Exercícios de Matemática
Trigonometria – Equações Trigonométricas

1. (Ufpe) Quantas soluções a equação

$$\text{sen}^2x + [(\text{sen}^4x)/2] + [(\text{sen}^6x)/4] + \ldots = 2,$$

cujo lado esquerdo consiste da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo sen^2x e razão $(\text{sen}^2x)/2$, admite, no intervalo $[0, 20\pi]$?

2. (Ufpr) Considere as matrizes a seguir, onde a, b, c e φ são números reais. Assim, é correto afirmar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi \\ 2^b & c \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3^{a+2b} & \log_{10}\sqrt{10} \\ \frac{1}{2} & \log_{10}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

(01) Os valores de a e b para os quais A = B são, respectivamente, 2 e -1.
(02) Para que a matriz A seja igual à matriz B, é necessário que c seja número negativo.
(04) Se b = 0 e c = -1, então o elemento na posição "2ª linha, 2ª coluna" da matriz (A.B) é $\log_{10}\sqrt{2}$.
(08) Se φ = 0 e c = 0, então a matriz A tem inversa, qualquer que seja o valor de b.
(16) Todos os valores de φ para os quais A = B são da forma $2k\pi \pm \pi/3$, onde k é número inteiro.

Soma (   )

3. (Unicamp) Dado o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} [\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha)]\,x + [2\text{sen}(\alpha)]\,y = 0 \\ [\cos(\alpha)]\,x + [\cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha)]\,y = 0 \end{cases}$$

a) Encontre os valores de α para os quais esse sistema admite solução não-trivial, isto é, solução diferente da solução x = y = 0.
b) Para o valor de α encontrado no item (a) que está no intervalo $[0, \pi/2]$, encontre uma solução não-trivial do sistema.

4. (Ita) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. Determine os ângulos deste triângulo.

5. (Ufu) Determine a soma das raízes de $\log_2(\text{sen}x) - \log_2(\cos x + \text{sen}x) = 0$, contidas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

6. (Uem) Considere um ponto P(x,y) sobre a circunferência trigonométrica e que não esteja sobre nenhum dos eixos coordenados. Seja α o ângulo determinado pelo eixo OX e pela semi-reta OP, onde O é a origem do sistema. Nessas condições, assinale o que for correto.
01) A abscissa de P é menor do que $\cos(\alpha)$.
02) A ordenada de P é igual a $\text{sen}[\alpha + (\pi/2)]$.
04) A tangente de α é determinada pela razão entre a ordenada e a abscissa de P.
08) As coordenadas de P satisfazem à equação $x^2 + y^2 = 1$.
16) Se x = y, então $\text{cotg}(\alpha) = -1$.
32) $\alpha = \pi/4$ é o menor arco positivo para o qual a equação $\cos^2(\alpha + \pi) + \text{sen}^2[\alpha + (\pi/2)] = \cos^2[(\alpha + (\pi/2)] + \text{sen}^2(\alpha + \pi)$ é satisfeita.
64) $\text{sen}(2\alpha) = 2y$.

7. (Ita) Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 1/2$$
$$\text{sen}\,x + \cos y = 1$$

8. (Ufes) Determine todos os valores de θ para os quais $\text{sen}^3\theta\cos\theta - \text{sen}\theta\cos^3\theta = 1/4$

9. (Fatec) O conjunto solução da equação $2\cos^2 x+\cos x-1=0$, no universo $U=[0,2\pi]$, é
a) $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$
b) $\{\pi/6, \pi, 5\pi/6\}$
c) $\{\pi/3, \pi/6, \pi\}$
d) $\{\pi/6, \pi/3, \pi, 2\pi/3, 5\pi/3\}$
e) $\{\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi\}$

10. (Fei) Se $\text{cotg}(x) + \text{tg}(x) = 3$, então $\text{sen}(2x)$ é igual a:
a) 1/3
b) 3/2
c) 3
d) 2/3
e) nenhuma anterior é correta

