

VESTIBULARES

2021



Estratégia  
Vestibulares

## Sumário

Apresentação .....	3
Instruções Gerais .....	3
Análise da aula .....	4
<i>Essa Disciplina no Vestibular</i> .....	4
<i>Roteiro da Aula</i> .....	4
<i>Questões da Aula Separadas por Nível</i> .....	5
Bizus .....	6



## Apresentação



Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

**SOBRE O BIZUÁRIO:** Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

## Instruções Gerais

Essa aula acontece em três momentos principalmente. O primeiro deles o estudo das funções quadráticas e o estudo dessas funções com parâmetros envolvidos. O segundo momento é o estudo de equações irracionais, que também é muito importante e tem muitos casos que podemos analisar. O terceiro e último momento é o estudo de funções e equações modulares, que também é um mundo de ideias e métodos que serão destrinchados ao longo da aula. A incidência dessa matéria no vestibular é que certa de 4%. Isso é cerca de 1 ou 2 questões no vestibular por ano, o que é bastante, visto que essa matéria é curta e representa uma porcentagem bem baixa em relação ao volume de conteúdo que você precisa ter para mandar bem no vestibular. Sendo assim, vamos lá!



Quanto à questão de como estudar o Buzuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.
- “Sangue no olho” e “faca nos dentes” são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

**Observação:** Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

## Análise da aula

### Essa Disciplina no Vestibular

Essa disciplina no vestibular é, de forma geral, bem trabalhosa, principalmente no segundo e terceiro momento da aula. Nela também será abordada a parte de equações paramétricas, assunto que costumava cair no ITA no início dos anos 2000 logo após a mudança no vestibular daquela época. O nível das questões de paramétricas pode variar de bem básico até bem difícil, e as questões já caíram no ITA têm um nível bem razoável. Sendo assim, vamos treinar bastante essa parte. Observe que nessa aula é dado um foco especial para as equações quadráticas devido às suas aplicações, então é importante entender tudo, principalmente os tópicos de inequações quadráticas, sobre qual os alunos costumam ter dúvidas. Preste bastante atenção porque questões dessa aula costumam dar dor de cabeça na hora da prova e são fáceis de errar.

### Roteiro da Aula



- ❖ A aula começa com a definição de função quadrática. Certifique-se de que você não vai esquecer o significado de quando o valor de  $a$  é negativo e quando é positivo.
- ❖ Em **1.1** temos a demonstração dos famosos Delta e Bhaskara, que geralmente são simplesmente decorados por todo mundo. Essas relações devem estar “na corrente sanguínea”, pois são muito importantes.
- ❖ **1.1.2** máximo e mínimo de uma função quadrática são essenciais. Com o tempo você vai aprender a calcular máximos e mínimos de outra maneira. Porém, para essa aula é importante dominar este método. Lembrando que as relações desse tópico valem para equações quadráticas.
- ❖ **1.2** tem a forma de construção de um gráfico. Lembre-se que, quando a equação tem apenas uma raiz, o gráfico toca o eixo  $x$  em apenas um ponto e, quando não tem raízes reais, a função não toca o eixo  $x$ .
- ❖ Se você já sabe resolver equações do segundo grau e sabe o que foi abordado até aqui pode pular as questões **1, 2, 3**. Se esse não for o caso, resolver as questões.
- ❖ No tópico **1.3** temos um erro muito comum que é o aluno esquecer de, na hora de fatorar a equação do segundo grau, colocar o fator  $a$  multiplicando a expressão. Cuidado com isso!
- ❖ **1.4** e **1.5** são MUITO importantes. Essa parte da matéria será usada lá na frente para resolver questões bem difíceis, então prestar bastante atenção nesses tópicos.
- ❖ Tentar a questão **4**.
- ❖ Chegamos em equações e inequações irracionais. Esse tópico (**1.6**) não costuma cair tanto, mas já caiu várias vezes e pode cair de novo, então é bom dominar. É um assunto que a dificuldade pode ir de bem fácil até bem difícil na prova do ITA, e ainda mais na prova do IME. Para vocês terem ideia, dá para misturar equações irracionais com trigonometria, substituições algébricas e outras. Veremos algumas aplicações na seção de bizzus. Entendam bastante esse tópico.
- ❖ Em **2.0**, entender bem a definição de módulo já é meio caminho andado para resolver as questões. Preste bastante atenção nas propriedades **2.3** e na curiosidade desse tópico. Essa curiosidade pode economizar bastante tempo na hora da prova.
- ❖ Faça as questões **5, 6, 7, 8, 9** e **10** pode ser por nível de dificuldade. Caso você já tenha prática com a matéria, faça na ordem e de forma rápida.

## Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Funções Quadráticas e Modulares que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim,



as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

Fáceis	Médias	Difíceis
01, 02, 03, 07, 09, 10, 20	05, 06, 08, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 40, 44	15, 17, 18, 24, 27, 34, 39, 41, 42, 43

## Bizus

- ❖ Questão 18 considerei difícil porque é muito trabalhosa e toma bastante tempo.
- ❖ Questão 23 é muito boa para treinar a questão de estabelecer condições num problema. Como tem a raiz no denominador, além dele ser diferente de zero para satisfazer a condição de existência, ele deve ser maior que zero devido à raiz. Esse tipo de questão é bem interessante e tranquila, só prestar atenção que é sucesso.
- ❖ Questão 29 é muito boa para treinar inequações modulares! Entenda essa questão direitinho para ter mais facilidade nas próximas do mesmo assunto.
- ❖ Questão 20 é muito interessante. Você olha a questão e tem raiz dentro de raiz, e agora? Calma! Como você pode ver na resolução do professor, quase todas as vezes que acontece isso, você notará que a expressão dentro da raiz poderá ser transformada em um quadrado perfeito, então fique ligado!
- ❖ Questão 15 é muito importante! Se ligue nesse bizu! Toda vez que aparecer equações paramétricas com radiciação, ao elevar ao quadrado e permanecer uma raiz, você deve analisar as condições de existência da equação obtida. Assim você vai garantir que não está



criando soluções a mais para o sistema. No final, a solução será a intersecção de todos os intervalos que você achou.

- ❖ Questão 17, do jeito que foi resolvida, é uma questão difícil. Porém, existe outra solução, por geometria analítica. Tome o gráfico de  $(x - 1)^2$ . Agora tome o gráfico de  $|x - a|$ . Para que haja três soluções distintas, os gráficos devem se tocar em três pontos distintos. Sendo assim, podemos observar que esses casos acontecem quando o vértice do gráfico de  $|x - a|$  toca o vértice de  $(x - 1)^2$  e quando um dos ramos de  $|x - a|$  tangencia a curva  $(x - 1)^2$ , o que acontece para cada um dos ramos.
- ❖ Na questão 13, o melhor jeito de abordar é tentar fazer o gráfico logo de primeira. Lembre-se que se você traça uma reta horizontal e ela corta a função apenas uma vez, a função é injetora no intervalo em que isso acontece. E se o contradomínio for igual à imagem, ela é sobrejetora.
- ❖ A seguir serão passadas algumas questões como forma de ilustrar ideias mais sofisticadas sobre o tema da aula. Se você ainda não domina algum assunto abordado nas resoluções não tem problema, essas questões poderão ser consultadas mais a frente num momento de revisão.
- ❖ Questões interessantes:

1) (IME/2009) Considere a sequência:  $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{11}{22}}$ ,  $a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{11}{22}}}$ ,  $a_3 =$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{11}{22}}}}, \dots\dots$$

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

2) (IME/2002) Resolva a equação  $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$ , sabendo-se que  $x > 0$ .

- ❖ Solução das questões:

### Questão 1)



Da trigonometria, temos que  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta}$  e que  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Sabendo disso, na questão, temos que:

$$a_1 = \cos 30^\circ$$

$$a_2 = \cos 15^\circ$$

$$a_3 = \cos\left(\frac{15^\circ}{2}\right)$$

.

.

.

$$a_{20} = \cos\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right)$$

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_{20} = \cos 30^\circ \cos 15^\circ \dots \cos\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right) = P$$

$$2P \sin\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right) = \cos 30^\circ \cos 15^\circ \dots 2 \sin\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right) \cos\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right)$$

$$4P \sin\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right) = \cos 30^\circ \cos 15^\circ \dots 2 \cos\left(\frac{30^\circ}{2^{18}}\right) \sin\left(\frac{30^\circ}{2^{18}}\right)$$

Fazendo esse processo, concluímos que:

$$2^{21}P \sin\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right) = \sin 60^\circ$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2^{21} \sin\left(\frac{30^\circ}{2^{19}}\right)}$$

### Questão 2:

Façamos uma mudança de variável, a nossa nova variável será o número 5! Assim, temos que:

$$\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x \quad x > 0$$

$$5 - \sqrt{5 - x} = x^2 \quad x < \sqrt{5}$$

$$(5 - x^2)^2 = 5 - x$$



$$\begin{aligned}5^2 - 2.5.x^2 + x^4 &= 5 - x \\5^2 - 5(2x^2 + 1) + x^4 + x &= 0 \\ \Delta &= (2x^2 + 1)^2 - 4.1.(x^4 + x) \\ \Delta &= (2x - 1)^2 \\ 5 &= \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2}\end{aligned}$$

Fazendo as contas para achar todos os valores de  $x$  que satisfazem a equação acima e usando o fato de que  $x > 0$  e  $x < \sqrt{5}$ , temos que a única solução é  $x = \frac{(\sqrt{21}-1)}{2}$ .

