INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

PROVAS RESOLVIDAS

- Matemática - 1976
- Matemática - 1977
- Matemática - 1978

ÍNDICE

MATEMÁTICA – ITA 76

Duração da prova: 3h

01. Considere $g : \{a,b,c\} \longrightarrow \{a,b,c\}$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$. Então, temos:

a) a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, g é injetora

b) g é injetora, mas não é sobrejetora

c) g é sobrejetora, mas não é injetora

d) se g não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo x em $\{a,b,c\}$

e) n.d.r.a.

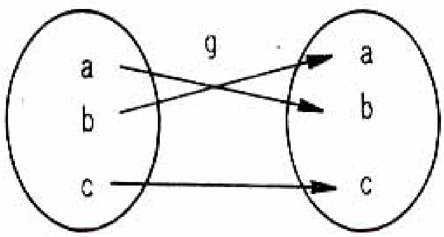
alternativa A

Observação: supondo $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$

(alternativa a verdadeira)

1) $g(x) = x$ tem solução $\Longrightarrow g(c) = c \Longrightarrow g$ é injetora.

2) g é injetora $\Longrightarrow g(c) = c \Longrightarrow g(x) = x$ tem solução.



(alternativa b falsa) podemos ter $g = \{(a, b), (b,a), (c,c)\}$ que é injetora e sobrejetora.

(alternativa c falsa) ver explicação acima.

(alternativa d falsa) se g não é sobrejetora podemos ter, por exemplo, $g(c) = a$, assim temos $g(g(c)) = g(a) = b \neq c$.

02. Sejam A e B conjuntos infinitos de números naturais. Se $f : A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow A$ são funções tais que

$f(g(x)) = x$, para todo x em B e $g(f(x)) = x$, para todo x em A, então, temos:

a) existe x_0 em B, tal que $f(y) = x_0$, para todo y em A

b) existe a função inversa de f

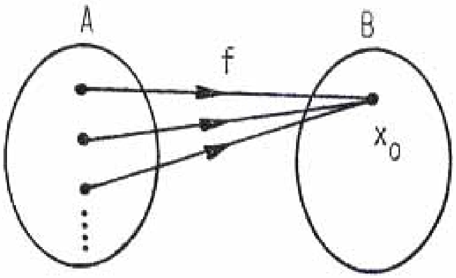
c) existem x_0 e x_1 em A, tais que $x_0 \neq x_1$ e $f(x_0)=f(x_1)$

d) existe a em B, tal que $g(f(g(a))) \neq g(a)$

e) n.d.r.a.

alternativa B

Do enunciado temos que f é a inversa de g, logo f e g são bijetoras, assim:
(alternativa a falsa) a afirmação é falsa pois f é bijetora, portanto tem que ser injetora.
(alternativa b verdadeira) pois g é inversa da f.



(alternativa c falsa) pois f tem que ser injetora.

(alternativa d falsa) Como $f(g(a)) = a \ \forall a \in B$ temos $g(f(g(a))) = g(a) \ \forall a \in B$

03. Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a \neq 0, x \neq 0$ são dois números complexos, tais que $z_1 . z_2 = 2$. Então temos: (Observação: $\bar{z}$ indica conjugado de z)

a) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$

b) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

c) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

d) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$

e) n.d.r.a.

alternativa C

$$\left|\begin{array}{l} z_1 = a + xi \\ z_2 = a + yi \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \\ z_1 \cdot z_2 = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} (a + xi)(a + yi) = 2 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} (a^2 - xy) + a(y + x)i = 2 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - xy = 2 \wedge a(y + x) = 0 \\ a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - xy = 2 \\ y + x = 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - xy = 2 \\ \\ y = -x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - x(-x) = 2 \\ a^2 - (-y)\,y = 2 \\ y = -x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 + x^2 = 2 \\ a^2 + y^2 = 2 \\ y = -x \neq 0 \end{array}\right.$$

$$a^2 + x^2 = 2 \Longleftrightarrow \sqrt{|a + xi|} = 2 \Longleftrightarrow |z_1| = \sqrt{2}$$

$$a^2 + y^2 = 2 \Longleftrightarrow \sqrt{|a + yi|} = 2 \Longleftrightarrow |z_2| = \sqrt{2}$$

$$z_1 = a + xi = a - yi = \overline{z_2}$$

04. As raízes de ordem 4 do número $z = e^{\frac{\pi i}{2}}$, onde i é a unidade imaginária, são:

a) $z_k = \cos\theta_k + i\ \text{sen}\,\theta_k$, onde $\theta_k = \frac{1+4k}{8}\pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.

b) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \frac{1 + 3k}{8}.\ \pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.

c) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = 4k\pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.

d) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \frac{1 - 4k}{8}.\ \pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.

e) n.d.r.a.

alternativa A

Temos, pela fórmula de Euler, que:

$$z = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2}$$

Se $z_k^4 = z$, então z_k é uma raiz quarta de z, e pode ser determinada por

$$z_k = \cos\theta_k + i\ \text{sen}\ \theta_k \qquad \text{onde} \quad \theta_k = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} = \frac{1 + 4k}{8}.\pi$$

para $k = 0,1,2,3$

05. Os valores reais a e b, tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$, são:

a) dois números inteiros positivos

b) dois números inteiros negativos

c) números inteiros, sendo que um é positivo e o outro negativo

d) dois números reais, sendo um racional e o outro irracional.

e) n.d.r.a.

alternativa C

$P_1(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$

$P_2(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$

$$P_1(-1) = 0 \implies (-1)^3 - 2a(-1)^2 + (3a + b)(-1) - 3b = 0$$

$$-1 - 2a - 3a - b - 3b = 0$$

$$-5a - 4b = 1$$

$$\boxed{5a + 4b = -1}$$

$$P_2(-1) = 0 \implies (-1)^3 - (a + 2b)(-1) + 2a = 0$$

$$-1 + a + 2b + 2a = 0$$

$$\boxed{3a + 2b = 1}$$

$$\begin{cases} 5a + 4b = -1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

dois números inteiros, sendo um positivo e o outro negativo

06. Se designarmos por S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de infinitos termos, de razão $q > 1$ e primeiro termo $a_1 > 0$, podemos afirmar que:

a) $\dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \dfrac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$

b) $\dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \dfrac{S_{2n}}{S_{3n} - S_{2n}}$

c) $\dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n} = S_{3n} - S_n$

d) $S_{3n} = S_{2n} + S_n$

e) n.d.r.a.

alternativa A

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad ; \quad S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1} \quad ; \quad S_{3n} = \frac{a_1(q^{3n} - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} - \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} =$$

$$= \frac{a_1(q^{2n}-1-q^n+1)}{q-1} = \frac{a_1(q^{2n}-q^n)}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \cdot q^n = S_n q^n$$

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{a_1(q^{3n}-1)}{q-1} - \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} =$$

$$= \frac{a_1(q^{3n}-1-q^{2n}+1)}{q-1} = \frac{a_1(q^{3n}-q^{2n})}{q-1} =$$

$$= \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\, q^{2n} = S_n\, q^{2n} \qquad \text{logo} \qquad \frac{S_n}{S_{2n}-S_n} = \frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}} = \frac{1}{q^n}$$

07. Dado um paralelepípedo retângulo, de volume V, cujas arestas estão em progressão geométrica, de razão q, podemos garantir que sua área total é dada por:

a) $\frac{2V^{\frac{2}{3}}}{q}(q^2+q+1)$

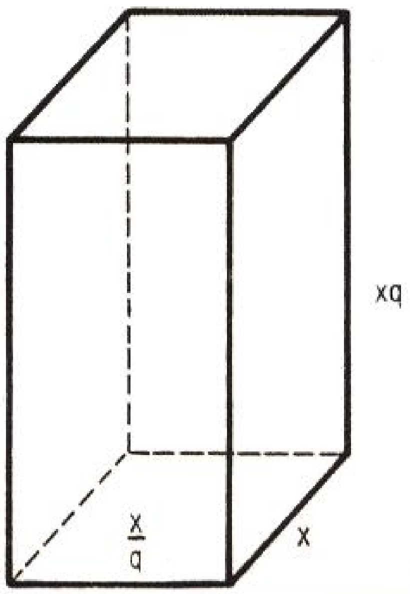
b) $\frac{V^{\frac{2}{3}}}{q}(q^2+q-1)$

c) $\frac{V^{\frac{2}{3}}}{q+1}(q^2+q+1)$

d) $\frac{V^2}{q^3}(q+1)$

e) n.d.r.a.

alternativa A



Sejam $\frac{x}{q}$, x e xq as dimensões do paralelepípedo retângulo.

$$V = \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq \Longleftrightarrow V = x^3 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$$

$$A = 2 \cdot \left(\frac{x}{q} \cdot x + \frac{x}{q} \cdot xq + x \cdot xq\right) \Longleftrightarrow$$

$$A = 2x^2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) \Longleftrightarrow A = 2 \cdot (\sqrt[3]{V})^2 \cdot \left(\frac{1+q+q^2}{q}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{A = \frac{2 \cdot V^{\frac{2}{3}}}{q} \cdot (q^2+q+1)}$$

08. Numa superfície esférica de área $A > 1$, considere inscrito um cone, tal que a área de sua base seja igual à sua altura. Nestas condições, temos que o volume do cone é dado por:

a) $V = \frac{1}{3}\pi^2 A^{\frac{3}{2}}$

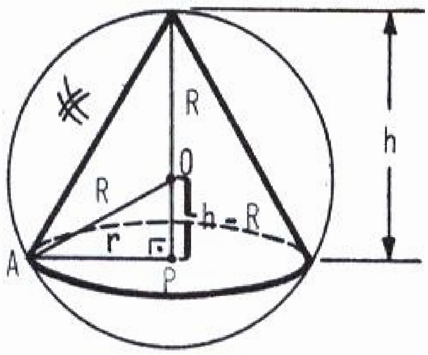
b) $V = \frac{1}{3}\pi A^2$

c) $V = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{\pi A} - 1}{\pi}\right)^2$

d) $V = \frac{1}{3}\pi\left(A^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

e) n.d.r.a.

