Livro Eletrônico

Aula 10

Matemática II p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

AULA 10 – Sistema Cartesiano; Estudo Analítico da Reta; Posições Relativas e Distância de Ponto e Reta; Áreas

Sumário

1- INTRODUÇÃO

Olá, meu futuro aprovado! Como andam os estudos? Espero que bem!

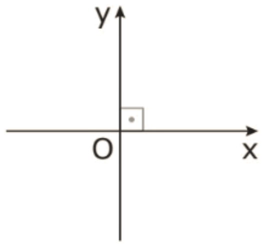
Nesta aula daremos INÍCIO ao conteúdo de **GEOMETRIA ANALÍTICA.** Espero que estejam gostando do nível da teoria abordada para o seu certame. Ainda temos muita coisa para ver e exercitar. Não perca o foco!

Não esqueça do nosso fórum, local onde você poderá retirar possíveis dúvidas sobre seu aprendizado.

2 – Sistema Cartesiano e Ponto

1 – Sistema Cartesiano – Coordenadas de um ponto

Sejam x e y dois eixos (retas orientadas) perpendiculares (90º) entre si e com origem comum O, conforme figura a seguir:



Nessas condições, diz-se que x e y formam um sistema cartesiano retangular (ou ortogonal), e o plano por eles determinado é chamado de plano cartesiano. Ressalto que esse plano cartesiano é formado por infinitos pares ordenados e que cada par ordenado possui sua abcissa e ordenada respectiva.

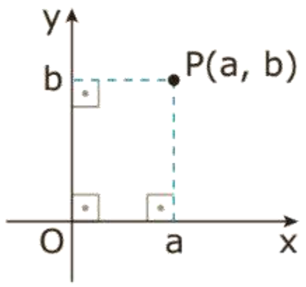
- Eixo x (ou Ox): eixo das abscissas

- Eixo y (ou Oy): eixo das ordenadas

- O: origem do sistema

A cada ponto **P** do plano, corresponderão dois números: **a** (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções ortogonais de **P** sobre o eixo x e sobre o eixo y, respectivamente.

Assim, o ponto **P** tem coordenadas **a** e **b**, e será indicado analiticamente pelo par ordenado (a, b).

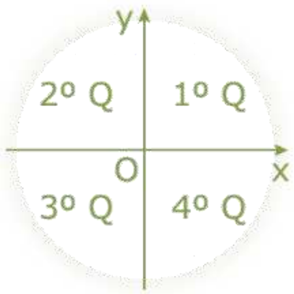


TOME NOTA!

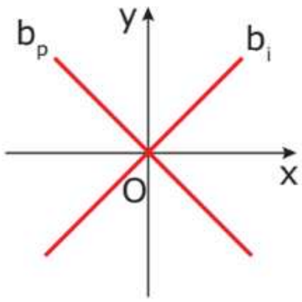
Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano retangular, que será chamado, simplesmente, sistema cartesiano. Ou seja, não levarei em consideração o Sistema Cartesiano Não-Ortogonal , bem como o Sistema de Coordenadas Polares.

TOME NOTA!

I) Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões, também chamadas de quadrantes, que são numerados em sentido anti-horário, como na figura a seguir:



II) Ressalto um ponto importante tanto em Função quanto em Analítica: a reta suporte das bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes ímpares (também conhecida como reta Beta 13) e indicada por b_i . A do 2º e 4º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes pares (também conhecida como reta Beta 24) e indicada por b_p .



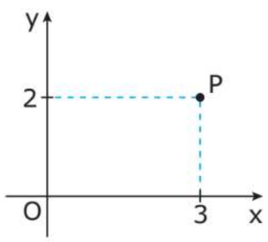
Nessas retas, temos características muito peculiares no que diz respeito aos termos que compõem seus pares ordenados. Veremos mais à frente tudo com mais detalhes.

✓ **Propriedades**

I) Todo ponto P(a;b) do 1º quadrante tem abcissa positiva (a > 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

$$P(a,b) \in 1^o Q \Leftrightarrow a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

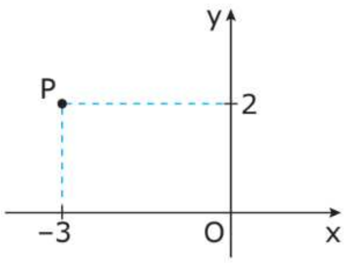
Assim: $P(3,2) \in 1^o Q$



II) Todo ponto P(a;b) do 2º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

$$P(a,b) \in 2^o Q \Leftrightarrow a < 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

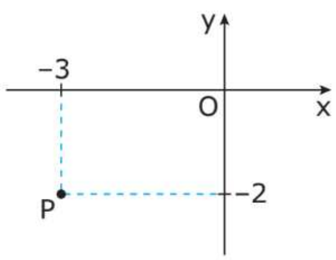
Assim: $P(-3,2) \in 2^o Q$



III) Todo ponto P(a;b) do 3º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

$$P(a,b) \in 3^o Q \Leftrightarrow a < 0 \quad e \quad b < 0$$

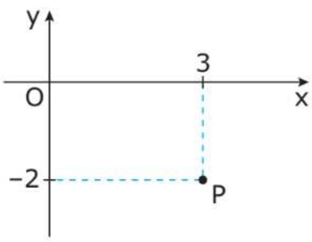
Assim: $P(-3,-2) \in 3^o Q$



IV) Todo ponto P(a;b) do 4º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente

$$P(a,b) \in 4^o Q \Leftrightarrow a > 0 \quad e \quad b < 0$$

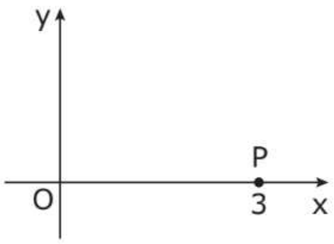
Assim: $P(3,-2) \in 4^o Q$



V) Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada nula e reciprocamente.

$$P(a,b) \in Ox \Leftrightarrow b = 0$$

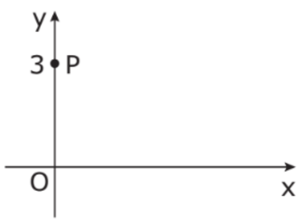
Assim: $P(3,0) \in Ox$



VI) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula e reciprocamente.

$$P(a,b) \in Oy \Leftrightarrow a = 0$$

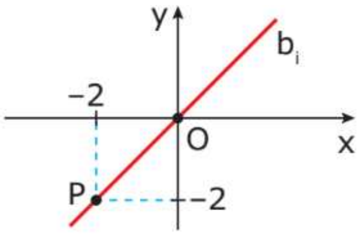
Assim: $P(0,3) \in Oy$



VII) Todo ponto P(a;b) da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais (a = b) e reciprocamente.

$$P(a,b) \in b_i \Leftrightarrow a = b$$

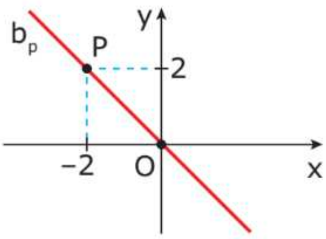
Assim: $P(-2,-2) \in b_i$



VIII) Todo ponto P(a;b) da bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas (a = -b) e reciprocamente.

$$P(a,b) \in b_p \Leftrightarrow a = -b$$

Assim: $P(-2,2) \in b_p$



Podemos perceber que, sempre que tivermos definido os termos de um par ordenado e seus sinais, já poderemos afirmar a que quadrante o mesmo pertence. Isso se faz importante, não só em analítica, bem como nas aulas de função polinomial.

2 – Ponto Médio

Imaginemos agora, um segmento de reta $\overline{AB}$, delimitado por dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Podemos, a partir da fórmula a seguir, definir as coordenadas do ponto médio deste segmento. Ressalto que este ponto médio pode ser tanto de um segmento isolado, como num segmento pertencente a um plano cartesiano. Veja a seguir!

