Futuro oficial da Marinha, Marinha Mercante ou Aeronáutica do Brasil! Esta é a aula 02 do nosso curso de Matemática 2 para as provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL e veremos hoje alguns tópicos importantes de Análise Combinatória.

“Quanto mais eu treino, mais sorte eu tenho.” (Oscar Schimidt)

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Discutiremos agora arrumações de uma coleção de objetos com objetos repetidos, tais com a coleção {b, a, n, a, n, a} e escolhas de objetos de um conjunto onde um objeto pode ser selecionado mais de uma vez, tais como pedir seis cachorros quentes a serem escolhidos dentre três variedades. Determinaremos as fórmulas para esses problemas de contagem através de dois exemplos:

EXEMPLO 1

Quantas arrumações podem ser feitas com as seis letras b, a, n, a, n, a?

Formaremos as arrumações escolhendo primeiro as três posições onde os a's ficarão, isto é $\binom{6}{3}=20$ maneiras agora, escolhamos as duas posições (entre as três remanescentes) onde os n's ficarão, isto é $\binom{3}{2}=3$ maneiras e finalmente na última posição fica o b. Assim, existem 20 · 3 · 1 = 60 arrumações.

2. TEOREMA

Se existem n objetos dos quais k_1 são do tipo 1, k_2 são do tipo 2, ..., e k_m são do tipo m onde $k_1+k_2+...+k_n=n$ então o número de arrumações destes n objetos denotado por $P(n; k_1, k_2, ..., k_m)$ é:

$$P(n; k_1, k_2, ..., k_m)=\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot...\cdot\binom{k_m}{k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$$

Prova com efeito, além do argumento utilizado no exemplo acima a saber, escolhendo as posições para um dos tipos dentre aquelas que vão restando podemos provar o teorema acima da seguinte forma:

Suponhamos que para cada tipo dos k_i objetos do tipo i sejam dados índices 1, 2, 3, ..., m tornando-os distintos. Existem então n! arrumações destes n objetos distintos. Enumeremos agora estas n! arrumações de objetos distintos enumerando todas as $P(n; k_1, k_2, ..., k_m)$ disposições (sem índices) dos objetos e então, para cada disposição colocando os índices de todos os modos possíveis. Por exemplo, da disposição banana os índices podem ser colocados nos a's de 3! maneiras:

$$\begin{array}{lll} b\,a_1\,a_2\,n\,n\,a_3 & b\,a_2\,a_1\,n\,n\,a_3 & b\,a_3\,a_1\,n\,n\,a_2 \\ b\,a_3\,a_2\,n\,n\,a_1 & b\,a_1\,a_3\,n\,n\,a_2 & b\,a_2\,a_3\,n\,n\,a_1 \end{array}$$

Para cada uma dessas 3! maneiras para indexar os a's, existem 2! maneiras para indexar os n's. Assim, em geral, uma disposição qualquer terá k_1! maneiras de indexar os k_1 objetos do tipo 1, $k_{2!}$ maneiras para o tipo 2, ..., $k_{m!}$ maneiras para o tipo m. Então:

$$P(n; k_1, k_2, ..., k_m)=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_m!}.$$

Assim sendo a palavra banana tem $P_6^{3,2,1}=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}=60$ anagramas.

3. COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

Exemplo 1: De quantos modos distintos podemos comprar seis cachorros quentes podendo escolher entre 3 variedades distintas?

Para resolver problemas de escolhas com repetição, precisamos fazer uma correspondência um a um com um problema relacionado a uma escolha sem repetição. Suponhamos que as três variedades sejam sem molho, com molho e completo e que a atendente tenha anotado o seguinte pedido:

sem molho	com molho	completo
x	xxxx	x

Se cada s representa um cachorro quente, então o pedido acima significa um sem molho, quatro com molho e um completo. Uma vez que todos os atendentes saibam que esta é a sequência dos pedidos de cachorros quentes (sem molho, com molho, completo) podemos omitir os nomes das variedades escrevendo apenas x | xxxx | x. Assim, qualquer pedido de k cachorros quentes consiste numa sequência de k x1s e dois |'s. Reciprocamente, toda sequência de k x's e dois |'s representa um pedido: os x's antes do primeiro | representa o número de cachorros sem molho: os x's entre os dois |'s representa o número de cachorros com molho e os x's finais representam o número de cachorros completos. Deste modo, existe uma correspondência um a um entre pedidos e tais sequências, mas o número de sequências de seis x's e dois |'s é simplesmente o número de escolhas de duas posições na sequência para os |'s. Assim, a resposta é $\binom{8}{2} = 28$.

