1. Equação da elongação de uma onda harmônica unidimensional

Dada uma onda harmônica unidimensional, que se propaga ao longo de um eixo *Ox*, vamos obter uma equação que fornece a elongação em função do tempo para um ponto de abscissa *x*.

De início, apenas para fixar ideias, suponhamos o caso de uma onda harmônica transversal, propagando-se ao longo de uma corda no sentido positivo do eixo (fig. 1). Suponhamos que a fonte de ondas esteja na origem do eixo e seja *F* a extremidade da corda ligada à fonte.

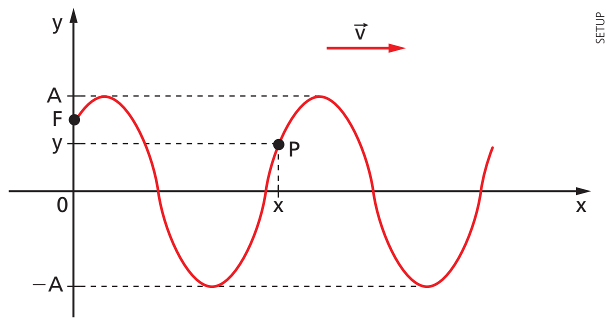


Figura 1.

Como a onda é harmônica, o movimento da fonte (e de todos os pontos da corda) é harmônico simples de frequência *f*, período *T* e amplitude *A*. Como vimos na teoria, sendo onda unidimensional e supondo que o meio não absorva energia, podemos admitir que todos os pontos vibram com a mesma amplitude.

Sendo y_F a elongação de *F*, a equação horária de y_F é (veja o capítulo 15):

$$y_F = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad ①$$

em que ω é a frequência angular (dada por $\omega = \frac{2\pi}{T}$) e θ_0 é a **fase inicial** (ou **constante de fase**). A soma $\omega t + \theta_0$ é a fase num instante *t*.

Seja *P* outro ponto qualquer da corda, cuja abscissa é *x* e cuja elongação é *y* (fig. 1). Uma perturbação originada em *F* deve atingir o ponto *P* após um intervalo de tempo Δt, dado por $\Delta t = \frac{x}{v}$, em que *v* é a velocidade da onda. Assim, o ponto *P* repete o movimento da fonte com um atraso Δt. Portanto, a equação horária da elongação de *P* é:

$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \theta_0]$$

ou

$$y = A\cos[\omega t - \omega(\Delta t) + \theta_0]$$

Mas, lembrando que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\Delta t = \frac{x}{v}$, temos:

$$\omega(\Delta t) = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{x}{v} = \frac{2\pi}{\underbrace{T\cdot v}_{\lambda}}\cdot x = \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot x = b\cdot x$$

Substituindo na equação acima, obtemos:

$$y = A\cos(\omega t - bx + \theta_0) \qquad ②$$

com $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $b = \frac{2\pi}{\lambda}$. A grandeza *b* é chamada **número de onda** e sua unidade no SI é rad/m ou m^{-1}.

A equação ②, chamada **equação de onda unidimensional**, nos dá a elongação de um ponto *P*, de abscissa *x*, no instante *t*. É conveniente observar que θ_0 é a fase inicial de *F* e não do ponto *P*. Assim, para não causar confusão, ao usarmos a equação de onda, é mais conveniente chamar θ_0 de constante de fase. Na equação ②, o argumento da função trigonométrica $(\omega t - bx + \theta_0)$ é a **fase** do ponto de abscissa *x* no instante *t*.

Para obter a equação ② fizemos a hipótese de que a onda em questão era uma onda transversal em uma corda e, desse modo, a figura 1 pode ser imaginada como o **perfil** da corda num determinado instante. Porém, a equação ② vale também para ondas longitudinais (como, por exemplo, as ondas de compressão se propagando no gás contido num cilindro fino). A única diferença é que, no caso da onda longitudinal, a figura 1 não pode mais ser imaginada como o **perfil** da onda, devendo ser interpretada apenas como um **gráfico**, que dá, num determinado instante, a elongação de um ponto *P*, em função da abscissa *x* do ponto.

