AULA 01

Sequências, PA e PG

EsPCEx – 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

Introdução

Olá, meu futuro aprovado! Como andam os estudos? Espero que bem!

Nesta aula daremos continuidade ao conteúdo de **MAT 2.** Espero que estejam gostando do nível da teoria abordada para o seu certame. Ainda temos muita coisa para ver e exercitar. Não perca o foco!

O primeiro dos assuntos será: Sequências. Tema não muito amplo, mas que servirá de embasamento para o estudo de Progressões. Tudo que veremos nesta aula cairá em sua prova, então, preste bastante atenção!

Já adianto que não temos muitas questões da prova da EsPCEx. Assim, para que possamos ter um padrão de cobrança, selecionei questões, em sua maioria militares, para testar de fato o conteúdo adquirido. Lançarei em breve um pdf extra só com questões de aprofundamento da EsPCEx! Fique ligado!!

Não esqueça do nosso fórum, local onde você poderá retirar possíveis dúvidas sobre seu aprendizado.

Fale comigo!

@profismael_santos	***Ismael Santos***	***@IsmaelSantos***

Sem mais, vamos à luta!

2 – Sequências

1 – Sequência de Números Reais

A partir de conjuntos (Finitos ou Infinitos) podemos dizer, de modo informal, que sequência numérica nada mais é que uma lista de números, na qual necessita-se de uma ordenação. Esta lista ordenada é o que chamamos de sucessão ou sequência.

Vejamos alguns exemplos abaixo:

- (3; 3; 3; 3; ...) - É a sequência com todos os termos iguais a 3.
- (1; 2; 3; 4; 5) - É a sequência com os números inteiros positivos.
- (10; -8; $\sqrt{2}$; 5; $\frac{7}{3}$) – É uma sequência de números reais.
- (2; 3; 5; 7) – É a sequência de números primos positivos com um algarismo.
- (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...) – É a famosa sequência de Fibonacci (onde cada termo é igual à soma dos dois anteriores)

Toda sequência é representada, em regra, por um par de parênteses, e seus elementos são separados por ponto e vírgula, como visto nos exemplos acima.

Meios e Extremos

Imagine uma sequência finita da forma:

$$(a_1; a_{2;} a_3; ...; a_{n-1}; a_n)$$

Podemos dizer que:

a_1 e a_n são extremos. Os outros termos da sequência são chamados de meios.

TOME NOTA!

Dois termos de uma sequência ou sucessão são ditos equidistantes dos extremos quando o número de termos que antecedem um deles for igual a quantidade de termos que sucedem o outro.

Vejamos um exemplo abaixo de termos equidistantes.

$$(a_1; a_{2;} a_3; \ldots; a_{n-2}; a_{n-1}; \mathrm{a}_n)$$

- $a_1\ e\ a_n$ - São extremos
- $a_1\ e a_{n-1}$ - São equidistantes dos extremos
- $a_2\ e a_{n-2}$- São equidistantes dos extremos

Perceba que, para ter a certeza de que dois termos são de fato equidistantes dos extremos, basta fazer a seguinte relação.

- ✓ a_1: 1º termo
- ✓ a_n: “n-ésimo” termo

Ou seja, a soma dos índices de quaisquer termos equidistantes dos extremos deverá resultar em: n + 1

Assim, quaisquer dois termos que tiverem a mesma soma (n + 1) será dito equidistante dos termos a_1 e a_n.

Exemplo:

- ✓ a_2 : 2º termo
- ✓ a_{n-1} : (n – 1) termo

$\Longrightarrow$ **(n – 1) +2 = n +1**

Podemos assim, de forma genérica, dizer que na sequência $(a_1; a_{2;} a_3; \ldots; a_k; a_p; \mathrm{a}_n)$ os termos a_k e a_p serão equidistantes, se e somente se:

- ✓ a_k – termo de posição k
- ✓ a_p – termo de posição p

Soma dos índices: k + p = n + 1

2 - Recorrência

É importante notar que o termo sequência é bem amplo, ou seja, qualquer ordem de elementos. Porém, existem casos em que esta sequência é criada com base em uma lei de formação. A esta lei damos o nome de Fórmula de Recorrência.

Assim, a depender da sequência, podemos usar tal processo de recorrência, que consiste em dar o primeiro termo (ou primeiros termos) e uma sentença aberta que permita calcular cada termo em função do anterior (ou dos anteriores).

Para que fique mais claro, observe os exemplos abaixo.

a) Consideremos a sequência infinita tal que a_1 = 5 e para todo n > 1 tem-se

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

Vemos que cada termo na da sequência é igual ao anterior a_{n-1} somado com 3.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ a_2 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \\ a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Portanto, a sequência pode ser representada por: (5; 8; 11; 14; ....)

---

b) Consideremos a sequência f de domínio E = {1;2;3;4;5;6} tal que f_1 = 3, f_2 = 7 e cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos anteriores. Temos:

$$\begin{cases} f_3 = f_1 + f_2 = 3+7=10 \\ f_4 = f_1 + f_2 + f_3 = 3+7+10=20 \\ f_5 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 3+7+10+20=40 \\ f_6 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 3+7+10+20+40=80 \end{cases}$$

Assim a sequência é: (3;7;10;20;40;80)

---

c) Seja a sequência infinita tal que:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \geq 3) \end{cases}$$

Vemos que cada termo dessa sequência (a partir do terceiro) é igual a soma dos dois anteriores:

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + a_1 = 1+1=2 \\ a_4 = a_3 + a_2 = 2+1=3 \\ a_5 = a_4 + a_3 = 3+2=5 \\ a_6 = a_5 + a_4 = 5+3=8 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Temos então: (1;1;2;3;5;8;...)

Esta sequência é chamada Sequência de Fibonacci e tem importantes propriedades. “Fibonacci” é o nome pelo qual ficou conhecido um importante matemático chamado Leonardo de Pisa, que viveu entre 1180 e 1250 aproximadamente. (“Filho de Bonaccio”)

Passamos agora para alguns exercícios de fixação.

Hora de
PRATICAR

1. Escreva os 4 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

b) $a_n = (-1)^n$

Comentário:

a)

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

$$Assim, \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots\right)$$

Basta observar que, para cada n natural utilizado, que representa a posição do termos, este valor também será substituído nos locais onde aparecerem a variável n.

b)

$$
\begin{aligned}
&a_n = (-1)^n \\
&a_1 = (-1)^1 = -1 \\
&a_2 = (-1)^2 = +1 \\
&a_3 = (-1)^3 = -1 \\
&a_4 = (-1)^4 = +1 \\
&Assim, (-1; 1; -1; 1; \ldots)
\end{aligned}
$$

---

02. Escreva os 5 primeiros termos das sequências infinitas por:

a)

$$
\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2n \qquad (n \geq 2) \end{cases}
$$

b)

$$
\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 \qquad (n \geq 2) \end{cases}
$$

Comentário:

a)

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 4 \\
&a_n = a_{n\text{-}1} + 2n \\
&a_2 = a_1 + 2(2) = 4 + 4 = 8 \\
&a_3 = a_2 + 2(3) = 8 + 6 = 14 \\
&a_4 = a_3 + 2(4) = 14 + 8 = 22 \\
&a_6 = a_4 + 2(5) = 22 + 10 = 32
\end{aligned}
$$

$$(4; 8; 14; 22; 32; \ldots)$$

b)

$$
\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 \qquad (n \geq 2) \end{cases}
$$

$$a_2 = 2a_1 + 4 = 2(-3) + 4 = -2$$
$$a_3 = 2a_2 + 4 = 2(-2) + 4 = 0$$
$$a_4 = 2a_3 + 4 = 2(0) + 4 = 4$$
$$a_5 = 2a_4 + 4 = 2(4) + 4 = 12$$

$$(-3; -2; 0; 4; 12; \ldots)$$

---

03. Seja a sequência infinita cujo termo geral é

$$a_n = 3n - 4$$

Determine:

a) a_6

b) a_{k+1}

Comentário:

Basta fazer a substituição do valor atribuído ao n em todas as posições em que ele aparece.

a) $a_6 = 3(6) - 4 = 18 - 4 = 14$

b) $a_{k+1} = 3(k+1) - 4 = 3k + 3 - 4 = 3k - 1$

---

04. Dê os termos gerais das seguintes sequências:

a) $(2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots)$

b) $(2; 4; 8; 16; 32; 64; \ldots)$

Comentário:

Neste tipo de questão, basta encontrar a lei de formação, ou seja, qual expressão fará você encontrar os termos das sequências dadas.

a) $a_n = 2n$; nesta sequência, cada termo seguinte é o dobro do índice correspondente a sua posição..

b) $a_n = 2^n$; nesta sequência, cada termo é uma potência de 2, elevado ao expoente que representa a posição do mesmo.