4. TEOREMA

O número de escolhas com repetição de k objetos dentre n tipos de objetos é $\binom{k+n-1}{k}$.

Prova. Com efeito, faremos um "pedido" para uma escolha como e fizemos no exemplo anterior com um x para cada objeto escolhido. Como fizemos anteriormente, os x's antes do primeiro | conta o número de objetos do primeiro tipo, os x's entre o primeiro e o segundo |'s conta o número de objetos do segundo tipo, ..., e os x's após o $(n-1)-$ésimo | conta o número de objetos do enésimo tipo ($n-1$ traços são necessários para separar n tipos). O número de sequências com k x's e $(n-1)$ |'s é $\binom{k+(n-1)}{k}$.

5. DISTRIBUIÇÕES

Geralmente um problema de distribuição é equivalente a um problema de arrumação ou de escolha com repetição. Problemas especializados de distribuição devem ser divididos em subcasos que possam ser contados por intermédio de permutações e combinações simples. Um roteiro geral para modelar problemas de distribuição é, distribuições de objetos distintos correspondem a arrumações e distribuições de objetos idênticos correspondem a escolhas.

Assim, distribuir k objetos distintos em n urnas diferentes é equivalente a colocar os objetos em linha e atribuir o nome de cada uma das n diferentes urnas em cada objeto. Assim, existem $\underbrace{n\,.\,n\,.\,n\,.\,...\,n}_{\text{k vezes}} = n^k$ distribuições.

Por outro lado, o processo de distribuir k objetos idênticos em n urnas distintas é equivalente a escolher um subconjunto (não ordenado) de k nomes de urnas, com repetição, entre as n escolhas de urnas. Assim, existem $\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ distribuições.

OBSERVAÇÃO

Os problemas de escolhas com repetição podem ser formulados de três formas equivalentes a saber:

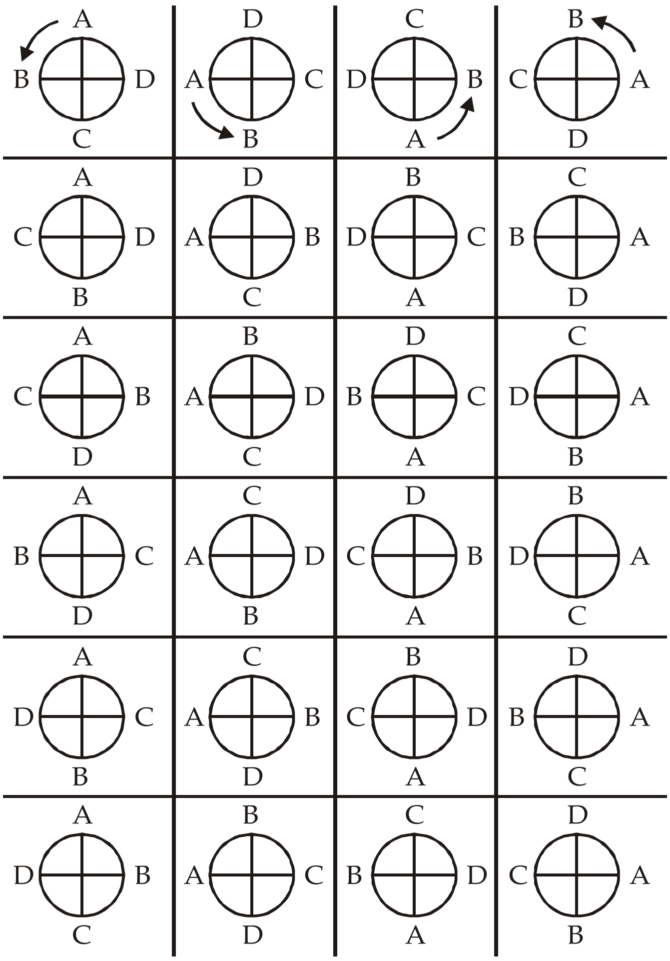
1. **O número de maneiras de escolhermos k objetos com repetição dentre n tipos de objetos distintos.**
2. **O número de maneiras de distribuir k objetos idênticos em n urnas distintas.**
3. **O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.**

6. PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Consideremos n objetos distintos e disponhamos esses n objetos em torno de um círculo.