Consideram-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Ou seja, o ponto **M** é dado pela média aritmética das abcissas e ordenadas dos pontos, veja:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

3 – BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Como não é o objeto do nosso curso provar as coordenadas do baricentro de um triângulo qualquer, basta ter em mente que: em um triângulo ABC de vértices , o baricentro (ponto de encontro das medianas) tem coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ou seja, o ponto **G** é dado pela média aritmética das abcissas e ordenadas dos pontos, veja:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

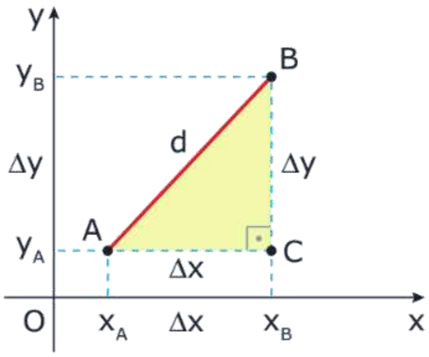
4 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Chegamos a uma parte da matéria que faz toda diferença no aprendizado da Geometria Analítica. Ressalto que distância entre dois pontos é um conceito geométrico, assim, não pode assumir valores negativos. Isso difere do conceito de medida algébrica de um segmento orientado, que pode assumir tanto valores negativos quanto não negativos.

Quero deixar claro que se a distância entre dois pontos resultar em um valor NULO, isso implicará em uma coincidência de pontos, ou seja, os pontos dados na questão serão coincidentes.

Na sua prova, a banca poderá cobrar a **distância entre duas pontos pertencentes a uma reta orientada,** ou até mesmo a distância entre dois pontos levando-se em conta o Plano Cartesiano. No primeiro caso, **basta calcular o módulo da diferença entre as abcissas dadas.** Isso mesmo, simples assim. Já no segundo caso, devemos recorrer ao teorema de **Pitágoras**. Veja!!

Considerem-se dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo a algum dos eixos coordenados. Traçando-se por **A** e **B** as retas paralelas aos eixos coordenados que se interceptam em **C**, **tem-se o triângulo ACB, retângulo em C.**



A distância entre os pontos **A** e **B** que se indica por **d (hipotenusa do triângulo)**, é tal que:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

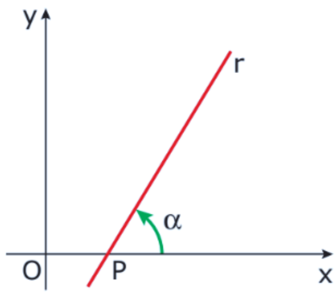
Quero deixar claro que, como $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, a ordem escolhida para a diferença das abcissas não altera o cálculo de **d, pelo simples fato da diferença estar elevada a um expoente par**. O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas.
Ressalto que a fórmula para cálculo da distância continua válida se o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos, neste caso, termos o cálculo da distância entre dois pontos em um eixo (reta orientada), ou, ainda, se os pontos **A** e **B** coincidem, caso em que d = 0

3 – ESTUDO ANALÍTICO DA RETA

1 – INCLINAÇÃO DE UMA RETA

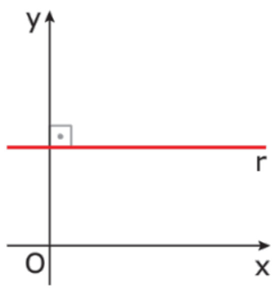
Considere-se um plano cartesiano e uma reta r concorrente (ou seja, com ponto de interseção) com o eixo **x** no ponto **P**.

Chama-se **inclinação** de **r** a **medida do ângulo α (em graus) que r forma com o eixo Ox, sendo esse ângulo medido a partir do eixo x no sentido anti-horário.**



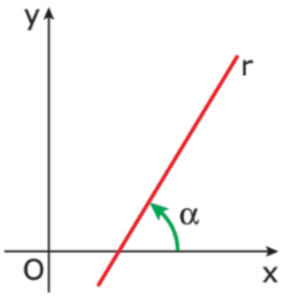
Sendo **r** paralela ao eixo **x** (horizontal), define-se como inclinação de **r** o ângulo de medida zero, isto é, $\alpha = 0^o$ .Então:

$$\alpha = 0^\circ \qquad \text{(nulo)}$$

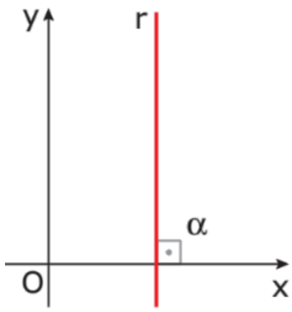


A reta acima contém todos os pares ordenados que possuem a mesma ordenada. Ou seja, o termo que varia é somente a abcissa.

Sendo **r** possui uma inclinação tal que o ângulo é agudo, então: $0 < \alpha < 90°$ (agudo)

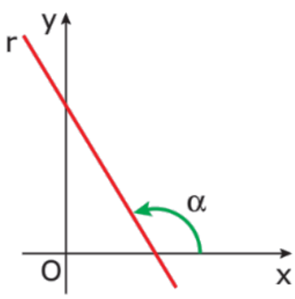


Sendo **r** possui uma inclinação tal que o ângulo é agudo, então: $\alpha = 90°$ (reto)



A reta acima contém todos os pares ordenados que possuem a mesma abcissa. Ou seja, o termo que varia é somente a ordenada.

Sendo **r** possui uma inclinação tal que o ângulo é agudo, então: $90° < \alpha < 180°$ (obtuso)

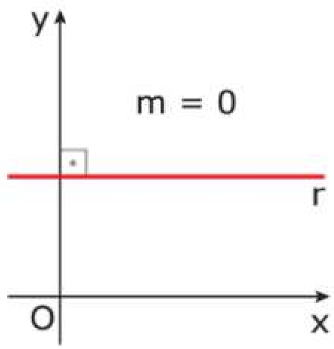


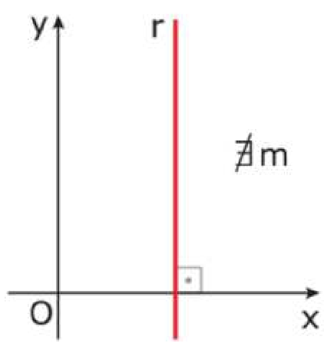
2 – Coeficiente Angular de uma Reta

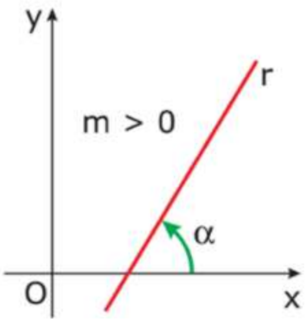
Primeiro ponto que gostaria de destacar é: **NÃO CONFUNDA INCLINAÇÃO DA RETA COM COEFICNIENTE ANGULAR.** O primeiro é resultado um uma tangente do ângulo formado, o segundo é o ângulo propriamente dito. Para explicar melhor esse tópico, vamos à sua definição!

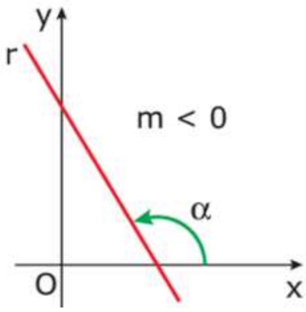
Considerando-se uma reta **r** não perpendicular ao eixo **x** (não vertical), ou seja, tal que $\alpha \neq 90^o$, chama-se coeficiente angular (ou declividade) da reta **r** o número **m**, tal que m = tgα .

I. A inclinação m de uma reta é tal que $0^o \leq \alpha < 180^o$. Assim, tem-se:

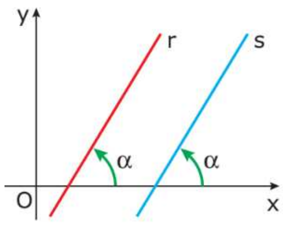








II. No plano cartesiano, duas retas paralelas têm a mesma inclinação.

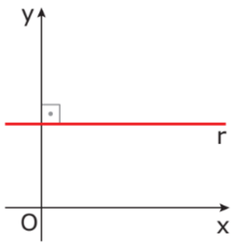


Fique muito ligado, pois, se $\alpha = 90^o$, então a reta não terá coeficiente angular.

