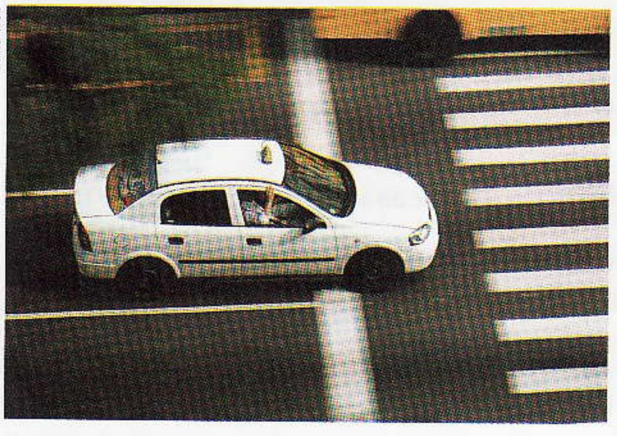
3 FUNÇÃO AFIM

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R$ 4,00 mais R$ 1,60 por quilômetro rodado. Quanto ele pagou ao taxista?

David Wolf



Ele pagou 15 · R$ 1,60 = R$ 24,00 pela distância percorrida e mais R$ 4,00 pela bandeirada; ou seja, pagou R$ 24,00 + R$ 4,00 = R$ 28,00.

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, qual seria o preço da corrida?

Temos: 25 · R$ 1,60 + R$ 4,00 = R$ 44,00.

Podemos notar que, para cada distância *x* percorrida pelo táxi, há certo preço $c(x)$ para a corrida. O valor $c(x)$ é uma função de *x*.

É fácil encontrar a fórmula que expressa $c(x)$ em função de *x*:

$$c(x) = 1{,}60 \cdot x + 4{,}00$$

que é um exemplo de função polinomial do 1º grau ou função afim.

Definição

Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função afim, a qualquer função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que *a* e *b* são números reais dados e $a \neq 0$.

Na função $f(x) = ax + b$, o número *a* é chamado coeficiente de *x* e o número *b* é chamado termo constante.

Vejamos alguns exemplos de funções polinomiais do 1º grau:

- $f(x) = 5x - 3$, em que $a = 5$ e $b = -3$
- $f(x) = -2x - 7$, em que $a = -2$ e $b = -7$
- $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$, em que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$
- $f(x) = 11x$, em que $a = 11$ e $b = 0$

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

exemplo 1

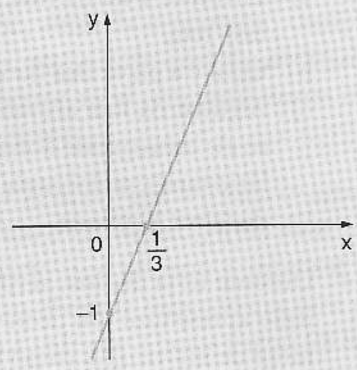
Vamos construir o gráfico da função $y = 3x - 1$.

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

x	y
0	−1
$\frac{1}{3}$	0

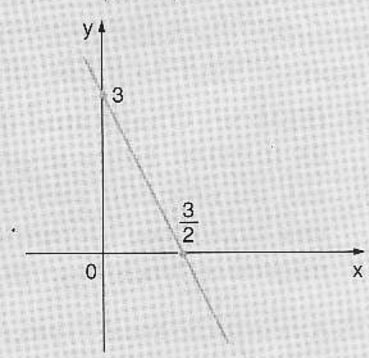


exemplo 2

Vamos construir o gráfico da função $y = -2x + 3$.

- Para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$; portanto, um ponto é $(0, 3)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0



A lei $y = -2x + 3$ é também chamada equação da reta.

exemplo 3

Vejamos como obter a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tem equação $y = ax + b$. Precisamos determinar *a* e *b*. Como $(-1, 3)$ pertence à reta:

$$3 = a(-1) + b, \text{ ou seja, } -a + b = 3$$

Como $(1, 1)$ pertence à reta, temos:

$$1 = a \cdot 1 + b, \text{ ou seja, } a + b = 1$$

Assim, *a* e *b* satisfazem o sistema

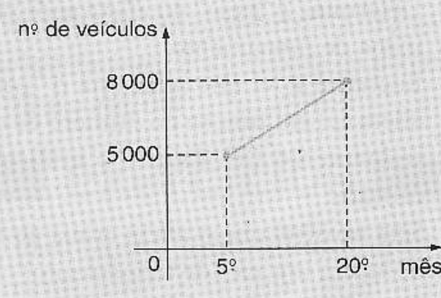
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.

exemplo 4

Uma montadora de veículos planeja aumentar sua produção acrescentando, em cada mês, *n* veículos a mais que a quantidade produzida no mês anterior. No gráfico a seguir, é possível saber o número de veículos fabricados no 5º e 20º mês (contados a partir da implantação do plano de expansão).

Qual é o valor de *n*? Qual foi a quantidade de veículos vendidos no 12º mês?



No período de 15 meses (5º ao 20º mês) são produzidos 8 000 − 5 000 = 3 000 veículos. Como o aumento mensal é constante, concluímos que, por mês, são fabricados $\frac{3\,000}{15} = 200$ veículos ($n = 200$).

Do 5º ao 12º mês (7 meses) são fabricados $200 \cdot 7 = 1\,400$ veículos a mais. Assim, no 12º mês, a produção será de $1\,400 + 5\,000 = 6\,400$ veículos.

exercícios

1. Faça o gráfico das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = x + 1$ c) $y = 3x + 2$

b) $y = -2x + 4$ d) $y = -x - 2$

2. Todas as funções seguintes são do 1º grau e possuem termo independente nulo. São chamadas funções lineares. Faça o gráfico de cada uma, destacando uma propriedade comum.

a) $y = 2x$ c) $y = \frac{1}{2}x$

b) $y = -3x$ d) $y = -x$

3. Em cada caso, represente, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções *f* e *g*, destacando as coordenadas do ponto de interseção desses gráficos:

a) $\begin{cases} f(x) = -2x + 3 \\ g(x) = x + 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = -2x \\ g(x) = x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = x + 1 \\ g(x) = x + 3 \end{cases}$

4. A um mês de uma competição, um atleta de 75 kg é submetido a um treinamento específico para aumento de massa muscular, em que se anunciam ganhos de 180 gramas por dia. Suponha que isso realmente ocorra.

a) Determine o "peso" do atleta após uma semana de treinamento.

b) Encontre a lei que relaciona o "peso" do atleta (p) em função do número de dias de treinamento (n). Esboce o gráfico dessa função.