Outras formas da equação de onda

Há autores que preferem apresentar a equação de onda de outras formas, diferentes da equação ②. Vamos então mostrar quais são essas formas.

Lembrando que, para qualquer α, temos:

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

a equação ② pode ser modificada do seguinte modo:

$$y = A\cos(\omega t - bx + \theta_0) = A\cos(bx - \omega t - \overbrace{\theta_0}^{\beta})$$

ou:

$$y = A\cos(bx - \omega t + \beta) \qquad ③$$

Por outro lado, sabemos que, para qualquer α, temos:

$$\cos\alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Assim, a equação ③ transforma-se do seguinte modo:

$$y = A\cos(bx - \omega t + \beta) = A\,\text{sen}\left(bx - \omega t + \underbrace{\beta + \frac{\pi}{2}}_{\gamma}\right)$$

ou:

$$y = A\,\text{sen}(bx - \omega t + \gamma) \qquad ④$$

É importante observar que, em todas as formas da equação de onda, temos:

- os coeficientes de *x* e *t* têm sinais opostos;
- o módulo do coeficiente de *x* é *b*, sendo $b = \frac{2\pi}{\lambda}$;
- o módulo do coeficiente de *t* é ω, sendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Onda que se propaga no sentido negativo do eixo

As equações de onda apresentadas acima valem para uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo O_x. Vamos agora verificar como fica a equação horária quando a onda se propaga no sentido negativo.

Retomemos a equação ①, que dá a elongação de um ponto situado na origem, em função do tempo:

$$y = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

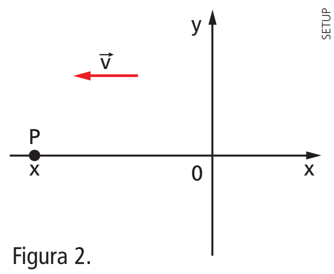


Figura 2.

Sendo *P* um ponto de abscissa *x*, tal que $x < 0$ (fig. 2), podemos afirmar que uma perturbação originada na origem atingirá o ponto *P* após um intervalo de tempo Δt dado por:

$$\Delta t = \frac{-x}{|v|}$$

Portanto, a equação horária da elongação de *P* é:

$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \theta_0]$$

ou:

$$y = A\cos[\omega t - \omega(\Delta t) + \theta_0] \qquad ⑤$$

mas:

$$\omega(\Delta t) = \omega \cdot \frac{-x}{|v|} = \underbrace{\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{-x}{|v|}}_{\lambda} = \frac{2\pi}{T|v|} \cdot (-x) = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{b} \cdot (-x) = -bx$$

Substituindo em ⑤:

$$y = A\cos[\omega t - \omega(-bx) + \theta_0] \quad \text{ou} \quad y = a\cos(\omega t + bx + \theta_0) \qquad ⑥$$

Lembrando que $\cos\alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, a equação ⑥ transforma-se do seguinte modo:

$$y = A\cos(\omega t + bx + \theta_0) = A\,\text{sen}\left(\omega t + bx + \underbrace{\theta_0 + \frac{\pi}{2}}_{\delta}\right)$$

ou:

$$y = \text{sen}(\omega t + bx + \delta) \qquad ⑦$$

Observamos que, neste caso, os coeficientes de *t* e *x* têm o mesmo sinal.

Defasagem de dois pontos

No estudo da interferência de ondas, que será feito no capítulo 17, veremos que é muito importante saber a diferença de fase entre dois pontos, num determinado instante.