11. (Ita) Seja $a \in [-\pi/4, \pi/4]$ um número real dado. A solução (x_0, y_0) do sistema de equações

$$\begin{cases} (\text{sen}\,a)x - (\cos a)y = -\text{tg}\,a \\ (\cos a)x + (\text{sen}\,a)y = -1 \end{cases}$$

é tal que:
a) $x_0 . y_0 = \text{tg}\,a$
b) $x_0 . y_0 = -\sec a$
c) $x_0 . y_0 = 0$
d) $x_0 . y_0 = \text{sen}^2 a$
e) $x_0 . y_0 = \text{sen}\,a$

12. (Ufpe) Determine a menor solução real positiva da equação $\text{sen}(\pi x/423)+\text{sen}(2\pi x/423)=\cos(\pi x/846)$.

13. (Uel) Se $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $\cos 2x=\text{sen}[(\pi/2)-x]$ é
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

14. (Ufmg) DETERMINE todos os valores de x pertencentes ao intervalo $(0, \pi)$ que satisfazem a equação
$3\,\text{tg}\,x + 2\cos x = 3\sec x$.

15. (Unirio) Para que a matriz a seguir, seja inversível, é necessário que:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi & 1 \\ \text{sen}\,\varphi & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\varphi \neq \pi/4 + 2k\pi$
b) $\varphi \neq \pi/2 + 2k\pi$
c) $\varphi \neq k\pi$
d) $\varphi \neq 2k\pi$
e) $\varphi \neq 2k\pi \pm \pi/2$

16. (Ufsc) Assinale a ÚNICA proposição CORRETA. No intervalo $[0,3\pi]$, o número de soluções da equação $\text{sen}2x=(\sqrt{2})\cos x$ é

01. 3.
02. 4.
04. 5.
08. 6.
16. 7.

17. (Uece) Se $n = [\text{sen}(\pi/6) + \cos(\pi/3)]/[\log_4 \text{sen}(\pi/6)]$, então $(1+8n)/(1+n^2)$ é igual a:
a) -7/2
b) -3
c) 2
d) 5/2

18. (Uece) Se $\text{sen}\theta = (2\sqrt{85})/85$, $\pi/2 < \theta < \pi$, então $2+\text{tg}[\theta-(\pi/4)]$ é igual a:
a) 3/7
b) 4/7
c) 5/7
d) 6/7

19. (Cesgranrio) O número de soluções da equação $sen^2x=2sen\ x$, no intervalo $[0,2\pi]$, é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

20. (Fei) Se $s = sen(x)$, $5s^2 + s - 4 = 0$ e $0 \leq x \leq \pi/2$ então:

a) $x = 0$
b) $0 < x < \pi/4$
c) $0 < x < \pi/6$
d) $x = \pi/2$
e) $\pi/4 < x < \pi/2$

21. (Cesgranrio) Todos os valores de $x \in [\pi, 2\pi]$ que satisfazem $senx.cosx>0$ são:

a) $\pi < x < 5\pi/4$
b) $5\pi/4 < x < \pi$
c) $\pi < x < 3\pi/2$
d) $3\pi/2 < x < 2\pi$
e) $3\pi/2 < x < 7\pi/4$

22. (Cesgranrio) O número de raízes reais da equação $(3/2)+cosx=0$ é:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) maior do que 3.

23. (Ufrs) Considere a equação $cos\ x=cos(x + \pi)$. Se $0\leq x<2\pi$, esta equação

a) não tem solução.
b) tem apenas 1 solução.
c) tem somente soluções 0 e π.
d) tem somente as soluções $\pi/2$ e $3\pi/2$.
e) tem infinitas soluções.

24. (Ufrs) No intervalo $[0, \pi]$ a equação $tan\ x - 1 = 0$

a) não possui raízes.
b) possui uma única raiz.
c) possui apenas 2 raízes.
d) possui exatamente 4 raízes.
e) possui infinitas raízes.