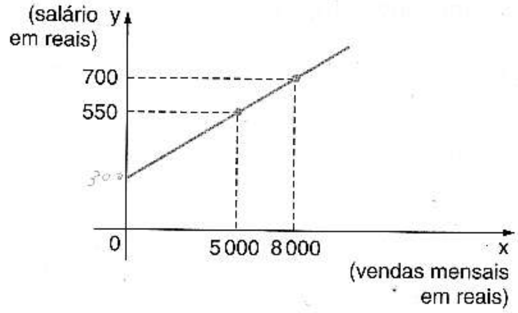
c) Será possível que o atleta atinja ao menos 80 kg em um mês de treinamento?

5. Qual é a lei da função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos:

a) $(-1, 5)$ e $(2, -4)$? c) $(0, 0)$ e $(1, 4)$?

b) $(-4, 2)$ e $(2, 5)$? d) $(3, 2)$ e $(5, 2)$?

6. Um vendedor recebe um salário fixo e mais uma parte variável, correspondente à comissão sobre o total vendido em um mês. O gráfico seguinte informa algumas possibilidades de salários em função das vendas.

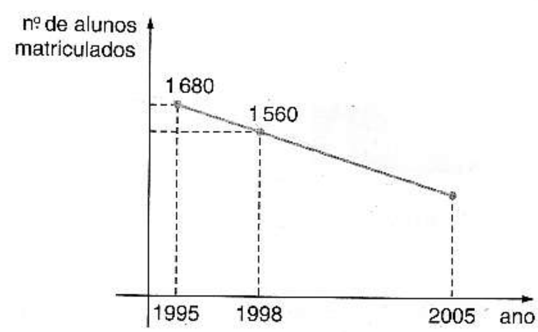


a) Encontre a lei da função representada por essa reta.

b) Qual é a parte fixa do salário?

c) Alguém da loja afirmou ao vendedor que, se ele conseguisse dobrar as vendas, seu salário também dobraria. Tal afirmação é verdadeira? Explique.

7. Durante uma década, verificou-se que um colégio apresentou um decréscimo linear no número de matrículas, como mostra o gráfico seguinte:



a) Quantos alunos a escola possuía em 2001?

b) Quantos alunos a escola perdeu de 1995 a 2005?

c) Suponha que, a partir de 2005, haja um aumento de 30 matrículas por ano. Quantos alunos terá o colégio em 2010?

8. (EEM-SP) O valor atual de uma máquina é R$ 10 000,00. Estima-se que, após 10 anos de uso, seu valor cairá para R$ 1 000,00. Escreva uma função linear que represente o valor V dessa máquina em função do tempo t, medido em anos.

9. A valorização anual do preço (em reais) de uma peça de arte é constante. Seu preço atual é R$ 4 500,00. Quatro anos atrás, a peça custava R$ 3 300,00. Qual será o preço dessa peça daqui a cinco anos?

10. (UF-SC, adaptado) Dois líquidos diferentes encontram-se em recipientes idênticos e têm taxas de evaporação constantes. O líquido I encontra-se inicialmente em um nível de 100 mm e evapora-se completamente no quadragésimo dia. O líquido II, inicialmente com nível de 80 mm, evapora-se completamente no quadragésimo oitavo dia.

a) Encontre, para cada líquido, a lei da função que representa o nível (y), em mm, atingido no recipiente pelo líquido no dia x.

b) Determine, antes da evaporação completa de ambos, ao final de qual dia os líquidos terão o mesmo nível (em mm) nesses mesmos recipientes.

11. Na lei $y = a + 2{,}5x$, em que a é uma constante, está relacionado o valor total (y), em reais, pago por um usuário que acessou a internet por x horas, em um cibercafé. Sabendo que uma pessoa que usou a rede por 2 horas pagou R$ 8,00:

a) determine o valor de a;

b) encontre o valor pago por um usuário que acessou a rede por 5 horas;

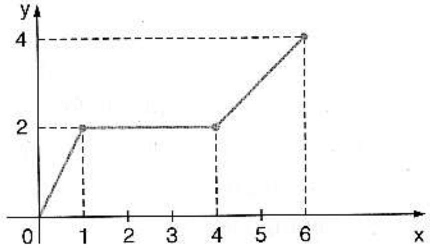
c) faça o gráfico de y em função de x (são permitidos fracionamentos de hora).

12. (UF-RJ) Um videoclube propõe a seus clientes três opções de pagamento:

- opção I: R$ 40,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 1,20 por DVD alugado;
- opção II: R$ 20,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 2,00 por DVD alugado;
- opção III: R$ 3,00 por DVD alugado, sem taxa de adesão.

Um cliente escolheu a opção II e gastou R$ 56,00 no ano. Esse cliente escolheu a melhor opção de pagamento para o seu caso? Justifique sua resposta.

13. Considere uma função f, cujo domínio é $[0, 6]$ e seu gráfico é representado a seguir.



Calcule:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $f(3)$ c) $f\left(\frac{11}{2}\right)$

14. O valor de uma máquina agrícola, adquirida por US$ 5000,00, sofre, nos primeiros anos, depreciação (desvalorização) linear de US$ 240,00 por ano, até atingir 28% do valor de aquisição, estabilizando-se em torno desse valor mínimo.

a) Qual é o tempo transcorrido até a estabilização de seu valor?

b) Qual é o valor mínimo da máquina?

c) Faça um gráfico que represente a situação descrita no problema.

Coeficientes da função afim

Já vimos que o gráfico da função afim $y = ax + b$ é uma reta.

O coeficiente de x, a, é chamado coeficiente angular da reta e se refere à inclinação da reta em relação ao eixo Ox, conforme aprenderemos no capítulo de Geometria Analítica.

O termo constante, b, é chamado coeficiente linear da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.

exercícios

15. Identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b) de cada função seguinte:

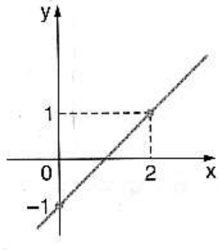
a) $y = -2x + 5$

b) $y = 3x - 1$

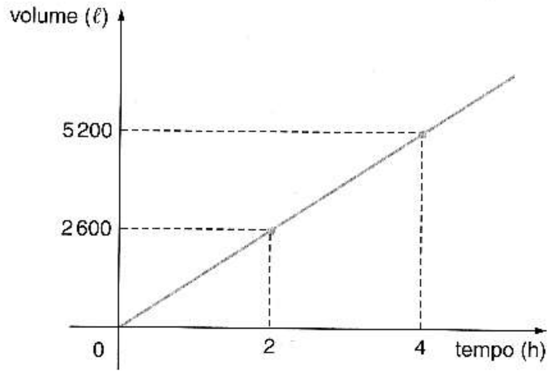
c) $y = 4x$

d) $y = x + 3$

e)



16. No gráfico seguinte está representado o volume de petróleo existente em um reservatório de 26 m^3 inicialmente vazio.



a) Em quanto tempo o reservatório estará cheio?

b) Qual é a lei que expressa o volume (v), em litros, de petróleo existente no reservatório em função do tempo (t), em horas?