Se n > 3, podemos imaginar esses objetos situados nos vértices de um polígono, por exemplo, um polígono regular.

O quadro abaixo apresenta as disposições dos objetos A, B, C, D em torno de um círculo.



Observamos então que:

A 1ª coluna do quadro foi obtida fixando-se o objeto A e permutando-se os objetos B, C, D de todos os modos possíveis, isto é, $3! = 6$ modos. Em cada linha uma disposição pode ser obtida de outra por uma rotação conveniente e dadas duas disposições em linhas diferentes, nenhuma pode ser obtida da outra por qualquer rotação.

Assim, chama-se permutação circular de n objetos distintos qualquer disposição desses objetos em torno de um círculo e duas permutações circulares são indistinguíveis se, e somente se, uma pode ser obtida a partir da outra por uma rotação conveniente como, por exemplo, duas permutações quaisquer de uma mesma linha do quadro acima. Diremos ainda que duas permutações circulares são distinguíveis se, e somente se, uma não pode ser obtida da outra por qualquer rotação como, por exemplo, duas permutações quaisquer em linhas diferentes do quadro acima.

Portanto, no cálculo das permutações circulares interessa apenas a posição relativa dos objetos entre si, isto é, o número de permutações circulares distinguíveis.

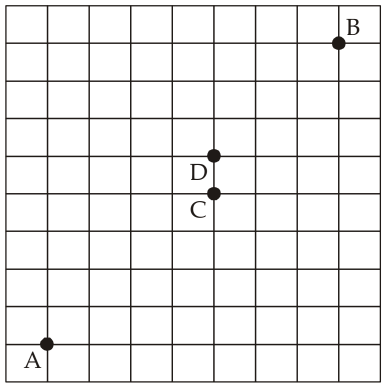
Generalizando temos que o número de permutações circulares de n objetos, denotado por $(PC)_n$, é igual a n!/n, isto é:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

1. Quantos são os anagramas da ARRANHAR?

2. Quantos anagramas da palavra ARATACA começam por consoante?

3. A figura abaixo representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo 8 verticais.



Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto A ao B:

a) Sem restrições?
b) Sem passar por C?
c) Sem passar por C e D?

4. Quantos são os anagramas da palavra ARARAQUARA que não possuem duas letras A juntas?

5. Dada a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, calcule:

a) O número de soluções inteiras positivas.
b) O número de soluções inteiras não negativas.

6. De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bombons idênticos em 4 caixas diferentes?

7. Dispondo de 4 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 5 objetos idênticos? (Cada objeto deve se pintado com uma única cor).

8. De quantos modos podemos distribuir as 52 cartas de um baralho comum entre 4 jogadores de modo que um deles fique com todas as cartas de espadas? Quantas são as distribuições nas quais cada jogador fique com um ás?

9. (UFLA 2008) Um problema clássico em combinatória é calcular o número de maneiras de se colocar bolas iguais em caixas diferentes. Calcule o número de maneiras de se colocar 7 bolas iguais em 3 caixas diferentes, sem que nenhuma caixa fique vazia.

10. (FGV 2008) O número de permutações da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O é:
a) 9.400.
b) 9.600.
c) 9.800.
d) 10.200.
e) 10.800.

11. Quantas soluções inteiras possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ com $x_1 \geq 0$? Quantas são as soluções com $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 4$ e $x_4 \geq 0$?

12. (ITA 2014) Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

13. (AFA 2010) Numa sala de aula, estão presentes 5 alunos e 6 alunas. Para uma determinada atividade, o professor deverá escolher um grupo de 3 dessas alunas e 3 dos alunos. Em seguida, os escolhidos serão dispostos em círculo de tal forma que alunos do mesmo sexo não fiquem lado a lado. Isso poderá ocorrer de n. O número n é igual a:
a) 24000.
b) 2400.
c) 400.
d) 200.

14. Um calendário de mesa consiste de um dodecaedro regular com um mês diferente em cada uma das suas 12 faces pentagonais. O número de formas essencialmente diferentes de dispor os meses nessas faces é:
a) $12!$
b) $11!$
c) $\frac{11!}{5}$
d) $\frac{12!}{5}$
e) $\frac{11!}{6}$

15. Cinco casais estão dispostos ao redor de uma mesa redonda. Seja A o número de maneira que as pessoas podem ser dispostas ao redor da mesa com a condição de que cada casal deve estar junto; e B o número de maneira que elas podem ser dispostas com a condição de que homens e mulheres estejam em lugares alternados. O valor de A + B é:
a) 3648.
b) 3600.
c) 3248.
d) 3200.
e) 2880.