25. (Ita) A soma das raízes da equação $(\sqrt{3})tgx-(\sqrt{3})sen2x+cos2x=0$, que pertencem ao intervalo $[0,2\pi]$, é:

a) $17\pi/4$
b) $16\pi/3$
c) $15\pi/4$
d) $14\pi/3$
e) $13\pi/4$

26. (Mackenzie) Em $[0, 2\pi]$, a soma das soluções reais da equação $[2-\sqrt{(1-cos^2x)}] . [0,5-\sqrt{(1-sen^2x)}] = 0$ é:

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

27. (Fuvest) Ache todas as soluções da equação

$$sen^3x\ cos\ x - 3\ senx\ cos^3x = O$$

no intervalo $[0,2\pi)$.

28. (Fatec) Sejam as equações

A: $tgx = sen2x$ e
B: $cos^2x = 1/2$.

Sobre as sentenças

I. As equações A e B têm exatamente as mesmas soluções.
II. A equação B tem soluções $x=(\pi/4)+(k\pi/2)$,com $k \in Z$..
III. No intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$ a equação A tem soluções $x = 0$ e $x = \pi/4$.

é verdade que

a) somente a I é falsa.
b) somente a II é falsa.
c) somente a III é falsa.
d) todas são verdadeiras.
e) todas são falsas.

29. (Mackenzie) Em $[0, 2\pi]$, a soma das raízes da equação
$[\sqrt{(1 - \cos^2 x)}] + \text{sen } x = 1$ é:

a) 3π
b) 2π
c) 4π
d) 0
e) π

30. (Unirio) O conjunto-solução da equação $\cos 2x = 1/2$, onde x é um arco da 1ª volta positiva, é dado por:
a) {60°, 300°}
b) {30°, 330°}
c) {30°, 150°}
d) {30°, 150°, 210°, 330°}
e) {15°, 165°, 195°, 345°}

31. (Uel) O conjunto solução da equação $\text{sen}x=\text{sen}2x$, no universo $U=[0,2\pi]$, é
a) $\{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 2\pi\}$
b) $\{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi\}$
c) $\{0, \pi/3, \pi/2, \pi, 2\pi\}$
d) $\{0, \pi/4, \pi/3, 2\pi\}$
e) $\{0, \pi/3, \pi, 2\pi\}$

32. (Ufrs) A identidade $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x$ é verificada se e somente se
a) x é número real.
b) $x = 0$.
c) $x = n\pi$, sendo n qualquer inteiro.
d) $x = n\pi/2$, sendo n qualquer inteiro.
e) $x = 2n\pi$, sendo n qualquer inteiro.

33. (Unicamp) Considere a função:
$S(x) = 1 + 2\text{sen } x + 4(\text{sen } x)^2 + 8(\text{sen } x)^3$ para $x \in \mathbb{R}$.
a) Calcule $S(\pi/3)$.
b) Resolva a equação: $S(x) = 0$, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

34. (Puc-rio) Quantas soluções de $\text{sen}(x) + \cos(x) = 0$ existem para x entre 0 e 2π?

35. (Uff) Determine a relação entre os números reais a e b de modo que as igualdades

$$1 + \cos x = a \text{ sen } x \text{ e } 1 - \cos x = b \text{ sen } x,$$

com $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sejam satisfeitas simultaneamente.

36. (Ufrj) O número de soluções da equação $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ no intervalo $[0, \pi]$ é
a) 1.
b) 0.
c) 2.
d) 4.
e) 3.

37. (Ufrj) Determine o valor de p na equação $[(\text{sen}x-p\cos^2 x)/\text{sen}x]-2\text{sen}x=(-p+\text{sen}x)/\text{sen}x$, sendo $x\neq k\pi$ e $k\in \mathbb{Z}$.