Tomemos uma das equações de onda apresentadas anteriormente, por exemplo, a equação ③:

$$y = A\cos(bx - \omega t + \beta)$$

e consideremos dois pontos de abscissas x_1 e x_2. Num determinado instante t, suas fases serão:

$$\varphi_1 = bx_1 - \omega t + \beta \quad \text{e} \quad \varphi_2 = bx_2 - \omega t + \beta$$

A **diferença de fase** (ou **defasagem**) entre esses pontos é:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (bx_1 - \omega t + \beta) - (bx_2 - \omega t + \beta) = b\,(x_1 - x_2)$$

Em geral só nos interessa o módulo da diferença de fase:

$$|\Delta\varphi| = |\varphi_1 - \varphi_2| = b|x_1 - x_2| = b|\Delta x|$$

Lembrando que $b = \frac{2\pi}{\lambda}$, temos:

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta x| \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta\varphi = \frac{|\Delta x|}{\lambda} \cdot 2\pi} \quad ⑧$$

Pontos em concordância de fase

No item 2 deste capítulo vimos que, se:

$$|\Delta x| = n\lambda \quad ⑨$$

sendo n um número natural, os pontos oscilam **em fase**. Substituindo ⑨ em ⑧ temos:

$$|\Delta\varphi| = \frac{n\lambda}{\lambda} \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad \boxed{|\Delta\varphi| = n \cdot 2\pi} \quad ⑩$$

Portanto, podemos dizer que, se dois pontos oscilam em fase, sua defasagem é um múltiplo inteiro de 2π. Isso é uma consequência direta de um fato conhecido da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + n \cdot 2\pi) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \cos(\alpha + n \cdot 2\pi)$$

isto é, se a defasagem for um múltiplo inteiro de 2π, as funções trigonométricas fornecerão o mesmo valor e, assim, os pontos terão a **mesma elongação** (no caso de uma onda unidimensional).

Pontos em oposição de fase

Vimos também (no item 2) que, se

$$|\Delta x| = i \cdot \frac{\lambda}{2} \quad ⑪$$

sendo i um número natural ímpar, os pontos estarão em **oposição de fase**. Substituindo ⑪ em ⑧, obtemos:

$$|\Delta\varphi| = \frac{i \cdot \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad \boxed{|\Delta\varphi| = i \cdot \pi} \quad ⑫$$

Podemos dizer, então, que, se dois pontos oscilam em **oposição de fase**, a defasagem entre eles é um múltiplo ímpar de π. Isso também é consequência direta de uma propriedade da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha + i\pi) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha + i\pi)$$

Assim, se a defasagem entre dois pontos for um múltiplo ímpar de π, as elongações y_1 e y_2, dos pontos de abscissas x_1 e x_2 serão, a cada instante, simétricas:

- se $y_1 = 4$, então $y_2 = -4$
- se $y_1 = -2$, então $y_2 = +2$
- se $y_1 = 0$, então $y_2 = 0$

etc.

Exercícios

1. Uma onda unidimensional propaga-se ao longo de um eixo Ox, de acordo com a equação $y = 3\cos\left(4t - 5x + \frac{\pi}{3}\right)$, com x e y em centímetros e t em segundos.
Para essa onda determine:

a) o sentido de propagação;
b) a amplitude;
c) a frequência;
d) o comprimento de onda;
e) a velocidade de propagação.

Resolução:

a) Como os coeficientes de x e t têm sinais contrários, a onda propaga-se no sentido positivo do eixo.

b) A amplitude é o número que multiplica a função trigonométrica:

$$\boxed{A = 3\text{ cm}}$$

c) O módulo do coeficiente de t é igual a ω:

$\omega = 4$ rad/s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 4 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}\text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{2}{\pi}\text{ Hz}}$$

d) O módulo do coeficiente de x é igual a $\frac{2\pi}{\lambda}$:

$$5 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{5}\text{ cm}}$$

e) $$v = \lambda f = \left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right) \Rightarrow \boxed{v = \frac{4}{5}\text{ cm/s}}$$

2. Consideremos uma onda unidimensional cuja equação é $y = 8\,\text{sen}\left(4t - 6x + \frac{\pi}{2}\right)$ no Sistema Internacional de Unidades. Determine, para essa onda:

a) a amplitude;
b) o período;
c) a frequência;
d) o comprimento de onda;
e) a velocidade de propagação;
f) o sentido de propagação.

