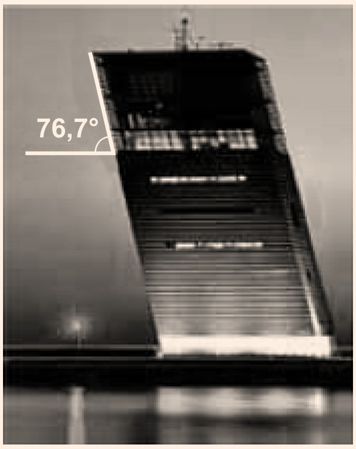
MATEMÁTICA

TRIGONOMETRIA

16

01| A torre de controle de tráfego marítimo de Algés, em Portugal, tem o formato de um prisma oblíquo, com base retangular de área $247\ \text{m}^2$. A inclinação da torre é de aproximadamente $76{,}7°$, com deslocamento horizontal de $9\ \text{m}$ da base superior em relação à base inferior do prisma.



Dados:			
α	sen α	cos α	tg α
13,3°	0,23	0,97	0,24

Nas condições descritas, o volume do prisma que representa essa torre, aproximado na casa da centena, é igual a

A $9.300\ \text{m}^3$.

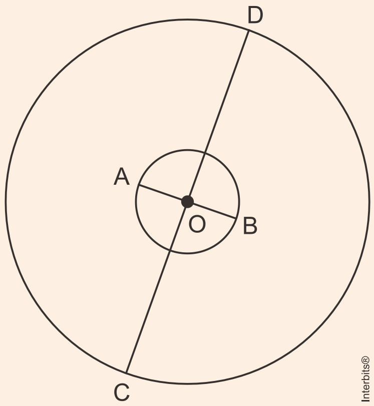
B $8.900\ \text{m}^3$.

C $8.300\ \text{m}^3$.

D $4.600\ \text{m}^3$.

E $4.200\ \text{m}^3$.

02| Considere dois círculos concêntricos em um ponto O e de raios distintos; dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares em O, como na figura abaixo.



Sabendo que o ângulo $A\hat{D}B$ mede $30°$ e que o segmento $\overline{AD}$ mede 12, pode-se afirmar que os diâmetros dos círculos medem

A 12 sen 15° e 12 cos 15°.

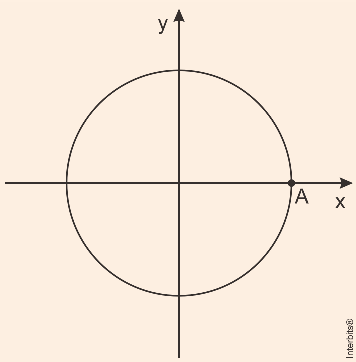
B 12 sen 75° e 24 cos 75°.

C 12 sen 75° e 24 sen 75°.

D 24 sen 15° e 24 cos 15°.

E 24 sen 75° e 12 cos 75°.

03|



O círculo, na figura, representa, no sistema de coordenadas cartesianas, uma pista onde uma pessoa P costuma correr, visando os benefícios à saúde que essa prática traz.

Um determinado dia, P parte do ponto representado por $A = (120, 0)$, de onde começa a correr no sentido anti-horário, mantendo uma velocidade de 4 metros por segundo.

Considerando-se $\pi = 3$, pode-se afirmar que após 32 minutos de corrida P estará no ponto de coordenadas x e y, tais que

A $y = -\sqrt{3}\,x$

B $y = -\sqrt{2}\,x$

C $y = \sqrt{2}\,x$

D $y = \sqrt{3}\,x$

E $y = 2\sqrt{3}\,x$

04| Seja $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = a$ e $\cos(x)\operatorname{sen}(x) = b$. Podemos então afirmar que

A $a + b = 1$

B $a^2 + b = 1$

C $a + b^2 = 1$

D $a^2 - 2b = 1$

E $a^2 + 2b = 1$

05| Se a função trigonométrica $y = a + b\operatorname{sen}(px)$ tem imagem $I = [1, 5]$ e período $\frac{3}{\pi}$, qual é o valor da soma $a + b + p$? Adote $\pi = 3$.