38. (Ufv) Determine todos os pares (x,y) de números reais que satisfazem o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 2y \\ \cos^2 x = \text{sen}^2 y, \end{cases}$$

sendo $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$

39. (Mackenzie) I) Se $\pi < x < 3\pi/2$, então $\text{sen } x \cdot \cos x \cdot \text{tg } x + 1 < 0$.
II) Em $[\pi, 3\pi]$, o número de raízes da equação $\text{sen}x+\cos x=0$ é 2.
III) No triângulo de lados 3, 4 e 5, o seno da diferença entre os ângulos menores pode ser 7/25.

Das afirmações anteriores:
a) todas são verdadeiras.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) apenas I é verdadeira.
e) apenas III é verdadeira.

40. (Mackenzie) I) Se $\text{sen } x+\cos y=2$, $0\leq x, y\leq\pi/2$, então $\text{sen}(x+y)=1$.
II) Não existe x real tal que $\cos^2(x-\pi)\geq\pi$.
III) Se $x+2y=\pi/2$, então $1+\text{sen } x=2 \cos^2 y$.

Das afirmações acima:
a) somente I é verdadeira.
b) somente II é verdadeira.
c) somente I e II são verdadeiras.
d) somente II e III são verdadeiras.
e) todas são verdadeiras.

41. (Mackenzie) Em [0, 2π], o número de soluções reais da equação

$$(\sqrt{3}) \text{ sen } x + \cos x = 2 \text{ é:}$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

42. (Mackenzie) Em [0, 2π], se α é a maior raiz da equação mostrada na figura adiante

$$\binom{4}{0}\cos^4 x - \binom{4}{1}\cos^3 x + \binom{4}{2}\cos^2 x - \binom{4}{3}\cos x + 1 = 0$$

, então sen(3α /4) vale:
a) -1
b) 1
c) 0
d) 1/2
e) - 1/2

43. (Ufu) A área da região do primeiro quadrante delimitada pelas retas, que são soluções da equação cos(x+y)=0, com 0≤x+y≤2π , é igual a
a) π^2 unidades de área.
b) $4\pi^2$ unidades de área.
c) $3\pi^2$ unidades de área.
d) $8\pi^2$ unidades de área.
e) $2\pi^2$ unidades de área.

44. (Fuvest) O dobro do seno de um ângulo θ, 0 < θ < π /2, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:
a) 2/3
b) (√ 3)/2
c) (√ 2)/2
d) 1/2
e) (√ 3)/3

45. (Unirio) O conjunto-solução da equação senx=cosx, sendo 0≤x<2π , é:
a) {π /4}
b) {π /3}
c) {5π /4}
d) {π /3, 4π /3}
e) {π /4, 5π /4}

46. (Unirio) Considere a função definida por

$f(x) = tg^3 [x+(\pi /2)] - tg [(x+(\pi /2)]$, sendo, $x \in \,]0, \pi[$.

a) Determine os valores de x tais que f(x)=0.

b) Encontre os valores de x tais que $\log_2 1 < f(x)$.

47. (Fgv) Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) sen x = √ 2/2, onde 0 ≤ x ≤ 2π

b) sen x = cos2x, onde 0 ≤ x ≤ 2π

48. (Unesp) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às 3 horas da manhã do primeiro dia (t=0) e terminou 72 horas depois (t=72). Os dados puderam ser aproximados pela função

H(t) = 15 + 5 sen [(π /12)t + (3π /2)],

onde t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação de H(t) a temperatura (em °C) no instante t.

a) Resolva a equação sen [(π /12)t + (3π /2)] = 1, para t∈ [0,24].

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia de observação.

49. (Unesp) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o mesmo era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$P(t) = (21/2) + 2\cos[(\pi/6)t + (5\pi/4)]$,

onde t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação (t = 0) e P(t) é a profundidade da água (em metros) no instante t.

a) Resolva a equação, $\cos[(\pi/6)t + (5\pi/4)] = 1$, para $t>0$.

b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

50. (Unicamp) Considere a equação trigonométrica

$sen^2\theta - 2\cos^2\theta + (1/2)\, sen\, 2\theta = 0$.

a) Mostre que NÃO são soluções dessa equação os valores de θ para os quais $\cos\theta=0$.

b) Encontre todos os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação.