3 - PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1 - Definição

Chamamos de Progressão Aritmética **(PA) qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante denominada razão da progressão.** Em outras palavras, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência tal que:

$$a_n = a_{n-1} + \mathrm{r}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exemplos:

a) Considerando a sequência (3;5;7;9;11). Vemos que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com 2. Dizemos então que a sequência é uma progressão aritmética de razão r = 2.

b) A sequência (2;7;12;17;22;27) é uma progressão aritmética de razão igual a 5

c) A sequência (20;17;14;11;8;5;2;-1) é uma PA de razão r = -3.

d) A sequência (5;5;5;5;5) é uma PA de razão r = 0

e) A sequência $\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3};2;\frac{7}{3};\frac{8}{3};3\right)$ é uma PA de razão r = $\frac{1}{3}$

f) Consideremos a PA infinita dada por: $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} - 2 \end{cases}$; podemos perceber que a razão dessa PA é r = -2 e seus primeiros termos estão representados da forma: (4;2;0;-2;-4;-6;...)

2 - Classificações da PA

Consideremos a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ... a_{n-1}, a_n)$, dizemos que:

1º) a sequência é crescente se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ (com n > 1), **o termo sucessor for maior que seu antecessor.** Assim, temos que:

$$a_n > a_{n-1} \Rightarrow r > 0$$

2º) a sequência é decrescente se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ (com n > 1), **o termo sucessor for menor que seu antecessor.** Assim, temos que:

$$a_n < a_{n-1} \Rightarrow r < 0$$

3º) a sequência é estacionária ou constante se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ (com n > 1), **o termo sucessor for igual ao seu antecessor.** Assim, temos que:

$$a_n = a_{n-1} \Rightarrow r = 0$$

Exemplos:

- ✓ a sequência (2;7;20;42;70) é crescente
- ✓ a sequência (18;14;12;3;-4;-20) é decrescente
- ✓ a sequência (8;8;8;8;8) é estacionária
- ✓ a sequência (4;6;17;20;19;18;2) não é crescente, nem decrescente, nem estacionária.

3 - Termo Geral da PA

É sabido que cada termo da PA pode ser escrito em função do seu antecessor e da razão. A partir deste conceito, considere uma PA de razão r da forma $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...)$. Observe abaixo a escrita de cada termo seguinte a ideia que acabamos de falar.

$$\begin{cases} \cancel{a_2} = a_1 + r \\ \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + r \\ \cancel{a_4} = \cancel{a_3} + r \\ \vdots \\ \cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} + r \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n = \cancel{a_{n-1}} + r \end{cases} \Rightarrow \text{Somando as equações e simplificando os temos semelhantes...}$$

...somando membro a membro essas n – 1 igualdades, teremos:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + ... + r}_{(n-1)\,parcelas}$$

Logo, o termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Exemplos

a) Podemos então, sempre escrever qualquer termo em função do primeiro de da razão da PA. Veja o exemplo abaixo:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_1 + 3r$$
$$a_{20} = a_1 + 19r$$
$$a_{37} = a_1 + 36r$$

Observe nos exemplos acima que, sempre **o número que multiplica a razão é uma unidade a menos que o índice do termo geral a ser encontrado.** Porém, isso só se faz verdade ser o termo base for o primeiro, ou seja, o a_1. Pois, se por exemplo o termo base for o 4º termo, logo o número que multiplicar a razão será 4 unidades menor que o índice do termo geral.

Desta forma, podemos generalizar ainda mais a fórmula do termo geral, a saber:

$$a_n = a_m + (n-m).r$$

b) É importante observar que se $a_n = a_{n-1} + r$ então $r = a_n - a_{n-1}$, isto é, para obtermos a razão de uma PA, basta fazermos as diferenças entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o anterior. Assim:

$$r = a_n - a_{n-1}$$

Assim, na PA (5;12;19;26;33) a razão r pode ser obtida do seguinte modo:

$$r = 12 - 3 = 7 \quad ou$$
$$r = 19 - 12 = 7$$

Vejamos alguns exercícios de fixação sobre este tema

Hora de
PRATICAR

05. Determine o oitavo termo de uma PA onde $a_5 = 6$ e $a_{17} = 30$.

Comentário:

De acordo com a fórmula, temos:

$$a_{17} = a_5 + 12r \rightarrow perceba:(17-5)=12$$
$$30 = 6 + 12r$$
$$12r = 24$$
$$r = 2$$

Assim $a_8 = a_5 + 3r = 6 = 3(2) = 12$

06. Seja a PA de domínio E = {1;2;3;4} cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$

a) qual é a razão dessa PA?

b) quais são os termos dessa PA?

Comentário:

O domínio E dado, nada mais é que os possíveis valores de n, para que sejam utilizados na fórmula de recorrência dada. Assim,

a)

Basta encontrar o 2º e 1º termo, e após, fazer a simples subtração para encontrarmos a razão.

$$a_n = 2n - 1 \rightarrow a_1 = 2(1) - 1 \Rightarrow a_1 = 1$$
$$a_n = 2n - 1 \rightarrow a_2 = 2(2) - 1 \Rightarrow a_2 = 3$$

$$Assim: r = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

b)

Basta beste caso, fazer a substituição de cada elemento do domínio no lugar do n, para que aí posamos encontrar os termos da PA.

$$a_1 = 2(1) - 1 = 1$$
$$a_2 = 2(2) - 1 = 3$$
$$a_3 = 2(3) - 1 = 5$$
$$a_4 = 2(4) - 1 = 7$$

---

07. Numa PA de termos $a_3 = 11$ e $a_7 = 27$. Determine a_1 e r.

Comentário:

$$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow 11 = a_1 + 2r$$
$$a_7 = a_1 + 6r \rightarrow 27 = a_1 + 6r$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 6r = 27 \end{cases} \Rightarrow (a_1 + 2r) + 4r = 27 \rightarrow 11 + 4r = 27 \Rightarrow 4r = 16 \Rightarrow r = 4$$

Resolvendo-o, obtemos

$$a_1 = 3$$
$$r = 4$$

---

08. Numa PA de razão r = -3, o 17º termo é igual a 20% do 1] termo. Escreva os 4 primeiros termos da PA

Comentário

a_{17} é igual a 20% de a_1, isto é, $a_{17} = \frac{20}{100} a_1 = \frac{1}{5} a_1 = \frac{a_1}{5}$

Sabemos que $a_{17} = a_1 + 16r$

Assim: $\frac{a_1}{5} = a_1 + 16\,(-3)$

Resolvendo esta equação obtemos $a_1 = 60$

Assim a PA é: (60;57;54;51;...)

---

09. Interpole 4 meios aritméticos entre -3 e 22

Comentário

Interpolar 4 meios aritméticos entre -3 e 22 significa que devemos achar 4 números que "colocados" entre -3 e 22 deverão formar uma PA, onde o primeiro termo é -3 e o último é 22. Teremos, portanto, um total de 6 termos.