A 5

B 6

C 8

D 10

E 11

06| A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão portoalegrense em função do tempo (em segundos) é dada por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$. Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a

A 60 e 100

B 60 e 120

C 80 e 120

D 80 e 130

E 90 e 120

07| Assinale a alternativa correta:

A A equação $\cos x = \frac{1}{2}$ tem duas raízes no intervalo $[0; \pi]$.

B $\operatorname{sen} x + \cos x \geq 1$ para todo x pertencente ao intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

C $\operatorname{sen}(120°) = \frac{1}{2}$.

D O número de diagonais de um heptágono regular (polígono de 7 lados) é 12.

E Duplicando-se o raio de uma esfera, seu volume quadruplica.

08| Seja $M = \frac{\operatorname{cossec} x + \sec x}{\operatorname{cotg} x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \square$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

A $\operatorname{sen} x$

B $\cos x$

C $\sec x$

D $\operatorname{cossec} x$

09| Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo $30°$, seu lado oposto a esse ângulo mede

A $\frac{R}{2}$

B R

C $2R$

D $\dfrac{2R}{3}$

10| João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de $120°$. O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa $R\$\ 5{,}00$, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

Dados:

$$\text{sen de } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \text{ de } 120° = -\frac{1}{2}$$

A $R\$\ 300{,}00$

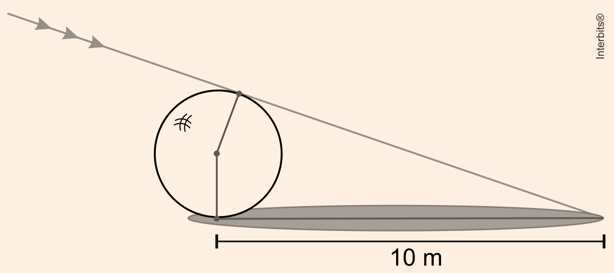
B $R\$\ 420{,}00$

C $R\$\ 450{,}00$

D $R\$\ 500{,}00$

E $R\$\ 520{,}00$

11| Uma esfera de raio r está apoiada sobre o chão plano em um dia iluminado pelo sol. Em determinado horário, a sombra projetada à direita do ponto onde a esfera toca o chão tinha comprimento de 10 m, como indica a figura.



Nesse mesmo horário, a sombra projetada por uma vareta reta de 1m, fincada perpendicularmente ao chão, tinha 2 m de comprimento. Assumindo o paralelismo dos raios solares, o raio da esfera, em metros, é igual a

A $5\sqrt{5}-10.$

B $10\sqrt{5}-20.$

C $5\sqrt{5}-5.$

D $5\sqrt{5}-2.$

E $10\sqrt{5}-10.$

12| A inequação $\text{sen}(x)\cos(x) \le 0,$ no intervalo de $0 \le x \le 2ð$ e x real, possui conjunto solução

A $\dfrac{ð}{2} \le x \le ð$ ou $\dfrac{3ð}{2} \le x \le 2ð$

B $0 \le x \le \dfrac{ð}{2}$ ou $ð \le x \le \dfrac{3ð}{2}$

C $\dfrac{ð}{4} \le x \le \dfrac{3ð}{4}$ ou $\dfrac{5ð}{4} \le x \le \dfrac{7ð}{4}$

D $\dfrac{3ð}{4} \le x \le \dfrac{5ð}{4}$ ou $\dfrac{7ð}{4} \le x \le 2ð$

E $0 \le x \le \dfrac{ð}{3}$ ou $\dfrac{2ð}{3} \le x \le ð$

13| O número de soluções da equação $(1+\sec è)(1+\cos\sec è)=0,$ com $è \in [-ð,\ ð],$ é

A 0.

B 1.

C 2.

D 3.

E 4.