51. (Fuvest) Determine as soluções da equação

$$(2\cos^2x + 3senx)(\cos^2x - sen^2x) = 0$$

que estão no intervalo $[0,2\pi]$.

52. (Fuvest) A soma das raízes da equação $sen^2x-2\cos^4x=0$, que estão no intervalo $[0, 2\pi]$, é:
a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 6π
e) 7π

53. (Fuvest) Se α está no intervalo $[0, \pi/2]$ e satisfaz $sen^4\alpha-\cos^4\alpha=1/4$, então o valor da tangente de α é:
a) $\sqrt{(3/5)}$
b) $\sqrt{(5/3)}$
c) $\sqrt{(3/7)}$
d) $\sqrt{(7/3)}$
e) $\sqrt{(5/7)}$

54. (Ufsm) Considere f: IR $\longrightarrow$ IR, dada por $f(x)=4x^2-4x-tg^2\theta$, onde $0<\theta<2\pi$. Os valores de θ, para os quais f assume o valor mínimo -4, são

a) $\{\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3\}$
b) $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$
c) $\{\pi/5, 2\pi/5, 3\pi/5, 4\pi/5\}$
d) $\{\pi/6, 4\pi/6, 5\pi/6, 4\pi/3\}$
e) $\{\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7, 5\pi/7\}$

55. (Ufsm) A soma das raízes da equação $\cos^2x + \cos x = 0$, no intervalo $0 < x < 2\pi$, é
a) π
b) 4π
c) 3π
d) $7\pi/2$
e) $5\pi/2$

56. (Uel) Em relação à equação cos x=cos 2x, com $x \in =[0, 2\pi]$, é correto afirmar:
a) Possui uma solução no 3Ž quadrante.
b) Possui duas soluções no 2Ž quadrante.
c) Possui somente a solução nula.
d) Uma das suas soluções é π.
e) A única solução não nula é $2\pi/3$.

57. (Ufrrj)
$sen^2(x^3 + 7x^2 + x + 1) + \cos^2(x^3 + 5x^2 + 2) = 1$

Dentre os conjuntos abaixo, o que está contido no conjunto solução da equação acima é
a) S = {-1/2, 1}.
b) S = {1/2, 1}.
c) S = {-1, -1/2}.
d) S = {-2, 1/2}.
e) S = {-1, 1/2}.

58. (Puc-rio) Para que valores de x vale

$(\cos(x) + sen(x))^4 - (\cos(x) - sen(x))^4=$
$=2[(\cos(x) + sen(x))^2 - (\cos(x) - sen(x))^2]$?

59. (Mackenzie) As soluções positivas de sen 2x = 2 sen^2 x, com sen x $\neq$ 0, formam uma seqüência que é uma:

a) PA de razão $\pi/2$ e primeiro termo $\pi/4$.
b) PA de razão 2π e primeiro termo $3\pi/4$.
c) PA de razão π e primeiro termo $\pi/4$.
d) PG de razão 3 e primeiro termo $\pi/4$.
e) PG de razão 3 e primeiro termo $3\pi/4$.

60. (Pucrs) Se f e g são funções definidas por $f(x)=[2tg(x)]/[1+tg^2(x)]$ e g(x)= sen(2x), o conjunto A={x $\in$ IR | f(x)=g(x)} é

a) IR
b) IR_+
c) {x $\in$ IR | tg (x)$\neq$0}
d) {x $\in$ IR | cos (x)$\neq$0}
e) {x $\in$ IR | sen (x)$\neq$0}

61. (Ufes) Uma pequena massa, presa à extremidade de uma mola, oscila segundo a equação

$$f(t) = 8sen(3\pi t),$$

que representa a posição da massa no instante t segundos, medida em centímetros a partir da posição de equilíbrio. Contando a partir de t=0, em que instante a massa passará pela sétima vez a uma distância |f(t)| de 4cm da posição de equilíbrio?