16. De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

17. (AFA) As senhas de acesso a um determinado arquivo de um microcomputador de uma empresa deverão ser formadas apenas por 6 dígitos pares, não nulos. Sr. José, um dos funcionários dessa empresa, que utiliza esse microcomputador, deverá criar sua única senha. Assim, é INCORRETO afirmar que o Sr. José:

a) Poderá escolher sua senha dentre as 2^{12} possibilidades de formá-las.
b) Poderá escolher dentre 120 possibilidades, se decidir optar por uma senha com somente 4 dígitos iguais.
c) Terá 4 opções de escolha, se sua senha possuir todos os dígitos iguais.
d) Terá 480 opções de escolha, se preferir uma senha com apenas 3 dígitos iguais.

18. (EN 1997) A Escola Naval (EN) receberá 20 novos Oficiais, entre Fuzileiros, Intendentes e Oficiais da Armada. De quantos modos pode ser preenchido o efetivo da EN se deve haver entre os 20 novos Oficiais pelo menos dois Fuzileiros, pelo menos dois Intendentes e pelo menos dois do Corpo da Armada?

a) 40.
b) 80.
c) 100.
d) 120.
e) 420.

19. Um fundo de investimentos disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a:

a) 56.
b) 70.
c) 86.
d) 120.
e) 126.

20. Quantos inteiros entre 1 e 1.000.000, inclusive, possuem a soma de seus dígitos igual a 13?

21. (IME 2011) Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

a) 1287.
b) 14112.
c) 44200.
d) 58212.
e) 62822.

22. De quantos modos se podem pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular usando seis cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

23. Uma partícula, estando no ponto (x, y, z), pode mover-se para o ponto (x + 1, y, z) ou para o ponto (x, y + 1, z) ou para o ponto (x, y, z + 1). Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar para, partindo do ponto (0,0,0), chegar ao ponto (a, b, c), onde a > 0, b > 0 e c > 0?

24. São dados n pontos em círculo. Quantos n-ágonos (não necessariamente convexos) existem com vértices nesses pontos?

1. São:

- 3 letras iguais a A
- 3 letras iguais a R
- 1 letra N
- 1 letra H

Logo: $P_8^{3,3,1,1} = \dfrac{8!}{3!3!1!1!} = 1120.$

2. Seja o esquema:

$\overline{P_1}\ \overline{P_2}\ \overline{P_3}\ \overline{P_4}\ \overline{P_5}\ \overline{P_6}\ \overline{P_7}$

Acontecimentos	**Nº de ocorrências**
A_1: escolha de uma posição para ocupar a posição P_1.	3
A_2: ocupação das 6 posições restantes pelas 6 letras restantes, após ter ocorrido A_1.	$P_6^{4,1,1}$

Pelo princípio multiplicativo o número pedido é: $3 \cdot P_6^{4,1,1} = \dfrac{3 \cdot 6!}{4!1!1!} = 90$

3.

a) Entende-se por caminho mínimo de A a B, qualquer percurso efetuado, partindo de A e caminhando sempre para cima ou para a direita até alcançar B.

Representemos por H cada segmento horizontal compreendido entre duas verticais consecutivas, e por V cada segmento vertical compreendido entre duas consecutivas. Desse modo, podemos associar cada caminho mínimo de A a B com uma permutação das 15 letras HHHHHHHVVVVVVVV e reciprocamente.

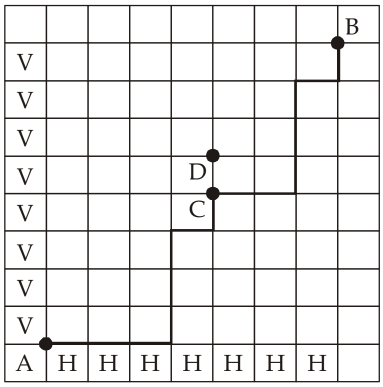
Assim, por exemplo, as permutações:

HHHHHHHVVVVVVVV

HHHVVHHVVVVVVHH

VHHVVHHVHHVVVHV

Representam 3 caminhos mínimos distintos de A a B (ver figura abaixo).



