EQUAÇÕES DA RETA

RETAS NO PLANO CARTESIANO

Até o momento utilizamos diversas vezes a palavra reta. Não cabe aqui discutir sobre o que significa esse termo, pois, em matemática, ele é considerado como um conceito primitivo: aquele que não é possível definir. Mesmo impossibilitados de definir esse objeto, podemos estudar as suas características.

A reta, assim como todos os tipos de curvas, possui expressões capazes de gerá-las no plano cartesiano, conhecidas como equações da reta. Aqui estudaremos quatro tipos de equações de reta: **1)** Equação reduzida; **2)** Equação geral; **3)** Equação Segmentária e **4)** Equações paramétricas.

EQUAÇÃO REDUZIDA

Para determinarmos a equação de uma reta, inicialmente precisamos de dois pontos A e B, por exemplo. A equação reduzida de qualquer reta pode ser dada pela expressão:

$$y = ax + b$$

Se um ponto está sobre uma reta, ele deve necessariamente satisfazer essa expressão anterior, que lemos: "o valor da coordenada y é igual ao produto de a pela coordenada x adicionado à b". O desafio aqui é descobrir os valores de a e b. Para isso, necessitamos de dois pontos.

Exemplo: Sejam $A=(-2\ ,\ 0)$ e $B=(1\ ,\ 5)$. Cada par de pontos determinam uma reta. Vamos utilizar a equação anterior para descobrir sua cara. Como os pontos A e B estão contidos em uma mesma reta e, qualquer reta pode ser expressa por $y=ax+b$, desde que determinemos os valores a e b que são específicos a ela. Com isso, os valores x e y que são as coordenadas do ponto A precisam satisfazer a equação:

$$0 = a \cdot (-2) + b$$

Do mesmo modo, as coordenadas do ponto B devem satisfazer a expressão:

$$1 = a \cdot 5 + b$$

Perceba que temos duas equações que devem ser satisfeitas simultaneamente, pois os pontos A e B estão contidos na mesma reta que possui valores de a e b específicos. Essa observação nos leva a seguinte situação:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-2) + b \\ 1 = a \cdot 5 + b \end{cases}$$

Você se recorda desse conceito? Isso mesmo, temos aqui um sistema de equações! Ele surge no problema anterior, pois sempre que estivermos em posse de duas ou mais equações que precisam ser satisfeitas pelo mesmo valor, podemos utilizar sistemas para nos auxiliar. Não há como dois pontos estarem numa mesma reta de equações diferentes, não é mesmo?

Para encontrar os valores de a e b, vamos resolver o sistema anterior.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-2) + b \\ 1 = a \cdot 5 + b \end{cases}$$

Isolando o valor de b na primeira equação temos:

$$\begin{cases} b = 2a \\ 1 = a \cdot 5 + b \end{cases}$$

Substituindo o valor de b na segunda equação:

$$1 = a \cdot 5 + b \rightarrow 1 = 5a + 2a \rightarrow 1 = 7a \rightarrow a = \frac{1}{7}$$

Agora que encontramos o valor de a, retornaremos na primeira equação para encontrar o valor de b:

$$b = 2a \rightarrow b = 2 \cdot \frac{1}{7} \rightarrow b = \frac{2}{7}$$

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{2}{7}$$

Esta última expressão obtida é a equação da reta que contém os pontos A e B. Da forma como está, é denominada **equação reduzida da reta**.

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

A equação geral de uma reta se resume a uma manipulação na equação reduzida de uma reta. Por exemplo, para a reta $y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{2}{7}$, temos que a equação geral será:

$$y - \frac{1}{7} \cdot x - \frac{2}{7} = 0$$

$$x - 7y + 2 = 0$$

Está última expressão obtida é a **equação geral da reta**. Para encontrá-la devemos colocar a equação reduzida na forma:

$$Ax \ + \ By \ \ + \ C = 0$$

EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DA RETA

A **equação segmentária da reta** também é fruto de uma manipulação algébrica, agora da equação geral. O objetivo é expressar a equação na forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Para realizarmos essa mudança, precisamos lembrar que o valor que multiplica x é chamado de A e o que multiplica y é chamado de B. Deste modo, os valores p e q serão:

$$p = \frac{-C}{A} \text{ e } q = \frac{-C}{B}$$

Utilizaremos a equação geral do exemplo anterior, $x{-}7y{+}2{=}0$, para elucidar o processo.