a) 11/18
b) 13/18
c) 17/18
d) 19/18
e) 23/18

62. (Ufpe) Sabendo-se que $sen^2x - 3senx.cosx + 2cos^2x = 0$ temos que os possíveis valores para tg x são:

a) 0 e -1
b) 0 e 1
c) 1 e 2
d) -1 e -2
e) -2 e 0

63. (Ita) Encontre todos os valores de a $\in$]- $\pi/2$, $\pi/2$[para os quais a equação na variável real x, arctg [$\sqrt{2}$ - 1 + $(e^x/2)$] + arctg [$\sqrt{2}$ - 1 - $(e^x/2)$] = a, admite solução.

64. (Fatec) No intervalo]0, π [, os gráficos das funções definidas por y = sen x e y = sen 2x interceptam-se em um único ponto.
A abscissa x desse ponto é tal que

a) $0 < x < \pi/4$
b) $\pi/4 < x < \pi/2$
c) $x = \pi/4$
d) $\pi/2 < x < 3\pi/4$
e) $3\pi/4 < x < 2\pi$

65. (Fgv) No intervalo [0,2π], a equação trigonométrica
sen 2x = sen x tem raízes cuja soma vale:

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

66. (Mackenzie) Se $sen^4x = 1 + cos^2x$, então x pode pertencer ao intervalo:

a) [$\pi/4$; $3\pi/4$]
b) [0; $\pi/6$]
c) [π ; $5\pi/4$]
d) [$\pi/6$; $\pi/3$]
e) [$5\pi/3$; 2π]

67. (Ufscar) Sendo sen α + cos α = 1/5,

a) determine sen α e cos α.
b) represente no círculo trigonométrico todos os ângulos α que satisfazem a igualdade dada.

68. (Pucrs) A solução da equação cos [3x - ($\pi/4$)] = 0, quando $0 \leq x \leq \pi/2$, é

a) $\pi/4$
b) $-\pi/4$
c) $7\pi/12$
d) $\pi/2$
e) 0

69. (Unesp) O conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano, com y $\neq$ 0, para os quais x e y satisfazem a equação sen $[y/(x^2+1)]$ = 0 é uma

a) família de parábolas.
b) família de circunferências centradas na origem.
c) família de retas.
d) parábola passando pelo ponto Q(0,1).
e) circunferência centrada na origem.

70. (Ita) Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação

$$\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}(3\gamma) = 0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a 60°.

71. (Uerj) A temperatura média diária, T, para um determinado ano, em uma cidade próxima ao pólo norte é expressa pela função abaixo.

$$T = 50\text{sen}\,[\,(2\pi/365)\,(t - 101)\,] + 7$$

Nessa função, t é dado em dias, t = 0 corresponde ao dia 1° de janeiro e T é medida na escala Fahrenheit. A relação entre as temperaturas medidas na escala Fahrenheit (F) e as temperaturas medidas na escala Celsius (C), obedece, por sua vez, à seguinte equação:

$$C = (5/9)\,(F - 32)$$

Em relação a esse determinado ano, estabeleça:

a) o dia no qual a temperatura será a menor possível;

b) o número total de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0°C.

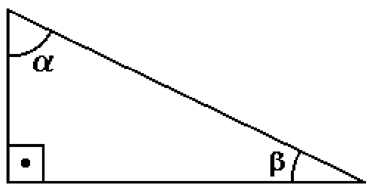
72. (Ufrj) A equação $x^2 - 2x\cos\theta + \text{sen}^2\theta = 0$ possui raízes reais iguais.

Determine θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

73. (Fuvest) Sabe-se que x = 1 é raiz da equação

$$(\cos^2\alpha)\,x^2 - (4\cos\alpha\ \text{sen}\beta)\,x + (3/2)\,\text{sen}\beta = 0,$$

sendo α e β os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo.