3. Uma onda unidimensional tem equação $y = 6\,\text{sen}\,(3x + 4t)$ com x e y em centímetros e t em segundos. Determine, para essa onda:

a) o sentido de propagação;
b) a amplitude;
c) o período;
d) o comprimento de onda;
e) o módulo da velocidade de propagação.

4. Uma onda unidimensional propaga-se ao longo do eixo Ox de acordo com a equação $y = 3\cos\,[2\pi(4t - 5x)]$ no Sistema Internacional de Unidades. Determine, para essa onda:

a) o sentido de propagação;
b) a amplitude;
c) o período;
d) o comprimento de onda;
e) o módulo da velocidade de propagação.

5. Uma onda unidimensional, de comprimento de onda $\lambda = 16$ cm, propaga-se ao longo de um eixo Ox. Calcule a defasagem entre dois pontos, A e B, cujas abscissas são $x_A = 20$cm e $x_B = 70$cm.

Resolução:

$$|\Delta\varphi| = \frac{|\Delta x|}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{|x_B - x_A|}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{70 - 20}{16} \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{4}$$

$$|\Delta\varphi| = \frac{25\pi}{4}\text{ rad}$$

Essa defasagem é equivalente a uma defasagem $\Delta\varphi_R$ denominada defasagem reduzida, tal que: $0 \leqslant \Delta\varphi_R < 2\pi$ e $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi + n \cdot 2\pi$, onde n é um número natural. Assim:

$$|\Delta\varphi| = \frac{70 - 20}{16} \cdot 2\pi = \frac{50}{16} \cdot 2\pi = \frac{25}{8} \cdot 2\pi = \left(\frac{24}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot$$
$$\cdot\, 2\pi = \left(3 + \frac{1}{8}\right) \cdot 2\pi = 3(2\pi) + \frac{1}{8} \cdot 2\pi = 3(2\pi) + \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\Delta\varphi_R}$$

Portanto: $\boxed{\Delta\varphi_R = \frac{\pi}{4}\text{ rad}}$

6. Consideremos uma onda unidimensional de comprimento de onda $\lambda = 12$ m que se propaga no sentido positivo de um eixo Ox. Sejam A e B dois pontos de abscissas $x_A = 20$ m e $x_B = 84$ m, respectivamente.

a) Calcule a defasagem entre esses pontos.
b) Calcule a defasagem reduzida entre esses pontos.

7. Uma onda unidimensional, de comprimento de onda 4 m, propaga-se no sentido positivo de um eixo Ox. Considere um ponto P de abscissa $X_P = 11$ m. Dentro do intervalo $0 \leqslant x \leqslant 24$ m, determine:

a) as abscissas dos pontos que estão em concordância de fase com P;
b) as abscissas dos pontos que estão em oposição de fase com P.

8. (Mackenzie-SP) Uma onda transversal se propaga obedecendo à função $y = 4\cos\pi(20t - 4x)$ no sistema CGS. A velocidade de propagação dessa onda é:

a) 5,0 cm/s
b) 3,1 cm/s
c) 1,0 cm/s
d) 0,5 cm/s
e) 0,2cm/s

9. (ITA-SP) Uma onda se propaga de acordo com a equação $y = A\cos(ax - bt)$, onde $a = 2{,}00\ m^{-1}$ e $b = 6{,}0 \cdot 10^3$ rad/s. Nesse caso:

a) o comprimento de onda é igual a 2,00 m.

b) o período da onda é $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ s.

c) a onda se propaga com a velocidade de $3{,}0 \cdot 10^3$ m/s.

d) a velocidade da onda é $3{,}4 \cdot 10^2$ m/s.

e) nenhuma das afirmações acima é correta.