Logo, o numero de caminhos mínimos de A até B é: $P_{15}^{7,8} = \frac{15!}{7!8!} = 6435$.

b) Calculemos o número de caminhos mínimos passando por C.

Acontecimentos	Nº de ocorrências
A_1: percurso de A a C.	$P_8^{4,4}$
A_2: percurso de C a B, após ter ocorrido A_1.	$P_7^{3,4}$

Pelo Princípio Multiplicativo, o número de caminhos mínimos passando por C é: $P_8^{4,4}P_7^{3,4} = 70 \cdot 35 = 2450$.

Logo, o número de caminhos mínimos não passando por C é: $6435 - P_8^{4,4}P_7^{3,4} = 6435 - 2450 = 3985$.

c) Calculemos o número de caminhos mínimos passando por C e D.

Acontecimentos	Nº de ocorrências
A_1: percurso de A a C.	$P_8^{4,4}$
A_2: percurso de C a B, após ter ocorrido A_1.	1
A_3: percurso de D a B, após terem ocorrido A_1 e A_2.	$P_6^{3,3}$

Pelo P.M., o número de caminhos mínimos passando por C e D é: $P_8^{4,4} \cdot 1 \cdot P_6^{3,3} = P_8^{4,4} \cdot P_6^{3,3}$.

Assim o número de caminhos mínimos não passando por C e D é: $P_{15}^{7,8} - P_8^{4,4} \, . \, P_6^{3,3} = 5035$.

4. Disponhamos as letras diferentes de A como no esquema abaixo:

Q • R • R • R • U •

Observemos que existem 6 posições, onde 5 serão escolhidas para colocar as letras A, sem que duas delas fiquem juntas.

Acontecimentos	Nº de ocorrências
A_1: escolha de 5 das 6 posições para colocar as letras A.	$\binom{6}{5}$
A_2: permutação das demais letras, após ter ocorrido A_1.	$P_5^{3,1,1}$

Pelo Princípio Multiplicativo, o número pedido é: $\binom{6}{5} \cdot P_5^{3,1,1} = 120$.

5.

a) Podemos identificar o problema do cálculo do número de soluções inteiras positivas dessa equação com o seguinte problema:
Escrevendo-se em fila 7 algarismos iguais a 1, de quantos modos podemos separar esses algarismos em 3 grupos, onde cada grupo contém pelo menos um algarismo?

$$1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1$$

Observemos que entre os 7 algarismos há 6 espaços; se colocarmos elementos de separação (como barras verticais) em 2 desses espaços, obteremos uma disposição correspondente a uma solução da equação dada. Assim, por exemplo, a disposição:
$1\ |\ 1\quad 1\quad 1\quad 1\ |\ 1\quad 1$ corresponde à solução $(1,4,2)$.

Reciprocamente, cada solução inteira positiva da equação corresponde a um modo de se colocar as 2 barras em 2 dos 6 espaços. Por exemplo, a solução $(2,3,2)$ corresponde à disposição: $1\quad 1\ |\ 1\quad 1\quad 1\ |\ 1\quad 1$.

Então, o número de soluções inteiras positiva da equação $x_1+x_2+x_3=7$ é igual ao número de modos de se escolher 2 dos 6 espaços, para se colocar as 2 barras, isto é: $\binom{6}{2}=15$

Um raciocínio análogo para a equação $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$ (k natural) nos fornece o número de soluções inteiras positivas: $\binom{k-1}{n-1}$.

Com efeito, supondo escritos em fila n algarismos iguais a 1, devemos separa-los em n grupos, tendo cada grupo pelo menos um algarismo.

$$1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\ \ldots\ 1$$

Basta, então, escolher n-1 dos k-1 espaços entre os algarismos para se colocar as $n-1$ barras, o que pode ser feito de $\binom{k-1}{n-1}$ modos.

Se k = n, a equação $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$ possui uma única solução, e se n > k a equação não possui solução inteira positiva.

b) Seja ainda a equação $x_1+x_2+x_3=7$ e determinemos, agora, o número de soluções inteiras não negativas, Isto é, soluções como $(7,0,0)$, $(5,1,1)$, $(4,2,1)$, $(0,2,5)$ etc.

Suponhamos escritas todas estas soluções em uma mesma coluna, e somente uma unidade a cada inteiro dessas soluções, obtendo, assim soluções inteiras positivas de uma nova equação.

$$x_1+x_2+x_3=10$$

6. Este número é o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=10$.

Onde x_1 denota o número de bombons na caixa i, para i = 1, 2, 3, 4.