14| A soma das soluções da equação $\cos(2x)-\cos(x)=0,$ com $x \in [0,\ 2ð),$ é igual a

A $\dfrac{5ð}{3}$

B $2ð$

C $\dfrac{7ð}{3}$

D π

E $\dfrac{8ð}{3}$

15| A única solução da equação $\text{sen } 2x \cdot \text{sen } 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$ com $0° \le x < 90°,$ é

A $72°.$

B $36°.$

C $24°.$

D $18°.$

E $15°.$

GABARITO

01| A

Seja h a altura do prisma. Logo, sabendo que

$\text{tg}76,7° = \dfrac{1}{\text{tg}13,3°}$, temos

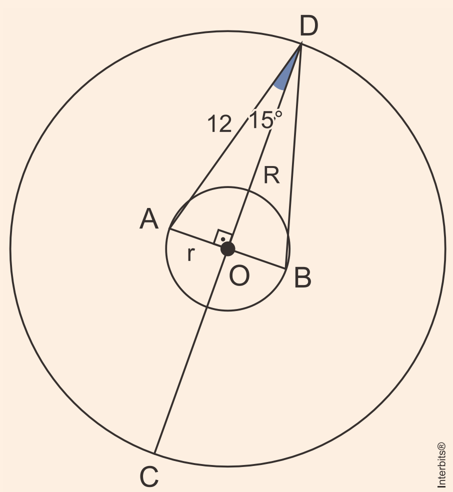
$$\text{tg}76,7° = \frac{h}{9} \Rightarrow h \cong \frac{9}{0,24}$$
$$\Rightarrow h \cong 37,5 \text{ m}.$$

Por conseguinte, a resposta é $247 \cdot 37,5 \cong 9.300 \text{ m}^2$.

02| D

Sendo r e R as medidas dos raios menor e maior, respectivamente, temos:

ÄADO é congruente ao ÄBDO, portanto $A\hat{D}O = B\hat{D}O = 15°$.



No triângulo ADO, temos:

$$\cos 15° = \frac{R}{12} \Rightarrow R = 12 \cdot \cos 15° \Rightarrow 2R = 24 \cdot \cos 15°$$
$$\text{sen}15° = \frac{r}{12} \Rightarrow r = 12 \cdot \text{sen}15° \Rightarrow 2r = 24 \cdot \text{sen}15°$$

03| D

Calculando a distância (d) percorrida pela pessoa (P).

$d = 4 \cdot 32 \cdot 60 = 7.680 \text{ m}$

Comprimento da pista (1 volta)

$2 \cdot ð \cdot 120 = 2 \cdot 3 \cdot 120 = 720 \text{ m}$

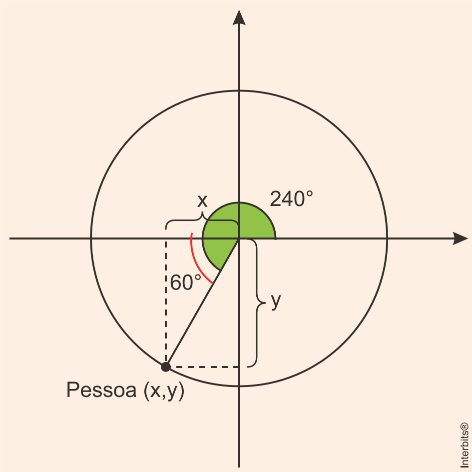
Sabendo que:

$7680 \text{ m} = (720 \cdot 10 + 480) \text{m}$

Concluímos que foram dadas 10 voltas na pista mais 480 m. Determinando quando mede, em graus, um arco de 480 na pista circular de raio 120 m.

720 m ——— 360°
480 m ——— x

Resolvendo a regra de três acima, concluímos que $x = 240°$. Ou seja a pessoa 10 voltas completas na pista e ainda percorre um arco de 240°, como nos mostra a figura abaixo.