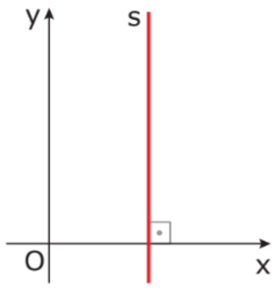
Exemplos:

1) Ache os coeficientes angulares das retas r, s, t e u.

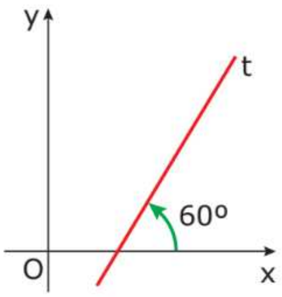
a)



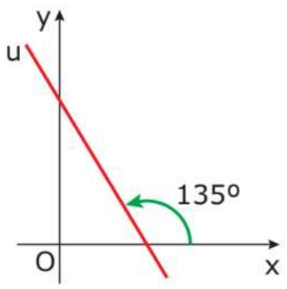
b)



c)



d)



Comentário:

a) $\alpha_r = 0^o \Rightarrow m_r = tg0^o \Rightarrow m_r = 0$

b) $\alpha_s = 90^o \Rightarrow$ não existe m_s

c) $\alpha_t = 90^o \Rightarrow m_t = tg60^o \Rightarrow m_t = \sqrt{3}$

d) $\alpha_u = 135^o \Rightarrow m_u = tg135^o \Rightarrow m_t = -1$

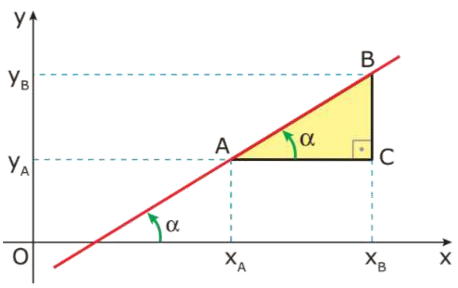
3 – Coeficiente Angular de uma Reta que Passa por dois Pontos Dados

Considerem-se dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, isto é, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é paralela aos eixos coordenados. Há dois casos a se considerar:

1º caso: $\alpha < 90^o$

Do triângulo ABC, tem-se:

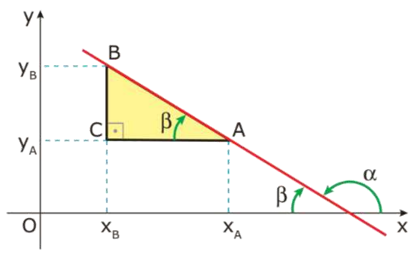
$$m = tg\alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



2º caso: $\alpha > 90^o$

Do triângulo ABC, tem-se:

$$tg\beta = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$



Como $\alpha + \beta = 180^o$, tem-se $tg\alpha = -tg\beta$. Logo: $m = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Portanto, para os dois casos, tem-se:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

TOME NOTA!

Preste bastante atenção no seguinte: se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo x $(y_A = y_B$ e $x_A \neq x_B)$, tem-se m = 0, e a fórmula continua válida.

Ressalto ainda que se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao eixo x $(x_A = x_B$ e $y_A \neq y_B)$, não existe m, pois $x_A - x_B = 0$. Em outras palavras, podemos dizer que a tangente fica com seu denominador nulo, o que se torna inviável.

Exemplos:

1) Qual o coeficiente angular das retas que passam nos seguintes pontos:

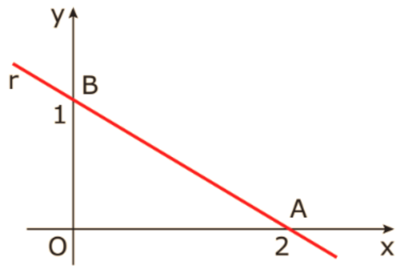
A) $\left.\begin{matrix} A(2,1) \\ B(4,9) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{9-1}{4-2} \Rightarrow m_{AB} = 4$

B) $\left.\begin{matrix} A(-1,2) \\ B(0,5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{5-2}{0-(-1)} \Rightarrow m_{AB} = 3$

FIQUE ATENTO!

Sempre que a diferença entre as abcissas tiver o mesmo sinal da diferença entre as ordenadas, poderemos afirmar não só que a tangente será positiva, bem como a inclinação da nossa reta estará para a direita, ou seja, a reta terá um comportamento crescente.

2) Qual o coeficiente angular da reta r na figura?



Comentário:

Temos: $A(2,0)$ e $B(0,1)$

$$m = m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{1-0}{0-2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

FIQUE **ATENTO!**

Sempre que a diferença entre as abcissas tiver sinal contrário ao da diferença entre as ordenadas, poderemos afirmar não só que a tangente será negativa, bem como a inclinação da nossa reta estará para a esquerda, ou seja, a reta terá um comportamento decrescente.

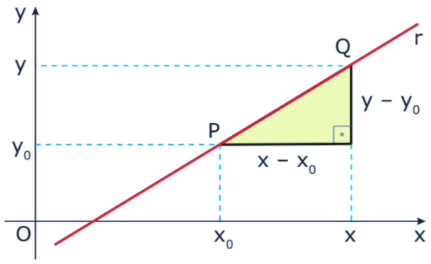
4 – Equação Fundamental de uma Reta

No plano cartesiano, uma reta fica determinada por um dos dois modos, o primeiro deles é conhecendo-se um dos seus pontos e sua declividade, que é dada pela inclinação da reta. O outro, por sua vez, é conhecendo-se dois pontos distintos que pertencem a ela. Vejamos, então, como se obtém a equação de uma reta.

1º modo: precisamos considerar dois casos:

a) A reta tem coeficiente angular.

Para se obter uma equação da reta **r**, que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**, devemos considerar um ponto qualquer $Q(x, y)$ de **r**, distinto de **P**, para que o coeficiente angular **m** da reta possa ser calculado a partir de **P** e **Q**. Veja!



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (1)$$

A relação (1) entre as coordenadas dos pontos **P** e **Q** pode ser escrita na forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (2)$$

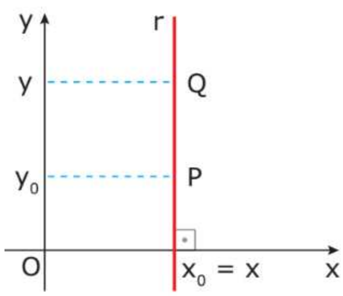
Note que se P = Q, então $x = x_0$ e $y = y_0$, e a relação (2) continua verdadeira, pois $y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0)$. Assim:

A equação fundamental da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m** é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

b) A reta não tem coeficiente angular.

Para se obter uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem inclinação 90^o (reta vertical), devemos imaginar o seguinte gráfico:



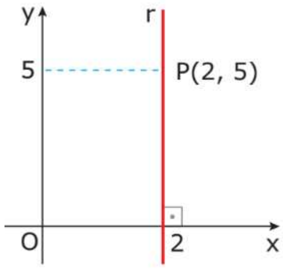
Sendo **r** uma reta vertical e Q(x, y) um ponto genérico de **r**, tem-se:

$$x = x_0$$

Exemplo

1) Escrever uma equação da reta que passa pelo ponto P(2, 5) e é perpendicular ao eixo x.

Comentário:



$x = x_0$, isto é, $x = 2$, assim, $x - 2 = 0$.

Tenha sempre em mente que: se a reta é perpendicular ao eixo Ox, implica dizer que esta reta contém todos os pares ordenados de mesma abcissa!!!!!

2º modo: Obter uma equação da reta que passa por dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ Procede-se da seguinte maneira: em um primeiro momento, devemos calcular o coeficiente angular **m** da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Agora, com o coeficiente angular m e qualquer um dos dois pontos dados, recai-se no 1º modo.