Logo $\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}=286$ é o número total de possíveis distribuições para estes objetos idênticos nas caixas diferentes.

7. Precisamos decidir quantas vezes cada cor vai ser utilizada. Isto será igual a $\binom{4+5-1}{5}=\binom{8}{5}=56$.

Se soubermos, por exemplo, que a cor 1 deve ser utilizada duas vezes, a cor 2 nenhuma vez, a cor 3 duas vezes e a cor 4 uma vez, sabemos o que fazer uma vez que os objetos são idênticos.

8. As distribuições nas quais um jogador fica com todas as 13 cartas de espadas é igual ao número de modos de distribuir as 39 cartas restantes entre os outros 3 jogadores, isto é $P_{39}^{13,\,13,\,13} = \dfrac{39!}{(13!)^3}$.

Para calcular o número de distribuições nas quais, cada jogador fica com um ás, observe que existem 4! modos de distribuir os 4 ases entre os quatro jogadores e $P_{48}^{12,\,12,\,12,\,12}$ modos de distribuir as outras 48 cartas. A resposta é $4! \cdot \dfrac{48!}{(12!)^4}$.

9.

Cada possibilidade das duas barras na figura determina uma distribuição das bolas nas caixas. No desenho, caixa 1 com duas bolas, caixa 2 com três bolas e caixa 3 com duas bolas.
O resultado pedido é igual ao número de soluções inteiras e positivas da equação x + y + z = 7, onde x, y e z representam o número de bolas em cada caixa.
Como x, y, z ≥ 1, façamos x = a + 1, y = b + 1 e z = c + 1. Desse modo, a + b + c = 4.
O número de soluções dessa equação é dado por CR3, 4 = C6, 4 = 15.

10. E

11. Por uma solução inteira desta equação entendemos como um conjunto ordenado para os x_1's cuja soma seja igual a 12, tal como $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$. Podemos modelar este problema como uma distribuição de objetos idênticos ou um problema de escolha com repetição. Seja x_1 o número de objetos idênticos na caixa i ou o número de objetos do tipo i escolhido. Usando qualquer um destes modelos o número de soluções inteiras é $\begin{pmatrix} 12+4-1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = 455$.

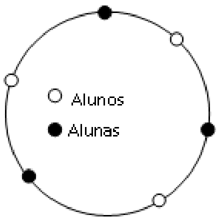
Soluções com $x_1 > 0$ correspondem neste modelo a colocar pelo menos um objeto em cada caixa ou escolher pelo menos um objeto de cada tipo. Soluções com $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 4$, $x_4 \geq 0$ corresponde a colocar pelo menos dois objetos na 1ª caixa, pelo menos dois objetos na 2ª caixa, pelo menos quatro objetos na 3ª caixa e qualquer número de objetos na 4ª caixa. A resposta é, portanto, $\begin{pmatrix} (12-2-2-4)+4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$.

12. Supondo que queremos calcular o número de paralelepípedos reto-retângulos distintos, cujas medidas das arestas pertencem ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$, segue-se que o resultado é dado pelo número de combinações completas de 10 objetos tomados 3 a 3, ou seja, $CR_{10}^{3} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$.

13.

1ª) Escolha dos alunos: $C_5^3 \times C_6^3 = \dfrac{5.\cancel{4}}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{6}.5.4}{\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 200$

2ª) Disposição circular:



Disposição dos homens = 2!
Disposição das mulheres = 2!
Para cada arrumação dos homens e cada arrumação das mulheres existem 3 posições relativas $\Rightarrow$ 3
Total = $C_5^3 \times C_6^3 \times 2! \times 2! \times 3 = 2400$

14. Escolha uma face para representar janeiro. Há $\binom{11}{5}$ formas de escolher os meses que serão colocados no anel de 5 faces adjacentes a janeiro, e 4! formas de permutá-los. No segundo anel de 5 faces, os meses podem ser escolhidos de $\binom{6}{5}$ formas, e permutados de 5! modos. Finalmente, o mês para a face antípoda de janeiro estará definido.
Logo, o número de formas essencialmente diferentes de montar esse calendário é $\binom{11}{5} \cdot 4! \cdot \binom{6}{5} \cdot 5! = \frac{11!}{5}$.