Zero e equação do 1º grau

Chama-se **zero** ou **raiz** da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$.

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Então, a raiz da função $f(x) = ax + b$ é a solução da equação do 1º grau $ax + b = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

exemplo 5

Vejamos alguns exemplos:

- Obtenção do zero da função $f(x) = 2x - 5$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

- Cálculo da raiz da função $g(x) = 3x + 6$:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- Cálculo da abscissa do ponto em que o gráfico de $h(x) = -2x + 10$ corta o eixo das abscissas.

O ponto em que o gráfico corta o eixo dos x é aquele em que $h(x) = 0$, então:

$$h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$$

exercícios

17. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações de 1º grau:

a) $12x + 5 = 2x + 8$

b) $5(3 - x) + 2(x + 1) = -x + 5$

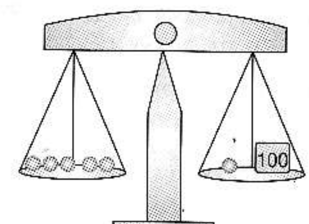
c) $5x + 20(1 - x) = 5$

d) $-x + 4(2 - x) = -2x - (10 + 3x)$

e) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3}$

f) $\frac{6x}{5} - \frac{x + 3}{2} = \frac{x}{3} - 1$

18. (UF-PE) Pedro tem 6 bolas de metal de mesmo peso p. Para calcular p, Pedro colocou 5 bolas em um dos pratos de uma balança e a que restou, juntamente com um cubo pesando 100 g, no outro prato, e observou que os pratos da balança ficaram equilibrados (veja figura abaixo). Indique p, medido em gramas.



19. Um pai quer distribuir R$ 120,00 entre seus três filhos, aqui denominados A, B e C, de modo que B receba o dobro de C e A receba o dobro de B somado ao que cabe a C. Quanto receberá cada um?

20. Carlos é 4 anos mais velho que seu irmão André. Há 5 anos, a soma de suas idades era 34 anos.

a) Qual é a idade atual de cada um?

b) Daqui a quantos anos a soma de suas idades será igual a um século?

21. (UF-RJ) Maria faz hoje 44 anos e tem dado um duro danado para sustentar suas três filhas: Marina, de 10 anos; Marisa, de 8 anos; e Mara, de 2 anos. Maria decidiu que fará uma viagem ao Nordeste para visitar seus pais, no dia do seu aniversário, quando sua idade for igual à soma das idades de suas três filhas. Com que idade Maria pretende fazer a viagem?

22. Determine a raiz de cada uma das seguintes funções:

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = \dfrac{-3x - 5}{2}$

d) $y = 4x$

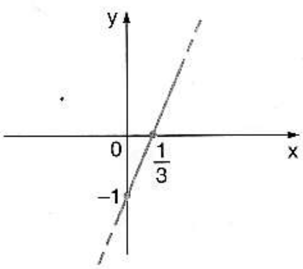
e) $y = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{1}{3}$

23. Seja f uma função real definida pela lei $f(x) = ax - 3$. Se -2 é raiz da função, qual é o valor de $f(3)$?

24. Seja r a reta representativa do gráfico da função $y = 2x - 2$ e A e B os pontos em que r intercepta os eixos x e y, respectivamente. Se O é a origem do sistema cartesiano, qual é a área do triângulo OAB?

Crescimento e decrescimento

Consideremos a função do 1º grau $y = 3x - 1$.

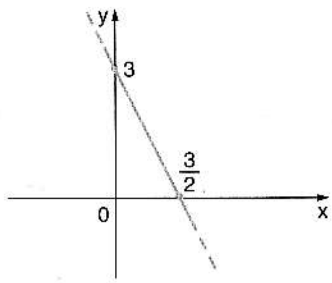


Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:

	x	y	
	−3	−10	
	−2	−7	
x aumenta ↓	−1	−4	↓ *y* aumenta
	0	−1	
	1	2	
	2	5	
	3	8	

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y também aumentam. Dizemos, então, que a função $y = 3x - 1$ é crescente. Observe novamente seu gráfico.

Consideremos a função $y = -2x + 3$.



Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:

	x	y	
	−3	9	
	−2	7	
x aumenta ↓	−1	5	↓ *y* diminui
	0	3	
	1	1	
	2	−1	
	3	−3	

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y diminuem. Dizemos, então, que a função $y = -2x + 3$ é decrescente. Observe novamente seu gráfico.

Regra geral:

- **A função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é crescente quando o coeficiente de x é positivo ($a > 0$).**
- **A função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é decrescente quando o coeficiente de x é negativo ($a < 0$).**

exemplo 6

Vamos discutir, em função do parâmetro *m*, a variação (decrescente, constante, crescente) da função $y = (m - 2)x + 3$.

Se na lei de uma função aparecer outra variável além das duas que estão se relacionando (*x* e *y*), essa variável é chamada parâmetro. Na expressão $(m - 2)x + 3$ a variável principal é *x*, e *m* é um parâmetro.

O coeficiente de *x* nessa equação é $m - 2$. Assim, temos:

- A função é decrescente se $m - 2 < 0$, ou seja, se $m < 2$.
- A função é constante se $m - 2 = 0$, ou seja, se $m = 2$.
- A função é crescente se $m - 2 > 0$, ou seja, se $m > 2$.

exercícios

25. Classifique cada uma das funções seguintes em crescente ou decrescente:

a) $y = 3x - 2$
b) $y = -x + 3$
c) $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$
d) $y = 9x$
e) $y = (x + 3)^2 - (x + 1)^2$

26. Para que valores reais de *m* a função definida por:

a) $f(x) = mx - 2$ é crescente?
b) $g(x) = (m + 3)x + 1$ é decrescente?
c) $h(x) = (-m + 2)x$ é crescente?

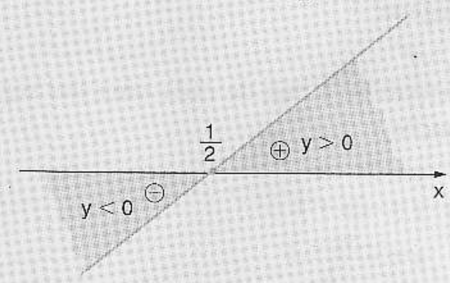
Sinal

Estudar o sinal de uma função qualquer $y = f(x)$ é determinar os valores de *x* para os quais *y* é positivo, ou *y* é zero, ou *y* é negativo.

exemplo 7

Vamos estudar o sinal da função $y = 2x - 1$.

Essa função polinomial do 1º grau apresenta $a = 2 > 0$ e raiz $x = \dfrac{1}{2}$. A função é crescente e a reta corta o eixo Ox no ponto $\dfrac{1}{2}$.