$a_1 = -3$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$ $a_6 = 22$

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5r \\ 22 = -3 + 5r \\ 5r = 25 \\ r = 5 \end{cases}$$

Portanto, a PA é: $(-3; 2; 7; 12; 17; 22)$ e os 4 meios são: 2, 7, 12 e 17

Devemos observar que podemos usar a palavra "inserir" no lugar da palavra "interpolar"

---

10. Um capital de R$ 200,00 foi colocado a juros simples de 3% ao mês. Qual o montante após 47 meses?

Comentário

O montante é a soma do capital com os juros

3% de 200 = $\frac{3}{100}$. 200 = 6

Assim, a cada mês o montante é acrescido de R$ 6,00 e podemos afirmar então que os montantes formam uma PA de razão 6 (em reais). Sendo a_1 o montante após o 1º mês temos:

$a_1 = 200 + 6 = 206$ e portanto, o montante após 47 meses será:

$$a_{47} = a_1 + 46r = 206 + 46(6) = 482$$

Temos, então, que após 47 meses, o montante será igual a R$ 482,00

---

11. Sabendo que os números 12, 32 e 40 são termos de uma PA crescente, determine os possíveis valores de razão r.

Comentário

(...; 12; ... ; 32; ... ; 40; ...)

Podemos escrever: $\begin{cases} 32 = 12 + xr \\ 40 = 12 = yr \end{cases}$ onde x e y são números naturais não nulos (com y > x)

$$\begin{cases} 32 = 12 + x.r \Leftrightarrow x.r = 20(\mathrm{I}) \\ 40 = 12 = y.r \Leftrightarrow y.r = 28(II) \end{cases}$$

Como obviamente r # o, podemos dividir membro e membro as equações (I) e (II) obtendo:

$$\frac{x}{y} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Como a fração $\frac{5}{7}$ é irredutível e os números x e y são naturais (não nulos), o menor valor possível para x é 5 e o menor valor possível para y é 7. Mas:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} = \ldots$$

Isto é, para $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ basta que x = 5k e y = 7k, onde $k \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 5k \\ xr = 20 \end{array}\right\} \to \textit{fazendo a substituição } x = 5k \textit{ na segunda equação}$$

$$\textit{onde} \quad r = \frac{20}{5k} = \frac{4}{k}$$

Portanto, os valores possíveis para a razão r são da forma $r = \frac{4}{k}$, onde k é um número natural qualquer não nulo.

---

12. Quantos múltiplos de 7 há entre 12 e 864?

Comentário

Depois de 12, o primeiro múltiplo de 7 é 14. Efetuando a divisão euclidiana de 864 por 7 temos:

$$\begin{array}{r|l} 864 & 7 \\ \cline{2-2} 16 & 123 \\ 24 & \\ \underline{\mathbf{3}} & \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad 864 - \underline{\mathbf{3}} = 861$$

Portanto, 861 é o último múltiplo de 7 antes de 864. Temos, então, uma PA finita de razão 7, primeiro termo 14 e último termo 861:

(14; 21; 28; ... , 861)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$861 = 14 + (n-1)(7)$$

Resolvendo esta equação obtemos n = 122

---

4 - Média Aritmética

Consideremos "n" números $x_1, x_2, \ldots x_n$. A média aritmética deles é, por definição, o número M_A, calculado do seguinte modo:

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Ou seja, basta somar todos os números e dividi-los pela quantidade.

Exemplos:

a) A média aritmética dos números 4, 5 e 17 é:

$$m_a = \frac{4+5+17}{3} = \frac{26}{3}$$

b) A média aritmética dos números 7 e -4 é:

$$m_a = \frac{(7)+(-4)}{2} = \frac{3}{2}$$

5 - Propriedades da Média Aritmética na PA

Sejam a, b e c três termos consecutivos de uma PA de razão r , tal que (...;a; b; c; ...). Assim, temos

$$\begin{cases} b = a + r \\ b = c - r \end{cases}$$

Somando membro a membro estas duas igualdades, temos:

$$2b = a + c$$

$$\boldsymbol{b = \frac{a+c}{2}}$$

Isto é: dados três termos consecutivos de uma PA, é correto afirmar que o termo central será a média aritmética dos extremos.

Podemos dizer ainda, de forma mais genérica, que um determinado termo da PA será sempre igual a média aritmética dos termos que o equidistam. Assim, temos:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Exemplo:

Consideremos o seguinte problema:

“Determine o valor de x de modo que x – 3, 3x – 7 e x – 5 sejam termos consecutivos de uma PA.”

Comentário:

Devemos ter então: $3x - 7 = \frac{(x-3)+x-5)}{2}$

Resolvendo esta equação obtemos: $x = \frac{3}{2}$

6 - Representações Simétricas na PA

É muito frequente aparecerem problemas de PA com poucos termos. Nestes casos pode ser útil usar representações especiais. Vamos considerar dois casos: número ímpar de termos e número par de termos.

a) Número ímpar de termos

- Se forem três termos, podemos representá-los por:

$$x-r, x, x+r$$

Onde r é a razão.

- Se forem cinco termos, podemos representá-los por:

$$x-2r, x-r, x, x+r, x+2r$$

b) Número par de termos

- Se forem quatro termos podemos representá-los por:

$$x-3y, x-y, x+y, x+3y$$

Onde a razão é r = 2y

- Se forem 6 termos:

$$x-5y, x-3y, x-y, x+y, x+3y, x+5y$$

Exemplo:

Determine 3 números em PA tais que sua soma seja 18 e o terceiro a metade do primeiro.

Comentário:

$$\begin{cases} (x-r)+(x)+(x+r)=18 \\ x+r=\dfrac{x-r}{2} \end{cases}$$

$$(x-r)+x+(x+r)=18$$
$$3x=18$$
$$x=6$$

$$x+r=\frac{x-r}{2}$$

$$6+r=\frac{6-r}{2}$$

$$r=-2$$

Assim, a PA é: (8; 6; 4)

Hora de
PRATICAR

Observe que a utilização das representações especiais (simétricas) é particularmente interessante, quando se conhece a soma dos termos da PA.

7 - Soma de "n" Termos Consecutivos de uma PA

Para encontrarmos a soma dos n termos consecutivos de uma PA, devemos calcular a média aritmética dos termos extremos da PA (o primeiro e o último) e multiplicar pela quantidade de termos da PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Dada uma PA onde o primeiro termo vale 14, o último vale 56 e a quantidade de termos é igual 7. Qual a soma dos termos dessa PA?

Comentário:

Utilizando a fórmula da soma de PA, temos:

$a_1 = 14$

$a_2 = 56$

$n = 7$

$$Assim: \ S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(14+56).7}{2} = \frac{70.7}{2} = 35.7 = 245$$

TOME NOTA!

A soma dos n termos de uma sequência também pode ser representada dessa forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$\sum$ é o símbolo usado para representar um somatório. Por sua vez, o índice i, abaixo desse símbolo, indica o primeiro termo do somatório e o índice n indica até qual índice vai o somatório.

Exemplificando a dica acima, temos:

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{99} + a_{100}$$

8 – PA de Ordem Superior

Esse assunto dificilmente é cobrado nas provas do EsPCEx. Porém, já foi objeto de cobrança em uma das edições recentes deste concurso. Então, fique ligado!

Conceitualemnte, temos que: a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ é uma PA de ordem k, se após "k diferenças" entre os termos consecutivos obtivermos uma PA estacionária.

Exemplo: Verifique de que ordem é a sequência abaixo.

$$(1, 2, 4, 8, 15, 26, \ldots)$$

Se subtrairmos cada termo dessa sequência para encontrar a razão, vemos que a razão não é constante:

$$r = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$r' = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$
$$r'' = a_4 - a_3 = 8 - 4 = 4$$

Perceba que os resultados não forma, ainda, uma PA estacionária, assim, devemos continuar o processo de subtração dos termos consecutives do resultado dado.