Pode-se então afirmar que as medidas de α e β são, respectivamente,

a) $\pi/8$ e $3\pi/8$

b) $\pi/6$ e $\pi/3$

c) $\pi/4$ e $\pi/4$

d) $\pi/3$ e $\pi/6$

e) $3\pi/8$ e $\pi/8$

74. (Fuvest) Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos^2 2x = (1/2) - \text{sen}^2 x.$$

75. (Uerj) Uma população P de animais varia, aproximadamente, segundo a equação abaixo.

$$P = 800 - 100\,\text{sen}\,[(t + 3)\,\pi\,/\,6]$$

Considere que t é o tempo medido em meses e que 1° de janeiro corresponde a t = 0.

Determine, no periodo de 1° de janeiro a 1° de dezembro de um mesmo ano, os meses nos quais a população de animais atinge:

a) um total de 750;

b) seu número mínimo.

76. (Unicamp) a) Encontre todos os valores reais de x para os quais $-1 \leq [(x^2+4)/4x] \leq 1$.

b) Encontre todos os valores reais de x e y satisfazendo $x^2+4x\cos y+4=0$.

77. (Pucpr) Sendo $0 \leq x \leq \pi/2$, o valor de x para que o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \cos x & \cos x & 1 \\ \tan x & \text{sen}\,x & 1 \\ \text{sen}\,x & \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

seja nulo é:

a) $\pi/2$

b) $\pi/3$

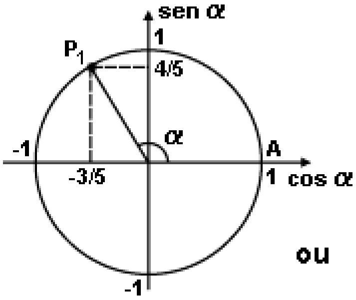
c) $\pi/6$

d) $\pi/4$

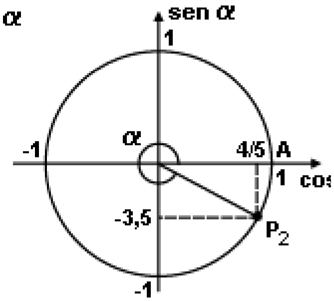
e) π

GABARITO

1. 20
2. 01 + 04 + 08 + 16 = 29
3. a) $\alpha = (\pi/8) + (k\pi/2), k \in Z$
b) $((\sqrt{2}) - 2; 1)$
4. 30°, 60° e 90°.
5. Soma = 0
6. itens corretos: 04, 08 e 32
itens incorretos: 01, 02, 16 e 64
7. $(\pi/6; \pi/3), (\pi/6; 5\pi/3), (5\pi/6; \pi/3)$, e $(5\pi/6; 5\pi/3)$
8. $\theta = 3\pi/8 + n\pi/2$
9. A
10. D
11. C
12. 47
13. D
14. $V = \{\pi/6, 5\pi/6\}$
15. C
16. 16
17. B
18. A
19. D
20. E
21. C
22. A
23. D
24. B
25. B
26. D
27. $S = \{0; \pi/3; \pi/2; 2\pi/3; \pi; 4\pi/3; 3\pi/2; 5\pi/3\}$
28. A
29. E
30. D
31. B
32. C
33. a) $S(\pi/3) = 4 . (1 + \sqrt{3})$
b) $V = \{-(5\pi)/6; -\pi/6; (7\pi)/6; (11\pi)/6\}$
34. Como $\pi/2$ e $3\pi/2$ não são soluções, o número de soluções da equação é o mesmo que o número de soluções da equação tan(x)=-1, que tem 2 soluções entre 0 e 2π.
35. ab = 1
36. A
37. p = 2
38. $V=\{(\pi/3, \pi/6); (2\pi/3, \pi/6); (0, \pi/2); (\pi, \pi/2); (\pi/3, 5\pi/6); (2\pi/3, 5\pi/6)\}$
39. C
40. E
41. A
42. A
43. A
44. B
45. E
46. a) $\pi/4$ ou $\pi/2$ ou $3\pi/4$
b) $0 < x < \pi/4$ ou $\pi/2 < x < 3\pi/4$
47. a) $\{\pi/4, 3\pi/4\}$
b) $\{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$
48. a) 12
b) 20°C e 15 horas
49. a) $t = -15/2 + 12 . n$, com $n \in IN^*$
b) 4,5 horas
50. a) $sen^2\theta - 2 .cos^2\theta + 1/2 .sen (2.\theta) = 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow 1 - cos^2\theta - 2 .cos^2\theta + 1/2 .2.sen\theta.cos\theta = 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow 1 - 3 .cos^2\theta + sen\theta.cos\theta = 0.$
Os valores de θ, para os quais cos θ=0, não são soluções da equação dada, pois, neste caso a sentença resultante é 1-0+0=0, que é falsa.
b) □ $(\sqrt{2})/2$ ou □ $(\sqrt{5})/5$.
51. $\{\pi/4, 3\pi/4, 7\pi/6, 5\pi/4, 7\pi/4, 11\pi/6\}$
52. C
53. B
54. A
55. C
56. A
57. E
58. A equação vale para todo x.
59. C
60. D
61. D
62. C
63. $0 < a < \pi/4$
64. B
65. E
66. A
67. a) sen α = 4/5 e cos α = -3/5
ou
sen α = -3/5 e cos α = 4/5
b)