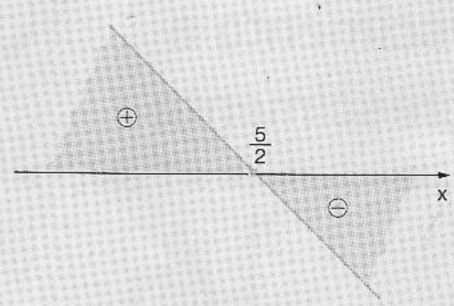


Sinal
$y > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$
$y < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

exemplo 8

Vamos estudar o sinal da função $y = -2x + 5$.

Essa função do 1º grau apresenta $a = -2 < 0$ e raiz $x = \dfrac{5}{2}$. A função é decrescente e a reta corta o eixo Ox no ponto $\dfrac{5}{2}$.

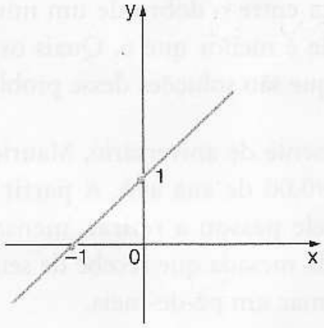


Sinal
$y > 0 \Rightarrow x < \dfrac{5}{2}$
$y < 0 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2}$

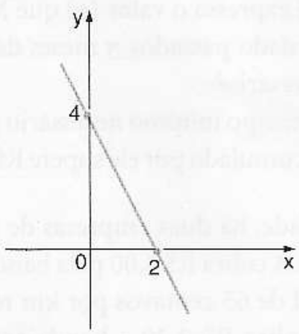
exercícios

27. Em cada caso, estude o sinal da função representada no gráfico:

a)



b)



28. Estude o sinal de cada uma das funções seguintes:

a) $y = 4x + 1$

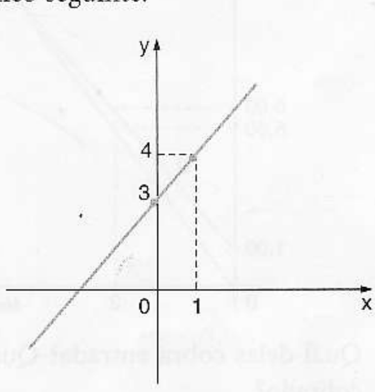
b) $y = -3x + 1$

c) $y = -7x$

d) $y = \dfrac{x-3}{5}$

e) $y = \dfrac{x}{2}$

29. Faça o estudo do sinal da função representada no gráfico seguinte:



Inequações

exemplo 9

Vamos resolver a inequação:

$$4(x+1) - 5 \leqslant 2(x+3)$$

Essa é uma inequação do 1º grau que pode ser resolvida sem o estudo de sinal da função afim. Vejamos:

1º) Desenvolvemos os parênteses:

$$4x + 4 - 5 \leqslant 2x + 6$$

2º) Passamos todos os termos que contêm a incógnita *x* para o 1º membro:

$$4x - 1 - 2x \leqslant 6$$

3º) Passamos todos os termos constantes para o 2º membro:

$$4x - 2x \leqslant 6 + 1 \Rightarrow 2x \leqslant 7$$

4º) Dividimos os dois membros pelo coeficiente de *x*:

$$x \leqslant \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{7}{2}\right\}$$

exemplo 10

Vamos resolver a inequação $1 \leqslant 2x + 3 < x + 5$.

De fato, são duas inequações simultâneas:

$1 \leqslant 2x + 3$ ① e $2x + 3 < x + 5$ ②

Façamos ①: $1 \leqslant 2x + 3$.

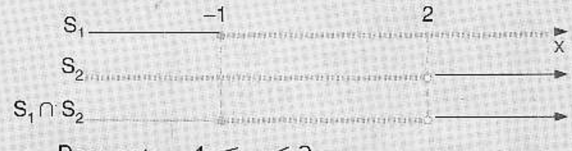
$$1 \leqslant 2x + 3 \Rightarrow -2x \leqslant 3 - 1 \Rightarrow -2x \leqslant 2 \Rightarrow x \geqslant -1$$

Observemos que, ao dividir ambos os membros por um número negativo, devemos inverter o sentido da desigualdade.

Vamos resolver ②: $2x + 3 < x + 5$

$$2x + 3 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 - 3 \Rightarrow x < 2$$

Agora a interseção das duas soluções:



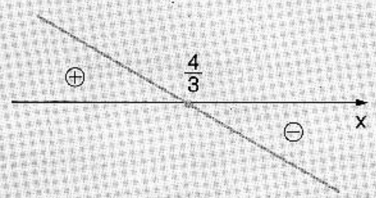
Resposta: $-1 \leqslant x < 2$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 2\}$$

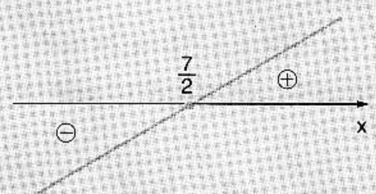
exemplo 11

Para resolver a inequação-produto $(4-3x) \cdot (2x-7) > 0$, devemos aplicar o estudo do sinal da função afim.

Façamos $y_1 = 4 - 3x$ e estudemos o sinal de y_1. Temos $a = -3 < 0$ e raiz $x = \frac{4}{3}$. Então:



Vamos determinar o sinal de $y_2 = 2x - 7$. Temos $a = 2 > 0$ e raiz $x = \frac{7}{2}$. Então:



Estudemos agora o sinal do produto $y_1 \cdot y_2$.

	$x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < \frac{7}{2}$	$x > \frac{7}{2}$
y_1	+	−	−
y_2	−	−	+
$y_1 \cdot y_2$	−	+	−

A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $y_1 \cdot y_2 > 0$?".

Resposta: $\frac{4}{3} < x < \frac{7}{2}$

exercícios

30. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $x - 3 \leqslant -x + 5$

b) $3 \cdot (x-1) + 4x \leqslant -10$

c) $-2(x-1) - 5(1-x) > 0$

d) $1 - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} < x$

e) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{2} \leqslant 2$

f) $\frac{3x-1}{4} - \frac{x-3}{2} \geqslant \frac{x+7}{4}$

g) $(x-3)^2 - (4-x)^2 \leqslant \frac{x}{2}$

31. A diferença entre o dobro de um número e a sua metade é menor que 6. Quais os inteiros positivos que são soluções desse problema?

32. Como presente de aniversário, Maurício recebeu R$ 190,00 de sua avó. A partir do mês seguinte, ele passou a retirar, mensalmente, R$ 28,00 da mesada que recebe de seus pais, a fim de formar um pé-de-meia.

a) Como se expressa o valor (v) que Maurício terá guardado passados n meses da data de seu aniversário?