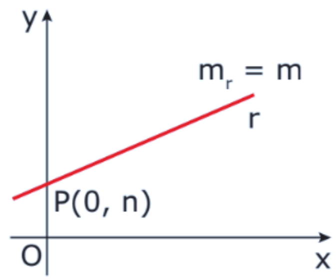
Assim, tomando-se o ponto A, tem-se:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

5 – FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA RETA

✓ **Equação Reduzida**

Considere-se a reta r que passa pelo ponto P(O,n) e tem coeficiente angular m.



Sua equação fundamental é:

$$y - n = m(x - 0)$$

Ou seja:

$$y = mx + n$$

TOME NOTA!

A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular **m** e a ordenada **n** do ponto onde esta reta intercepta o eixo **y**. Este ponto n é chamado de coeficiente linear.
É fácil concluir que, as retas de inclinação igual a 90° não possuem equação reduzida, pelo simples fato do coeficiente angular ser igual a ZERO.

✓ **Equação Geral**

No plano cartesiano, toda equação de uma reta pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ **(ou seja, a e b não podem ser simultaneamente nulos).**

Imaginemos dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, e $x_A \neq x_B$, assim:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A equação fundamental da reta que passa por **A** e **B** é:

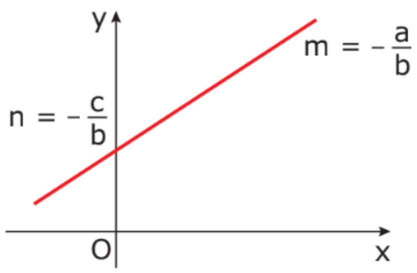
$$ax + by + c = 0$$

A partir da equação geral, imaginemos o seguinte, se $b \neq 0$, tem-se:

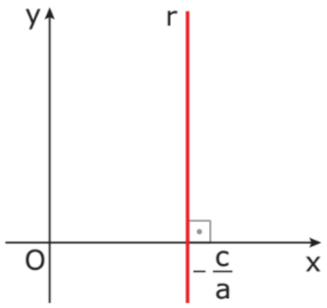
$$by = -ax - c \Rightarrow$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Comparando-se com a equação reduzida $y = mx + n$, tem-se:



Por outro lado, se $b = 0$, tem-se $ax + c = 0$, ou seja, $x = -\frac{c}{a}$



A reta é perpendicular ao eixo x.

Percebeu que a equação geral te leva a todas as outras?? Mágico, não?? Rsrsrs... Sigamos em frente!

TOME NOTA!

Se $c = 0$, a equação fica $ax + by = 0$, e a reta passa pela origem (0, 0). Assim, por exemplo, a reta $(r) 2x + 3y = 0$ passa pela origem. Por outro lado, se $a = 0$, a equação fica $by + c = 0$, e a reta é paralela ao eixo x. Assim, por exemplo, a reta $(r) 2y + 5 = 0$ é paralela ao eixo x.

Se $b = 0$, a equação fica $ax + c = 0$, e a reta é paralela ao eixo y. Assim, por exemplo, a reta $(r) 2x - 7 = 0$ é paralela ao eixo y.

PRESTE MAIS ATENÇÃO!!

Toda reta do plano cartesiano possui infinitas equações na forma geral. Assim, se $ax + by + c = 0$ é a equação de uma reta, então a equação $k(ax + by + c) = 0, k \neq 0$, representa a mesma reta, pois são equações equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções. Assim, por exemplo, $x + 2y + 3 = 0$ e $3(x + 2y + 3) = 0$ representam a mesma reta, pelo simples fato de serem proporcionais.

6 – Equação Segmentária

Considere-se uma reta **r** que intercepta o eixo x no ponto P(p, 0) e o eixo **y** no ponto Q(0, q), com $p \neq 0; q \neq 0$. A equação da reta r pode ser escrita na forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Essa forma de representação é chamada de equação segmentária da reta r.

TOME NOTA!

Se uma reta é paralela a um dos eixos ou passa pela origem, então sua equação não pode ser escrita na forma segmentária.

4 – Posições Relativas e Distância de Ponto e Reta

1 – Posições relativas de Duas Retas

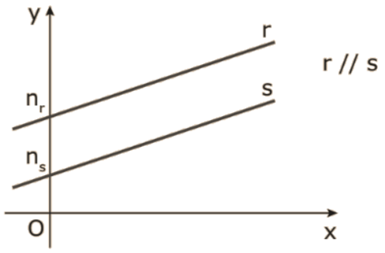
Duas retas **r** e **s** de um plano podem ser:

- paralelas (distintas se $r \cap s = \varnothing$ ou coincidentes, se $r \cap s = r \Rightarrow r = s$)

- **concorrentes se** $r \cap s = \{P\}$

Consideremos, então, no plano cartesiano, duas retas $(r) a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $(s) a_2x + b_2y + c_2 = 0$, tais que nem **r** nem **s** sejam paralelas aos eixos coordenados, isto é, $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$. Logo:

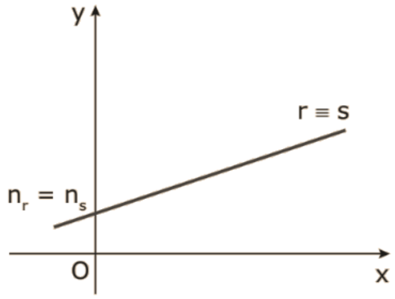
I) Se $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas distintas



Ou seja, a relação entre os coeficientes será da forma:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$ (**r** e **s** paralelas distintas)

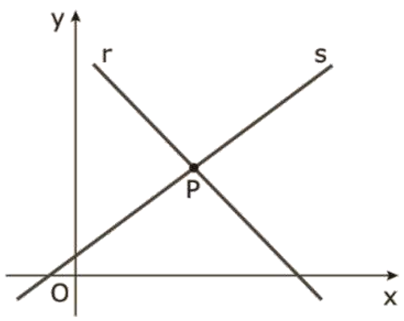
II) Se $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas coincidentes



Ou seja, a relação entre os coeficientes será da forma:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$ (**r** e **s** paralelas coincidentes)

III) Se $m_r \neq m_s$, as retas **r** e **s** são concorrentes.



Ou seja, a relação entre os coeficientes será da forma:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$ (**r** e **s** concorrentes)

TOME NOTA!

Tenha sempre em mente que, se **r** e **s** são concorrentes no ponto **P**, obtêm-se as coordenadas de **P** resolvendo o sistema formado pelas suas equações.

Exemplo:

Sejam $\begin{matrix} r: 3x + 4y - 5 = 0 \\ s: 6x + by + c = 0 \end{matrix}$

Comentário:

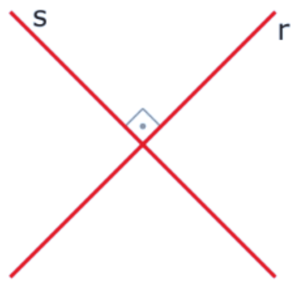
$$r \equiv s \text{ se: } \frac{3}{6} = \frac{4}{b} = -\frac{5}{c} \Rightarrow b = 8; c = -10$$

$$r\,//\,s, \text{ se}: b = 8; c \neq -10$$

$$r \times s, \text{ se}: b \neq 8; c \in \mathbb{R}$$

2 – Retas Perpendiculares

Duas retas **r** e **s** são perpendiculares uma à outra se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.



- **Teorema**

No plano cartesiano, duas retas **r** e **s** de coeficientes angulares m_r e m_s são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_r.m_s = -1$

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r.m_s = -1 \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$$

TOME NOTA!

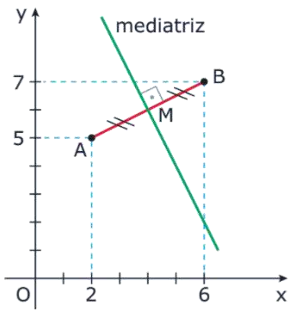
Se uma das retas é paralela a um dos eixos coordenados, então a reta perpendicular a ela é paralela ao outro eixo coordenado.