Primeiro vamos identificar os valores de A, B e C, sendo $A{=}1$, $B{=}{-7}$ e $C{=}2$. Agora, vamos calcular p e q:

$$p = \frac{-C}{A} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

Agora basta substituir os valores na forma geral da equação segmentária da reta, obtendo:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{2}{7}} = 1$$

EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DA RETA

Por último, mas não menos importante, temos a equação paramétrica da reta. Ela consiste em escrever as coordenadas x e y de qualquer ponto do plano cartesiano em função de um outro parâmetro, sendo geralmente utilizado a letra t.

Sejam A e B dois pontos no plano cartesiano tais que $A=(x_A, y_A)$ e $B=(x_B, y_B)$. As equações paramétricas são da forma:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases}$$

Com t podendo assumir qualquer valor real, ou seja, $t \in \mathbb{R}$.

Vamos retomar novamente os pontos $A=(-2\ ,\ 0)$ e $B=(1\ ,\ 5)$ e encontrar a equação paramétrica da reta que contém esses dois pontos.

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + (1 - (-2)) \cdot t \\ y = 0 + (5 - 0) \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 3 \cdot t \\ y = 5 \cdot t \end{cases}$$

Essa última expressão obtida é a equação paramétrica da reta que contém os pontos A e B. Perceba que para os mesmos pontos mostramos quatro equações de retas distintas. Entretanto, todas elas devem obrigatoriamente gerar a mesma reta. O que fizemos aqui foi apresentar diversas representações para o mesmo objeto. Cada uma dessas representações é mais utilizada em um determinado contexto do que a outra, mas todas são importantes.

RETORNADO À EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

O objetivo do tópico anterior era apresentar as formas em que a equação de uma reta pode aparecer. Neste ponto, queremos analisar mais a fundo os componentes da equação reduzida e associá-la a outros conceitos. Relembrando que, a equação reduzida da reta é expressa por

$$y = ax + b$$

Os valores a e b agora receberam nomes que tem origem no seu significado geométrico. O termo a é chamado coeficiente angular, pois, conforme veremos a seguir, é o ângulo formado entre a reta e o eixo x. Já o b é chamado coeficiente linear, este devido ao acréscimo constante.

Pegaremos dois pontos no plano cartesiano $A=(-4\ ,\ 2)$ e $B=(8\ ,\ 8)$. Primeiro vamos determinar a equação da reta reduzida que contém esses pontos

$$\begin{cases} 2 = a \cdot (-4) + b \\ 8 = a \cdot 8 + b \end{cases}$$

Isolando b na primeira equação:

$$b = 4 \cdot a + 2$$

e substituindo seu valor na segunda equação:

$$8 = a \cdot 8 + b$$

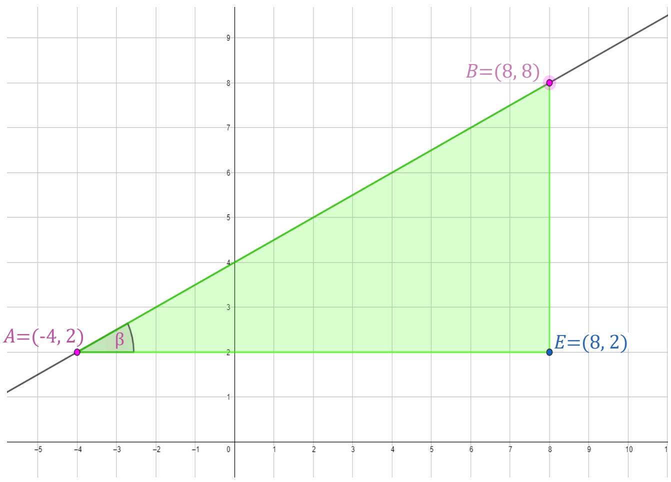
$$8 = 8 \cdot a + 4 \cdot a + 2$$

$$6 = 12 \cdot a \;\rightarrow\; a = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Agora que encontramos o valor de a, retornaremos na primeira equação para encontrar o valor de b:

$$b = 4 \cdot a + 2 \rightarrow\; b = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \;\rightarrow\; b = \frac{4}{2} + 2 = 2 + 2 = 4$$

Portanto, a equação da reta que contém os pontos A e B é $y = \frac{1}{2 \cdot x + 4}$. Vamos agora esboçar a reta no plano cartesiano. Ao interceptar o eixo x, a reta gera um ângulo β, conforme a imagem abaixo. Podemos construir um triângulo usando a mesma ideia, utilizado no cálculo de distância: desenhar um segmento que vai dos pontos são A=(x_A , y_A) e são B=(x_B , y_B), até o ponto é cujas coordenadas são E=(x_B, y_A), ou seja, que possui a abscissa do ponto B e a ordenada do ponto A. Pronto, temos um triângulo retângulo!