alternativa C



$$\left|\begin{array}{l} A = 4\pi R^2 > 1 \\ B = \pi r^2 = h \\ V = ? \end{array}\right.$$

a) Suponhamos $R > r$:

i) O triângulo $\triangle APO$ é retângulo em P:

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = r^2 + (h - R)^2 \\ h = \pi r^2 \end{array}\right| \Rightarrow R^2 = r^2 + (\pi r^2 - R)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2 = r^2 + \pi^2 r^4 - 2\pi r^2 R + R^2 \Leftrightarrow r^2 + \pi^2 r^4 - 2\pi r^2 R = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 (1 + \pi^2 r^2 - 2\pi R) = 0 \Rightarrow 1 + \pi^2 r^2 - 2\pi R = 0 \quad (\text{pois } r^2 \neq 0)$$

$$\pi^2 r^2 = 2\pi R - 1 \Leftrightarrow \pi r^2 = \frac{2\pi R - 1}{\pi} \Leftrightarrow B = \frac{2\pi R - 1}{\pi}$$

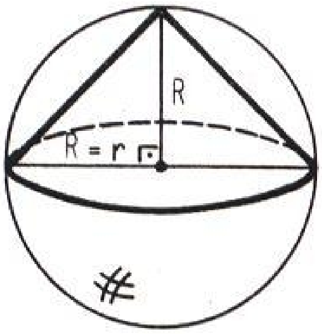
ii) $A = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{\pi A}}{2\pi}$ (pois $R > 0$)

$$\left|\begin{array}{l} B = \dfrac{2\pi R - 1}{\pi} \\ R = \dfrac{\sqrt{\pi A}}{2\pi} \end{array}\right. \Rightarrow B = \frac{2\pi \dfrac{\sqrt{\pi A}}{2\pi} - 1}{\pi} \Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{\pi A} - 1}{\pi}$$

b) $$\left|\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} B h \\ B = h \end{array}\right. \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot B^2$$

$$\left| \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \cdot B^2 \\ B = \frac{\sqrt{\pi A} - 1}{\pi} \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi A} - 1}{\pi} \right)^2}$$

c) Suponhamos $R = r$



$$\pi R^2 = R \Longleftrightarrow R = \frac{1}{\pi} \quad (\text{pois } R \neq 0)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} \Longleftrightarrow V = \frac{1}{3\pi^2}$$

$$A = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \Longleftrightarrow A = \frac{4}{\pi} > 1$$

$$\frac{1}{3\pi^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi \cdot \frac{4}{\pi}} - 1}{\pi} \right)^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi \cdot A} - 1}{\pi} \right)^2}$$

<u>Observação</u>: Consideramos na resolução da questão o cone como sendo um cone reto, apesar de nada ter sido mencionado no enunciado.

09. Considere um tetraedro regular circunscrito a uma esfera de raio R. Designando por H, a, h e V, respectivamente, a altura, a aresta, a altura da base e o volume desse tetraedro, temos:

a) $V = \frac{2\sqrt{3}}{3} R^3$ e $h = \frac{3\sqrt{2}}{4} H$

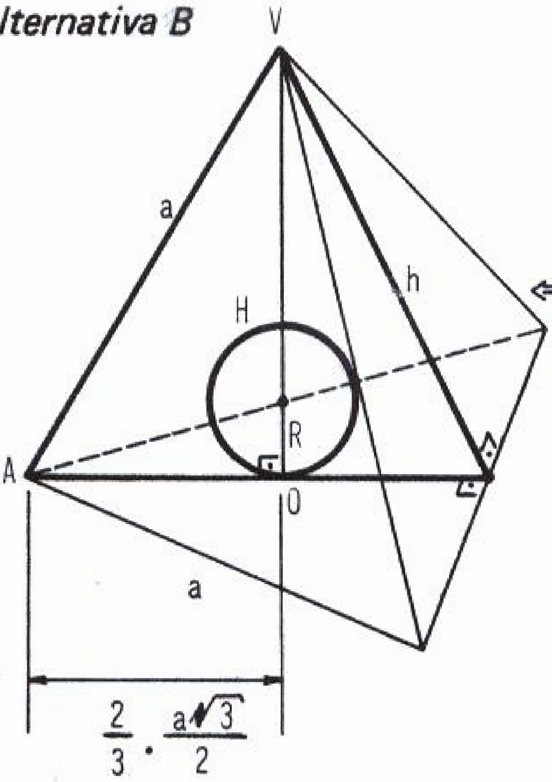
b) $V = 8\sqrt{3} R^3$ e $a = \frac{\sqrt{6}}{2} H$

c) $V = \frac{4\sqrt{2}}{3} R^3$ e $H = 4R$

d) $V = 6\sqrt{2} R^3$ e $H = 4R$

e) n.d.r.a.

alternativa B



$$\triangle AOV : a^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + H^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow H^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Longleftrightarrow H^2 = \frac{6a^2}{9} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Longleftrightarrow a = \frac{3H}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot H}$$

$$\left.\begin{array}{l} H = 4R \\ a = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot H \end{array}\right| \Longrightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 4R \Longleftrightarrow a = 2\sqrt{6}R$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H \Longleftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sqrt{6}R)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4R \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow V = \frac{4 \cdot 6 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4R}{3 \cdot 4} \Longleftrightarrow \boxed{V = 8\sqrt{3} \cdot R^3}$$

10. Seja A uma função real de variável real x, tal que: $e^{2x} - 2e^x . A(x) + 1 = 0$, para todo número real x.
Nestas condições, temos:

a) $A(0) = 1$, $A(x) = A(-x)$, para todo número real x e não existe um número real $x \neq 0$, satisfazendo a relação $A(x)=1$.
b) $A(0) = 1$ e $A(x) = 0$, para algum número real x.
c) $A(1) < 0$ e $A(x) = A(-x)$, para todo número real x.
d) não existe um número real x, não nulo, satisfazendo a relação $A(x) = 1$ e não existe um número real x, satisfazendo $A(x) = A(-x)$.
e) n.d.r.a.

alternativa A

$$e^{2x} - 2.e^x . A(x) + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2e^x . A(x) = e^{2x} + 1 \Longleftrightarrow A(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2 . e^x}$$

(alternativa a verdadeira) 1) $A(0) = \dfrac{e^0 + 1}{2.e^0} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

2) $A(-x) = \dfrac{e^{-2x} + 1}{2.\ e^{-x}} = \dfrac{\dfrac{1}{e^{2x}} + 1}{\dfrac{2}{e^x}} = \dfrac{\dfrac{1 + e^{2x}}{e^{2x}}}{\dfrac{2}{e^x}} = \dfrac{1 + e^{2x}}{e^{2x}} \cdot \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1 + e^{2x}}{2.e^x} = A(x)$

3) $A(x) = 1 \iff \dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x} = 1 \iff e^{2x} + 1 = 2e^x \iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \iff$

$\iff e^x = 1 \quad \iff \quad \boxed{x = 0}$

(alternativa b falsa) $A(x) = 0 \iff \dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x} = 0 \iff e^{2x} + 1 = 0 \iff e^{2x} = -1$ (não existe $x \in \mathbb{R}$ que torne a igualdade verdadeira).

(alternativa c falsa) $A(1) = \dfrac{e^2 + 1}{2.\ e} > 0$

(alternativa d falsa) temos $\forall x \in \mathbb{R}$ $A(x) = A(-x)$, como verificamos acima.

11. Considere a seguinte função real de variável real

$M(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$ Então:

a) Para todo $x > 1$, ocorre: $M(x) > 1$
b) Para todo número real x ocorrem, simultaneamente, $M(-x) = -M(x)$ e $0 \leqslant M(x) < 1$
c) Existem: um a(número real positivo) e um b(número real negativo), tais que: $M(a) < M(b)$
d) $M(x) = 0$, somente quando $x = 0$ e $M(x) > 0$ apenas quando $x < 0$
e) n.d.r.a.

alternativa E

$M(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} = \dfrac{e^x - \dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{1}{e^x} + e^x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

(alternativa a - falsa)

$$M(x) > 1 \iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} > 1 \iff$$

$$\iff e^{2x} - 1 > e^{2x} + 1$$

(portanto $M(x) > 1$ é falsa para todo x real).

(alternativa b - falsa)

$$1.)\ M(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -M(x)$$

(portanto a afirmação: $\forall x \in R$, $M(-x) = -M(x)$ é verdadeira)

2) $M(x) \geqslant 0 \iff e^{2x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{2x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$

(portanto a afirmação: $\forall x \in R$; $0 \leqslant M(x) < 1$ é falsa).

(alternativa c - falsa)

$$M(a) < M(b) \iff \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} < \frac{e^{2b} - 1}{e^{2b} + 1} \iff$$

$$\iff \cancel{e^{2a+2b}} - e^{2b} + e^{2a} \cancel{-1} < \cancel{e^{2a+2b}} - e^{2a} + e^{2b} \cancel{-1} \iff 2 . e^{2a} < 2 . e^{2b} \iff$$

$$\iff \boxed{a < b}$$

(portanto não existe $a > 0$ e $b < 0$ tal que $M(a) < M(b)$

(alternativa d - falsa)

A afirmação $M(x) > 0$ apenas quando $x < 0$ é falsa, pois como já verificamos (alternativa b) $M(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

12. No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0 (zero), 2 (dois) e 4 (quatro) apareçam agrupados?

Obs: Considerar somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

a) $2^4.3^2.5$ b) $2^5.3.7$ c) $2^4.3^3$

d) $2^5 . 3^2$ e) n.d.r.a.

alternativa B

$\cancel{0}$, 1 , $\cancel{2}$, 3 , $\cancel{4}$, 5 , 6 , 7 , 8 , 9

		0	2	4

Para escolher os dois algarismos que faltam teremos $C_{7,2}$ possibilidades.