Exemplo:

1) Dar a equação da mediatriz do segmento de extremos nos pontos A(2, 5) e B(6, 7)

Comentário:

A mediatriz é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo seu ponto médio.



Sendo x_M e y_M as coordenadas do ponto médio **M**, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ y_M = \dfrac{5+7}{2} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow m(4,6)$$

Coeficiente angular de $\overline{AB} : m_{AB} = \dfrac{7-5}{6-2} = \dfrac{1}{2}$

Sendo m o coeficiente angular da mediatriz, deve-se ter

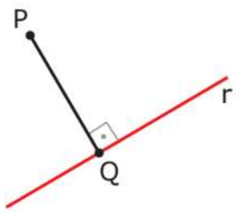
$$m.m_{AB} = -1 \Rightarrow M.\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow m = -2$$

Portanto, a equação da mediatriz é:

$$y-6 = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x+14$$

3 – Distância de Ponto a Reta

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é a distância PQ, em que **Q** é a projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.



- **Teorema**

No plano cartesiano, a distância **d** do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r, de equação $ax+by+c=0$, é dada pela expressão:

$$d(P,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

TOME NOTA!

A fórmula da distância continua válida se **P** pertence a **r** (d = 0), ou, ainda, se b = 0, caso em que **r** é perpendicular ao eixo **x**.

Exemplo:

1) Sejam P(2, -1) e $r: y=-\frac{3}{4}x+1 \Rightarrow 3x+4y-4=0$

Comentário:

$$d(P,r)=\frac{|3.(2)+4.(-1)-4|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$$

5 – ÁREAS E TEORIA ANGULAR

1 – ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área S de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A);\ B(x_B, y_B);\ C(x_C, y_C)$ é dada por:

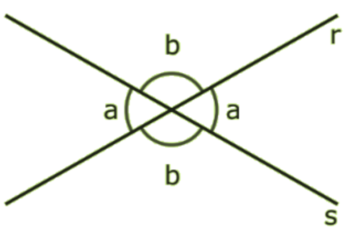
$$S = \frac{1}{2}|D|, \quad \text{em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

TOME NOTA!

Fique sempre atento ao seguinte, se D = 0, então os pontos **A**, **B** e **C** são colineares. Ressalto ainda que, para se calcular a área de um polígono, podemos dividi-lo em triângulos e calcular a soma das áreas de cada um deles. Essa técnica ajuda bastante em diversas questões sobe área!!

2 – ÂNGULO AGUDO ENTRE DUAS RETAS CONCORRENTES

Imaginemos duas retas **r** e **s. Se essas retas** são concorrentes e não perpendiculares, elas determinam dois ângulos agudos **a** (opostos pelo vértice) e dois ângulos obtusos **b** (opostos pelo vértice), tais que a + b = 180° e tg a = -tg b. Observe a figura abaixo:



- **Teorema**

Sejam $(r)\,y = m_r + n_r$ e $(s)\,y = m_s x + n_s$ duas retas concorrentes e não perpendiculares $(m_r.m_s \neq -1)$

O ângulo agudo φ entre elas é tal que:

$$tg\varphi = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r.m_s}\right|$$

- **Caso Particular**

Sejam $(r)\,y = m_r\,x + n_r, m_r \neq 0,$ e $(s)x = k$, ou seja, a reta (s) sendo perpendicular a Ox, teremos um ângulo agudo φ entre elas é tal que:

$$tg\varphi = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

Exemplo:

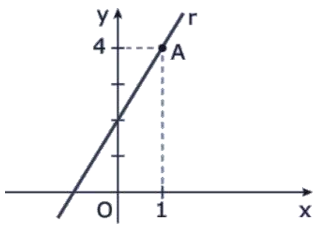
Sejam $r: y = 2x + 7; s: y = -3x$

Comentário:

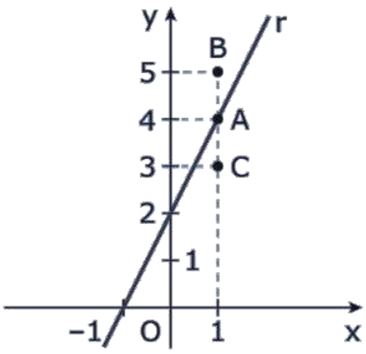
$$tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1+2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \varphi = 45^o$$

3 – Posições Relativas entre Ponto e Reta

Consideremos, por exemplo, a reta **r** de equação reduzida y = 2x + 2, cujo gráfico é a figura a seguir, e o ponto A(1, 4). Observe que o ponto **A** pertence a **r**, pois, atribuindo o valor 1 na abcissa, temos como ordenada o valor 4. Veja: 4 = 2.1+2



Consideremos agora os pontos B(1, 5) e C(1, 3), que possuem abcissas iguais à de **A**. Como as ordenadas de **B** e **C** são diferentes da ordenada de **A**, tais pontos não pertencem a reta **r** .

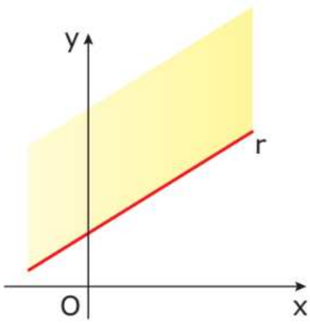


Assim:

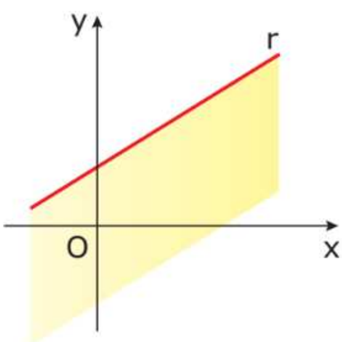
- ✓ Sendo $y_B = 5$, temos $y_B > y_A$; e, portanto, o ponto **B** está acima de **A**.
- ✓ Sendo $y_c = 3$, temos $y_c < y_A$; e, portanto, o ponto **C** está abaixo de **A**.

Podemos resumir da seguinte forma: se $y = mx + n$ é a equação reduzida de uma reta **r**, então:

a) Os pontos que satisfazem a inequação $y > mx + n$ estão acima de **r**.

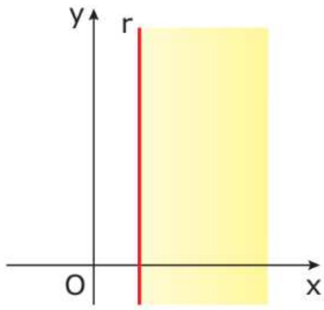


b) Os pontos que satisfazem a inequação $y < mx + n$ estão abaixo da reta **r**.

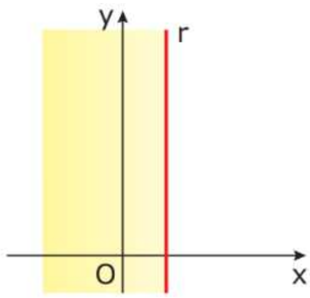


Por outro lado, e a reta **r** é perpendicular ao eixo **x** e sua equação é $x = k$, de maneira análoga, concluímos que:

c) Os pontos que satisfazem a inequação $x > k$, ou seja, os pontos de abscissa maior que ***k***, estão a direita da reta **r**.



d) Os pontos que satisfazem a inequação $x < k$, ou seja, os pontos de abscissa menor que ***k***, estão a esquerda da reta **r**.