ou



68. A
69. A
70. Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo (α, β e $\gamma \in]0, \pi[$).
Temos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \gamma = \pi - \alpha - \beta$.
$\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}(3\gamma) =$
$\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}\,[3(\pi - \alpha - \beta)] =$
$2\,\text{sen}\,[(3\alpha + 3\beta)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + \text{sen}\,[3\pi - (3\alpha + 3\beta)] =$
$2\,\text{sen}\,[(3\alpha + 3\beta)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + \text{sen}\,(3\alpha + 3\beta) =$
$2\,\text{sen}\,[(3\alpha + 3\beta)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}\,[(3\alpha + 3\beta)/2]\cos[(3\alpha + 3\beta)/2] =$
$2\,\text{sen}\,[(3\alpha + 3\beta)/2]\,\{\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + \cos[(3\alpha + 3\beta)/2]\} =$
$2\,\text{sen}\,[3(\alpha + \beta)/2]\;2\cos(3\alpha/2)\cos(-3\beta/2) =$
$4\,\text{sen}\,[3(\pi - \gamma)/2]\cos(3\alpha/2)\cos(3\beta/2) =$
$4\,\text{sen}\,[(3\pi/2) - (3\gamma/2)]\cos(3\alpha/2)\cos(3\beta/2) =$
$-4\cos(3\gamma/2)\cos(3\alpha/2)\cos(3\beta/2)$.
Desse modo,

$$-4\cos(3\gamma/2)\cos(3\alpha/2)\cos(3\beta/2) = 0$$

se, e somente se:

$$\cos(3\alpha/2) = 0$$
ou
$$\cos(3\beta/2) = 0$$
ou
$$\cos(3\gamma/2) = 0$$

O que nos dá:

$$3\alpha/2 = \pi/2 \longrightarrow \alpha = \pi/3 = 60°$$
ou
$$3\beta/2 = \pi/2 \longrightarrow \beta = \pi/3 = 60°$$
ou
$$3\gamma/2 = \pi/2 \longrightarrow \gamma = \pi/3 = 60°$$

c.q.d.

71. a) 10 de janeiro
b) 243 dias
72. $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$ ou $5\pi/4$ ou $7\pi/4$
73. D
74. $S = \{\pi/6, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/6, 7\pi/6, 5\pi/4, 7\pi/4, 11\pi/6\}$
75. a) Novembro e março.
b) Somente no mês de janeiro.
76. a) $x = 2$ ou $x = -2$
b) $x = 2$ e $y = \pi + h2\pi$, $h \in Z$ ou
$x = -2$ e $y = h2\pi$, $h \in Z$
77. D