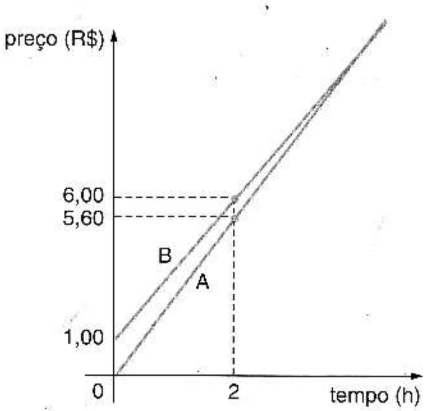
b) Qual é o tempo mínimo necessário para que o valor acumulado por ele supere R$ 500,00?

33. Em uma cidade, há duas empresas de táxi: *A* e *B*. A empresa *A* cobra R$ 4,00 pela bandeirada e um adicional de 65 centavos por km rodado; a empresa *B* cobra R$ 3,20 a bandeirada e um adicional de 70 centavos por km rodado.

a) Qual é a opção mais econômica para quem fizer uma viagem de 6 km? E 30 km?

b) A partir de quantos quilômetros de viagem a empresa *B* deixa de ser mais econômica?

34. Duas *lan houses*, *A* e *B*, localizadas em um mesmo bairro, adotam regimes diferentes de preços, em função do tempo de acesso, como mostra o gráfico seguinte:



a) Qual delas cobra entrada? Qual é o valor cobrado?

b) A partir de quantos minutos de acesso é mais econômico escolher a *lan house B*?

35. (UF-RJ) Uma operadora de celular oferece dois planos no sistema pós-pago. No plano *A*, paga-se uma assinatura de R$ 50,00 e cada minuto em ligações locais custa R$ 0,25. No plano *B*, paga-se um valor fixo de R$ 40,00 para até 50 minutos em ligações locais e, a partir de 50 minutos, o custo de cada minuto em ligações locais é de R$ 1,50.

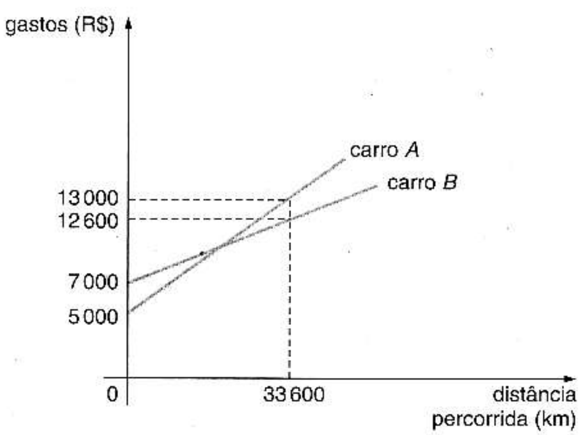
a) Calcule o valor da conta em cada plano para um consumo mensal de 30 minutos em ligações locais.

b) Determine a partir de quantos minutos, em ligações locais, o plano *B* deixa de ser mais vantajoso do que o plano *A*.

36. (U. F. Viçosa-MG) Um comerciante deseja comprar um entre dois carros usados. O carro *A* custa R$ 5 000,00 e faz 8,4 quilômetros por litro de gasolina, enquanto o *B* custa R$ 7 000,00 e faz 12 quilômetros por litro. A gasolina custa cerca de R$ 2,00 o litro. Ambos os carros estão em boas condições, portanto espera-se que o custo de consertos seja desprezível a médio prazo. Considerando esses dados, faça o que se pede:

a) Calcule o valor, em reais, gasto com combustível dos carros *A* e *B*, após rodarem 2 520 km.

b) Analise o gráfico abaixo, que representa quilômetros rodados por gastos (com combustível e custo do carro) e determine quantos quilômetros o comerciante deve rodar antes que o carro *B* se torne a melhor compra.



37. Resolva as seguintes inequações simultâneas, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $-1 < 2x \leqslant 4$

b) $3 < x - 1 < 5$

c) $4 > -x > -1$

d) $3 \leqslant x + 1 \leqslant -x + 6$

e) $2x \leqslant -x + 9 \leqslant 5x + 21$

38. Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} -3x < 1 - 2x \\ 4 - 3 \cdot (2 - x) \geqslant x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 1 < 5x \\ 8x < -x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} \leqslant 2 - x \\ x + 1 > -2x - 4 \\ 5 - 2(x - 3) \leqslant -5x + 15 \end{cases}$

39. Uma locadora de automóveis oferece três planos a seus clientes:

- plano *A*: diária a R$ 80,00 com quilometragem livre;
- plano *B*: diária a R$ 30,00 e mais R$ 0,60 por quilômetro rodado;
- plano *C*: diária a R$ 40,00 e mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.

a) Qual é a opção mais econômica para alguém que deseja rodar 60 km por dia? E 80 km por dia?

b) A partir de quantos quilômetros inteiros rodados em um dia o plano *A* é mais econômico que os outros dois?

40. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações-produto:

a) $(x - 1) \cdot (x - 2) \geqslant 0$

b) $(-2x + 1) \cdot (3x - 6) > 0$

c) $(5x + 2) \cdot (1 - x) \leqslant 0$

d) $(3 - 2x) \cdot (4x + 1) \cdot (5x + 3) \geqslant 0$

e) $-x \cdot (2x - 1) \cdot (x - 3) \geqslant 0$

41. Quantos números inteiros satisfazem a inequação $(3x - 5) \cdot (-2x + 7) > 0$?

42. Estabeleça o domínio da função definida por $f(x) = \sqrt{(2x - 1) \cdot (-4x + 8)}$.

43. Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

a) $(2 - x) \cdot (x - 2) \geqslant 0$

b) $(x - 3) \cdot (2x - 6) > 0$

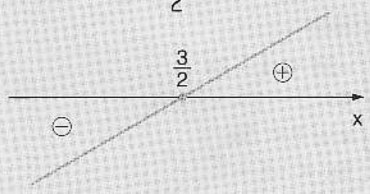
c) $(2x - 1) \cdot (1 - 2x) > 0$

exemplo 12

Vamos resolver a inequação-quociente $\frac{10x - 15}{5 - 4x} \leqslant 0$.

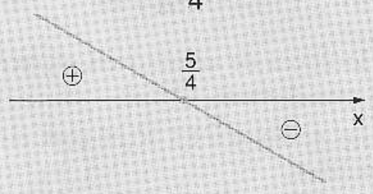
- Estudo do sinal de $y_1 = 10x - 15$

  $a = 10 > 0$ e raiz $x = \frac{3}{2}$



- Estudo do sinal de $y_2 = 5 - 4x$

  $a = -4 < 0$ e raiz $x = \frac{5}{4}$



- Estudo do sinal do quociente $\frac{y_1}{y_2}$

		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$		x
y_1	−		−		+	
y_2	+		−		−	
$\frac{y_1}{y_2}$	−		+		−	

A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $\frac{y_1}{y_2} \leqslant 0$?".