Assim, vamos obter outra sequência através da subtração de seus termos consecutivos. Seu termo é da forma $b_i = a_{i+1} - a_i$.

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 8 - 4 = 4$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 15 - 8 = 7$$

E assim por diante. Desta forma, encontraremos uma outra sequência $(1, 2, 4, 7, \dots)$. A partir dela, faremo, novamente, o processo de subtração dos temros consecutives, para que possamos chegar à PA estacionária. Veja:

$$c_1 = b_2 - b_1 = 2 - 1 = 1$$
$$c_2 = c_3 - c_2 = 4 - 2 = 2$$
$$c_3 = c_4 - c_3 = 7 - 4 = 3$$
$$c_4 = c_5 - c_4 = 11 - 7 = 4$$

E assim por diante. Desta forma, encontraremos uma outra sequência $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Perceba que essa sequência é uma PA de razão um, ou seja, PA de 1ª Ordem, pois, se fizermos a subtração dos termos consecutives apenas uma vez, já entraremos em um PA estacionária, ou seja, razão igual a zero. Conculsão:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 1$$
$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 2$$
$$(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 3$$

Assim, a PA do exemplo é de terceira ordem. Pois foi necessário realizer 3 operações de subtração.

4 - PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1 - Definição

Chamamos de Progressão Geométrica **(PG) qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante denominada razão da progressão.**

Em outras palavras, uma progressão geométrica de razão q é uma sequência tal que:

$$a_n = a_{n-1}.q \, , \; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Esta constante, geralmente representada por **q,** é chamado de razão da PG.

Podemos dizer, então, que os números 2, 4, 8, 16 e 32 formam uma PG com 5 elementos em que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$ e $a_5 = 32$, e a razão q desta PG é igual a 2.

Vejamos:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 \times q = 2 \times 2 = 4$

$a_3 = a_2 \times q = 4 \times 2 = 8$

$a_4 = a_3 \times q = 8 \times 2 = 16$

$a_5 = a_4 \times q = 16 \times 2 = 32$

2 - Classificações da PG

Consideremos a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ... a_{n-1}, a_n)$, dizemos que esta PG possui 5 classificações, a saber:

- **Crescente**: $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$

Exemplo: (1, 2, 4, 8, ...)

- **Decrescente**: $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$

Exemplo: (-1, -2, -4, -8, ...) e $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$

- **Alternante ou Oscilante**: $q < 0$ e $a_1 \neq 0$

Exemplo: (1, -2, 4, -8,...)

- **Constante**: $q=1$ ou $a_1=0$ e q qualquer, ou seja, neste último caso a razão pode ser considerada como indeterminada.

Exemplo: (2, 2, 2, 2, ...) e (0, 0, 0, 0, ...)

- **Estacionária**: $a_1 \neq 0$ e $q=0$

Exemplo: (5, 0, 0, 0, ...)

Calcule a razão de uma progressão geométrica decrescente de cinco termos, sendo o 1º termo igual a $\frac{2}{3}$ e o último igual a $\frac{2}{243}$.

Comentário:

Como $a_5 = a_1.q^4$, temos que $\frac{2}{243} = \frac{2}{3}.q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{81}$. Como a PG é decrescente e o primeiro termo é positivo, a razão deve estar entre 0 e 1, o que nos dá $q = \frac{1}{3}$.

3 - Termo Geral da PG

É sabido que cada termo da PG pode ser escrito em função do seu antecessor e da razão. A partir deste conceito, considere uma PG de razão r da forma $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...)$. Observe abaixo a escrita de cada termo seguinte a ideia que acabamos de falar.

$$\begin{cases} \cancel{a_2} = a_1.q \\ \cancel{a_3} = \cancel{a_2}.q \\ ... \\ \cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}}.q \\ a_n = \cancel{a_{n-1}}.q \end{cases}$$

Veja que temos n – 1 equações e ao multiplicarmos todas elas, ocorrem vários cancelamentos, o que nos dá:

Logo, o termo geral é:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

4 - Razão da PG

O quociente entre um termo qualquer (a partir do segundo) e seu antecessor é igual à razão da PG. Desta forma temos:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

É importante ressaltar que a razão da PG pode ser positiva, negativa, nula, racional, irracional etc. Em tese, para cada valor desse, a PG sofre um calssificação diferente, como vimos anteriormente.

5 - Propriedades da Média Geométrica na PG

Se a, b e c são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ e então obtemos:

$$b^2 = ac$$

Também é verdade que um termo de uma progressão geométrica é a média geométrica de dois termos que dele equidistam.

$$(a_n)^2 = a_{n+p}.a_{n-p}$$

De fato, temos $a_{n+p} = a_n.q^p$, $a_{n-p} = a_n.q^{-p}$ e multiplicando as duas igualdades, obtemos o desejado.

Exemplo:

Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

e) 18

Comentário:

Sejam (4, x + 2, y) a P.A e (4, x, y) a P.G. Temos então:

$$\begin{cases} 2(x+2) = 4 + y \\ x^2 = 4y \end{cases}$$

Pela primeira equação, $y = 2x$ e substituindo na segunda, ficamos com $x^2 = 8x$. Como os terceiros termos são positivos, x não pode ser 0, e então x = 8, o que nos dá y = 16.

Resposta: D

6 - Representações Simétricas na PG

Para progressões geométricas, podemos fazer uma representação análoga à que fizemos para progressões aritméticas. Entretanto, estas representações para PG's costumam ser úteis apenas quando nos é fornecido o produto dos termos. Para 4 termos, a representação não costuma ser útil.

3 termos: $\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right)$

Em muitos problemas, o melhor a se fazer é trabalhar com a definição, por exemplo, em uma PG de 3 termos, trabalharmos com (x, xq, xq^2)**.**

7 - Soma dos Termos Consecutivos de uma Pg Finita

Estamos interessados agora em calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Podemos reescrever esta soma em função do primeiro termo e da razão, obtendo $S_n = a_1 + a_{1.q} + a_1 q^2 + ... + a_1.q^{n-1}$.

Para q = 1, a soma é simplesmente $n.a_1$, pois teremos uma PG constante.

Para $q \neq 1$, multiplicaremos S_n por q (esta ideia é bastante útil):

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1}$$
$$S_n q = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots a_1.q^n$$

Subtraindo as duas igualdades, obtemos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

8 - Produto dos Termos Consecutivos de uma PG Finita

Podemos também calcular o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$P_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Há duas maneiras de lidarmos com este produto:

I) Pelo termo geral:

Temos $a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_1 q^2, \ldots, a_n = a_1 q^{n-1}$ e então $P_n = a_1{}^n.q^{1+2+\ldots+n-1}$. Usando a fórmula da soma dos termos de uma PA, obtemos

$$P_n = a_1{}^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

II) Explorando a simetria:

Para a PG, temos uma propriedade similar à que temos em PA: $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = \ldots = a_n a_1$. desta maneira, podemos escrever utilizando o truque de Gauss:

$$P_n = a_1 a_2 \ldots a_n$$
$$P_n = a_n a_{n-1} \ldots a_1$$

Multiplicando as duas igualdades, obtemos:

$$P_n^{\,2} = (a_1 a_n)^n$$

A primeira relação obtida é mais utilizada que a segunda, pois na segunda, a presença do termo $P_n^{\,2}$ requer atenção com o sinal na hora de extrair possivelmente uma raiz quadrada.

9 - Soma dos Termos de uma PG Infinita

Teorema: Se $(a_1, a_2, \ldots)$ é uma progressão geométrica infinita com razão q, tal que $|q| < 1$, temos que:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots = \frac{a_1}{1-q}$$

10 - Interpolação Geométrica

Interpolar *k* meios geométricos entre os números a e b significa obter uma PG de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Ou seja, queremos neste caso, inseriri determinados números entre outros dois que , por sua natureza, irão formar um PG.

Para determinar os meios dessa PG é necessário calcular a razão. Assim, temos:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow b = a.q^{k+1} \Rightarrow q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Interpolar 8 meios geométricos (reais) entre 5 e 2560.