Como 0, 2 e 4 devem estar sempre juntos, podemos supor que são um só elemento ocupando uma só casa

		0,2,4

levando em conta que o "pacote" $\boxed{0,2,4}$ pode mudar de posição e que os algarismos 0,2 e 4 podem mudar de posição entre si teremos:

$$C_{7,2} \cdot P_3 \cdot P_3 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3! \cdot 3! = 756$$

Devemos, porém, subtrair os números que começam por zero.

0	2	4			$A_{7,2} = 42$	84
0	4	2			$A_{7,2} = 42$	

Restam, portanto, $756 - 84 = 672 = 2^5 . 3 . 7$

13. Em relação à equação $x^{\log_4 \sqrt{x}} = x^{\log_4 x} - 2$, $x > 0$, temos:

a) admite apenas uma raiz, a qual é um número inteiro positivo.

b) não admite uma raiz inteira satisfazendo a relação : $0 < x < 35$.

c) todas as suas raízes são números irracionais.

d) admite uma raiz inteira x_1 e admite uma raiz fracionária x_2, tais que:

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{4097}{64}$$

e) n.d.r.á.

alternativa D

$$x^{\log_4 \sqrt{x}} = x^{\log_4 x} - 2 \iff x^{\frac{1}{2} \cdot \log_4 x} = x^{\log_4 x} - 2 \iff \sqrt{x^{\log_4 x}} = x^{\log_4 x} - 2 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^{\log_4 x} = y \\ \sqrt{y} = y - 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^{\log_4 x} = y \\ y = (y-2)^2 \\ y > 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^{\log_4 x} = y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \\ y > 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^{\log_4 x} = y \\ (y = 1 \vee y = 4) \\ y > 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x^{\log_4 x} = 4 \Longleftrightarrow \log_4 x = \log_x 4 \Longleftrightarrow \log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \log_4^2 x = 1 \Longleftrightarrow \log_4 x = 1 \vee \log_4 x = -1 \Longleftrightarrow \boxed{x = 4 \vee x = \frac{1}{4}}$$

$$4^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 64 + \frac{1}{64} = \frac{4097}{64}$$

14. Seja Q uma matriz 4 x 4, tal que det $Q \neq 0$ e $Q^3 + 2\,Q^2 = 0$. Então, temos: (det Q indica determinante de Q)

a) det Q = 2
b) det Q = -2
c) det Q = -16
d) det Q = 16
e) n.d.r.a.

alternativa D

$$Q^3 + 2\,Q^2 = 0 \Longleftrightarrow Q^3 = -2\,Q^2 \Longrightarrow |\,Q^3\,| = |\,-2\,Q^2\,| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\,Q\,|^3 = (-2)^4\,|\,Q\,|^2 \Longrightarrow |\,Q\,| = 0 \quad \text{ou} \quad |\,Q\,| = 16$$

Como $|\,Q\,| \neq 0$ temos que $|\,Q\,| = 16$

15. Se $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz 3 x 3, então uma solução da equação $(P + X)^2 = P^2 + X^2 + 2PX$ é :

a) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) n.d.r.a.

alternativa C

Se P e X são matrizes quadradas de mesma ordem então

$$(P + X)^2 = P^2 + PX + XP + X^2$$

Dizer que X é solução da equação $(P + X)^2 = P^2 + X^2 + 2PX$

é o mesmo que dizer que

$$P^2 + PX + XP + X^2 = P^2 + X^2 + 2PX$$

que é equivalente a $XP = PX$

Logo, qualquer matriz X que comute com P é solução da equação.

Neste teste é mais simples experimentar as alternativas.

A matriz da alternativa c satisfaz $XP = PX$

16.

Considere a matriz 3x3 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$

sabendo que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ então, temos :

a) det M é um número positivo.

b) Existe uma matriz P, 3 x 3, tal que :

$$MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $M_{21} = -3\ M_{22} - 2\ M_{23}$

d) Se $M_{21} = 3\,M_{22} + 2\,M_{23}$, então $M_{21} \neq 0$.

e) n.d.r.a.

alternativa C

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left| \begin{array}{ll} 2M_{11} + 6M_{12} + 4M_{13} = 0 & (1) \\ 2M_{21} + 6M_{22} + 4M_{23} = 0 & (2) \\ 2M_{31} + 6M_{32} + 4M_{33} = 0 & (3) \end{array} \right.$$

A equação (2) é equivalente a $M_{21} = -3M_{22} - 2M_{23}$

17. A inequação $4\,\text{sen}^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\,\text{sen}\ x + \sqrt{2} < 0$ tem uma solução x, tal que :

a) $45^o < x < 60^o$ c) $35^o < x < 45^o$ e) n.d.r.a.

b) $0^o < x < 30^o$ d) $60^o < x < 75^o$

alternativa C

$$4\ \text{sen}^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\ \text{sen}\,x + \sqrt{2} < 0 \iff \left| \begin{array}{l} 4y^2 - 2(1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} < 0 \\ y = \text{sen}\ x \end{array} \right. \quad (I)$$

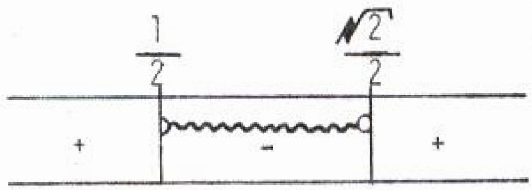
As raízes da equação $4y^2 - 2(1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$

têm soma $S = -\dfrac{-2(1 + \sqrt{2})}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e produto $P = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, $4y^2 - 2(1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0 \iff \left| \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ \vee \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$

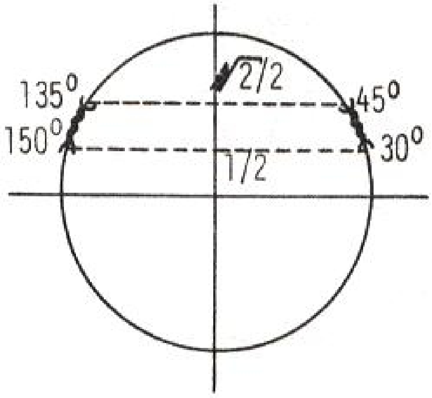
sinal do trinômio



Temos $4y^2 - 2(1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} < 0 \iff \dfrac{1}{2} < y < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$(I) \iff \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < y < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \text{sen}\ x \end{array} \right. \iff \dfrac{1}{2} < \text{sen}\ x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 30^0 + k \cdot 360^0 < x < 45^0 + k \cdot 360^0 \\ \\ 135^0 + k \cdot 360^0 < x < 150^0 + k \cdot 360^0 \end{array} \right. \qquad k \in Z$$



Como $\{x \mid 35^0 < x < 45^0\} \subset \{x \mid 30^0 < x < 45^0\}$,

a alternativa correta é <u>c</u> .

18. Resolvendo a equação:

$3\ sen^2(e^x) - 2\sqrt{3}.sen(e^x).cos(e^x) - 3cos^2(e^x) = 0$ obtemos :

a) $e^x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $x = \log_e(2k\pi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\pi)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

d) $x = \log_e(\frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{6})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

e) n.d.r.a.

alternativa D

$$3\ sen^2(e^x) - 2\sqrt{3}\ sen(e^x)cos(e^x) - 3\ cos^2(e^x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 3(sen^2(e^x) - cos^2(e^x)) - \sqrt{3}\ .\ (2\ sen(e^x)\ cos\ (e^x)) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -\ 3\ cos(2e^x) - \sqrt{3}\ sen(2e^x) = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3 + \sqrt{3}\ \dfrac{sen(2e^x)}{cos(2e^x)} = 0 \\ cos\ (2e^x) \neq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow tg(2e^x) = -\sqrt{3} \Longleftrightarrow 2e^x = -\frac{\pi}{3} + K\pi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e^x = \frac{K}{2}\pi - \frac{\pi}{6} \Longleftrightarrow x = \log_e(\frac{K\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) \qquad K = 1, 2, 3, \ldots$$

19. A respeito do produto:

$P = (sen(bx) + cosec(bx))(cos(bx) + sec(bx))(tg(bx) + cotg(bx)\ )$
podemos afirmar que :

a) P é positivo, para todo x real e b > 0

b) P pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de x e b em R.

c) P é negativo para $x = k\pi$ e $b < 0$ ou P é positivo para $x = k\pi$ e $b > 0$, quando $k = 1, 2, \ldots$

d) P é positivo, quando $bx \neq \frac{k}{2}\pi$, para todo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

e) n.d.r.a.

alternativa D

$$(\operatorname{sen}(bx) + \operatorname{cosec}(bx))\,(\cos(bx) + \sec(bx))\,(\operatorname{tg}(bx) + \operatorname{cotg}(bx)) =$$

$$= \left(\operatorname{sen}(bx) + \frac{1}{\operatorname{sen}(bx)}\right)\left(\cos(bx) + \frac{1}{\cos(bx)}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(bx)}{\cos(bx)} + \frac{\cos(bx)}{\operatorname{sen}(bx)}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(bx) + 1}{\operatorname{sen}(bx)} \cdot \frac{\cos^2(bx) + 1}{\cos(bx)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2(bx) + \cos^2(bx)}{\cos(bx).\operatorname{sen}(bx)} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2(bx) + 1)(\cos^2(bx) + 1)}{\operatorname{sen}^2(bx) \,.\, \cos^2(bx)} = P$$

Como $0 \leqslant \operatorname{sen}^2(bx) \leqslant 1$ e $0 \leqslant \cos^2(bx) \leqslant 1$ temos

$1 + \operatorname{sen}^2(bx) > 0$, $1 + \cos^2(bx) > 0$ $\quad \forall x \in R$, $\forall b \in R$ e, para

$bx \neq \frac{K\pi}{2}$ temos : $\operatorname{sen}^2(bx) \,.\, \cos^2(bx) \neq 0$.