Resposta: $x < \frac{5}{4}$ ou $x \geqslant \frac{3}{2}$. (Notemos que $\frac{y_1}{y_2} = 0$ ocorre para $y_1 = 0$ e $y_2 \neq 0$. Isso nos obriga a incluir apenas a raiz de y_1.)

exemplo 13

Vamos resolver a inequação $\frac{x + 3}{2 - x} \leqslant 4$.

Se, simplesmente, multiplicarmos ambos os membros por $2 - x$ (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de x), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos o seguinte procedimento:

$$\frac{x + 3}{2 - x} \leqslant 4 \Rightarrow \frac{x + 3}{2 - x} - 4 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 3) - 4(2 - x)}{2 - x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{5x - 5}{2 - x} \leqslant 0$$

E agora aplicamos a mesma técnica vista no exemplo 12.

exemplo 14

Outra aplicação do estudo do sinal seria a obtenção do domínio de uma função.

Vejamos como obter o domínio da função definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{1 + 2x}}$.

Devemos impor que o radicando seja não negativo, isto é:

$$\frac{x + 3}{1 + 2x} \geqslant 0$$

E agora aplicamos a mesma técnica vista no exemplo 12.

exercícios

44. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações-quociente:

a) $\frac{x + 1}{2x - 1} \leqslant 0$

b) $\frac{4x - 3}{-2x + 3} < 0$

c) $\frac{2x}{-x + 3} \geqslant 0$

45. Determine o conjunto solução das inequações-quociente seguintes, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $\frac{(3 - x)}{(x + 1) \cdot (x - 2)} \geqslant 0$

b) $\frac{-x}{(2 + x) \cdot (-3x - 1)} < 0$

c) $\frac{(1 - 2x) \cdot (3 + 4x)}{4 - x} \geqslant 0$

46. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

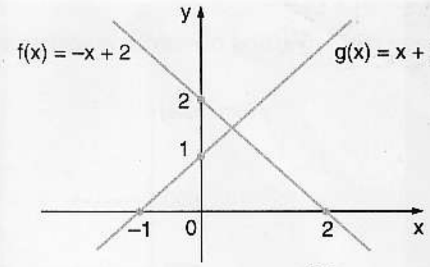
a) $\dfrac{x-3}{2x-1} \geqslant 4$

b) $\dfrac{-4x+1}{x-2} < -2$

c) $\dfrac{x}{x-1} \leqslant 1$

d) $-\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{2} \geqslant -\dfrac{1}{x}$

47. A partir do gráfico seguinte resolva as inequações.



a) $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$

48. Estabeleça o domínio de cada função seguinte:

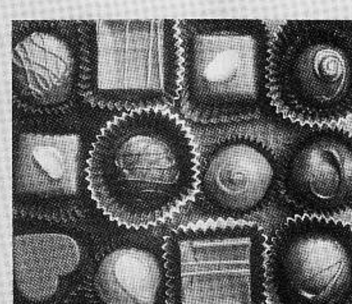
a) $y = \sqrt{\dfrac{4x-3}{x+1}}$

b) $y = \sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

Matemática e Economia

Funções custo, receita e lucro

Uma pequena doçaria, instalada em uma galeria comercial, produz e comercializa chocolates. Para fabricá-los, há um custo fixo mensal de R\$ 360,00, representado por C_F, que inclui aluguel, conta de luz, impostos, etc. Além desse, há um custo variável (C_V), que depende da quantidade de chocolates preparados (x). Estima-se que o custo de produção de um chocolate seja R\$ 0,30.



Photodisc/Getty Images

Assim, o custo total mensal, C ($C = C_F + C_V$), é dado por:

$$C(x) = 360 + 0{,}3 \cdot x$$

O preço de venda unitário do chocolate é R\$ 1,20. Admitiremos, neste momento, que o preço de venda independe de outros fatores.

A receita (faturamento bruto) dessa doçaria é definida por:

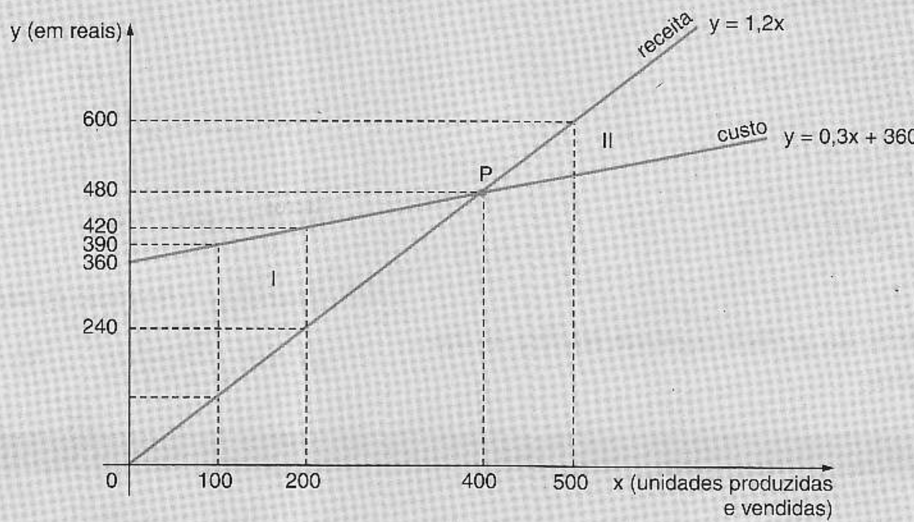
$$R(x) = 1{,}2 \cdot x$$

ou seja, é dada pelo produto entre o preço unitário de venda e o número de unidades produzidas e vendidas (x).

Por fim, o lucro mensal, L (faturamento líquido), desse estabelecimento é uma função de 1º grau dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$
$$L(x) = 1{,}2x - (360 + 0{,}3x) = 0{,}9x - 360$$

Vamos observar, a seguir, os gráficos das funções custo e receita.



Verificamos que as retas se interceptam em P(400, 480).

O ponto P é chamado ponto de nivelamento (ou ponto crítico), pois em P a receita é suficiente para igualar o custo total, fazendo com que a loja deixe de ter prejuízo.

Observe também no gráfico:

- região I: $C(x) > R(x)$ $(x < 400) \rightarrow L(x) < 0 \leftrightarrow$ prejuízo;
- região II: $C(x) < R(x)$ $(x > 400) \rightarrow L(x) > 0 \leftrightarrow$ lucro.