Comentário:

Formemos uma PG com 10 termos, já que queremos inserir 8 entre outros dois já existentes, em que $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$. Temos:

$$a_{10} = a_1.q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{2560}{5}} = \sqrt{512} = 2$$

Então: a PG é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560)

A produto dos n termos de uma sequência também pode ser representada dessa forma:

$$a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_{n-1} . a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

∏ é o símbolo usado para representar o produtório de uma sequência. Ela parte do termo de índice i = 1 e vai até o termo de índice n.

11 – Progressão Aritmética Geométrica (PAG)

Entre as sequências, podemos ter uma que é a união de uma PA com uma PG. Essa sequência chama-se progressão aritmética geométrica. O termo geral de uma PAG é dado por:

$$a_n = [a_1 + (n-1).r].q^{n-1}$$

Para exemplificar o conceito acima, vamos imaginar uma sequência formada por frações em que os numeradores formam uma PA de razão 1 (1, 2, 3, 4, 5, …) e os denominadores formam uma PG de razão 2 (1, 2, 4, 8, 16, …). Certamente, essa sequência será uma PAG. Veja sua representação:

$$\text{PAG: } \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots$$

Ufa...quanta coisa, não guerreirto??!!

Tenho certeza que o tema desta aula será objeto de prova sua. Assim, solicito que pratique bastante. Caso persista alguma dúvida, por não ser tão simples o conteúdo, pode entrar em contato!!

Passamos agora aos exercícios de provas anteriores! Vamos nessa?

5 - Lista de Questões

---

1. Escreva os 4 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = (-1)^n$

---

02. Escreva os 5 primeiros termos das sequências infinitas por:

a)

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2n \qquad (n \geq 2) \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 \qquad (n \geq 2) \end{cases}$$

---

03. Seja a sequência infinita cujo termo geral é

$$a_n = 3n - 4$$

Determine:

a) a_6

b) a_{k+1}

04. Dê os termos gerais das seguintes sequências:

a) $(2;4;6;8;10;12;...)$

b) $(2;4;8;16;32;64;...)$

05. Determine o oitavo termo de uma PA onde $a_5 = 6$ e $a_{17} = 30$.

06. Seja a PA de domínio E = {1;2;3;4} cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$

a) qual é a razão dessa PA?

b) quais são os termos dessa PA?

07. Numa PA de termos $a_3 = 11$ e $a_7 = 27$. Determine a_1 e r.

08. Numa PA de razão r = -3, o 17º termo é igual a 20% do 1º termo. Escreva os 4 primeiros termos da PA

09. Interpole 4 meios aritméticos entre -3 e 22

10. Um capital de R$ 200,00 foi colocado a juros simples de 3% ao mês. Qual o montante após 47 meses?

11. Sabendo que os números 12, 32 e 40 são termos de uma PA crescente, determine os possíveis valores de razão r.

---

12. Quantos múltiplos de 7 há entre 12 e 864?

---

13. Os três termos de uma sequência são proporcionais aos números 3, 5 e 9. Somando 4 ao termo do meio, a nova sequência é uma PA. Determine a sequência inicial.

---

14. Determine uma PA de três termos cuja soma é 9 e cujo produto é igual a 15.

---

15. (EEAr) As sequências (x; 3; y), e (y;$\sqrt{5}$; x), são, respectivamente, progressões aritmética e geométrica. Se a progressão aritmética é crescente, a razão da progressão geométrica é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{5}$

---

16. (EEAr) Sejam a; b e c termos consecutivos de uma PG, todos positivos. Se a < b < c e a = m-1, b = m+5 e c = 11m-1, então o valor de a + b + c é:

a) 40

b) 42

c) 44

d) 46

---

17. (EEAr) O valor de mercado de um automóvel é alterado a cada mês com um acréscimo de 1% em relação ao mês anterior. A sequência de valores do automóvel, a cada mês, forma uma progressão:

a) aritmética de razão 0,1.

b) aritmética de razão 0,01.

c) geométrica de razão 1,1.

d) geométrica de razão 1,01.

---

18. (EEAr) Na sequência (1; 1; 2; 3; ...), onde $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o nono termo é:

a) 34

b) 21

c) 43

d) 28

---

19. (EEAr)Numa progressão geométrica de 6 termos positivos, a soma de a_2 e a_4 é 6, e a soma de a_4 e a_6 é 12. A razão dessa P.G. é

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) - $\sqrt{2}$

d) - 2

---

20. (EEAr) Numa progressão aritmética, o primeiro termo é 10x - 9y, o último termo é y, e a razão é y-x. Sendo $x \neq y$, o número de termos dessa P.A. é

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

---

21. (EEAr) Tanto numa P.A. quanto numa P.G., os números 3 e 243 são, respectivamente, a razão e o 6º termo. O produto do 1º termo da P.G. pelo 3º termo da P.A. é

a) 702

b) 693

c) 234

d) 231

---

22. (EEAr) Sabe-se que a sequência (x; y; 10) é uma P.A. e a sequência $\left(\frac{1}{y}, 2, 3x+4\right)$ é uma P.G. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) a razão da P.A. é 2.

b) a razão da P.G. é 26.

c) x + y = 0.

d) x . y = -16.

---

23. (EEAr) Se em uma P.G. de três termos reais o produto e a soma dos termos são, respectivamente, 216 e 26, então a soma dos dois primeiros termos dessa P.G., quando decrescente, é

a) 24

b) 20

c) 18

d) 8

24. (EEAr) Se (x+3; 2x-1; x+5) é uma P.A., então a soma dos três termos dessa P.A. é

a) -13

b) 15

c) 19

d) 27

25. (EEAr) A soma dos vinte primeiros termos da PA cujo termo geral tem para expressão $a_n = 3n + 5$ é

a) 657

b) 730

c) 803

d) 1460

26. (EEAr) Ao se efetuar a soma de 50 primeiras parcelas da P.A. 202 + 206 + 210 + ..., por distração, não foi somada a 35ª parcela. A soma encontrada foi

a) 11050

b) 14550

c) 14662

d) 24450

27. (EEAr) A solução da equação $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = ... = 2$ é

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) -1

d) indeterminada

---

28. (EEAr) O termo geral de uma PA é $a_n = 3n-16$. A soma de seus 10 primeiros termos é

a) 18

b) 14

c) 5

d) -6

---

29. (EEAr) Uma P.G. de razão $\sqrt{3}$, tem cinco termos. Se o último termo é $9\sqrt{3}$, então o primeiro é

a) $\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{3}$

c) 3

d) $\frac{1}{3}$

---

30 (EEAr) Na PG (y, 2y + 2, 3y + 3,...), o 4º termo, que é diferente de zero, vale:

a) 2

b) $\frac{3}{2}$

c) – 4

d) $\frac{-27}{2}$

---

31. (EEAr) Numa P.A., o 10º termo e a soma dos 30 primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1440. A razão dessa progressão é

a) 2

b) 3

c) 4

d) 6

---

32. (EEAr) A soma dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \ldots\right)$ é

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

---

33. (EEAr) Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é

a) 25

b) 30

c) 33

d) 42

---

34. (EEAr) Se a sequência (x; 3x + 2; 10x + 12) é uma PG de termos não nulos, então x^2 é

a) 1

b) 4

c) 9

d) 16

---

35. (EEAr) Na PA decrescente (18; 15; 12; 9; ...), o termo igual a -51 ocupa a posição

a) 30

b) 26

c) 24

d) 18

---

36. (EEAr) Em uma PA cuja razão é igual ao seu primeiro termo, tem-se $a_3 + a_7 = 5$. Assim, a razão dessa PA é

a) 0,5

b) 2,5

c) 2

d) 1

---

37 (EEAr) Considere esses quatro valores x, y, 3x, 2y em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

