partir de 2006. Nunca. A EsSA nunca cobrou posições relativas entre pontos, retas e planos, porém: esse item está em seu edital. Eles têm, então, o direito de cobrar esse item de vocês. E daí, para evitarmos surpresas, seguiremos no estudo desse conteúdo para aprendermos um pouco mais sobre como pontos, retas e planos se comportam entre si. Bom, então vamos lá?

CRONOGRAMA DE AULAS

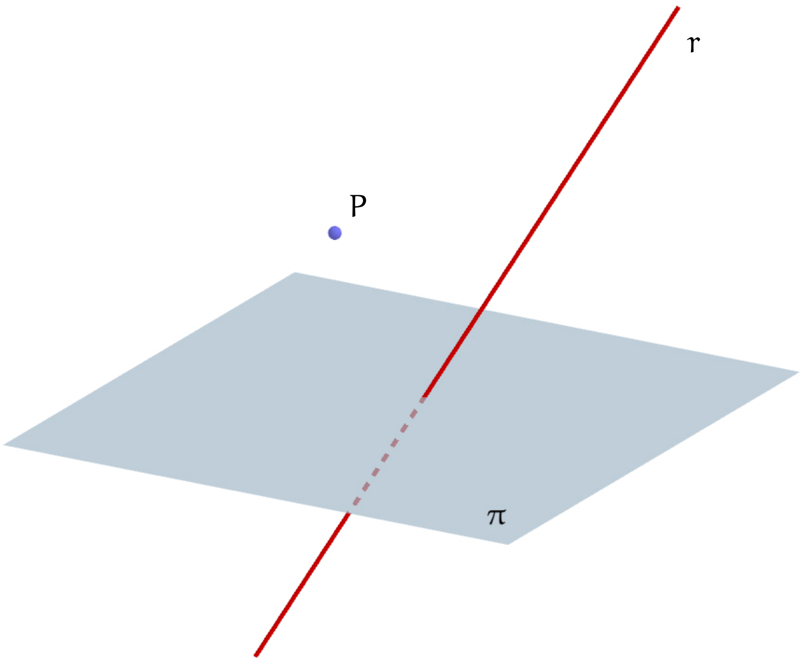
DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial: poliedros.*
Aula 09	*Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 10	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 11	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 12	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Geometria de posição

1.1– Princípios básicos da construção de formas e posições relativas

Entes fundamentais

Esse tópico já foi, aliás, estudado em nossa primeira aula de geometria. Se lembra? Estudamos lá o conceito de **ponto, reta** e **plano**, ou ao menos, a ideia de que sejam. Vamos nos relembrar rapidamente dessas formas:



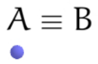
Acima podemos ver esses três elementos reunidos. A forma P representa o que chamamos de ***ponto***; a forma r é o que chamamos de uma ***reta*** e a forma π constitui um ***plano***.

Posições relativas entre dois pontos

Há duas possibilidades. Os pontos podem, ser ***distintos***, como ilustra a figura abaixo:

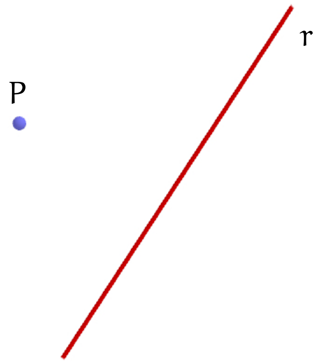
Quando dois pontos são distintos como acima, podemos, por exemplo, calcular distâncias entre eles, como estudamos no decorrer de nosso curso.

A outra posição relativa entre dois pontos é eles serem pontos ***coincidentes***[1], isto é, estão um sobre o outro, como ilustra a figura a seguir:

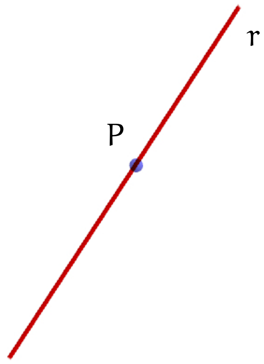


Posições relativas entre ponto e reta

Existem duas posições possíveis aqui. Uma delas é o ponto ***não pertencer à reta***, como ilustro abaixo:



Dizemos, aqui, que $P \notin r$. Poderíamos ter, também o ponto pertencendo à reta, como abaixo:



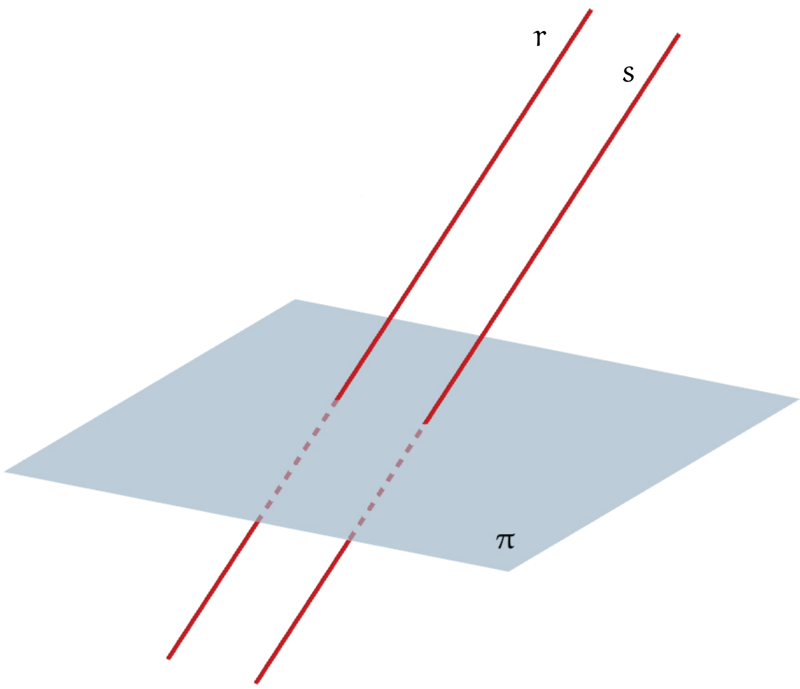
Nesse caso específico, escrevemos que $P \in r$. Utilizamos aqui o símbolo de conjuntos "$\in$" (lê-se "pertence") pois uma reta é um conjunto infinito de pontos. Então, se um ponto encontra-se na coleção de pontos que constitui a reta, então podemos dizer que esse ponto pertence àquela reta. Tudo certo, jovem? Prossigamos agora com as posições relativas entre duas retas.

[1]Alguns textos consideram que se dois pontos A e B são coincidentes, então na verdade trata-se de um ponto único.

Posições relativas entre duas retas

Nas próximas imagens, precisarei desenhar o plano π para auxiliar na sua visão das posições relativas entre as retas. então, vamos lá para o nosso primeiro caso.

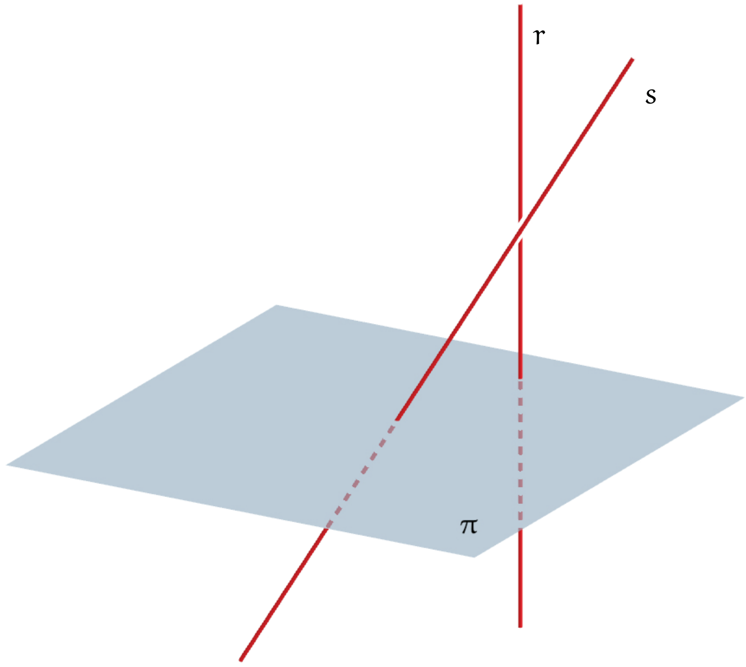
A nossa primeira posição relativa entre duas retas acontece quando as retas são ***coplanares e não se intersectam***. Quando isso acontece, dizemos que as retas são ***paralelas***. Veja abaixo um exemplo de duas retas r e s paralelas:



Para uma definição mais específica:

Duas retas serão ditas paralelas quando forem coplanares e não se intersectarem.