15.
$A = 4! \cdot 2^5 = 768$
$B = 4! \cdot 5! = 2880$
$A + B = 768 + 2880 = 3648$

16. Primeiramente, devemos decidir quantos anéis haverá em cada dedo, o que equivale a resolver em inteiros não-negativos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Há $C_9^6 = 84$ soluções inteiras e não-negativas. Determinados os seis lugares, devemos neles colocar os 6 anéis, o que pode ser feito de 6! = 720 modos. A resposta é 84 x 720 = 60.480.

17. A quantidade de dígitos que podem ser usados na senha é 4. Assim, o total de senhas possíveis é $4^6 = 2^{12}$.
Se a senha tiver 4 dígitos iguais, o total de possibilidades é $C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot P_6^{4,1,1} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{6!}{4!1!1!} = \frac{6!}{2} = 360$, onde inicialmente escolhemos o dígito que apareceria 4 vezes, depois os outros dois e então permutamos esses dígitos.
Se todos os dígitos forem iguais basta escolher um dos 4 dígitos.
Se a senha tiver 3 dígitos iguais, o total de possibilidades é $C_4^1 \cdot 1 \cdot P_6^{3,1,1,1} = 4 \cdot \frac{6!}{3!1!1!1!} = 4 \cdot \frac{720}{6} = 480$, onde inicialmente escolhemos o dígito que apareceria 3 vezes, os outros três dígitos aparecerão cada um uma vez e então permutamos esses dígitos.
Logo, a opção b é a incorreta.

18. D

19. Seja x_i o número de cotas que o investidor i comprou.

O número de maneiras de alocar a compra das cotas é dado pelo total de soluções inteiras positivas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=9$, isto é, $C_8^4=70$.

20. O número 1.000.000 não possui soma dos dígitos igual a 13. Podemos então considerar os números até 6 dígitos.

$\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} \Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=13$ e $0 \le x_i \le 9, i=1,2,3,4,5,6$

A equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=13$ possui $P_{18}^{15,3}=\dfrac{18!}{13!5!}=\dfrac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{120}=8568$.

Devemos eliminar as soluções que não satisfazem $0 \le x_i \le 9, i=1,2,3,4,5,6$. Uma solução não válida possui exatamente um x_i maior que 9. Assim, basta escolher qual x_i será maior que 9 e analisar a quantidade de soluções para cada valor.

$x_1=10 \Rightarrow x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3 \Rightarrow P_7^{4,3}=\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{6}=35$ soluções.

$x_1=11 \Rightarrow x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2 \Rightarrow P_6^{4,2}=\dfrac{6!}{2!4!}=\dfrac{6\cdot 5}{2}=15$ soluções.

$x_1=12 \Rightarrow x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1 \Rightarrow P_5^{4,1}=\dfrac{5!}{1!4!}=5$ soluções.

$x_1=13 \Rightarrow x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0 \Rightarrow 1$ solução.

Logo, a quantidade de números que satisfazem às condições do enunciado é $8568-6\cdot(35+15+5+1)=8232$.

21. D

22. Temos 6 escolhas para pintar a base da pirâmide, a seguir o número de escolhas para pintar as faces laterais é $(PC)_5=4!$

Logo temos no total $6\times 4!=144$ modos de pintar a pirâmide.

23. A partícula deve mover-se para a direita a vezes, para a frente b vezes e para cima c vezes.

A resposta é $P_{a+b+c}^{a,b,c}=\dfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$.

24. Fixemos as ideias no caso n = 5. Os pontos são A, B, C, D, E. Cada ordem dos vértices gera um pentágono. Por exemplo, ABCDE gera o pentágono convexo, ACEBD gera um pentágono estrelado, etc. Há 5! ordens para os 5 vértices. Entretanto, contando os pentágonos pela ordem dos vértices, contamos cada pentágono 10 vezes. Com efeito, dado um pentágono (o convexo, por exemplo), ele corresponde a 10 permutações dos vértices, porque há 5 modos de escolher por onde se começa (B, por exemplo) e 2 de escolher se os vértices aparecerão em sentido horário ou anti-horário. O pentágono convexo pode ser BCDEA, pode ser BAEDC, pode ser ABCDE, etc. Há 5!/10 = 12 pentágonos.

No caso geral, há n! ordens para os vértices e cada polígono é contado 2n vezes, porque há n modos de escolher o vértice por onde se começa a contagem e 2 modos de escolher o sentido em que os vértices aparecem.

A resposta é $\dfrac{n!}{2n}=\dfrac{n-1}{2}$.