Logo, $P > 0$ $\quad \forall x \in R$, $\forall b \in R$, $bx \neq \frac{K\pi}{2}$; $K \in Z$

20. A soma dos quadrados das raízes da equação $x^3 + \sqrt{5}\,x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 8 = 0$ é igual a :

a) 5

b) $5 - 4\sqrt{3}$

c) $12.\sqrt{5}$

d) $9 + \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

e) n.d.r.a.

alternativa B

Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes da equação

$$x^3 + \sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{3}x + 8 = 0$$

Temos, pelas relações de Girard,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\sqrt{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 2\sqrt{3}$$

Como: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

temos $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-\sqrt{5})^2 - 2(2\sqrt{3}) = 5 - 4\sqrt{3}$

21. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere P_1 a circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - 8 = 0$. Então, a equação da circunferência que é tangente ao eixo das abscissas e com o mesmo centro de P_1 é dada por:

a) $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{11}{4})^2 = \frac{4}{9}$

b) $(x + \frac{4}{11})^2 + (y - 2)^2 = \frac{2}{3}$

c) $(x - \frac{11}{4})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

d) $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - \frac{1}{8} = 0$

e) n.d.r.a.

alternativa C

O centro C de P_1 é $(\frac{11}{4}; -\frac{3}{2})$

Seja P_2 a circunferência procurada. Precisamos apenas calcular a distância de C à reta y = 0 (eixo das abscissas) para achar o raio de P_2, isto é, o raio é igual a $\frac{3}{2}$.

A equação reduzida da P_2 é:

$$(x - \frac{11}{4})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

22. Em que intervalo estão as raízes reais da equação $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$?

a) [150; 200]

b) [-14 ; -12]

c) [12; 13]

d) [-10; 10]

e) n.d.r.a.

alternativa D

As raízes reais da equação

$$x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$$

pertencem ao intervalo $[a;b]$ se $\underline{a}$ for uma cota inferior e $\underline{b}$, uma cota superior dessas raízes.

Seja a_n o coeficiente do termo de maior grau de um polinômio e A o máximo dos módulos dos demais coeficientes; o número

$$1 + \frac{A}{a_n}$$ é uma cota superior para os módulos das raízes do polinômio.

Assim, se k é raiz de $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$

então

$$|k| \leqslant 1 + \frac{9}{1} \iff |k| \leqslant 10 \iff -10 \leqslant k \leqslant 10 \text{ , isto é, } k \in [-10, 10]$$

23. A equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite uma raiz igual a i(unidade imaginária). Deduzimos, então, que
a) tal equação não admite raiz real, menor que 2.
b) tal equação admite como raiz, um número racional.
c) tal equação não admite como raiz, um número positivo
d) tal equação não possui raiz da forma bi, com b < 1.
e) n.d.r.a.

alternativa B

Como i é raiz da equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$

temos que -i também é raiz. Seja k a terceira raiz. Temos:

$$i + (-i) + k = -\left(-\frac{3}{4}\right) \iff k = \frac{3}{4}$$

24. Considere as equações

$$x^2 + y^2 = axy \qquad \text{(I)}$$
$$x^4 + y^4 = bx^2y^2 \qquad \text{(II)}$$

com a e b constantes reais e assuma que $P = a^2 - (b + 2)$. Nestas condições, temos:
a) Para todos a e b reais, satisfazendo a relação P = 0, existe uma solução de (I) que não é solução de (II)
b) Para todo a e b reais, satisfazendo a relação P = 0, ocorre: qualquer solução de (I) é também solução de(II)
c) Para todos a e b reais, satisfazendo a relação P = 0, apenas o par(x,y) = (0,0) é solução, simultaneamente de (I) e (II)
d) Para todos a e b reais, satisfazendo a relação P ≠ 0,

o par$(x,y) = (1 + \sqrt{\pi}\ , 1 - \sqrt{\pi}\ )$ é solução, simultaneamente, de (I) e (II)

e) n.d.r.a.

alternativa B

$$(I)\ x^2 + y^2 = axy \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = (axy)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = a^2x^2y^2 \Rightarrow x^4 + y^4 = (a^2 - 2)\ x^2y^2$$

Como

$$P = a^2 - (b + 2) \quad e$$

$$P = 0$$

temos $a^2 - 2 = b$

Logo,
$$x^4 + y^4 = (a^2 - 2)x^2y^2 \Leftrightarrow x^4 + y^4 = bx^2y^2$$

Assim, para $P = 0$, temos $(I) \Rightarrow (II)$, isto é, $V_I \subset V_{II}$, ou seja, qualquer solução de (I) é também solução de (II).

25. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$ e que $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = 4$. Nesta situação, a respeito do produto $P = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$, temos

a) $P \geq 2^{n+3}$

b) $P \geq 5^n$

c) $P \geq 2^{n+1}$

d) $P \geq 5^{n+1}$

e) n.d.r.a.

alternativa C

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, $n \geq 2$ e $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 4$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\quad (1 - \sqrt{a_n}\ )^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$

Assim,
$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$$
$$1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$$
$$\vdots$$
$$1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$$

e, conseqüentemente,

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ \ldots\ .(1+a_n) \geqslant (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\ \ldots\ .(2\sqrt{a_n})$$

$$\Longleftrightarrow (1+a_1)(1+a_2)\ .\ \ldots\ .\ (1+a_n) \geqslant 2^n(\sqrt{a_1 a_2\ .\ \ldots\ .\ a_n})$$

$$\Longleftrightarrow (1+a_1)(1+a_2)\ .\ \ldots\ .\ (1+a_n) \geqslant 2^n\ .\ 2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1+a_1)(1+a_2)\ .\ \ldots\ .\ (1+a_n) \geqslant 2^{n+1}$$

MATEMÁTICA - ITA 77

Duração da prova: 4h

Obs.:
- log x significa logaritmo neperiano de x, isto é, na base e
- $A_{m,k}$ é o número de arranjos simples de m elementos tomados k a k
- Denotaremos o comprimento de um segmento de reta AB por $\overline{AB}$

01. Se P(x) é um polinômio de 5º grau que satisfaz as condições $1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$, então temos:

a) $P(0) = 4$
b) $P(0) = 3$
c) $P(0) = 9$
d) $P(0) = 2$
e) n.d.a.

alternativa D

Como $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1$ temos que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$ e $x-5$ é 1.

Portanto $P(x) - 1$ é divisível por cada um dos binômios e conseqüentemente pelo produto deles. P(x) é do 5º grau, logo

$$P(x) - 1 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Mas $P(6) = 0$, o que implica

$$-1 = a(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5) \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{120}$$

Portanto

$$P(x) = -\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$$

$$P(0) = -\frac{1}{120}(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5) + 1 = -\frac{-120}{120} + 1 = 2$$

02. Se S é a área total de um cilindro reto de altura h, e se m é a razão direta entre a área lateral e a soma das áreas das bases, então o valor de h é dado por:

a) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+1)}}$

b) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{4\pi(m+2)}}$

c) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+2)}}$

d) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{4\pi(m+1)}}$

e) n.d.a.

alternativa A

$$m = \frac{2\pi rh}{2\pi r^2} \iff m = \frac{h}{r} \iff r = \frac{h}{m}$$

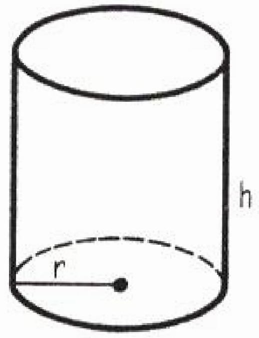
$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \iff S = 2\pi\frac{h}{m} \cdot h + 2\pi\frac{h^2}{m^2} \iff$$

$$\iff S = \frac{2\pi h^2 m + 2\pi h^2}{m^2} \iff$$

$$\iff m^2 S = 2\pi h^2(m+1) \iff h^2 = \frac{m^2 S}{2\pi(m+1)}$$

$$\boxed{h = m\sqrt{\frac{S}{2\pi(m+1)}}}$$

(pois $h > 0$)



03. Seja R o corpo dos números reais. Em relação à equação $5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0$, $x \in R$, podemos afirmar que:

a) não tem solução inteira.
b) tem somente uma solução.
c) tem somente duas soluções distintas.
d) tem três soluções distintas.
e) n.d.a.

alternativa B

$$5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0 \iff x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$$

Vamos pesquisar as possíveis raízes racionais(no caso, inteiras) da equação:

Se p é raiz da equação; então $p|-4$, isto é, $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos

$$P(1) \neq 0,\ P(-1) \neq 0,$$

$$P(2) \neq 0,\ P(-2) \neq 0,$$

$$P(4) = 0\ ,$$

isto é

4 é raiz; assim $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x^2 + x + 1)$

$x^2 + x + 1 = 0$ tem 2 raízes imaginárias conjugadas.

A equação, no campo $\mathbb{R}$, admite somente a raiz 4, de multiplicidade 1.

04. Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio R tal que a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa vale R/m $(m \geq 1)$. Considere a esfera gerada pela rotação desta circunferência em torno de um de seus diâmetros. O volume da parte desta esfera, que não pertence ao sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa, é dado por:

a) $\frac{2}{3}\pi R^3 \left(\frac{m-1}{m}\right)^2$

b) $\frac{2}{3}\pi R^3 \left(1 - \left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right)$

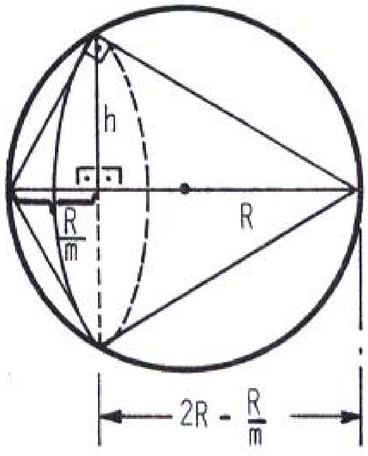
c) $\frac{2}{3}\pi R^3 \left(\frac{m+1}{m}\right)^2$

d) $\frac{2}{3}\pi R^3 \left(1 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right)$

e) n.d.a.

alternativa D

$$V = V_{esfera} - (V_{cone_1} + V_{cone_2})$$



$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{cone_1} + V_{cone_2} = \frac{1}{3}\pi h^2 . \frac{R}{m} + \frac{1}{3}\pi h^2 (2R - \frac{R}{m}) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2 .\ 2R$$

Assim:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi h^2 .\ 2R$$

Mas

$h^2 = \frac{R}{m} . (2R - \frac{R}{m})$ e portanto $V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi . \frac{R}{m}(2R - \frac{R}{m}) .\ 2R =$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 \left[2 - \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}\right] = \frac{2}{3}\pi R^3 . \left[1 + 1 - \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}\right] = \frac{2}{3}\pi R^3 . \left[1 + \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\pi R^3 . \left[1 + \left(\frac{m - 1}{m}\right)^2\right]}$$

05. Seja $D = \{ x \in R / x \neq \log\frac{n\pi}{2},\ n = 1,2,3,\dots\}$ .Com respeito à função $f: D \longrightarrow R$, definida por

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(3e^x)}{\operatorname{sen} e^x} - \dfrac{\cos(3e^x)}{\cos e^x}$, podemos afirmar que :

a) $f(x) = 2$ para todo x em D
b) $f(x) = 3$ para todo x em D
c) $f(x) = e^3$ para todo x em D
d) $f(x)$ não é constante em D
e) n.d.a.

alternativa A

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(3e^x)}{\operatorname{sen} e^x} - \frac{\cos(3e^x)}{\cos e^x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(3e^x) . \cos e^x - \operatorname{sen} e^x . \cos(3e^x)}{\operatorname{sen} e^2 . \cos e^x} = \frac{\operatorname{sen}(3e^x - e^x)}{\operatorname{sen} e^x . \cos e^x} = \frac{\operatorname{sen}(2e^x)}{\operatorname{sen} e^x . \cos e^x} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} e^x . \cos e^x}{\operatorname{sen} e^x . \cos e^x} = 2 \quad \text{para} \quad x \neq \log_e \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

06. Consideremos m elementos distintos. Destaquemos k dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles m elementos tomados n a n ($A_{m,n}$) podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre, contiguos e em qualquer ordem de colocação, $r (r < n)$ dos k elementos destacados ?

a) $(n - r - 1)\ A_{k,r}\ A_{m-k,\ n-r}$

b) $(n - r + 1)\ A_{k,\ r}\ A_{m-r,\ n-k}$

c) $(n - r - 1)\ A_{k,\ r}\ A_{m-r,\ n-k}$

d) $(n - r + 1)\ A_{k,r}\ A_{m-k,\ n-r}$

e) n.d.a.

alternativa D

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k}_{k \text{ elementos}}, \ldots, a_m}^{m \text{ elementos}} \qquad \overbrace{\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad r}_{r \text{ elementos}} \qquad\qquad n}^{n \text{ elementos}}$$

O número de maneiras diferentes que podemos tomar r dos k elementos, já levando em conta a ordem é: $A_{k,r}$

O número de maneiras diferentes que podemos tomar n - r dos m - k elementos restantes, sem levar em conta a ordem é $C_{m-k,\ n-r}$.

Como os r elementos podem trocar de posição, desde que estejam sempre juntos, podemos supor que são um só elemento ocupando uma só casa. Assim, teremos:

$$\underbrace{\boxed{r \text{ elementos}}\overbrace{\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}}^{n\,-\,r \text{ elementos}}}_{n\,-\,r\,+\,1 \text{ casas}}$$

$$A_{k,r} \quad . \quad C_{m-k,n-r} \quad . \quad \underbrace{(n-r+1)!}_{\text{permutação dos elementos entre si}}$$

$$A_{k,r} \cdot C_{m-k,n-r} \cdot (n-r+1)! = A_{k,r} \cdot \frac{A_{m-k,n-r}}{(n-r)!} \cdot (n-r+1)! =$$

$$= A_{k,r} \cdot \frac{A_{m-k,n-r}}{(n-r)!} \cdot (n-r+1)(n-r)! = \boxed{A_{k,r} \cdot A_{m-k,n-r} \cdot (n-r+1)}$$

07. Seja p um plano. Sejam A, B, C e D pontos de p e M um ponto qualquer não pertencente a p. Então:

a) Se C dividir o segmento AB em partes iguais e $\overline{MA} = \overline{MB}$, então o segmento MC é perpendicular a p.

b) Se ABC for um triângulo equilátero e D for equidistante de A, B e C, então o segmento MD é perpendicular a p.

c) Se ABC for um triângulo equilátero e D for equidistante de A,B e C, então $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ implica em que o segmento MD é perpendicular a p.

d) Se ABC for um triângulo equilátero e o segmento MD for perpendicular a p, então D é equidistante de A,B e C.

e) n.d.a.

alternativa C

a) Falsa, pois MC pode ser oblíqüo em relação ao plano p.
b) Falsa, pois MD pode ser oblíqüo em relação ao plano p.
c) Verdadeira, pois o ponto D é o circuncentro do triângulo eqüilátero △ABC e o ponto M pertence ao lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de A,B e C, que é uma <u>reta perpendicular</u> ao plano(p) que contém o triângulo△ABC e que passa pelo circuncentro deste triângulo (D).
d) Falsa, pois o ponto não é necessariamente o circuncentro do triângulo △ABC.

08. Resolvendo a equação $tg(2\log x - \frac{\pi}{6}) - tg(\log x + \frac{\pi}{3}) = 0$ temos:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k = 0, 1, 2, \ldots$

b) $x = e^{\frac{\pi}{2} \pm k\pi}\ ;\ k = 0,1,2,\ldots$

c) $\log x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi\ ;\ k = 0,1,2, \ldots$

d) $x = e^{\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi}\ ;\ k = 0, 1,2, \ldots$

e) n.d.a.

alternativa B

$$tg(2\log x - \frac{\pi}{6}) - tg(\log x + \frac{\pi}{3}) = 0 \iff tg(2\log x - \frac{\pi}{6}) = tg(\log x + \frac{\pi}{3}) \iff$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} 2\log x - \frac{\pi}{6} = \log x + \frac{\pi}{3} + k\pi \\ 2\log x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \log x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x > 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \log x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \log x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ \log x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x < 0 \end{array} \right. \iff$$

$$\iff x = e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}\ ;\ k \in Z \iff x = e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}\ ;\ k = 0,1,2,\ldots$$

09. Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k + 1)x^k$, onde $x > 1$ e k é um inteiro maior que 2, então, se n é um inteiro maior que 2.

a) $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2}$

b) $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - \dfrac{(n + 1)}{1 - x} x^n + 1$

c) $S_n = \dfrac{1 + x^{n+1}}{(1 - x)} - \dfrac{(n + 2)}{(1 - x)^2} x^n + 1$

d) $S_n = \dfrac{1 + x^{n+1}}{(1 - x)^2} + \dfrac{(n + 2)}{(1 - x)} x^n + 1$

e) n.d.a.

alternativa B

Seja $A_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1}$. Temos $A'_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n = Sn$

Como $(x, x^2, \dots, x^{n+1})$ é uma PG, temos $A_n = x\,\dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \dfrac{x^{n+2} - x}{x - 1}$

Logo, $A'_n = \dfrac{((n + 2)\,x^{n+1} - 1)\,(x - 1) - (x^{n+2} - x)\,.1}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{(n + 2)x^{n+2} - x - (n + 2)x^{n+1} + 1 - x^{n+2} + x}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{(n + 1)x^{n+2} - (n + 1 + 1)x^{n+1} + 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{(n + 1)x^{n+1}\,(x - 1) - x^{n+1} + 1}{(x - 1)^2} =$

$= \boxed{\dfrac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - \dfrac{(n + 1)x^{n+1}}{1 - x} = Sn}$

10. Os valores reais de a e b, para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ têm duas raízes comuns, são:

a) $a = 1;\ b = 2$
b) $a = -1;\ b = 4$
c) $a = 5;\ b = 3$
d) $a = -4;\ b = 1$
e) n.d.a.

alternativa A

$x^3 + ax^2 + 18 = 0 \quad (I)$

$x^3 + bx + 12 = 0 \quad (II)$

Sejam x_1, x_2 e α as raízes de (I) e x_1, x_2 e β as raízes de (II). Temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha = -a & (1) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \alpha = 18 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \beta = 0 & (3) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \beta = -21 & (4) \end{cases}$$

Fazendo : (1) - (3) obtemos $\alpha - \beta = -a$

(2) : (4) obtemos $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -a \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -a \\ \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \frac{3-2}{3} \\ \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{3-2}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -a \\ -\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{3} \\ -\frac{a}{\beta} = \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3a \\ \beta = -2a \end{cases}$$

Como α é raiz de (I), temos

$(-3a)^3 + a(-3a)^2 + 18 = 0 \Longleftrightarrow -27a^3 + 9a^3 + 18 = 0 \Longleftrightarrow -18a^3 = -18 \Longleftrightarrow \boxed{a = 1}$

e como $\beta = -2a = -2$ é raiz de (II), temos

$(-2)^3 + b(-2) + 12 = 0 \Longleftrightarrow -8 - 2b + 12 = 0 \Longleftrightarrow \boxed{b = 2}$

11. Considere a função $F(x) = |x^2 - 1|$ definida em R. Se FoF representa a função composta de F com F, então:

a) $(FoF)(x) = x|x^2 - 1|$, para todo x real
b) Não existe número real y, tal que $(FoF)(y) = y$
c) FoF é uma função injetora
d) $(FoF)(x) = 0$, apenas para dois valores reais de x
e) n.d.a.

alternativa E $F(x) = |x^2 - 1|$

(alternativa a falsa) $(FoF)(x) = F(F(x)) = F(|x^2 - 1|) = ||x^2 - 1|^2 - 1| =$

$|x^4 - 2x^2 + \cancel{1} - \cancel{1}| = |x^4 - 2x^2| = x^2 . |x^2 - 2|$

(alternativa $\underline{b}$ falsa) (FoF) (y) = y $y^2 . |y^2 - 2| = y$, note que para y = 0 a igualdade fica verdadeira.