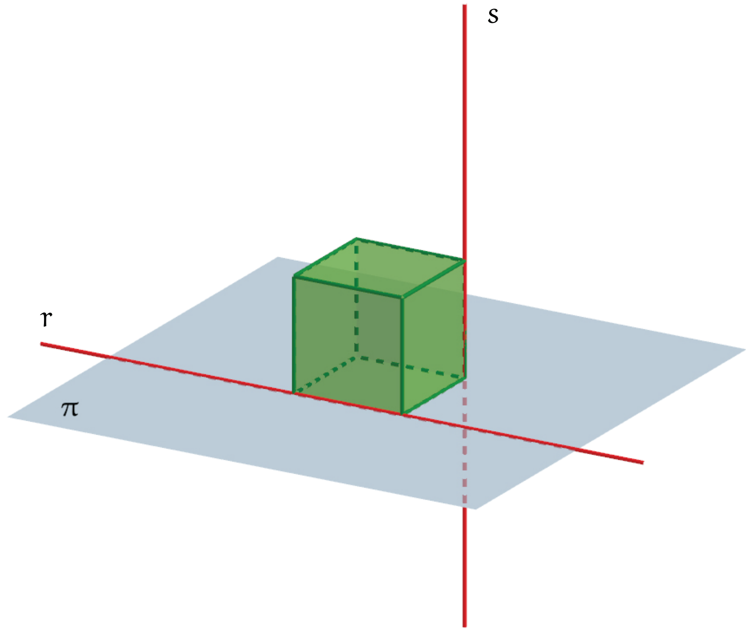
Muitos alunos precipitados poderiam achar que basta a condição "não se intersectem" para que duas retas sejam consideradas paralelas. Mas não é bem assim. existem pares de retas que não se intersectam e *não são paralelas*. Vejamos um caso desses:



Vemos acima um par de retas. Veja que a reta r e a reta s não se intersectam e *não são paralelas*. Isso porque não são coplanares, uma das duas condições para paralelismo. Quando duas retas são não-coplanares, são chamadas de ***retas reversas***. Dessa forma:

Duas retas serão ditas reversas quando não forem coplanares.

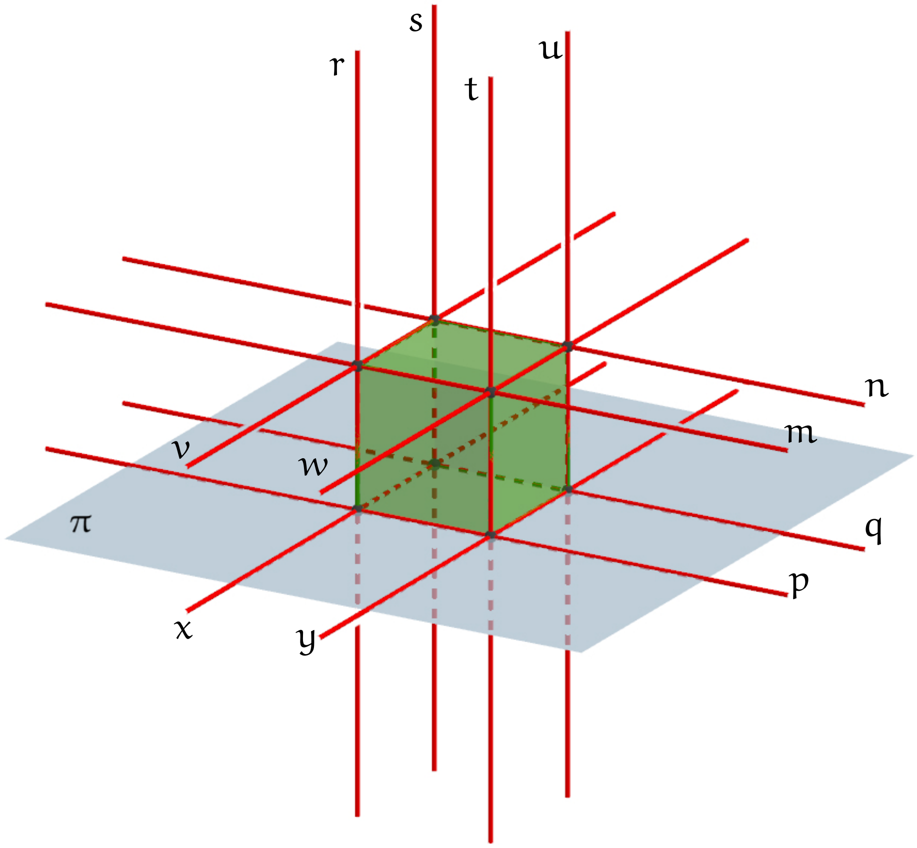
Na figura anterior, as retas r e s são exemplos de retas reversas. Vejamos mais um exemplo:



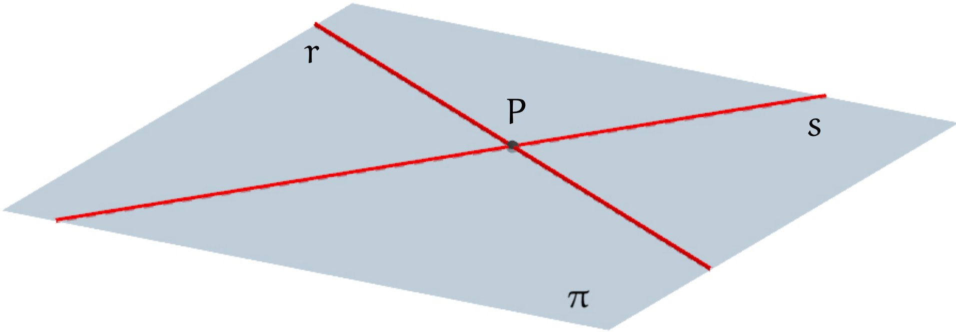
Aqui podemos ver um cubo com duas retas suportes de suas arestas evidenciadas: as retas r e s.

Trata-se de retas reversas, pois não são coplanares.

Tente vocêmesmo, agora, contar quantos pares de retas reversas existem na figura a seguir. Tente contar também a quantidade de retas paralelas. Faça isso como um treino pessoal, tudo certo?

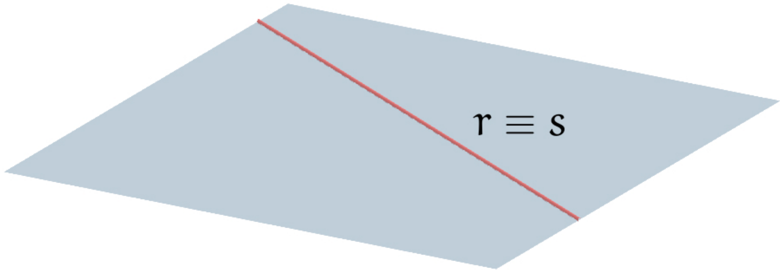


Existe também o caso de as retas se intersectarem em um ponto único. Quando isso acontece, dizemos que as retas são ***concorrentes***. Veja abaixo um exemplo de um par de retas concorrentes:



Veja que elas se intersectam no ponto P; escrevemos então que $r \cap s = P$.

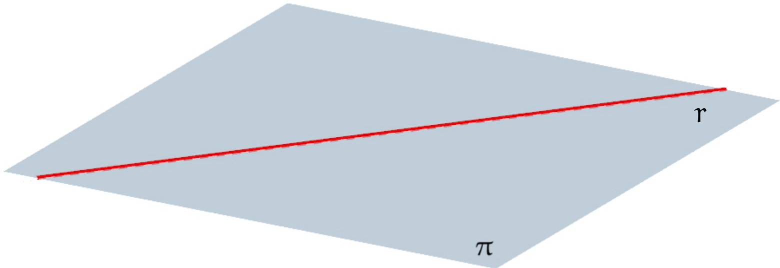
Um último caso de posição relativa entre retas e o caso de as retas serem consideradas coincidentes:



Isso acontece quando as retas estão uma sobre a outra, isto é, $r \subset s$ e $s \subset r$.

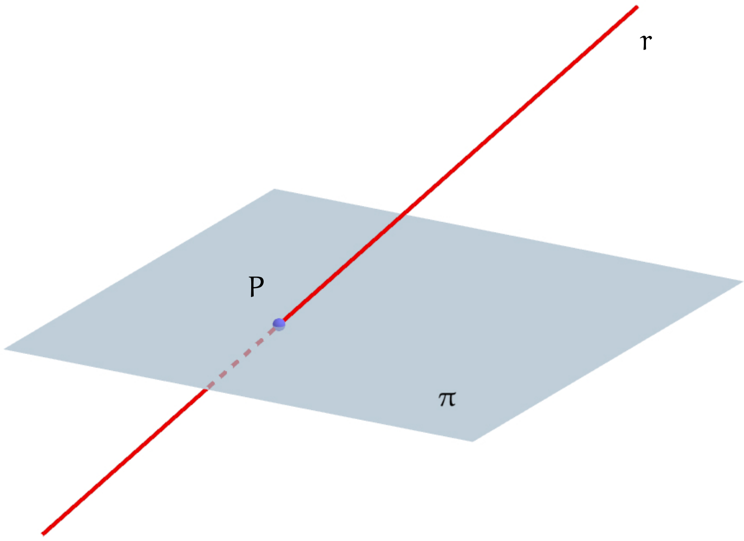
Posições relativas entre retas e planos

Em primeiro lugar, pode acontecer de a reta estar contida no plano:



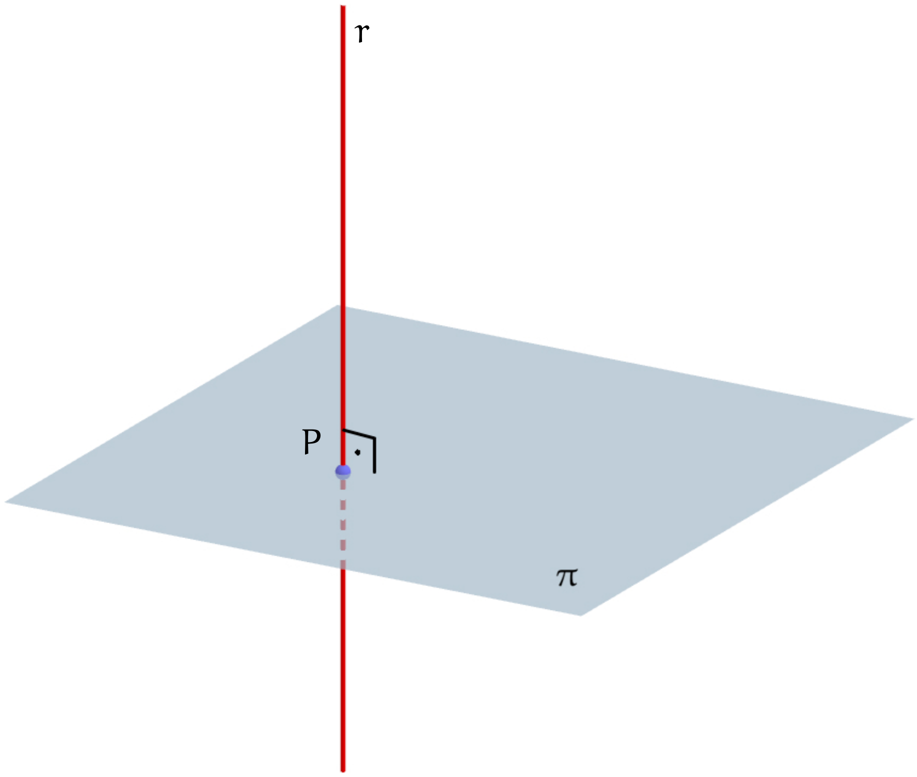
Dizemos aqui, então, que $r \subset \pi$.

Pode acontecer também de a reta ser ***secante*** ao plano, isto é, intersectar o plano em um ponto único. Veja:

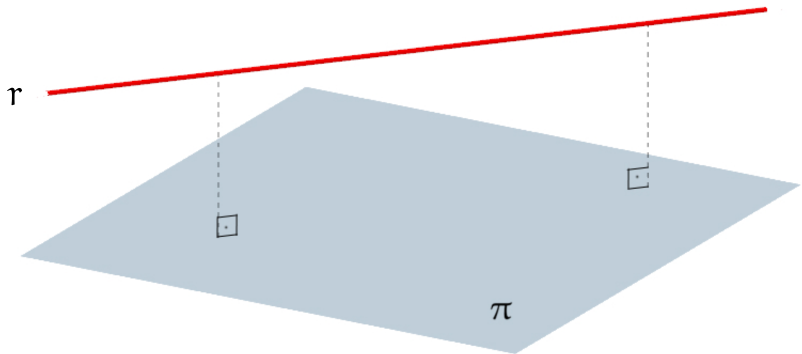


Nesse caso, dizemos simplesmente que $r \cap \pi = P$.

Caso a reta secante seja perpendicular ao plano, como ilustra a figura a seguir, podemos dizer que a reta é ***normal*** ao plano:

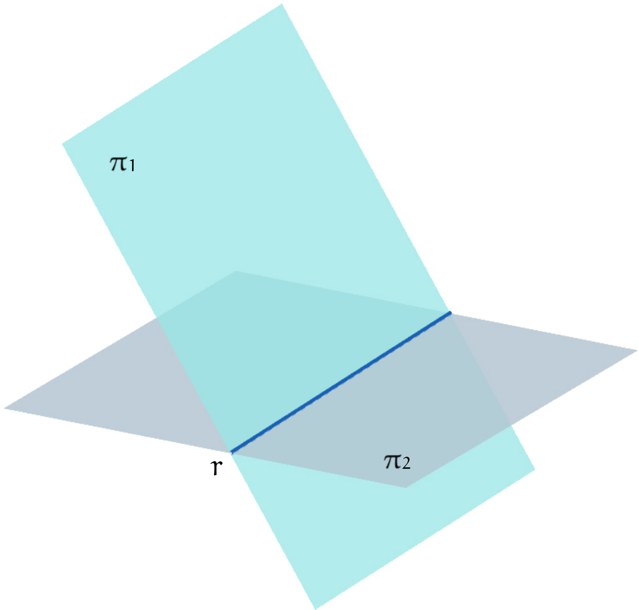


Podemos também ter a reta ***paralela ao plano***, como vemos a seguir:

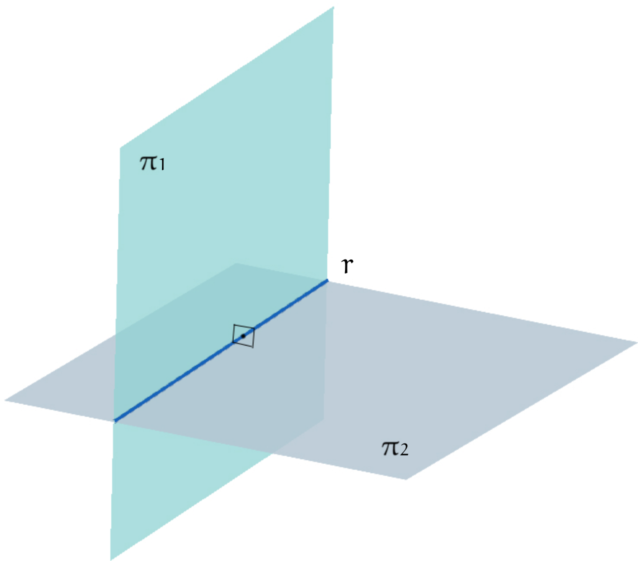


Posições relativas entre planos

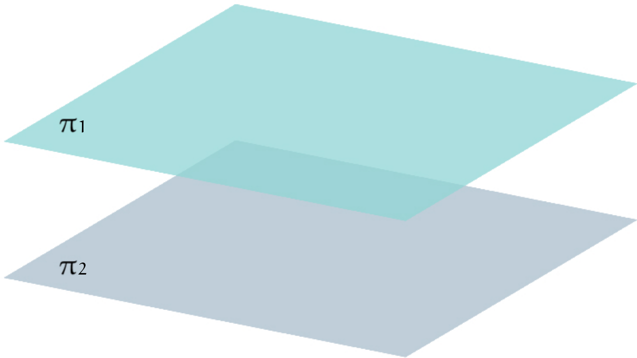
Eles podem ser secantes, como vemos a seguir:



Podemos dizer aqui que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$. Podemos ter o caso particular em que os planos são perpendiculares, como ilustro abaixo:



Finalmente existe o caso em que os planos são paralelos (existe ainda o caso em que os planos são coincidentes, isto é, estão um sobre o outro). Veja a seguir um exemplo de planos paralelos:

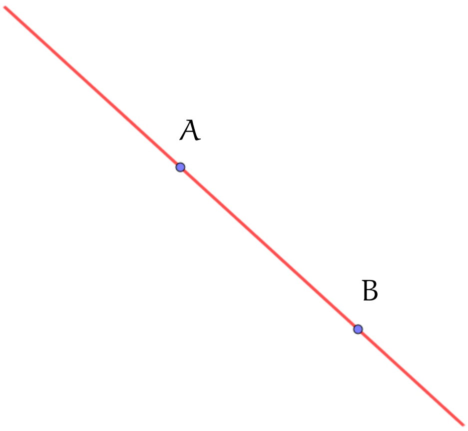


1.2– Determinação da reta e do plano

Determinação de uma reta

Determinar uma figura é reunir um número mínimo de pontos para que apenas uma forma contenha esses pontos. Então, por exemplo, você acha que um ponto sozinho determina uma reta única?

A resposta é não, visto que por um ponto passam infinitas retas. Porém, por dois pontos passa uma única reta. Então dois pontos determinam uma reta. Veja:

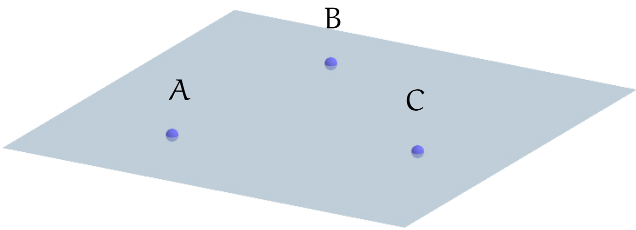


Os dois pontos A e B da figura determinaram a reta desenhada. Tudo bem, jovem?