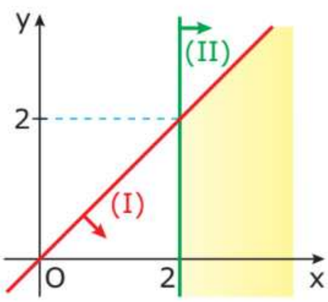


Exemplo:

Esboçar a região do plano delimitada por:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \quad (\mathrm{I}) \\ x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Comentário:



QUESTÕES
COMENTADAS

1. (Efomm 2019) Calcule a área S do triângulo de vértices $A(5, 7)$; $B(2, 3)$; $C(9, 2)$. Considerando o plano cartesiano, temos:

a) 7,8

b) 15

c) 19

d) 30

e) 15,5

Comentário:

Calculando o determinante formado pelas coordenadas dos vértices, temos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 + 4 + 63 - 27 - 10 - 14 = 31$$

A área será dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |31| = 15{,}5$$

Gabarito: E

2. (Eear 2019) Sejam $A(-3, 3), B(3, 1), C(5, -3)$ e $D(-1, -2)$ vértices de um quadrilátero convexo. A medida de uma de suas diagonais é

a) 15

b) 13

c) 12

d) 10

Comentário:

Supondo que o quadrilátero convexo seja o quadrilátero $ABCD$, as diagonais são AC e BD.

$$AC = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (-3-3)^2}$$
$$AC = 10$$

$$BD = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2}$$
$$BD = 5$$

Assim, uma das medidas de suas diagonais é 10.

Gabarito: D

---

3. (Eear 2019) Para que os pontos $A(x,3), B(-2x,0)$ e $C(1,1)$ sejam colineares, é necessário que x seja

a) -2

b) -1

c) 2

d) 3

Comentário:

Para que os pontos A, B e C sejam colineares, basta que:

$$\frac{0-3}{-2x-x} = \frac{1-0}{1-(-2x)}$$
$$\frac{-3}{-3x} = \frac{1}{1+2x}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+2x}$$
$$1+2x = x$$
$$x = -1$$

Gabarito: B

---

4. (Eear 2019) Considere os pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 1)$ e a reta $r: 3x + 4y = 0.$ Se $d_{A,r}$ e $d_{B,r}$ são, respectivamente, as distâncias de A e de B até a reta $r,$ é correto afirmar que

a) $d_{A,r} > d_{B,r}$

b) $d_{A,r} < d_{B,r}$

c) $d_{A,r} = d_{B,r}$

d) $d_{A,r} = 2d_{B,r}$

Comentário:

Do enunciado, temos:

$$d_{A,r} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d_{A,r} = \frac{18}{5}$$

$$d_{B,r} = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d_{B,r} = \frac{16}{5}$$

Portanto,

$d_{A,r} > d_{B,r}$

Gabarito: A

---

5. (Espcex 2019) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 1,$ no ponto $(4, -7),$ é igual a

a) $y = -2x + 1.$

b) $y = 3x - 19.$

c) $y = x - 11.$

d) $y = -3x + 5.$

e) $y = 2x - 15.$

Comentário:

Equação da reta tangente à parábola no ponto $(4,-7)$.

$$y-(-7)=m\cdot(x-4)\Rightarrow y=mx-4m-7$$

Resolvendo um sistema com as equações da parábola e da reta, temos:

$$x^2-6x+1=mx-4m-7\Rightarrow x^2-(m+6)x+4m+8=0$$

Como existe apenas um ponto de intersecção do discriminante deverá ser zero, ou seja:

$$\Delta=0$$
$$(-(m+6))^2-4\cdot(4m+8)=0$$
$$(m-2)^2=0\Rightarrow m=2$$

Considerando $m=2,$ a equação da reta será:

$$y=2x-4\cdot 2-7\Rightarrow y=2x-15$$

Gabarito: E

---

6. (Epcar 2018) Considere no plano cartesiano as retas r e s dadas pelas equações:

$\begin{array}{l} r: 3x+3py+p=0 \\ s: px+9y-3=0 \end{array}$, onde $p\in\mathbb{R}$.

Baseado nessas informações, marque a alternativa INCORRETA.

a) r e s são retas concorrentes se $|p|\neq 3$.

b) Existe um valor de p para o qual r é equação do eixo das ordenadas e s é perpendicular a r.

c) r e s são paralelas distintas para dois valores reais de p.

d) r e s são retas coincidentes para algum valor de p.

Comentário:

[A] Verdadeira. De fato, pois se

$$\frac{3}{p} \neq \frac{3p}{9} \Leftrightarrow p^2 \neq 9 \Leftrightarrow |p| \neq 3,$$

então as retas são concorrentes.

[B] Verdadeira. Com efeito, pois se $p = 0$, então $r : x = 0$ e $s : y = \frac{1}{3}$.

[C] Verdadeira. De fato, pois se

$$\frac{3}{p} = \frac{3p}{9} \neq \frac{p}{-3} \Leftrightarrow p = \pm 3,$$

então r e s são paralelas distintas.

[D] Falsa. As retas r e s serão coincidentes se existir algum valor real de p para o qual se tenha $\frac{3}{p} = \frac{3p}{9} = \frac{p}{-3}$. Porém, tal sistema é impossível e, assim, não existe p real de tal sorte que r e s sejam coincidentes.

Gabarito: D

---

7. (Eear 2017) Seja ABC um triângulo tal que $A(1,1)$, $B(3,-1)$ e $C(5,3)$. O ponto _____ é o baricentro desse triângulo.

a) $(2,1)$.

b) $(3,3)$.

c) $(1,3)$.

d) $(3,1)$.

Comentário:

Sabendo que as coordenadas do baricentro correspondem à média aritmética simples das coordenadas dos vértices do triângulo, vem

$$\left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{1-1+3}{3}\right) = (3, 1).$$

Gabarito: D

---

8. (Eear 2017) O triângulo ABC formado pelos pontos $A(7, 3)$, $B(-4, 3)$ e $C(-4, -2)$ é

a) escaleno

b) isósceles

c) equiângulo

d) obtusângulo

Comentário:

Calculando os quadrados das medidas dos lados do triângulo ABC, encontramos

$d^2(A, B) = (-4-7)^2 + (3-3)^2 = 121,$

$d^2(A, C) = (-4-7)^2 + (-2-3)^2 = 146$

$d^2(B, C) = (-4+4)^2 + (-2-3)^2 = 25$

Portanto, sendo $d^2(A, C) = d^2(A, B) + d^2(B, C)$, podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo escaleno.

Gabarito: A

---

9. (Mackenzie 2017) A equação da mediatriz do segmento que une os pontos $P = (1, -2)$ e $Q = (5, 4)$ é

a) $2x + 3y - 9 = 0$

b) $2x - 3y + 9 = 0$

c) $2x - 3y - 3 = 0$

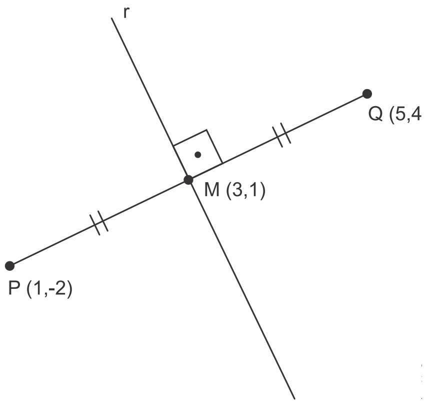
d) $3x - 2y - 7 = 0$

e) $3x + 2y - 11 = 0$

Comentário:

Seja r a reta mediatriz do segmento formado pelos pontos P e Q.

Observe a figura abaixo:



$$x_M = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{4-(-2)}{5-1}$$

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{6}{4}$$

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{3}{2}$$

Como $r \perp \overleftrightarrow{PQ}$ e $m_{\overleftrightarrow{PQ}} \neq 0$,

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} \cdot m_r = -1.$$

Então,

$$\frac{3}{2} \cdot m_r = -1$$

$$m_r = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} m_r = -\dfrac{2}{3} \\ M(3,1) \end{cases}$$

Assim, a equação da reta r é dada por:

$$y-1=-\frac{2}{3}\cdot(x-3)$$
$$3\cdot(y-1)=-2x+6$$
$$3y-3=-2x+6$$
$$2x+3y-9=0$$

Gabarito: A

10. (Eear 2016) Considere os pontos $A(2,8)$ e $B(8,0)$ A distância entre eles é de

a) $\sqrt{14}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{7}$

d) 10

Comentário:

A distância d entre os pontos A e B será dada por:

$$d=\sqrt{(2-8)^2+(8-0)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

Gabarito: D

11. (Eear 2016) Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, onde $A(0,10)$, $B(2,12)$, $C(-2,3)$ e $D(4,3)$. O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é dado pelos pontos M e N, pertencentes respectivamente a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$.