(alternativa $\underline{c}$ falsa) Aproveitamos para notar que FoF é função par:

$(FoF)(-x) = (-x)^2 . |(-x)^2 - 2| = x^2 . |x^2 - 2| = (FoF)(x)$. Assim $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow (FoF)(x_1) \neq (FoF)(x_2)$.

(alternativa $\underline{d}$ falsa) $(FoF)(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 . |x^2 - 1| = 0 \Longleftrightarrow x - 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

12. Considere um triângulo ABC cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação sen $\hat{A}$ = tg $\dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$. Então podemos afirmar que:

a) Com os dados do problema, não podemos determinar $\hat{A}$ nem $\hat{B}$ e nem $\hat{C}$.

b) Um desses ângulos é reto.

c) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$ e $\hat{B} + \hat{C} = \dfrac{5\pi}{6}$

d) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{3}$, $\hat{B} = \dfrac{\pi}{4}$, $\hat{C} = \dfrac{5\pi}{12}$

e) n.d.a.

alternativa B

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Longleftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - \hat{A}$

Assim, $\text{sen}\,\hat{A} = \text{tg}\,\dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \Longleftrightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \text{tg}\,(\dfrac{\pi - \hat{A}}{2}) \Longleftrightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \text{cotg}\,\dfrac{\hat{A}}{2} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 2\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\cos\frac{\hat{A}}{2}}{\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}} \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} (2\,\text{sen}^2\,\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2} - \cos\frac{\hat{A}}{2} = 0) \\ \text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2} \neq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\cos\frac{\hat{A}}{2} = 0 \vee 2\,\text{sen}^2\,\frac{\hat{A}}{2} - 1 = 0) \\ \text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2} \neq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\cos\frac{\hat{A}}{2} = 0 \vee \cos\hat{A} = 0) \\ \text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2} \neq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi \ \vee \ \hat{A} = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ \\ \frac{\hat{A}}{2} \neq K\pi \end{array} \right.$$

Como $0 < \hat{A} < \pi$, concluímos que $\boxed{\hat{A} = \frac{\pi}{2}}$. Portanto, o triângulo ABC é retângulo.

13. Se colocarmos em ordem crescente, todos os números de 5(cinco)algarismos distintos,obtidos com 1,3,4,6 e 7, a posição do número 61473 será:

a) 76º
b) 78º
c) 80º
d) 82º
e) n.d.a.

alternativa A

1					$P_4 = 4! = 24$
3					$P_4 = 4! = 24$
4					$P_4 = 4! = 24$
6	1	3			$P_2 = 2! = 2$
6	1	4	3	7	1
6	1	4	7	3	1
					76

14. Se $\frac{6 - 5x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c}$ onde A, B e C são reais e a,b e c são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então:

a) $A = -2$; $B = -1$; $C = 0$
b) $A = 2$; $B = 4$; $C = 1$
c) $A = 1$; $B = -3$; $C = 2$
d) $A = 5$; $B = 2$; $C = 1$
e) n.d.a.

resolução:

alternativa E

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \iff x(x^2 - 5x + 6) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$

Como a, b e c são raízes da equação temos $(a,b,c) = (0,2,3)$ ou $(a,b,c) = (0,3,2)$ ou

$(a,b,c) = (2,3,0)$ ou $(a,b,c) = (2,0,3)$ ou $(a,b,c) = (3,0,2)$ ou $(a,b,c) = (3,2,0)$.
Se $(a,b,c) = (3,2,0)$ temos:

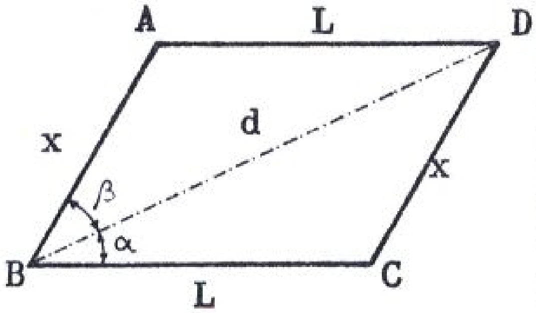
$$\frac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x} \Leftrightarrow \frac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} =$$

$$= \frac{A(x-2)x + B(x-3)x + C(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)\,x} \Leftrightarrow \frac{6-5x}{x^2-5x+6} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2\ (-2A-3B-5C)x + 6x}{(x-3)(x-2)\,x} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} A+B+C = 0 \\ 2A+3B+5C = 5 \\ 6C = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} A = -3 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{array}\right.$$

Se tomarmos outro valor para (a,b,c) encontraremos outro para (A,B,C).
Em particular se $(a,b,c) = (0,2,3)$ teremos $(A,B,C) = (1,-3,2)$

15. Sejam d e L respectivamente os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD abaixo. Conhecendo-se os ângulos α e β (ver figura), o comprimento x do lado AB é dado por

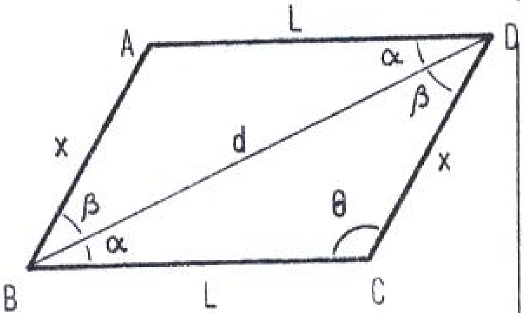


a) $x = \dfrac{d\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

b) $x = \dfrac{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}$ d) $x = \dfrac{L\cos\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}$

c) $x = \dfrac{L\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$ e) n.d.a.

alternativa B



$\theta = 180^0 - (\alpha + \beta)$

$\triangle BCD$: $\dfrac{x}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{d}{\mathrm{sen}\,\theta} \Leftrightarrow x = \dfrac{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\left[180^0 - (\alpha+\beta)\right]} \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}}$

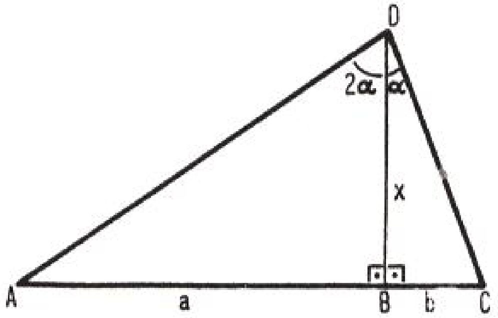
16. Sejam A, B e C três pontos distintos de uma reta , com B entre A e C. Sejam a e b$(a > 2b)$ os comprimentos de AB e BC respectivamente. Se o segmento BD é perpendicular ao segmento AC, quanto deve medir BD, para que o ângulo $B\hat{D}C$ seja a metade de $B\hat{D}A$?

a) $x = \dfrac{a}{\sqrt{b(a-2b)}}$ b) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{b(a-2b)}}$

c) $x = \dfrac{b}{\sqrt{a(a-2b)}}$

d) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{a(a-2b)}}$ e) n.d.a.

alternativa D



$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \dfrac{b}{x} \\ tg\,2\alpha = \dfrac{a}{x} \\ tg\,2\alpha = \dfrac{2.tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} \end{array}\right] \Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{2\,.\,\frac{b}{x}}{1-\frac{b^2}{x^2}} \Longrightarrow a\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right) = x\,.\,2\,\frac{b}{x} \Longrightarrow a - \frac{ab^2}{x^2} = 2b \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ax^2 - 2bx^2 = ab^2 \Longrightarrow x^2\,.\,(a-2b) = ab^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{ab^2}{a-2b}\ ;\ (a \neq 2b)$$

$$x = b\,.\,\sqrt{\frac{a}{a-2b}}\,.\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \quad \text{(pois } x > 0 \text{ e } a > 2b\text{)}$$

$$\boxed{x = \frac{ab}{\sqrt{a\,.(a-2b)}}}$$

17. Supondo $a < b$, onde a e b são constantes reais, considere a função $H(x) = a + (b-a)x$ definida no intervalo fechado $(0,1)$. Podemos assegurar que :

a) H não é uma função injetora.

b) Dado qualquer $\bar{y}$, b, sempre existe um $\bar{x}$ em $(0,1)$ satisfazendo $H(\bar{x}) = \bar{y}$.

c) Para cada $\bar{y}$, com $a < \bar{y} < b$, corresponde um único real $\bar{x}$, com $0 < \bar{x} < 1$, tal que $H(\bar{x}) = \bar{y}$.

d) Não existe uma função real G, definida no intervalo fechado (a,b), satisfazendo a relação $G(H(x)) = x$ para cada x em $(0,1)$.

e) n.d.a.

alternativa C

$y = a + (b-a).\,x$ é equação de reta com coeficiente angular $(b-a)$. Como $b > a$ o coeficiente angular é positivo.

Para $H(x) = a + (b - a).x$, $x \in [0; 1]$

temos: $H(0) = a + (b-a).0 = a$

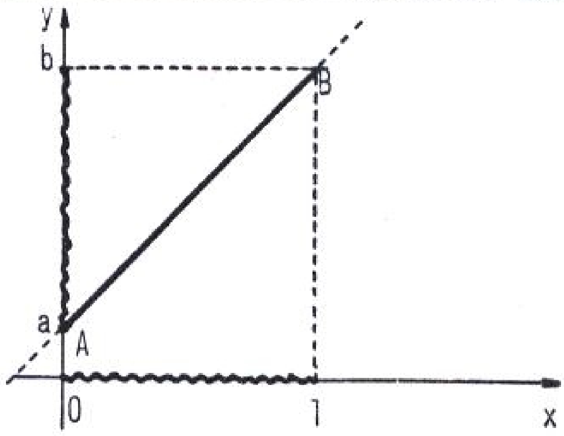
$H(1) = a + (b - a). 1 = b$

$D(H) = [0;1]$ e $Im(H) = [a; b]$

O gráfico da função H é um segmento de reta com extremos $(0,a)$ e $(1,b)$

A figura mostra um caso, onde $a > 0$, $b > 0$.