10. (UF-ES) Uma onda que se propaga ao longo da direção *x* é descrita pela equação $y(x,t) = 3\,\mathrm{sen}\,(2\pi x + 8\pi t)$, onde *x* e *y* estão em centímetros e *t*, em segundos. O comprimento de onda e o período dessa onda são, respectivamente:

a) $\lambda = 2\pi$ cm; $T = 8\pi$ s.

b) $\lambda = 2\pi$ cm; $T = \left(\frac{1}{8}\pi\right)$ s.

c) $\lambda = 1{,}0$ cm; $T = 8\pi$ s.

d) $\lambda = 1{,}0$ cm; $T = 0{,}25$ s.

e) $\lambda = 1{,}0$ cm; $T = \left(\frac{1}{8}\pi\right)$ s.

11. (Faap-SP) Uma onda mecânica se propaga de acordo com a equação $y = 3\cos[2\pi(20t - 4x)]$, com *x* e *y* em centímetros e *t* em segundos. Para essa onda determine:

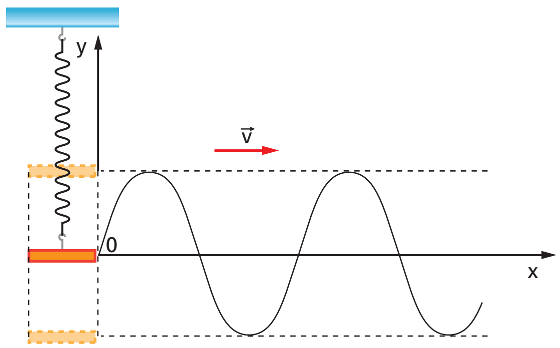
a) a amplitude;

b) o comprimento de onda;

c) o período;

d) a velocidade de propagação.

12. (Mackenzie-SP) Um corpo, preso à extremidade de uma mola vertical, oscila, obedecendo à função horária $y = 0{,}10 \cdot \cos 0{,}50\pi\, t$ (SI). Se prendemos a esse corpo uma corda horizontal, ideal e de comprimento infinito, a onda que se propaga nela terá velocidade de 1 m/s. Tendo a corda a outra extremidade livre, a equação da onda nela estabelecida será:



a) $y = 0{,}20\cos\pi\,(t - x)$

b) $y = 0{,}10\cos 0{,}50\pi\,(t - x)$

c) $y = 0{,}20\cos 2\pi\,(t - x)$

d) $y = 0{,}10\cos 0{,}50\pi\,(2t - x)$

e) $y = 0{,}10\cos 2\pi\,(t - x)$

Tabela de frequência dos sons musicais, com afinação temperada e adotando 440 Hz para lá$_4$

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dó	16,35	32,7	65,41	130,8	261,6	523,3	1 047	2 093	4 186
Dó#	17,32	34,65	69,3	138,6	277,2	544,4	1 109	2 217	4 435
Ré	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,3	1 175	2 349	4 699
Ré#	19,45	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3	1 245	2 489	4 978
Mi	20,6	41,2	82,41	164,8	329,6	659,3	1 319	2 637	5 274
Fá	21,83	43,65	87,31	175,6	349,2	698,5	1 397	2 794	5 588
Fá#	23,12	46,25	92,5	185	370	740	1 480	2 960	5 920
Sol	24,5	49	98	196	392	784	1 568	3 136	6 272
Sol#	25,96	51,91	103,8	207,7	415,3	830,6	1 661	3 322	6 645
Lá	27,5	55	110	220	440	880	1 760	3 520	7 040
Lá#	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1 865	3 729	7 459
Si	30,87	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1 976	3 951	7 902

Embora a maioria dos músicos ocidentais adote o padrão acima, há ainda algumas orquestras que estabelecem um valor diferente para a frequência do lá$_4$, acarretando a mudança de todos os valores da tabela acima. Nos Estados Unidos, por exemplo, há algumas orquestras que adotam valores de frequência entre 442 Hz e 444 Hz para o lá$_4$.