---

38 (ESA) O valor de x tal que $3^4 . 3^5 . 3^6 . \ldots . 3^x = 3^{30}$ é:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 12

e) 13

---

39 (ESA). Numa progressão aritmética (PA) de nove termos, a soma dos dois primeiros termos é igual a 20 e a soma do sétimo e oitavo termos é 140. A soma de todos os termos desta PA é:

a) $S_n = 320$

b) $S_n = 405$

c) $S_n = 395$

d) $S_n = 435$

e) $S_n = 370$

---

40 (ESA). Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é 5 e o décimo primeiro termo é 45. Pode-se afirmar que o sexto termo é igual a

a) 15

b) 21

c) 25

d) 29

e) 35

---

41 (ESA). Encontre o valor numérico da expressão $E = 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7$.

a) 11^8

b) 11^{14}

c) 11^{77}

d) 121^7

e) 121^{77}

---

42 (ESA). Em um treinamento de condicionamento físico, um soldado inicia seu primeiro dia correndo 800m. No dia seguinte corre 850m. No terceiro 900m e assim sucessivamente até atingir a meta diária de 2200m. Ao final de quantos dias, ele terá alcançado a meta?

a) 31

b) 29

c) 27

d) 25

e) 23

---

43 (ESA). Em uma Progressão Aritmética com 6 termos, temos que a soma de seus termos é igual a 102 e seu último termo é 27. Com base nessas informações, a razão dessa progressão é:

a) 3

b) 5

c) 11

d) 4

e) 7

---

44 (ESA). Em uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1, 87 e a razão é 0, 004, temos que a soma dos seus dez primeiros é igual a:

a) 18,88

b) 9,5644

c) 9,5674

d) 18,9

e) 18,99

---

45 (ESA). Em uma Progressão Aritmética, o décimo termo vale 16 e o nono termo é 6 unidades maior do que o quinto termo. Logo, o décimo segundo termo vale:

a) 16, 5

b) 17, 0

c) 19, 0

d) 19, 5

e) 17, 5

Fechamos aqui a nossa lista de exercícios de PA e PG. Ressalto que abaixo farei o comentário das questões trabalhadas em aula. Lembro-vos que a lista de questões até a de número 12 já foram comentadas no decorrer da aula. Assim, começaremos a partir da 13, OK..??

Lembro ainda que lançarei um pdf só de questões da sua banca, para que aí sim possa fazer testar o padão da sua prova!! Sem mais, vamos nessa!!

6 - Questões Comentadas

---

13. Os três termos de uma sequência são proporcionais aos números 3, 5 e 9. Somando 4 ao termo do meio, a nova sequência é uma PA. Determine a sequência inicial.

Comentário:

Seja (x; y; z) a sequência; x, y e z são proporcionais aos números 3, 5 e 9, isto é

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{9}=k$$

E portanto $\begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \\ z = 9k \end{cases}$

Podemos, então, representar a sequência por:

(3k; 5k; 9k)

Somando 4 ao termo do meio, a nova sequência é:

(3k; 5k + 4; 9k)

Sendo ela uma PA, temos:

$$5k + 4 = \frac{3k + 9k}{2}$$

Resolvendo esta equação, obtemos k = 4 e, portanto: x = 12, y = 20 e z = 36.

A sequência original é assim: (12; 20; 36)

---

14. Determine uma PA de três termos cuja soma é 9 e cujo produto é igual a 15.

Comentário:

$$\begin{aligned}&(x-r)+(x)+(x+r)=9\\&3x=9\\&x=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x-r)(x)(x+r)=15\\&(3-r)(3)(3+r)=15\\&r^2=4\\&r=\pm 2\end{aligned}$$

Para r = 2 $\begin{cases} x-r=1 \\ x=3 \quad e \quad a \quad PA \quad é \quad (1;3;5) \\ x+r=5 \end{cases}$

Para r = -2 $\begin{cases} x-r=5 \\ x=3 \quad e \quad a \quad PA \quad é \quad (5;3;1) \\ x+r=1 \end{cases}$

---

15. (EEAr) As sequências (x; 3; y), e (y;$\sqrt{5}$; x), são, respectivamente, progressões aritmética e geométrica. Se a progressão aritmética é crescente, a razão da progressão geométrica é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{5}$

Comentário:

$$(x;3;y) \qquad (y;\sqrt{5};x)$$

$$\left.\begin{array}{l} PA \Rightarrow 3 = \dfrac{x+y}{2} \Rightarrow x+y=6 \\ \\ PG \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{x.y} \Rightarrow x.y = 5 \end{array}\right\}$$

Logo, x = 1 e y = 5

Assim: $\dfrac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow Razão$

Gabarito: A

16. (EEAr) Sejam a; b e c termos consecutivos de uma PG, todos positivos. Se a < b < c e a = m-1, b = m+5 e c = 11m-1, então o valor de a + b + c é:

a) 40

b) 42

c) 44

d) 46

Comentário:

$$PG:$$
$$(m+5)=\sqrt{(m-1)(11m-1)}$$
$$(m+5)^2=(m-1)(11m-1)$$
$$m^2+10m+25=11m^2-3-11m+1$$
$$10m^2-22m-24=0$$
$$5m^2-11m-12=0$$
$$\frac{11\pm\sqrt{121+240}}{10}$$

$$x_1=\frac{11+\sqrt{361}}{10}=\frac{11+19}{10}=3$$

$$x_2=\frac{11-\sqrt{361}}{10}=\frac{11-19}{10}=\frac{-9}{10}$$

$$a=m-1\rightarrow 3-1=2$$
$$b=m+5\rightarrow 3+5=8$$
$$c=11m-1\rightarrow 11.3-1=32$$

$$S=42$$

Gabarito: B

---

17. (EEAr) O valor de mercado de um automóvel é alterado a cada mês com um acréscimo de 1% em relação ao mês anterior. A sequência de valores do automóvel, a cada mês, forma uma progressão:

a) aritmética de razão 0,1.

b) aritmética de razão 0,01.

c) geométrica de razão 1,1.

d) geométrica de razão 1,01.

Comentário:

$$a_1 = x$$

$$a_2 = x = \frac{x}{100} = \frac{101x}{100} = 1,01x$$

$$PG: \frac{a_2}{a_1} = \frac{1,01x}{x} = 1,01 \Rightarrow valor \quad da \quad razão \quad PG$$

$$PA: 1,01x - x = 0,01x \Rightarrow valor \quad da \quad razão \quad PA$$

Como no enunciado o 1% é em relação ao ano anterior, temos aí uma operação de multiplicação, que nos remete a uma PG. Logo, será uma PG de razão 1,01.

Gabarito: D

18. (EEAr) Na sequência (1; 1; 2; 3; ...), onde $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o nono termo é:

a) 34

b) 21

c) 43

d) 28

Comentário:

1 1 2 3 5 8 13 21 **34** 55

A sequência acima é a simples aplicação da Sequência de Fibonacci, no qual o próximo termo a partir do terceiro é sempre igual à soma dos dois anteriores.

