FUVEST
2004
Segunda Fase

Prova de Matemática

08/01/2004

Q.01

O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2.
Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

Q.02

Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

Q.03

Um triângulo ABC tem lados de comprimentos $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = 2$. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$. Determinar o comprimento de $\overline{MN}$.

Q.04

Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\overline{z}$, onde α é um número real e $\overline{z}$ indica o conjugado do número complexo z.

a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.

b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

Q.05

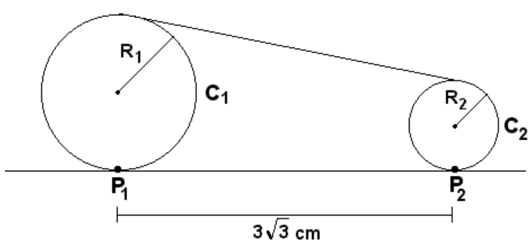
O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a –1. Determinar

a) o valor de m.

b) as raízes de p.

Q.06

A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4\,cm$ e $R_2 = 1\,cm$, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.

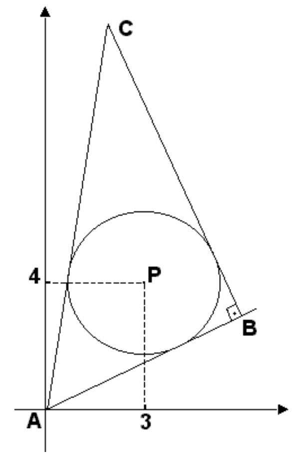


Q.07

Na figura ao lado, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto. Sabendo-se que $A = (0,0)$, B pertence à reta $x - 2y = 0$ e $P = (3,4)$ é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

a) do vértice B.

b) do vértice C.

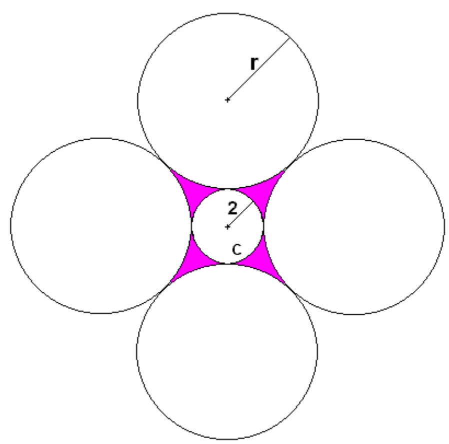


Q.08

Na figura ao lado, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C. Se o raio de C é igual a 2, determinar

a) o valor de r.

b) a área da região hachurada.



Q.09

Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a) Esboçar, no plano cartesiano representado ao lado, os gráficos de f e de g quando $m = \frac{1}{4}$ e $m = 1$.

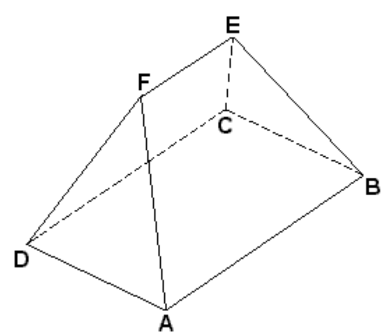
b) Determinar as raízes de f(x)=g(x) quando $m = \frac{1}{2}$.

c) Determinar, em função de m, o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

Q.10

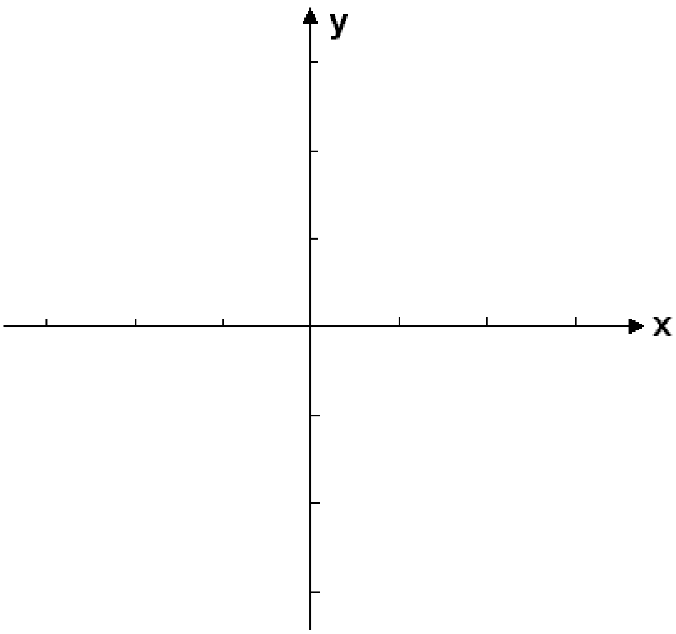
No sólido S representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados $AB = 2\lambda$ e $AD = \lambda$; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento $\overline{EF}$ tem comprimento λ.

Determinar, em função de λ, o volume de S.



Folha de resposta das questões Q.09 e Q.10

Q.09



Q.10