Assinale a alternativa que corresponde corretamente a esses pontos.

a) $M\left(\frac{1}{2},1\right)$ e $N(-1,3)$

b) $M(-2,10)$ e $N(-1,3)$

c) $M(1,-2)$ e $N(1,3)$

d) $M(1,11)$ e $N(1,3)$

Comentário:

Determinando o ponto M (ponto médio do segmento AB), temos:

$$x_M = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{10+12}{2} = 11$$

Determinando, agora, o ponto N (ponto médio do segmento CD), temos:

$$x_N = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$y_N = \frac{3+3}{2} = 3$$

Os pontos pedidos são $M(1, 11)$ e $N(1, 3)$.

Gabarito: D

---

12. (Eear 2016) A equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(6, 8)$ é dada por

a) $y = 7x + 1$

b) $y = 6x + 1$

c) $y = \frac{7}{6}x + 1$

d) $y = \frac{6}{7}x + 1$

Comentário:

O coeficiente linear da reta é $b = 1$, pois ela passa pelo ponto $A(0, 1)$ e o coeficiente angular a será dado por:

$$a = \frac{8-1}{6-0} = \frac{7}{6}$$

Portanto, a equação da reta será dada por:

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{7}{6} \cdot x + 1$$

Gabarito: C

---

13. (Eear 2016) A reta s que passa por $P(1, 6)$ e é perpendicular a $r: y = \frac{2}{3}x + 3$ é

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) $y = x + 5$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

Comentário:

Sabendo que o coeficiente angular da reta r é $\frac{2}{3}$ e que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é -1, podemos escrever:

$$m_S \cdot \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow m_S = -\frac{3}{2}$$

Logo, a equação da reta r será dada por:

$$y - 6 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{2} + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{15}{2}$$

Gabarito: D

---

14. (Eear 2016) Dada a reta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto $P(5, 6)$, a distância de P à reta r é

a) $\sqrt{91}$

b) $30\sqrt{13}$

c) $\frac{3\sqrt{91}}{91}$

d) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Comentário:

Calculando a distância do ponto $P(5,6)$ a reta r, temos:

$$d=\frac{|2\cdot 5-3\cdot 6+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=\frac{3\cdot\sqrt{13}}{13}$$

Gabarito: D

---

15. (Espcex 2015) O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x+3y-4=0$ é o ponto

a) $(-3,-1)$.

b) $(-1,-2)$.

c) $(-4,4)$.

d) $(3,8)$.

e) $(3,2)$.

Comentário:

Considerando, $(r)\ 2x+3y-4=0$ e $P(1,5)$

Determinando a equação da reta (s) perpendicular a reta (r) e que passa pelo ponto $(1,5)$

$$\begin{aligned}(s)\ 3x-2y+k&=0\\ 3-10+k&=0\\ k&=7\end{aligned}$$

Logo, a equação da reta (s) será dada por $3x-2y+7=0$.

Determinando, o ponto M de intersecção das retas r e s.

$$\begin{cases}2x+3y-4=0\\ 3x-2y+7=0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $M(-1, 2)$.

Determinando agora o ponto A simétrico do ponto p em relação à reta r, M é ponto médio de PA.

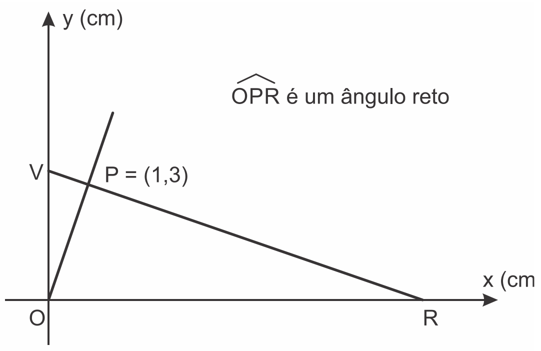
$$\frac{1+x_A}{2} = -1 \Rightarrow x_A = -3$$
$$\frac{5+x_A}{2} = 2 \Rightarrow x_A = -1$$

Logo, $A(-3, -1)$.

Gabarito: A

---

16. (Mackenzie 2014) Na figura abaixo, a área, em cm^2, do triângulo ORV é



a) $\frac{50}{3}$

b) $\frac{25}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{3}$

Comentário:

A reta $\overleftrightarrow{VR}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$. Portanto, o produtos dos coeficientes angulares destas retas é -1.

$$c \cdot m_{PQ} = -1.$$
$$m_{VR} \cdot \frac{3-0}{1-0} = -1$$
$$m_{VR} = -\frac{1}{3}$$

A reta $\overleftrightarrow{VR}$ passa por $P(1,3)$ e tem coeficiente angular $m = -\frac{1}{3}$. Sua equação será dada por:

$$y-3 = -\frac{1}{3}\cdot(x-1)$$
$$3y-9 = -x+1$$
$$x+3y-10 = 0$$

O ponto V tem abscissa zero, logo:

$$0+3y-10 = 0$$
$$3y = 10$$
$$y = \frac{10}{3}$$
$$\therefore V = \left(0, \frac{10}{3}\right)$$

O ponto R tem ordenada zero, logo:

$$x-3\cdot 0-10 = 0$$
$$x = 10$$
$$\therefore R = (10, 0)$$

Logo, a área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

Gabarito: A

17**.** (Mackenzie 2013) As raízes reais da equação $x^4 - 1 = 0$, dispostas em ordem crescente, formam, respectivamente, os coeficientes *a* e *b* da reta $r: ax + by + 1 = 0$. A equação da reta *s*, perpendicular à *r* e que passa pelo ponto P(1,2), será

a) $x - y + 3 = 0$

b) $-x + y - 1 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$

d) $-2x + y + 1 = 0$

e) $2x - y - 3 = 0$

Comentário:

As raízes reais da equação $x^4 - 1 = 0$ são -1 e 1. Logo, a = – 1 e b = 1 e a equação da reta r será:

$-x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$, onde $m_r = 1$.

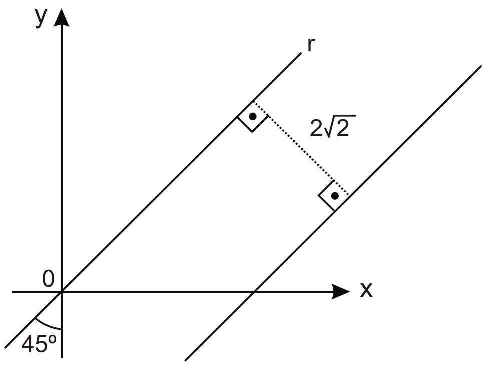
Como a reta s, que passa por P(1,2) é perpendicular à reta r, temos $m_a = -1$ e sua equação será dada por:

$y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0$.

Gabarito: C

---

18. (Mackenzie 2012) Na figura, as retas r e s são paralelas. Se (x,y) é um ponto de s, então x – y vale



a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) 4

d) $2\sqrt{2}$

e) $4\sqrt{2}$

Comentário:

Seja $A=(\alpha,0)$ o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abscissas.

Como a distância de A até a reta *r* é igual $2\sqrt{2}$ e o ângulo que a reta *r* forma com o eixo das abscissas mede 45°, segue que $\alpha=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$.

Portanto, $x-y=\alpha-0=4-0=4$.

Gabarito: C

---

19. (Epcar 2012) Considere no plano cartesiano as retas $r:\begin{cases}x=2t\\ y=3t+\frac{1}{2}\end{cases}$ e $s: (k+1)x-y-\frac{k}{2}=0,$ onde $k\in\mathbb{R}.$

Sobre as retas *r* e *s* é correto afirmar que **NUNCA** serão

a) concorrentes perpendiculares.

b) concorrentes oblíquas.

c) paralelas distintas.

d) paralelas coincidentes.