Gabarito: A

19. (EEAr)Numa progressão geométrica de 6 termos positivos, a soma de a_2 e a_4 é 6, e a soma de a_4 e a_6 é 12. A razão dessa P.G. é

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) - $\sqrt{2}$

d) - 2

Comentário:

$$a_2 + a_4 = 6 \Rightarrow a_4\left(\frac{1}{q^2}+1\right)=6$$

$$a_4 + a_6 = 12 \Rightarrow a_4\left(1+q^2\right)=12$$

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 = a_1.q\\
&a_3 = a_1.q^2\\
&a_4 = a_1.q^3\\
&a_6 = a_1.q^5\\
&Substituindo:\\
&a_1.q + a_1.q^3 = 6\\
&a_1.q^3 + a_1.q^5 = 12 \rightarrow q^2(a_1.q + a_1.q^3) = 12 \rightarrow q^2.6 = 12 \Rightarrow q^2 = 2 \rightarrow q = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Gabarito: B

---

20. (EEAr) Numa progressão aritmética, o primeiro termo é 10x - 9y, o último termo é y, e a razão é y-x. Sendo x ≠ y, o número de termos dessa P.A. é

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

Comentário:

$$a_1 = 10x - 9y$$
$$a_n = y$$
$$r = y - x$$

$$y = 10x - 9y + (n-1)(y-x)$$
$$-10x + 10y = (n-1)(y-x)$$
$$10(y-x) = (n-1)(y-x)$$
$$n = 11$$

Gabarito: D

---

21. (EEAr) Tanto numa P.A. quanto numa P.G., os números 3 e 243 são, respectivamente, a razão e o 6º termo. O produto do 1º termo da P.G. pelo 3º termo da P.A. é

a) 702

b) 693

c) 234

d) 231

Comentário:

$$r = 3$$
$$q = 3$$

$$a_6 = 243$$
$$a_6 = a_3 + (6-3).r$$
$$243 = a_3 + 3.3$$
$$a_3 = 234$$

$$a_6 = a_1.q^5$$
$$243 = a_1.3^5$$
$$a_1 = 1$$

Logo , o produto fica; 234 . 1 = 234.

Gabarito: C

---

22. (EEAr) Sabe-se que a sequência (x; y; 10) é uma P.A. e a sequência $\left(\frac{1}{y}, 2, 3x+4\right)$ é uma P.G.

Nessas condições, é correto afirmar que:

a) a razão da P.A. é 2.

b) a razão da P.G. é 26.

c) x + y = 0.

d) x . y = -16.

Comentário:

$$PA:(x;y;10)$$
$$PG:(\frac{1}{y};2;3x+4)$$

$$2y = x+10 \rightarrow PA \quad de \quad 3 \quad termos$$
$$4 = (\frac{3x+4}{y}) \rightarrow PG \quad de \quad 3 \quad termos$$
$$4y = 3x+4 \rightarrow sabemos \quad que: 4y = 2(2y) \quad ; sendo \quad 2y = x+10$$

$$2x+20 = 3x+4$$
$$x = 16$$

$$2y = 26$$
$$y = 13$$

Fazendo as devidas substituições de variáveis, podemos perceber que a letra B é VERDADEIRA.

Gabarito: B

---

23. (EEAr) Se em uma P.G. de três termos reais o produto e a soma dos termos são, respectivamente, 216 e 26, então a soma dos dois primeiros termos dessa P.G., quando decrescente, é

a) 24

b) 20

c) 18

d) 8

Comentário:

$$x.y.z = 216 \rightarrow y^2 - x.y$$
$$x + y + z = 26$$
$$y^3 = 216$$
$$y = \sqrt{216}$$
$$y = 6$$

$$Logo:$$
$$x + 6 + z = 26$$
$$\begin{cases} x + z = 20 \rightarrow x = 2 \\ x.z = 36 \rightarrow z = 18 \end{cases}$$

Logo a PG é do tipo (18; 6; 2), pois deve ser decrescente. Assim, a soma dos dois primeiros resulta um valor igual a 24.

Gabarito: A

---

24. (EEAr) Se (x+3; 2x-1; x+5) é uma P.A., então a soma dos três termos dessa P.A. é

a) -13

b) 15

c) 19

d) 27

Comentário:

$$2x - 1 = \frac{(x+3)+(x+5)}{2}$$

$$4x - 2 = x + 3 + x + 5$$
$$4x - 2x = 8 + 2$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Logo a PA é do tipo (8; 9; 10), bastando apenas fazer a substituição de x pelo 5.

Gabarito: D

25. (EEAr) A soma dos vinte primeiros termos da PA cujo termo geral tem para expressão $a_n = 3n + 5$ é

a) 657

b) 730

c) 803

d) 1460

Comentário:

$$a_1 = 3.1 + 5 \rightarrow \textit{fazendo} \quad n = 1$$
$$a_1 = 8$$

$$a_{20} = 3.20 + 5 \rightarrow \textit{fazendo} \quad n = 20$$
$$a_{20} = 65$$

$$\frac{(65+8).20}{2} = 730 \rightarrow \textit{utilizando} \quad \textit{Soma} \quad \textit{de} \quad \textit{PA.}$$

Gabarito: B

26. (EEAr) Ao se efetuar a soma de 50 primeiras parcelas da P.A. 202 + 206 + 210 + ..., por distração, não foi somada a 35ª parcela. A soma encontrada foi

a) 11050

b) 14550

c) 14662

d) 24450

Comentário:

$$a_1 = 202$$
$$a_2 = 206$$

$$r = 202 - 206$$
$$r = 4$$

$$a_{35} = 202 + (35 - 1).4$$
$$a_{35} = 202 + 34.4$$
$$a_{35} = 202 + 136$$

$$a_{35} = 338$$

$$Assim$$
$$a_{50} = 202 + 49.4$$
$$a_{50} = 398$$

$$S = \frac{(202 + 398).50}{2}$$

$$S = \frac{600.50}{2} \Rightarrow S = 15000$$

$$Logo: 15000 - 238 = 14662$$

Resumindo a conta: encontrei o termo de posição 35, após, fiz a subtração da soma que deveria ser feita dos 50 termos pelo termo esquecido! Ressalto que foi utilizada a fórmula do Termo Geral e a de Soma de PA.

Gabarito: C

---

27. (EEAr) A solução da equação 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = ... = 2 é

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) -1

d) indeterminada

Comentário:

Trata-se de uma soma de PG INFINITA.

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = 2$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1}{1-x} = 2$$

$$1 = 2 - 2x$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Gabarito: B

28. (EEAr) O termo geral de uma PA é a_n = 3n-16. A soma de seus 10 primeiros termos é

a) 18

b) 14

c) 5

d) -6

Comentário:

$$a_n = 3n - 16$$
$$a_1 = 3.1 - 16$$
$$a_1 = -13$$

$$a_{10} = 3.10 - 16$$
$$a_{10} = 14$$

$$a_2 = 3.2 - 16$$
$$a_2 = -10$$

$$Logo$$
$$r = 3$$

$$S = \frac{(-13+14).10}{2} = 5$$

Gabarito: C

29. (EEAr) Uma P.G. de razão $\sqrt{3}$, tem cinco termos. Se o último termo é $9\sqrt{3}$, então o primeiro é

a) $\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{3}$

c) 3

d) $\frac{1}{3}$

Comentário:

$$q = 3$$
$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$$
$$a_5 = a_1.q^4 = 9\sqrt{3} \rightarrow a_1.(\sqrt{3})^4 = 9\sqrt{3} \rightarrow a_1.3^2 = 3^2.\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{3}$$

Gabarito: A

---

30 (EEAr) Na PG (y, 2y + 2, 3y + 3,...), o 4º termo, que é diferente de zero, vale:

a) 2

b) $\frac{3}{2}$

c) – 4

d) $\frac{-27}{2}$

Comentário:

$$(y; 2y+2; 3y+3; ...) \rightarrow temos \quad os \quad 3 \quad primeiros \quad termos.$$
$$(2y+2)^2 = y.(3y+3) \rightarrow usando \quad termo \quad médio.$$
$$4y^2 + 8y + 4 = 3y^2 + 3y$$
$$y^2 + 5y + 4 = 0 \rightarrow equação \quad 2° \quad grau.$$

$$y = -4; y = -1 \Rightarrow realizando \quad soma \quad e \quad produto.$$

$$Logo$$
$$(-4; -6; -9; \frac{-27}{2})$$

Gabarito: D

---

31. (EEAr) Numa P.A., o 10º termo e a soma dos 30 primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1440. A razão dessa progressão é

a) 2

b) 3

c) 4

d) 6

Comentário:

$$a_{10} = 26$$
$$S_{30} = 1440$$

$$a_{10} = a_1 + a_r = 26$$
$$a_{30} = a_1 + 29r$$

$$\frac{(a_1 + a_1 + 29r).30}{2} = 1440$$

$$2a_1 + 29r = 96$$
$$a_1 + 9r = 26(-2)$$

$$11r = 44$$
$$r = 4$$

Gabarito: C

---

32. (EEAr) A soma dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \ldots\right)$ é