A função H de $[0,1]$ em $[a,b]$ é bijetora



18. No conjunto dos números reais,a desigualdade $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$ é verdadeira para :

a) $\sqrt{5} < |x| < 3$

b) $\sqrt{5} < |x| < \sqrt{6}$

c) $\sqrt{6} < |x| < 3$

d) $|x| > 3$

e) n.d.a.

alternativa C

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow 0 < \log_4(x^2 - 5) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_4 1 < \log_4 (x^2 - 5) < \log_4 4 \Leftrightarrow 1 < x^2 - 5 < 4 \Leftrightarrow 6 < x^2 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{6} < |x| < 3$$

19. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, uma das retas tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$, passando pelo ponto $P_o(-2,5)$, tem por equação:

a) $3x - y + 1 = 0$

b) $x + y - 3 = 0$

c) $x + 3y - 13 = 0$

d) $4x - 3y + 23 = 0$

e) n.d.a.

alternativa D

Seja t a reta tangente.

Como $(-2,5) \in t$, temos

(t): $y - 5 = a(x + 2) \Leftrightarrow ax - y + 5 + 2a = 0$

O centro da circunferência é $C = (-1,-2)$ e o raio é 5

Como $d(C,t) = 5$ temos

$$\frac{|a(-1) - (-2) + 5 + 2a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+1}} = 5 \Leftrightarrow (a+7)^2 = 25(a^2+1) \Leftrightarrow 12a^2 - 7a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \frac{4}{3} \\ \vee \\ a = -\frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Assim

$(t): y - 5 = \frac{4}{3}(x+2) \Leftrightarrow 4x - 3y + 23 = 0$

ou

$(t): y - 5 = -\frac{3}{4}(x+2) \Leftrightarrow 3x + 4y - 14 = 0$

20. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(0,-3)$ e $P_2(4,0)$, e cujo centro está sobre a reta $x + 2y = 0$, é:

a) $5(x^2 + y^2) + 2x + 3y = 0$
b) $5(x^2 + y^2) - 14x + 7y - 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x + y + 5 = 0$
e) n.d.a.

alternativa B

Seja $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ a equação da circunferência procurada($\mathscr{C}$).

Temos: $P_1(0, -3) \in \mathscr{C}$ $\quad P_2(4, 0) \in \mathscr{C}$

$$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \in (t): x + 2y = 0$$

Então
$$\left| \begin{array}{l} 0^2 + (-3)^2 + A.0 + B(-3) + C = 0 \\ 4^2 + 0^2 + A.4 + B.0 + C = 0 \\ -\frac{A}{2} + 2\left(-\frac{B}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} -3B + C = -9 \\ 4A + C = -16 \\ A + 2B = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} A = -\frac{14}{5} \\ B = \frac{7}{5} \\ C = -\frac{24}{5} \end{array} \right.$$

Temos, pois

$$\mathscr{C}: x^2 + y^2 - \frac{14}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{24}{5} = 0$$

$$\mathscr{C}: 5(x^2 + y^2) - 14x + 7y - 24 = 0$$

21. Seja $X = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada 2 x 2 onde m é um número inteiro qualquer. Se $P = (a_{ij})$ é uma matriz definida por $P = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X$, onde n é um número inteiro positivo ($n \geqslant 1$), então podemos afirmar que :

a) Um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m\,\frac{n(n+1)}{2}$

b) Um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m\,\frac{n(n-1)}{2}$

c) Um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $n\,\frac{m(m-1)}{2}$

d) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, m é par.

e) n.d.a.

alternativa A

$$X = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^3 = X^2 . X = \begin{pmatrix} 1 & 3m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Vamos mostrar por indução que: $X^n = \begin{pmatrix} 1 & nm \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Já vimos que $X^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1.m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Suponhamos que $X^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Logo

$$X^n = X^{n-1} . X = \begin{pmatrix} 1 & nm \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = X^n + X^{n-1} + \dots + X = \begin{pmatrix} 1 & nm \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & (n-1)m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\ldots+1 & (1+2+\ldots+n)m \\ 0+\ldots+0 & 1+\ldots+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \frac{(n+1)n}{2}.m \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

Logo um elemento a_{ij} de P é $m\frac{n(n+1)}{2}$ $(a_{ij} = a_{12})$

22. Qual o valor de $b (b > 0)$ na expressão $bx + a$, sabendo-se que ao elevarmos este binômio a uma determinada potência inteira e positiva, uma das parcelas do desenvolvimento é $6840\ a^{18}x^2$?

a) um número par maior que 8
b) um número ímpar maior que 8
c) um número par menor que 8
d) um número ímpar menor que 8
e) n.d.a.

alternativa C

$(bx + a)^n$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} (bx)^{n-p}\, a^p = 6840\, a^{18} x^2 \Longrightarrow \begin{cases} p = 18 \\ n = 20 \end{cases}$$

$$T_{19} = \binom{20}{18} (bx)^2 .\, a^{18} = \binom{20}{18} b^2 x^2\, a^{18}$$

Logo

$$\binom{20}{18} b^2 = 6840$$

$$190\ b^2 = 6840$$

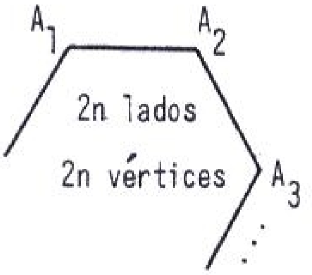
$$b^2 = 36 \Longleftrightarrow b = 6 \text{ ou } b = -6$$

Como $b > 0$ teremos $\boxed{b = 6}$

23. O número de diagonais de um polígono regular de $2n$ lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a este polígono é dado por:

a) $2n(n-2)$
b) $2n(n-1)$
c) $2n(n - 3)$
d) $\frac{n(n - 5)}{2}$
e) n.d.a.

alternativa A



Sejam

N = número de lados = 2n

D = número de diagonais que passam pelo centro = n

d = número de diagonais que não passam pelo centro

teremos: $N + D + d = C_{2n,2} = \dfrac{2n\,(2n-1)}{2} = n(2n-1)$

logo: $2n + n + d = n(2n-1)$

$d = n(2n-1) - 3n \iff \boxed{d = 2n\,(n-2)}$

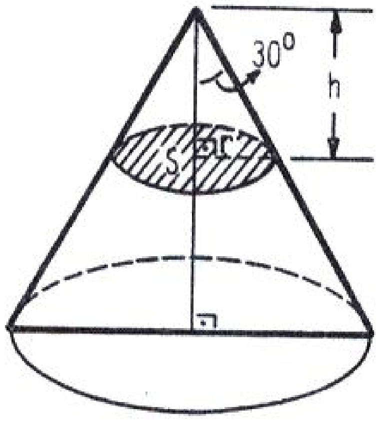
24. O ângulo da geratriz com o eixo de um cone de revolução mede 30^0. Se S é a área de sua secção reta a uma distância h do vértice, qual a relação entre S e h ?

a) $S = \dfrac{\pi h^2}{2}$ c) $S = \dfrac{\pi h^2}{3}$

b) $S = \dfrac{3\pi}{2}\,h^2$ d) $S = \dfrac{2\pi}{3}h^2$ e) n.d.a.

alternativa C

$\left.\begin{array}{l} tg\ 30^0 = \dfrac{r}{h} \\ tg\ 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right| \Longrightarrow \dfrac{r}{h} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \iff r = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$



$S = \pi r^2 \iff S = \pi\left(\dfrac{h\sqrt{3}}{3}\right)^2 \iff$

$\iff S = \dfrac{3\pi h^2}{9} \iff \boxed{S = \dfrac{\pi h^2}{3}}$

25. Seja $(k_1 + k_2)x + (k_2 - k_3)y + (k_1 - k_3)z = 0$

$(k_2 - k_1)x + (k_2 + k_3)y + (k_3 - k_1)z = 0$

$(k_1 - k_2)x + (k_3 - k_2)y + (k_3 + k_1)z = 0$

um sistema homogêneo de equações lineares reais em x, y e z. Com respeito ao sistema acima podemos afirmar:

a) Se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$ então o sistema só admite solução trivial.

b) Se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

c) O sistema admite solução não trivial, se e somente se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$.

d) Se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

e) n.d.a.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Uma solução de um sistema homogêneo de equações lineares em x, y e z é chamada trivial se x = y = z = 0.

alternativa D

Seja $|A|$ o determinante da matriz incompleta

Como o sistema é homogêneo temos: $|A| = 0 \iff$ o sistema admite outras soluções além da trivial e $|A| \neq 0 \iff$ o sistema admite apenas a solução trivial.

Calculemos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_2-k_3 & k_1-k_3 \\ k_2-k_1 & k_2+k_3 & k_3-k_1 \\ k_1-k_2 & k_3-k_2 & k_3+k_1 \end{vmatrix}$$

Somando à 2ª linha a 1ª e à 3ª linha também a 1ª temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_2-k_3 & k_1-k_3 \\ 2k_2 & 2k_2 & 0 \\ 2k_1 & 0 & 2k_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2k_2)(2k_1) \cdot \begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_2-k_3 & k_1-k_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\,k_1 \cdot k_2\,(2k_3) = 8k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

Logo $|A| \neq 0 \iff 8k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \neq 0 \iff k_1 \neq 0$ e $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0 \iff$ o sistema admite apenas a solução trivial

MATEMÁTICA - ITA 78

Duração da prova: 3h30min

01. Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?
I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano.
II. Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano,os planos são sempre paralelos.
III. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.
IV. Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta.
V. Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III c) I; III; IV e) n.d.a.
b) I; II; V d) II; III; IV

alternativa B

I) Falsa, pois há retas contidas num deles, paralelas ao outro.
II) Falsa, pois os planos podem ser secantes.
III) Verdadeira , supondo os planos distintos.
IV) Verdadeira.
V) Falsa, pois há retas contidas no plano, reversas à reta paralela ao plano

02. Examinando o sistema abaixo

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$ podemos concluir que :

a) o sistema é determinado
b) o sistema é indeterminado com 2 incógnitas arbitrárias
c) o sistema é indeterminado com 1(uma) incógnita arbitrária
d) o sistema é impossível.
e) n.d.a.

alternativa C

Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Calculando $|A|$, encontramos $|A| = 0$

Como o sistema é homogêneo e $|A| = 0$ o sistema é indeterminado.