Imagine um mês em que sejam produzidos e vendidos 600 brigadeiros:

- o custo total mensal em reais é $C = 360 + 0{,}3 \cdot 600 = 540$;
- a receita mensal obtida em reais é $R = 1{,}2 \cdot 600 = 720$;
- o lucro mensal correspondente em reais é $720 - 540 = 180$ (ou $L = 0{,}9 \cdot 600 - 360 = 540 - 360 = 180$).

Por outro lado, se em um determinado mês a doçaria operar com um prejuízo de R$ 90,00, podemos determinar a quantidade de brigadeiros comercializados da seguinte maneira.

Como $L(x) = 0{,}9x - 360$, fazemos:

$$-90 = 0{,}9x - 360 \Rightarrow 0{,}9x = 270 \Rightarrow x = 300$$

Foram comercializados 300 brigadeiros.

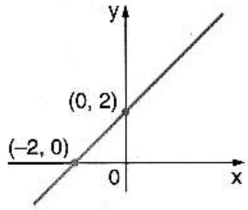
testes de vestibulares

1. (UF-ES) O banco Mutreta & Cambalacho cobra uma tarifa para manutenção de conta (TMC) da seguinte forma: uma taxa de R$ 10,00 mensais e mais uma taxa de R$ 0,15 por cheque emitido. O banco Dakah Tom Malah cobra de TMC uma taxa de R$ 20,00 mensais e mais uma taxa de R$ 0,12 por cheque emitido. O sr. Zé Doular é correntista dos dois bancos e emite, mensalmente, 20 cheques de cada banco.
A soma das TMCs, em reais, pagas mensalmente por ele aos bancos é:

a) 10,15
b) 20,12
c) 30,27
d) 35,40
e) 50,27

2. (Unicap-PE) A função definida no conjunto dos reais, representada pelo gráfico na figura abaixo, é:

a) $y = x^2 + 5$
b) $y = x^2 + x + 1$
c) $y = 3x$
d) $y = x + 2$
e) $y = 2x + 2$



3. (PUC-MG) Para se tornar rentável, uma granja deve enviar para o abate *x* frangos por dia, de modo que seja satisfeita a desigualdade $1{,}5x + 80 \leqslant 2{,}5x - 20$. Nessas condições, pode-se afirmar que o menor valor de *x* é:

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400

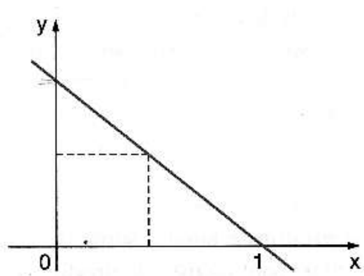
4. (Faap-SP) Em 1999, uma indústria fabricou 4 000 unidades de um determinado produto. A cada ano, porém, acrescenta duzentas e cinqüenta unidades à sua produção. Se esse ritmo de crescimento for mantido, a produção da indústria num ano *t* qualquer será:

a) 250t
b) 4 000t
c) 4 000 + 250t
d) 4 000 – 250t
e) 4 000t + 250

5. (PUC-RJ) $\frac{3}{5}$ de um número somados a $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{3}$ desse mesmo número. Indique a opção que apresenta esse número.

a) 0
b) 1
c) $\frac{20}{33}$
d) $\frac{33}{20}$
e) $\frac{15}{2}$

6. (UF-AM) A função *f*, definida por $f(x) = -3x + m$, está representada abaixo:



Então, o valor de $\frac{f(2) + f(-1)}{f(0)}$ é:

a) –1
b) 0
c) 1
d) $\frac{7}{5}$
e) $-\frac{5}{7}$

7. (UE-PA) Nas feiras de artesanato de Belém do Pará, é comum, no período natalino, a venda de árvores de natal feitas com raiz de patchouli. Um artesão paraense resolveu incrementar sua produção investindo R\$ 300,00 na compra de matéria-prima para confeccioná-las ao preço de custo de R\$ 10,00 a unidade. Com a intenção de vender cada árvore ao preço de R\$ 25,00, quantas deverá vender para obter lucro?

a) Mais de 8 e menos de 12 árvores.
b) Mais de 12 e menos de 15 árvores.
c) Mais de 15 e menos de 18 árvores.
d) Mais de 18 e menos de 20 árvores.
e) Mais de 20 árvores.

8. (Vunesp-SP) Carlos trabalha como *disc jockey* (DJ) e cobra uma taxa fixa de R\$ 100,00, mais R\$ 20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma função, cobra uma taxa fixa de R\$ 55,00, mais R\$ 35,00 por hora. O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos, é:

a) 6 horas
b) 5 horas
c) 4 horas
d) 3 horas
e) 2 horas

9. (Unifor-CE) A soma de todos os números inteiros que satisfazem a sentença $\frac{x - 11}{2} < 5 - 2x < \frac{x}{4} + 1$ é:

a) 13
b) 12
c) 11
d) 10
e) 9

10. (Unirio-RJ) Os comerciantes do Grupo Coposuco compram cada garrafa de 600 ml de suco pronto ao preço de R\$ 1,20 e revendem seu líquido usando copos de 290 ml, cobrando R\$ 1,00 cada copo de suco. Sabendo que, em um certo dia, eles venderam 100 garrafas de suco pronto e que somente foram vendidos copos completamente cheios, calcule o lucro dos comerciantes nesse dia.

a) R\$ 120,00
b) R\$ 107,00
c) R\$ 98,00
d) R\$ 90,00
e) R\$ 86,00

11. (Ibmec-RJ) Paulo e João são irmãos: o triplo da idade de João é igual ao quíntuplo da idade de Paulo. Sabe-se que, há 10 anos, a soma da idade de João com o dobro da de Paulo era igual a 14 anos. Daqui a 5 anos, o mais velho dos dois irmãos terá:

a) 12 anos
b) 17 anos
c) 20 anos
d) 25 anos
e) 30 anos

12. (UF-AM) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{7 - x}}$ é o intervalo:

a) $]-1, 7[$ c) $[-1, 7]$ e) $[-1, +\infty[$
b) $[-1, 7[$ d) $]5, +\infty[$

13. (Enem-MEC) Leia este classificado:

> **VENDEDORES JOVENS**
> **Fábrica de Lonas — Vendas no atacado**
> Dez vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.
> Salário: R$ 300,00 fixo + comissão de R$ 0,50 por m^2 vendido.
> Contato: (0XX97) 4342-1167 ou atacadista@lonaboa.com.br

Na seleção para as vagas desse anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500 m de tecido com largura de 1,40 m, e no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem-sucedidos os jovens que responderam, respectivamente:

a) R$ 300,00 e R$ 500,00.
b) R$ 550,00 e R$ 850,00.
c) R$ 650,00 e R$ 1 000,00.
d) R$ 650,00 e R$ 1 300,00.
e) R$ 950,00 e R$ 1 900,00.