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Comentário:

$$S=\frac{a_1}{1-q}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{1}\Rightarrow\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: D

33. (EEAr) Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é

a) 25

b) 30

c) 33

d) 42

Comentário:

$$15;....;45\rightarrow 11 \quad termos$$
$$a_{11}=a_1+(n-1).r$$
$$45=15+10r$$
$$30=10r$$
$$r=3$$

$$a_6=a_1+5.r$$
$$a_6=15+15$$
$$a_6=30$$

Gabarito: B

34. (EEAr) Se a sequência (x; 3x + 2; 10x + 12) é uma PG de termos não nulos, então x^2 é

a) 1

b) 4

c) 9

d) 16

Comentário:

$$(x;3x+2;10x+12)$$
$$(3x+2)^2 = x.(10x+12)$$
$$9x^2+12x+4=10x^2+12x$$
$$x^2=4$$

Gabarito: B

35. (EEAr) Na PA decrescente (18; 15; 12; 9; ...), o termo igual a -51 ocupa a posição

a) 30

b) 26

c) 24

d) 18

Comentário:

$$(18;15;12;9;...)$$
$$r=-3$$

$$a_n = 18+(n-1).r$$
$$-51=18+(n-1).(-3)$$
$$-69=(n-1).(-3)$$
$$23=\text{n}-1$$
$$\text{n}=24$$

Gabarito: C

36. (EEAr) Em uma PA cuja razão é igual ao seu primeiro termo, tem-se $a_3 + a_7 = 5$. Assim, a razão dessa PA é

a) 0,5

b) 2,5

c) 2

d) 1

Comentário:

$$r = a_1$$

$$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow 3r$$
$$a_7 = a_1 + 6r \rightarrow 7r$$
$$10r = 5$$
$$r = \frac{1}{2}$$

Gabarito: A

---

37 (EEAr) Considere esses quatro valores x, y, 3x, 2y em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

Comentário:

$$x \quad y \quad 3x \quad 2y$$

$$2y = x + 3x$$
$$y = 2x \rightarrow relação \quad entre \quad x \quad e \quad y.$$

$$x + 2y = x + 4x = 20 \rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$
$$x = 4$$
$$y = 2x = 2.4 = 8$$

$$Assim, \quad 3x = 3.4 = 12$$

Gabarito: B

---

38 (ESA) O valor de x tal que $3^4 . 3^5 . 3^6 . \ldots . 3^x = 3^{30}$ é:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 12

e) 13

Comentário:

$$3^4.3^5.3^6.....3^x = 3^{30}$$
$$(4+5+6+...+x) = 30$$
$$\frac{(x+4).(x-3)}{2} = 30$$

$$x^2 + x - 12 = 60$$
$$x^2 + x - 72 = 0$$
$$x = -9$$
$$x = 8$$

Gabarito: C

39 (ESA). Numa progressão aritmética (PA) de nove termos, a soma dos dois primeiros termos é igual a 20 e a soma do sétimo e oitavo termos é 140. A soma de todos os termos desta PA é:

a) $S_n = 320$

b) $S_n = 405$

c) $S_n = 395$

d) $S_n = 435$

e) $S_n = 370$

Comentário:

$$a_1 + a_2 = 20$$
$$a_7 + a_8 = 140$$

$$a_1 + a_1 + r = 20$$
$$\begin{cases} 2a_1 + r = 20 \\ \underline{2a_1 + 13r = 140} \\ 12r = 120 \rightarrow r = 10 \end{cases}$$

$$2a_1 + 10 = 20$$
$$2a_1 = 10$$
$$a_1 = 5$$

$$a_9 = 5 + 8.10$$
$$a_9 = 85$$

$$\frac{(a_1 + a_9).9}{2} \Rightarrow \frac{90.9}{2} = \frac{810}{2} = 405$$

Gabarito: B

40 (ESA). Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é 5 e o décimo primeiro termo é 45. Pode-se afirmar que o sexto termo é igual a

a) 15

b) 21

c) 25

d) 29

e) 35

Comentário:

$$a_1 = 5$$
$$a_{11} = 45$$
$$a_6 = ?$$

$$a_{11} = a_1 + 10r$$
$$45 - 5 = 10r$$
$$r = 4$$

$$a_6 = 5 + 5.4$$
$$a_6 = 25$$

Gabarito: C

---

41 (ESA). Encontre o valor numérico da expressão E = $11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7 + 11^7$.

a) 11^8

b) 11^{14}

c) 11^{77}

d) 121^7

e) 121^{77}

Comentário:

$$\frac{(11^7 + 11^7).11}{2} \Rightarrow \frac{2.11^7.11}{2} = 11^8$$

Gabarito: A

---

42 (ESA). Em um treinamento de condicionamento físico, um soldado inicia seu primeiro dia correndo 800m. No dia seguinte corre 850m. No terceiro 900m e assim sucessivamente até atingir a meta diária de 2200m. Ao final de quantos dias, ele terá alcançado a meta?

a) 31

b) 29

c) 27

d) 25

e) 23

Comentário:

$$a_1 = 800$$
$$a_2 = 850$$
$$a_n = 2200$$

$$2200 = 800 + (n-1).50$$
$$\frac{1400}{50} = n - 1$$

$$28 + 1 = n = 29$$

Gabarito: B

---

43 (ESA). Em uma Progressão Aritmética com 6 termos, temos que a soma de seus termos é igual a 102 e seu último termo é 27. Com base nessas informações, a razão dessa progressão é:

a) 3

b) 5

c) 11

d) 4

e) 7

Comentário:

$$a_6 = 27$$
$$S_6 = 102$$

$$\frac{(a_1+27).6}{2}=102$$

$$a_1 = 34-27$$
$$a_1 = 7$$

$$a_6 = a_1 + 5r$$
$$27-7=5r$$
$$r=4$$

Gabarito: D

---

44 (ESA). Em uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1, 87 e a razão é 0, 004, temos que a soma dos seus dez primeiros é igual a:

a) 18,88

b) 9,5644

c) 9,5674

d) 18,9

e) 18,99

Comentário:

$$a_1 = 1{,}87$$
$$r = 0{,}004$$

$$a_{10} = a_1 + 9r$$
$$a_{10} = 1{,}87 + 9.(0{,}004)$$
$$a_{10} = 1{,}870 + 0{,}036$$
$$a_{10} = 1{,}906$$

$$\frac{(1{,}906+1{,}870).10}{2}$$

$$S = 18{,}88$$

Gabarito: A

45 (ESA). Em uma Progressão Aritmética, o décimo termo vale 16 e o nono termo é 6 unidades maior do que o quinto termo. Logo, o décimo segundo termo vale:

a) 16, 5

b) 17, 0

c) 19, 0

d) 19, 5

e) 17, 5

Comentário:

$$a_{10} = 16$$
$$a_9 = a_5 + a_6$$
$$a_5 + 4r = a_5 + a_6$$
$$r = \frac{3}{2}$$

$$a_{12} = a_{10} + 2r$$
$$a_{12} = 16 + 2.\frac{3}{2}$$

$$a_{12} = 19$$

Gabarito: C

É isso, meu querido! Finalizamos a nossa Aula 01. Espero que tenham gostado!

Restando qualquer dúvida, estou à disposição no fórum de dúvidas. Pode usar sem moderação!!

Mantenham a pegada, a sua aprovação está mais perto que imagina!

Qualquer crítica, sugestão ou elogio, só entrar em contato pelas redes sociais abaixo:

Fale comigo!

@profismael_santos	***Ismael Santos***	***@IsmaelSantos***

Vamos que vamos! Fé na missão, FUTURO CADETE!