Como as coordenadas do ponto (x, y) possuem o mesmo sinal, podemos escrever que:

$$\text{tg } 60° = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3} \cdot x$$

04| D

De $\text{sen}(x) + \cos(x) = a$,

$$[\text{sen}(x) + \cos(x)]^2 = a^2$$
$$\text{sen}^2(x) + 2\text{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = a^2$$
$$\underbrace{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)}_{1} + 2\text{sen}(x)\cos(x) = a^2$$
$$1 + 2\text{sen}(x)\cos(x) = a^2$$

Mas, $\cos(x)\text{sen}(x) = b$, ou seja,

$$1+2\text{sen}(x)\cos(x)=a^2$$
$$1+2\underbrace{\cos(x)\text{sen}(x)}_{b}=a^2$$
$$1+2b=a^2$$
$$a^2-2b=1$$

05| E

Considerando a, b e p números positivos, podemos escrever que:

$$\text{sen}\,x=1 \Rightarrow a+b\cdot 1=5 \Rightarrow a+b=5$$
$$\text{sen}\,x=-1 \Rightarrow a+b\cdot(-1)=1 \Rightarrow a-b=1$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ e } b=2$$

Lembrando que $p>0,$ o período da função será dado por:

$$\frac{2\eth}{p}=\frac{3}{\eth} \text{ (considerando } \eth=3)$$
$$3p=18$$
$$p=6$$

Logo, $a+b+p=3+2+6=11.$

06| C

Sabendo que o valor máximo de $\cos\left(\frac{8\eth}{3}\cdot t\right)$ é 1, podemos concluir que o valor da pressão diastólica é $100-20=80\,\text{mmHg}.$

Por outro lado, sendo -1 o valor mínimo de $\cos\left(\frac{8\eth}{3}\cdot t\right),$ segue que o valor da pressão sistólica é $100-20\cdot(-1)=120\,\text{mmHg}.$

07| B

Analisando as alternativas uma a uma:

[A] FALSA. Tem uma única raiz. Calculando:

$$\cos x=\frac{1}{2}, [0;\ \eth] \Rightarrow x=\frac{\eth}{3}$$

[B] VERDADEIRA. Nos extremos:

$$\text{se} \begin{cases} x=0 \\ x=\eth/2 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\ x+\cos x=0+1=1$$

Num triângulo $ABC,$ reto em $A,$ situado no primeiro quadrante de um círculo trigonométrico de centro $C:$

$$\Delta ABC \Rightarrow CA+AB>CB \Rightarrow \text{no círculo trigonométrico} \Rightarrow \text{sen}\ x+\cos x>1$$

[C] FALSA. Pois:

$$\text{sen}\ 120°=\text{sen}\ (180°-60°)=\text{sen}\ 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[D] FALSA. Calculando:

$$d=\frac{7\cdot(7-3)}{2}=14$$

[E] FALSA. Calculando:

$$V=\frac{4\eth R^3}{3} \Rightarrow V'=\frac{4\eth(2R)^3}{3}=\frac{8\cdot 4\eth R^3}{3} \Rightarrow V'=8V$$

08| ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

Desde que $\text{cossec}\,x=\frac{1}{\text{sen}\,x},$ $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ e $\text{cotg}\,x=\frac{\cos x}{\text{sen}\,x},$ temos

$$\begin{aligned} M &= \frac{\text{cossec}\,x+\sec x}{\text{cotg}\,x+1} \\ &= \frac{\frac{1}{\text{sen}\,x}+\frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}+1} \\ &= \frac{\frac{\cos x+\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x\cos x}}{\frac{\cos x+\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x}} \\ &= \sec x. \end{aligned}$$

Observação: Para $x=\left(\frac{4k+3}{4}\right)\eth,$ com $k\in\square,$ a expressão não está definida.

09| B

Seja ℓ a medida do lado do triângulo que é oposto ao ângulo de $30°.$ Pela Lei dos Senos, tem-se que

$$\frac{\ell}{\text{sen}\,30°}=2R \Leftrightarrow \ell=R.$$

10| C

Pela lei dos cossenos:

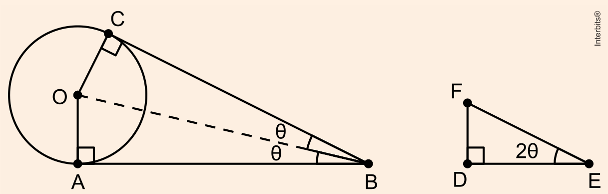
$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow a^2 = 136 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a^2 = 196 \to a = 14$

$\text{Perímetro} = 10 + 6 + 14 = 30 \text{ m}$

$3 \text{ voltas} = 90 \text{ m} \Rightarrow \text{custo} = 5 \cdot 90 = 450 \text{ reais}$

11| **B**

Considere a figura, em que $\overline{AO} = \overline{OC} = r$ é a medida do raio da esfera e $A\hat{B}C = 2\theta$.