Comentário:

Escrevendo a reta $r:\begin{cases}x=2t\\ y=3t+\frac{1}{2}\end{cases}$ na forma geral, temos:

Escrevendo as duas retas na forma reduzida, temos:

$$(r)y=\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\ \text{ e (s) } y\ =\ (k+1)\cdot x+k$$

Para que as retas sejam paralelas iguais, devemos ter:

$K+1=\frac{3}{2} \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$
$K=\frac{1}{2}$

Como não se pode ter dois valores distintos para k, concluímos que as retas nunca serão paralelas iguais.

Gabarito: D

---

6 – Lista de Questões

1. (Efomm 2019) Calcule a área S do triângulo de vértices $A\,(5,7);\ B\,(2,3);\ C\,(9,2)$. Considerando o plano cartesiano, temos:

a) $7,8$

b) 15

c) 19

d) 30

e) 15,5

---

2. (Eear 2019) Sejam $A(-3,3), B(3,1), C(5,-3)$ e $D(-1,-2)$ vértices de um quadrilátero convexo. A medida de uma de suas diagonais é

a) 15

b) 13

c) 12

d) 10

---

3. (Eear 2019) Para que os pontos $A(x,3), B(-2x,0)$ e $C(1,1)$ sejam colineares, é necessário que x seja

a) -2

b) -1

c) 2

d) 3

---

4. (Eear 2019) Considere os pontos $A(2,3)$ e $B(4,1)$ e a reta $r: 3x+4y=0.$ Se $d_{A,r}$ e $d_{B,r}$ são, respectivamente, as distâncias de A e de B até a reta $r,$ é correto afirmar que

a) $d_{A,r} > d_{B,r}$

b) $d_{A,r} < d_{B,r}$

c) $d_{A,r} = d_{B,r}$

d) $d_{A,r} = 2d_{B,r}$

---

5. (Espcex 2019) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x)=x^2-6x+1,$ no ponto $(4,-7),$ é igual a

a) $y=-2x+1.$

b) $y=3x-19.$

c) $y=x-11.$

d) $y=-3x+5.$

e) $y=2x-15.$

---

6. (Epcar 2018) Considere no plano cartesiano as retas r e s dadas pelas equações:

$$\begin{matrix} r: 3x+3py+p=0 \\ s: px+9y-3=0 \end{matrix}$$, onde $p \in \mathbb{R}.$

Baseado nessas informações, marque a alternativa INCORRETA.

a) r e s são retas concorrentes se $|p| \neq 3$.

b) Existe um valor de p para o qual r é equação do eixo das ordenadas e s é perpendicular a r.

c) r e s são paralelas distintas para dois valores reais de p.

d) r e s são retas coincidentes para algum valor de p.

7. (Eear 2017) Seja ABC um triângulo tal que $A(1, 1)$, $B(3, -1)$ e $C(5, 3)$. O ponto _____ é o baricentro desse triângulo.

a) $(2, 1)$.

b) $(3, 3)$.

c) $(1, 3)$.

d) $(3, 1)$.

---

8. (Eear 2017) O triângulo ABC formado pelos pontos $A\,(7, 3)$, $B\,(-4, 3)$ e $C\,(-4, -2)$ é

a) escaleno

b) isósceles

c) equiângulo

d) obtusângulo

---

9. (Mackenzie 2017) A equação da mediatriz do segmento que une os pontos $P = (1, -2)$ e $Q = (5, 4)$ é

a) $2x + 3y - 9 = 0$

b) $2x - 3y + 9 = 0$

c) $2x - 3y - 3 = 0$

d) $3x - 2y - 7 = 0$

e) $3x + 2y - 11 = 0$

10. (Eear 2016) Considere os pontos $A(2, 8)$ e $B(8, 0)$ A distância entre eles é de

a) $\sqrt{14}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{7}$

d) 10

---

11. (Eear 2016) Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, onde $A(0, 10)$, $B(2, 12)$, $C(-2, 3)$ e $D(4, 3)$. O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é dado pelos pontos M e N, pertencentes respectivamente a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$.

Assinale a alternativa que corresponde corretamente a esses pontos.

a) $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $N(-1, 3)$

b) $M(-2, 10)$ e $N(-1, 3)$

c) $M(1, -2)$ e $N(1, 3)$

d) $M(1, 11)$ e $N(1, 3)$

---

12. (Eear 2016) A equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(6, 8)$ é dada por

a) $y = 7x + 1$

b) $y = 6x + 1$

c) $y = \frac{7}{6}x + 1$

d) $y = \frac{6}{7}x + 1$

---

13. (Eear 2016) A reta s que passa por $P(1, 6)$ e é perpendicular a $r: y = \frac{2}{3}x + 3$ é

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) $y = x + 5$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

---

14. (Eear 2016) Dada a reta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto $P(5, 6)$, a distância de P à reta r é

a) $\sqrt{91}$

b) $30\sqrt{13}$

c) $\frac{3\sqrt{91}}{91}$

d) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

---

15. (Espcex 2015) O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x + 3y - 4 = 0$ é o ponto

a) $(-3,-1)$.

b) $(-1,-2)$.

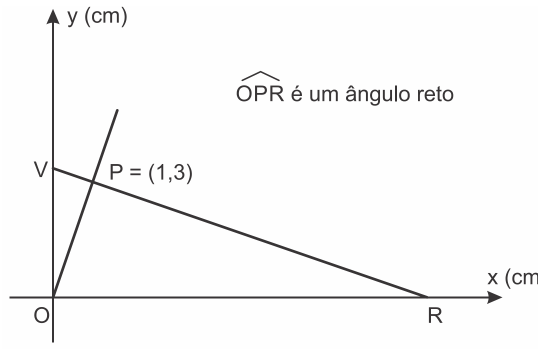
c) $(-4,4)$.

d) $(3,8)$.

e) $(3,2)$.

---

16. (Mackenzie 2014) Na figura abaixo, a área, em cm^2, do triângulo ORV é



a) $\frac{50}{3}$

b) $\frac{25}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{3}$

---

17. (Mackenzie 2013) As raízes reais da equação $x^4 - 1 = 0$, dispostas em ordem crescente, formam, respectivamente, os coeficientes *a* e *b* da reta $r: ax + by + 1 = 0$. A equação da reta *s*, perpendicular à *r* e que passa pelo ponto P(1,2), será

a) $x - y + 3 = 0$

b) $-x + y - 1 = 0$

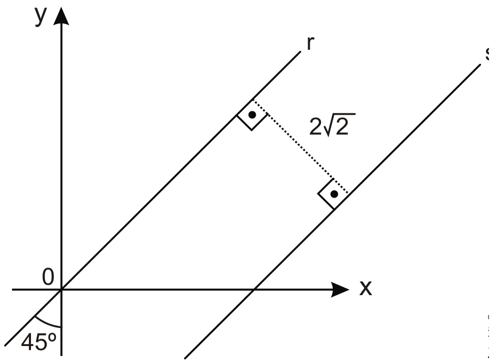
c) $x + y - 3 = 0$

d) $-2x + y + 1 = 0$

e) $2x - y - 3 = 0$

---

18. (Mackenzie 2012) Na figura, as retas r e s são paralelas. Se (x,y) é um ponto de s, então x – y vale



a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) 4

d) $2\sqrt{2}$

e) $4\sqrt{2}$

---

19. (Epcar 2012) Considere no plano cartesiano as retas $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$ e $s: (k+1)x - y - \frac{k}{2} = 0,$ onde $k \in \mathbb{R}.$

Sobre as retas *r* e *s* é correto afirmar que **NUNCA** serão

a) concorrentes perpendiculares.

b) concorrentes oblíquas.

c) paralelas distintas.

d) paralelas coincidentes.

7 – GABARITO

1. E
2. D
3. B
4. A
5. E
6. D
7. D
8. A
9. A
10. D
11. D
12. C
13. D
14. D
15. A
16. A
17. C
18. C
19. D