Progressão Geométrica

1 - Progressão Geométrica

É uma sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por um número fixo, chamado razão (q).

$$\boxed{P.G.= (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)}, \text{ em que } a_{n+1} = a_n \cdot q$$

ou podemos dizer ainda que:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ (razão)}}$$

Observe a seguinte P.G.:

(1, 2, 4, 8, 16,...)

É fácil notar que:

$$\boxed{\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2}$$

Nessa sequência, a razão da P.G. é 2.

1.1- Propriedades da Progressão Geométrica

Em uma progressão geométrica, cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre seu antecessor e seu sucessor.

Exemplo:

(2, 4, 8, 16,...).

Observe que $4 = \sqrt{8.2}$, ou seja, $a_2 = \sqrt{a_1.a_3}$, $8 = \sqrt{4.16}$, ou seja, $a_3 = \sqrt{a_2.a_4}$, e assim por diante.

Em uma progressão geométrica, o produto entre os termos equidistantes do centro é sempre constante.

Exemplo:

(1, 3, 9, 27,...).

Note que: 1 x 27 = 3 x 9 = 27

- **Três termos em PG**

Pode-se escrever de duas maneiras: x, xq, xq^2 ou $x/q, x, xq$

1.1.1 - Termo geral de uma P.G.

Existe uma fórmula , que nos permite calcular qualquer termo de uma P.G., sem precisar escrevê-la completamente. A saber:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Nessa fórmula:

a_n é o enésimo termo (termo geral, que se quer encontrar);

a_1 é o primeiro

n é o número de termos (ou a posição que o termo ocupa na PG, no caso do índice n);

q é a razão.

Exemplo:

Encontre o quinto termo da P.G. (2, 4, 8, 16,...).

Solução:

Temos $a_1 = 2, q = \frac{4}{2} = 2$ e $n = 5.$

Substituindo na fórmula, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 2^{5-1} \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 16 \Rightarrow a_5 = 32$

1.2 - Soma dos n Termos de uma Progressão Geométrica Finita

Por meio de alguns cálculos, podemos chegar a uma fórmula que nos permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita. A saber:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Nessa fórmula:

a_1 é o primeiro termo;

q é a razão;

n é o número de termos;

S_n é a soma dos n termos.

Exemplo:

Calcule a soma dos 6 primeiros termos da

P.G. (1, 3, 9, 27...).

Solução:

Temos:

$a_1 = 1$;

$q = \frac{3}{1} = 3$

n = 6 (seis primeiros termos).

$$S_n = S_6 = \frac{1.(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} \Rightarrow S_6 = 364.$$

1.3 - Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita

Numa P.G. infinita do tipo (1,2,4,8,..) seria impossível calcular a soma dos termos que crescem infinitamente de forma divergente. Podemos apenas dizer que a soma dessa P.G seria infinita. Entretanto, considere a situação em que uma pessoa resolva comer uma barra de chocolate de maneira que dure muito tempo. Essa pessoa resolve comer, a cada dia, sempre a metade do que tiver. Então no primeiro dia comeria a metade da barra inteira. No segundo dia, comeria metade da metade do que sobrou do dia anterior, e assim por diante.

Os pedaços consumidos formam uma P.G. infinita e decrescente: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$. Mas se somarmos todas essas quantidades seria igual à barra toda, ou seja igual a 1. Isso é possível, pois os termos dessa sequência tendem a zero quando a quantidade de termos crescem, com isso podemos dizer que a soma converge. Entretanto, os termos tenderem a zero é condição necessária, mas não suficiente para a soma convergir para um número. Mais detalhes sobre esse assunto é visto no curso de Cálculo, o que não faz parte do nosso estudo.

Podemos, ainda, por meio de fórmula, calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Veja a fórmula a seguir:

$$\boxed{S_{\circ} = \frac{a_1}{1-q}, \text{ para } -1 < q < 1}$$

Exemplo:

Calcular a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

Solução:

Temos:

$$a_1 = 1 \text{ e } q = \frac{1}{2}$$

$$S_0 = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_0 = 2$$

QUESTÕES DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

1. (PUC/RJ-2014) Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1m de altura, cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior. A altura da nossa pilha de caixas será

A) 121 m

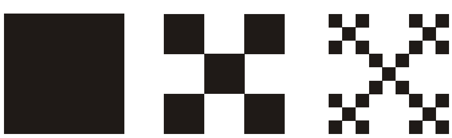
B) 81 m

C) 32 m

D) 21 m

E) 15 m

2. (UFRGS-2014) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos a seguir.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é

A) $\frac{125}{729}$

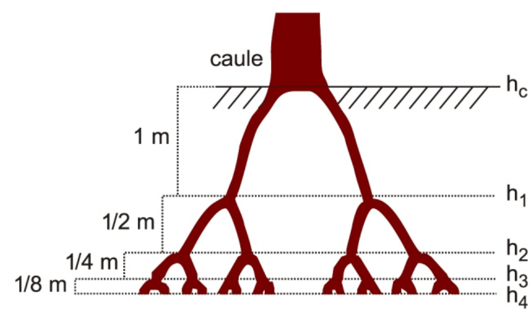
B) $\frac{125}{2187}$

C) $\frac{625}{729}$

D) $\frac{625}{2187}$

E) $\frac{625}{6561}$

3. (UEL/2012) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e em cada uma delas surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim desta, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.



Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de h_1=1m, qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até h_{10}?

A) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

B) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{9}}\right)$

C) $2\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

D) $2\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)$

E) $2\left(1-\frac{1}{2^{9}}\right)$

GABARITO

Questões de Progressão Geométrica

1	2	3
A	E	C