Sendo $\overline{AB} = 10 \text{ m}$, temos

$$\text{tg}\, A\hat{B}O = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = \frac{r}{10}.$$

Por outro lado, como $BC \parallel EF$, $\overline{DF} = 1 \text{ m}$ e $\overline{DE} = 2 \text{ m}$, vem

$$\begin{aligned} \text{tg}\, D\hat{E}F = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} &\Leftrightarrow \text{tg}\, 2\theta = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\,\text{tg}\theta}{1 - \text{tg}^2\theta} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \cdot \frac{r}{10}}{1 - \left(\frac{r}{10}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow r^2 + 40r - 100 = 0 \\ &\Rightarrow r = (10\sqrt{5} - 20) \text{ m}. \end{aligned}$$

12| **A**

Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{sen}\, x \cos x \le 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x \le 0 \\ &\Leftrightarrow \text{sen}\, 2x \le 0 \\ &\Leftrightarrow \pi + 2k\pi \le 2x \le 2\pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \pi + k\pi, \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, como para $k = 0$ vem $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$, e para $k = 1$ temos $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$, segue que o conjunto solução da inequação no intervalo $[0, 2\pi]$ é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi\right\}.$$

13| **A**

Calculando:

$(1 + \sec\theta) \cdot (1 + \text{cossec}\,\theta) = 0$

$\text{Condições de existência} \to \begin{cases} \text{sen}\,\theta \ne 0 \\ \cos\theta \ne 0 \end{cases}$

Logo:

$\theta \ne \pi/2$; $\theta \ne k\pi$

Mas:

$$\begin{cases} \sec\theta = -1 \to \cos\theta = -1 \to \theta = \pi \\ \text{ou} \\ \text{cossec}\,\theta = -1 \to \text{sen}\,\theta = -1 \to \theta = -\pi/2 + 2k\pi \end{cases}$$

Assim, $S = \varnothing$.

14| **B**

$\cos(2x) - \cos(x) = 0$

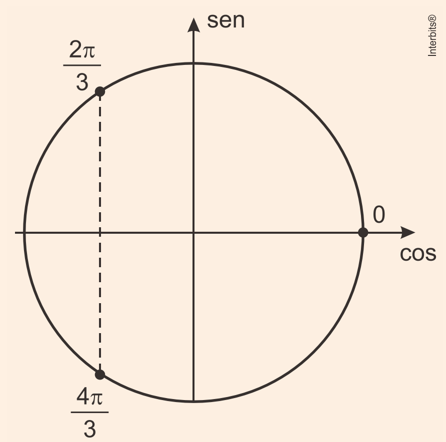
$\cos^2 x - \text{sen}^2 x - \cos x = 0$

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1 \pm 3}{4}$

$\cos x = 1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$



Logo,

$x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = 0.$

Portanto, a soma das raízes da equação será dada por:

$$\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+0=2\pi$$

15 | D

Lembrandoque $\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b,$ temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}3x=\cos2x\cdot\cos3x &\Leftrightarrow \cos2x\cdot\cos3x-\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}3x=0\\ &\Leftrightarrow \cos5x=0\\ &\Leftrightarrow 5x=\pm90^\circ+360^\circ\cdot k\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=18^\circ+72^\circ\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou}\\ x=-18^\circ+72^\circ\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.\end{aligned}$$

Portanto, da primeira equação vem $x=18^\circ,$ para $k=0,$ e da segunda vem $x=54^\circ,$ para $k=1.$