Determinação de um plano

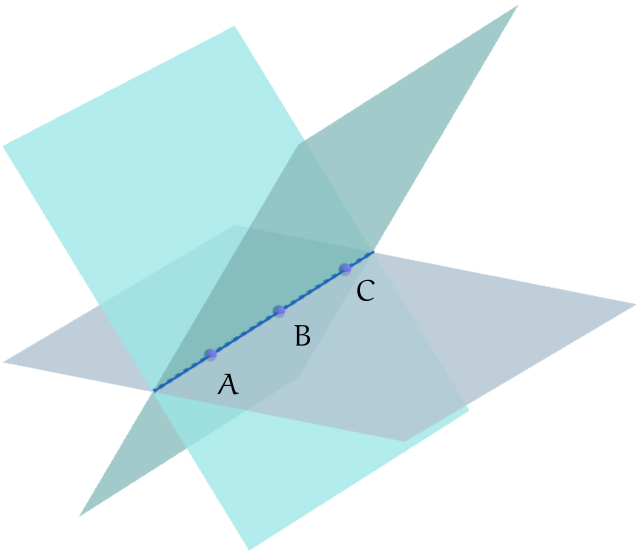
Existem três maneiras de determinarmos um plano. Vejamos cada uma delas.

A primeira forma de determinarmos um plano é com trÊs pontos não-colineares. Veja a figura a seguir:

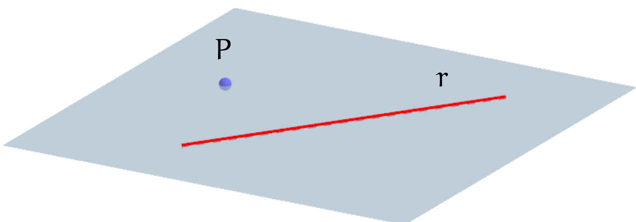


Veja que pelos pontos A, B e C passa apenas um plano, que é o plano desenhado.

Caso esses três pontos fossem colineares, não determinariam um plano único, mas uma família de planos. Veja a seguir um exemplo de três pontos colineares e um conjunto de planos que passam por eles:



Uma outra forma de determinarmos um plano é com uma reta e um ponto não pertencente à reta. Veja um exemplo desse caso de determinação de plano:



Veja que $P \notin r$; isso é suficiente para que exista apenas um plano que contenha esses dois objetos. Tudo certo até aqui, jovem?

Em breve o restante da teoria estará aqui para você. Enquanto isso, não se esqueça de checar a sua videoaula para o conteúdo completo e cheque esse livro eletrônico em no máximo três dias. Estaremos com o nosso conteúdo todo aqui para você. Abraços!

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(EEAR-2000) QUESTÃO 1

Assinale a afirmativa VERDADEIRA:

(a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
(b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.
(c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
(d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.

(EEAR-2002) QUESTÃO 2

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso), considerando a geometria de posição espacial e plana.

( ) A condição $r \cap s = \varnothing$ é necessário para que as retas r e s sejam paralelas distintas.

( ) Duas retas que formam um ângulo reto são necessariamente perpendiculares.

( ) Se duas retas têm um único ponto em comum, então elas são concorrentes.

( ) A condição $r \cap s = \varnothing$ é suficiente para que as retas r e s sejam reversas.

A seqüência correta é:

(a) V - V - V - V
(b) V - F - V - F
(c) F - V - F - V
(d) F - F - F - F

(ESPCEX-2002) QUESTÃO 3

Considere as afirmações abaixo:

I- Se um plano encontra outros dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

II- Uma reta perpendicular a uma reta de um plano e ortogonal a outra reta desse plano é perpendicular ao plano.

III- Se a intersecção de uma reta r com um plano é o ponto P, reta essa não perpendicular ao plano, então existe uma única reta s contida nesse plano que é perpendicular à reta r passando por P.

Pode-se afirmar que

(a) todas são verdadeiras.
(b) apenas I e II são verdadeiras.
(c) apenas I e III são verdadeiras.
(d) apenas II e III são verdadeiras.
(e) todas são falsas.

(ESPCEX-2009) QUESTÃO 4.

Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

Dentre as afirmações abaixo

I. Se as retas AC e BD são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se AC e BD forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que

(a) somente a I é verdadeira.
(b) somente a II é verdadeira.
(c) somente a III é verdadeira.
(d) as afirmações II e III são verdadeiras.
(e) as afirmações I e III são verdadeiras.

(ESPCEX-2011) QUESTÃO 5.

Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

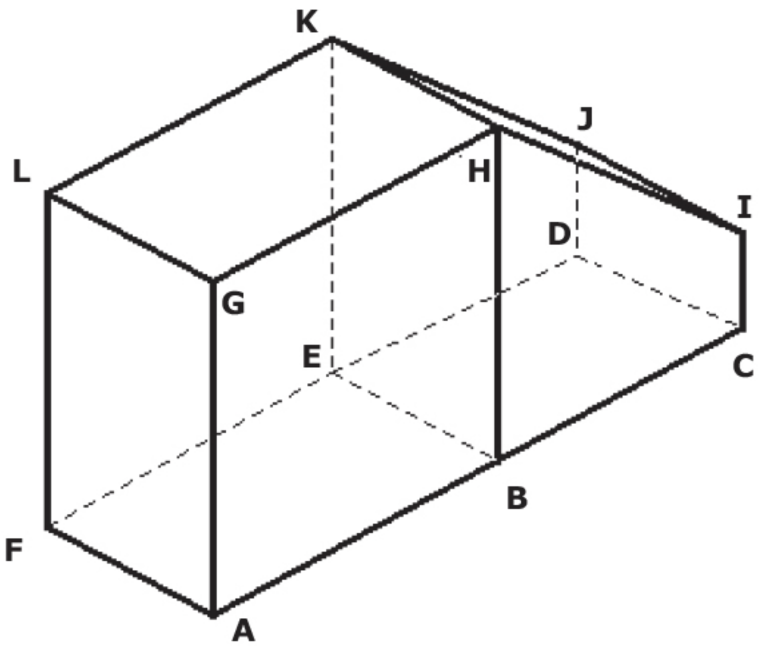
III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

(a) Somente II
(b) I e II
(c) I e III
(d) II e III
(e) I, II e III

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 6

O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.



Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,

(a) concorrentes; reversas; reversas.
(b) reversas; reversas; paralelas.
(c) concorrentes, reversas; paralelas.

(d) reversas; concorrentes; reversas.
(e) concorrentes; concorrentes; reversas.

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 7

Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento AB sobre um plano α é a metade da medida do segmento AB, então a reta AB faz com α um ângulo de $60°$;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

(a) apenas I e II
(b) apenas II e III
(c) I, II e III
(d) I, II e IV
(e) II, III e IV

(ESPCEX-2017) QUESTÃO 8

Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

(a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.
(b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.
(c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.
(d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.
(e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

(AFA-1998) QUESTÃO 9

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(a) Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.
(b) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
(c) Por um ponto qualquer é possível traçar uma reta que intercepta duas retas reversas dadas.
(d) Se duas retas concorrentes de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas de outro plano, então estes planos são paralelos.

(AFA-1999) QUESTÃO 10

Quatro pontos não-coplanares determinam, exatamente, quantos planos?

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

(AFA-2002) QUESTÃO 11

Considere as proposições a seguir:

I- Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

II- Se uma reta é paralela a um plano, então é paralela a todas as retas do plano.

III- Se uma reta possui dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

IV- Se dois planos são secantes, toda reta de um, sempre intercepta o outro plano.

Pode-se afirmar que as proposições verdadeiras são

(a) I e IV
(b) II e III
(c) I e III
(d) II e IV

(AFA-2004) QUESTÃO 12

Assinale a única alternativa FALSA.

(a) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existem infinitas retas contidas em α e perpendiculares a β.

(b) Se α e β são planos perpendiculares entre si e γ é um plano perpendicular à reta comum a α e β, então pode-se afirmar que as retas r, $r = \alpha \cap \gamma$ e s, $s = \beta \cap \gamma$, são perpendiculares entre si.

(c) Se duas retas r e s são reversas, então não existem dois planos α e β, perpendiculares entre si, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

(d) Duas retas do espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.

(AFA-2006) QUESTÃO 13

Considere as afirmativas abaixo:

I. Se α e β são planos interceptando-se na reta r e a reta s é paralela a α e a β, então s também é paralela a r.

II. Se uma reta intercepta um plano α, existe um plano β paralelo a α que não é interceptado pela reta.

III. Se dois planos são paralelos, toda reta contida em um deles é paralela ao outro plano.

IV. Dois planos perpendiculares a um terceiro plano são sempre paralelos entre si.

V. Se três retas têm um ponto comum, elas são coplanares.

O número de afirmativas verdadeiras é

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

1.3– GABARITO

Q. 1: C	**Q. 6**: E	**Q. 11**: C
Q. 2: B	**Q. 7**: A	**Q. 12**: C
Q. 3: C	**Q. 8**: B	**Q. 13**: B
Q. 4: C	**Q. 9**: D	
Q. 5: D	**Q. 10**: D	