Sabemos que, dado um triângulo retângulo, podemos calcular o valor da tangente dos ângulos internos desse triângulo, desde que esse ângulo não seja o de 90°. Para calcular a tangente utilizamos a relação:

$$tg(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \beta}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \beta}.$$

No plano cartesiano, quando temos dois pontos e desenhamos a reta que os contém, como na imagem anterior, podemos calcular o ângulo formado entre a reta e o eixo x. Perceba que o cateto oposto ao ângulo β corresponde à "distância" entre o ponto B e o ponto E. Já o cateto adjacente ao ângulo β corresponde à "distância" entre o ponto A e o ponto E. Neste contexto temos que:

$$tg(\beta) = \frac{d(B\ ,E)}{d(A,E)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Note que o valor da tangente é obtido calculando a diferença entre as ordenadas dos pontos A e B, e o resultado é dividido pela diferença entre as abscissas dos pontos A e B. Uma observação que vale ressaltar aqui é que não utilizamos módulo nesse cálculo, pois a tangente pode assumir valor negativo, pois, temos uma surpresa aqui: A tangente do ângulo gerado pelos pontos A e B é igual ao coeficiente angular da reta que contém os pontos A e B, isso significa que $tg(\beta){=}a$, onde a é o coeficiente angular dar reta $y{=}ax{+}b$ e o valor de a pode ser negativo. Vamos comprovar que $tg(\beta){=}a$? Vamos utilizar o ponto $A{=}(-4\ ,2)$ e $B{=}(8\ ,8)$ para o qual já conhecemos o valor de a. Pela fórmula:

$$tg(\beta) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-2}{8-(-4)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0.5 = a$$

Agora que descobrimos o valor de a, precisamos descobrir o valor de b, para encontrarmos a equação da reta reduzida que contém os pontos A e B. Temos a seguinte informação: $y{=}0.5{\cdot}x{+}b$. Para identificarmos o valor de b, basta escolhermos um dos pontos e substituir os valores de x e y, se escolhermos o ponto A:

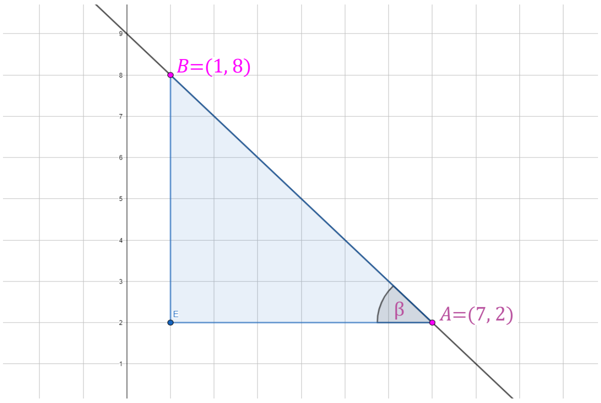
$$y = 0.5 \cdot x + b$$

$$2 = 0.5 \cdot (-4) + b$$

$$2 = -2 + b$$

$$b = 4$$

Logo, a equação da reta reduzida que contém os pontos A e B será: $y{=}0.5{\cdot}x{+}4$, que coincide com o que já havíamos descoberto anteriormente. E não poderia ser diferente, já que a equação de uma reta que contém dois pontos é única. Façamos agora um exemplo onde o a é negativo. Utilizaremos os pontos $A{=}(7\ ,2)$ e $B{=}(1\ ,8)$.



$$a = tg(\beta) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-7}{8-2} = \frac{-6}{6} = -1$$

Agora substituiremos o valor de a na expressão $y=ax+b$ e escolhermos um dos pontos para encontrar o valor de b. Utilizando o ponto $A=(7\,,2)$, temos:

$$y = -1 \cdot x + b$$

$$2 = -1 \cdot 7 + b$$

$$2 = -7 + b$$

$$b = 9$$

Portanto a equação da reta reduzida que contém os pontos $A=(7\,,2)$ e $B=(1\,,8)$ é:

$$y = -1 \cdot x + 9$$

ANOTAÇÕES