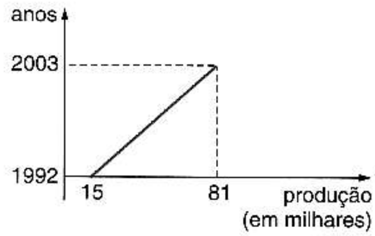
14. (U. E. Londrina-PR) O gerente de uma agência de turismo promove passeios de bote para descer cachoeiras. Ele percebeu que quando o preço pedido para esse passeio era R$ 25,00, o número médio de passageiros por semana era de 500. Quando o preço era reduzido para R$ 20,00, o número médio de fregueses por semana sofria um acréscimo de 100 passageiros. Considerando que essa demanda seja linear, se o preço for reduzido para R$ 18,00, o número médio de passageiros esperado por semana será:

a) 360 d) 700
b) 540 e) 1 360
c) 640

15. (PUC-SP) Às 8 horas de certo dia, um tanque, cuja capacidade é de 2 000 litros, estava cheio de água; entretanto, um furo na base desse tanque fez com que a água por ele escoasse a uma vazão constante. Se às 14 horas desse mesmo dia o tanque estava com apenas 1 760 litros, então a água em seu interior se reduziu à metade às:

a) 21 horas do mesmo dia.
b) 23 horas do mesmo dia.
c) 4 horas do dia seguinte.
d) 8 horas do dia seguinte.
e) 9 horas do dia seguinte.

16. (UCDB-MS) O gráfico a seguir apresenta a produção de camisetas de uma microempresa, em milhares de unidades, de 1992 até 2003.



Portanto, podemos afirmar que a produção de 1997 foi de:

a) 60 000 d) 15 000
b) 45 000 e) 10 000
c) 30 000

17. (U. E. Londrina-PR) Um camponês adquire um moinho ao preço de R$ 860,00. Com o passar do tempo, ocorre uma depreciação linear no preço desse equipamento. Considere que, em 6 anos, o preço do moinho será de R$ 500,00. Com base nessas informações, é correto afirmar:

a) Em três anos, o moinho valerá 50% do preço de compra.
b) Em nove anos, o preço do moinho será um múltiplo de nove.
c) É necessário um investimento maior que R$ 450,00 para comprar esse equipamento após sete anos.
d) Serão necessários 10 anos para que o valor desse equipamento seja inferior a R$ 200,00.
e) O moinho terá valor de venda ainda que tenha decorrido 13 anos.

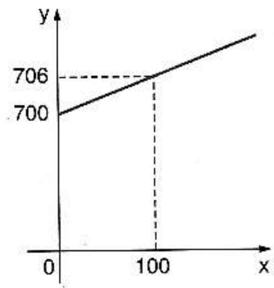
18. (UF-MG) Um estudante planejou fazer uma viagem de férias e reservou uma certa quantia em dinheiro para o pagamento de diárias. Ele tem duas opções de hospedagem: a Pousada *A*, com diária de R$ 25,00, e a Pousada *B*, com diária de R$ 30,00. Se escolher a Pousada *A* em vez da Pousada *B*, ele poderá ficar três dias a mais de férias.
Nesse caso, é correto afirmar que, para o pagamento de diárias, esse estudante reservou:

a) R$ 300,00 c) R$ 350,00
b) R$ 600,00 d) R$ 450,00

19. (UF-AL) O custo mensal total de fabricação de um certo produto é igual à soma de um valor fixo de R$ 700,00 com o custo de produção de R$ 0,60 por unidade fabricada no mês. Cada unidade é vendida por R$ 1,00.
De acordo com as informações dadas, analise as afirmativas abaixo.

a) O custo de produção de 150 unidades é R$ 90,00.
b) Em um mês em que foram fabricadas 200 unidades, o custo total mensal foi de R$ 820,00.

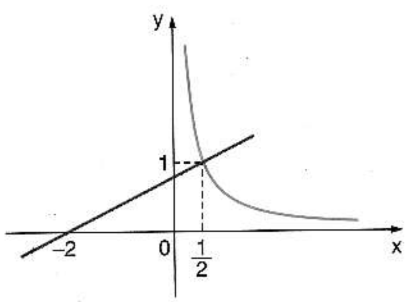
c) O gráfico da função custo mensal total, em reais, em função do número x de unidades fabricadas no mês é:



d) Em um mês em que foram fabricadas 2 000 unidades, o lucro foi de R$ 150,00.

e) Em um mês, para não haver prejuízo, devem ser vendidas, no mínimo, 1 750 unidades.

20. (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções *f* e *g*.



Se $f(x) = \frac{a}{x}$, o valor de *a* é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{4}{3}$

b) 2 d) $\frac{5}{8}$

21. (ESPM-SP) Do centro de uma cidade até o aeroporto são 40 km por uma grande avenida. Os táxis que saem do aeroporto cobram R$ 3,60 pela bandeirada e R$ 0,80 por quilômetro rodado. Os que saem do centro cobram R$ 2,00 pela bandeirada e R$ 0,60 por quilômetro rodado. Dois amigos se encontraram num restaurante que fica nessa avenida, sendo que um tomou o táxi que sai do aeroporto e o outro tomou o que parte do centro e, para surpresa dos dois, os seus gastos foram exatamente iguais. A distância do restaurante ao aeroporto é de:

a) 10 km c) 14 km e) 18 km

b) 12 km d) 16 km

22. (U. F. Viçosa-MG) Sejam *A* e *B* os pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ e $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ com o eixo dos *x*, respectivamente. Sabendo-se que *C* é o ponto de interseção desses gráficos, a área do triângulo ABC é igual a:

a) 14 c) 10 e) 18

b) 12 d) 16

desafios

1. Durante as férias, uma locadora de automóveis lançou a seguinte promoção para a diária do aluguel de um carro: "Para distâncias de até 120 km é cobrada uma taxa fixa e mais *p* reais por quilômetro rodado. Qualquer quilômetro excedente tem desconto de 20% sobre *p*".
Sabendo que dois clientes rodaram em um dia, respectivamente, 80 km e 180 km e que o primeiro pagou R$ 57,20 a menos que o segundo, determine:

a) o valor de *p*; b) o valor da taxa fixa.

2. (UF-ES, adaptado) A tabela abaixo apresenta a população mundial e o consumo mundial de água, em m^3, por habitante, nos anos de 1940 e 1990:

Ano	População mundial	Consumo mundial de água por habitante
1940	$2{,}3 \times 10^9$	400 m^3
1990	$5{,}3 \times 10^9$	800 m^3

Admita que o consumo mundial de água (em m^3) tenha crescido linearmente nesses cinqüenta anos. Quantos metros cúbicos de água foram consumidos no mundo, em 1950?