A característica de A é 2 , logo o número de incógnitas arbitrárias é o número de incógnitas do sistema menos a característica de $A = 3 - 2 = 1$

03. O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação: $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + k = 0$, onde k é um número real positivo e $|z_0^2| > k$, é :

a) uma hipérbole com centro z_0.

b) uma elipse com um dos focos em z_0.

c) uma circunferência com centro em z_0.

d) uma parábola com vértice em z_0.

e) n.d.a.

alternativa C

Sendo $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0 i$, temos $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + k = 0 \iff$

$\iff (x + yi)(x - yi) - (x_0 + y_0 i)(x - yi) - (x_0 - y_0 i)(x + yi) + k = 0 \iff$

$\iff x^2 + y^2 - (x_0 x - x_0 yi + xy_0 i + y_0 y) - (x_0 x + x_0 yi - xy_0 i + y_0 y) + k = 0 \iff$

$\iff x^2 + y^2 - x_0 x + \cancel{x_0 yi} - \cancel{xy_0 i} - y_0 y - x_0 x - \cancel{x_0 yi} + \cancel{xy_0 i} - y_0 y + k = 0 \iff$

$\iff x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + k = 0$

A equação $x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + k = 0$

é equação de uma circunferência de centro

(x_0, y_0) e raio $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - k}$

(deve ocorrer $x_0^2 + y_0^2 - k > 0 \iff x_0^2 + y_0^2 > k \iff |z_0|^2 > k$, o que está de acordo com as condições apresentadas no enunciado)

04. Sejam **R** o conjunto dos números reais e f uma função de R em R. Se $B \subset R$ e o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in R;\ f(x) \in B\}$, então:

a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

b) $f(f^{-1}(B)) = B$ se f é injetora

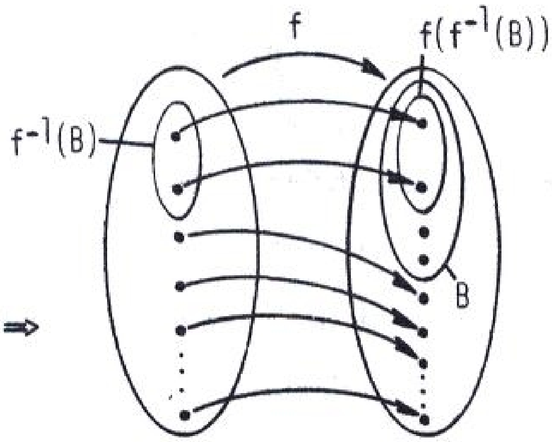
c) $f(f^{-1}(B)) = B$

d) $f^{-1}(f(B)) = B$ se f é sobrejetora

e) n.d.a.

alternativa A

Observe o esquema para acompanhar a resolução:



(<u>alternativa a - verdadeira</u>)

$f^{-1}(B) = \{x \in R \mid f(x) \in B\}$

$f(f^{-1}(B)) = \{y \in R \mid y = f(x) \text{ e } x \in f^{-1}(B)\}$

$y \in f(f^{-1}(B)) \Longrightarrow y \in R \text{ e } y = f(x) \text{ e } x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y \in R \text{ e } y = f(x) \text{ e } f(x) \in B \Longrightarrow y \in B$

logo $f(f^{-1}(B)) \subset B$

(<u>alternativa b - falsa</u>)

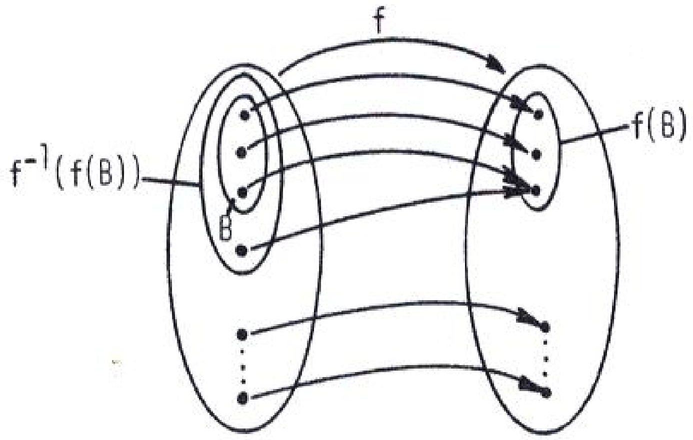
É só observar o esquema acima.

(<u>alternativa c - falsa</u>)

Sendo <u>b</u> falsa, esta também é.

(<u>alternativa d - falsa</u>)

Veja o esquema:



05. Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa, do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + kz = 3 \\ x + y + z = 2 \\ -x - y + kz = 0 \end{cases} \quad ; \text{ e } M = (k + r_1 + r_2)^2 .$$

Quais as condições sobre <u>M</u> e <u>k</u>, de modo que o sistema acima admita solução única?

a) $M = 25$ e $k = -1$ c) $M \neq 25$ e $k \neq -1$

b) $M \neq 25$ e $k = -1$ d) $M = 25$ e $k \neq -1$

e) n.d.a.

alternativa E

Sejam A e C as matrizes incompleta e completa do sistema,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = k + 1$. Logo se $k + 1 \neq 0$, isto é, se $k \neq -1$, a característica de A (r_1) é 3 e a de C (r_2) também é 3 e o sistema admite solução única .

Como $M = (k + r_1 + r_2)^2$ temos $M = (k + 6)^2$. Logo devemos ter $\boxed{k \neq -1 \text{ e } M = (k+6)^2}$ que é condição (necessária e suficiente) para que o sistema admita solução única.

As alternativas a, b, c e d não são condições nem necessárias e nem suficientes.

06. Seja f(x) uma função real de variável real. Se para todo x no domínio de f temos f(x) = f(-x), dizemos que a função é par; se,no entanto, temos f(x)=-f(-x), dizemos que a função é ímpar.

Com respeito à função $g(x) = \log_e \left[\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right]$. podemos afirmar que :

a) está definida apenas para $x \geqslant 0$.
b) é uma função que não é par nem ímpar.
c) é uma função par.
d) é uma função ímpar.
e) n.d.a.

alternativa D

$$g(-x) = \log_e \left[\operatorname{sen}(-x) + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(-x)}\right] = \log_e \left[-\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right] =$$

$$= \log_e \left[\frac{\left(-\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right) . \left(\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right)}{\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}\right]$$

$$= \log_e \left[\frac{\cancel{-\operatorname{sen}^2 x} + 1 + \cancel{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}\right] = \log_e \left[\frac{1}{\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}\right] =$$

$$= \log_e \left[\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right]^{-1} = - \log_e \left[\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right] = -g(x)$$

Temos que $\forall x \in R$ $g(-x) = -g(x)$, portanto g é função ímpar.

07. Sejam a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, k é real, e $k \neq \frac{1}{2}$,

e a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de razão

$q > 0$, $a_i = q^{i-1} \det A$,

$i = 1,2,3,\ldots,n$. Se $a_3 = \det B$, com $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{k}{3} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a soma dos 16(dezesseis) primeiros termos dessa progressão geométrica é igual a $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, podemos dizer que :

a) $k = 1 - 3^{-8}$.

b) k é um número negativo.

c) $k = 1 + 3^{-8}$.

d) $k \geqslant 0$.

e) n.d.a.

alternativa B

$\det A = -1 - 2k$

Se $\det A = 0$, então $k = -\frac{1}{2}$ e a PG tem todos os termos nulos. Suponhamos então $\det A \neq 0$, isto é, $k \neq -\frac{1}{2}$. (Observação: a restrição colocada pelo examinador é $k \neq \frac{1}{2}$, o que deve ter sido um erro tipográfico).

$a_i = q^{i-1} . (-1 - 2k)$ $\qquad a_1 = q^0.(-1 - 2.k) \iff a_1 = -1 - 2k$

$\det B = -\frac{1}{3} - \frac{2k}{3}$

$$\left|\begin{array}{l} a_3 = q^2 . (-1 - 2k) \\ a_3 = -\frac{1}{3} - \frac{2k}{3} \end{array}\right. \implies q^2(-1 - 2k) = -\frac{1}{3} - \frac{2k}{3} \iff q^2(-1 - 2k) = \frac{(-1 - 2k)}{3}$$

$q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (pois $q > 0$ e $k \neq -\frac{1}{2}$)

$$\begin{cases} S_{16} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ S_{16} = (-1 - 2k) . \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{16} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} \end{cases} \implies (-1 - 2k). \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{16} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Como $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{16} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right] > 0$ e $\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) > 0$ temos que:

$-1 - 2k > 0$ que equivale a $\boxed{k < -\frac{1}{2}}$. Se $k < -\frac{1}{2}$, k é um número negativo.

08. Seja $\underline{a}$ uma constante real. Eliminando θ das equações abaixo: $\begin{cases} x.\text{sen}\,\theta + y.\cos\theta = 2a.\text{sen}\,2\theta \\ x.\cos\theta - y.\text{sen}\,\theta = a.\cos 2\theta \end{cases}$ Obtemos :

a) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

b) $(x-y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

c) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (y-x)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

d) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{2}$

e) n.d.a.

alternativa A

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2a\ \text{sen}\ 2\theta & \cos\theta \\ a\cos 2\theta & -\text{sen}\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta \end{vmatrix}} = 2a\ \text{sen}\theta\ \text{sen}\ 2\theta + a\cos\theta\cos 2\theta$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \text{sen}\theta & 2a\ \text{sen}\ 2\theta \\ \cos\theta & a\cos 2\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta \end{vmatrix}} = -a\ \text{sen}\theta\cos 2\theta + 2a\cos\theta\ \text{sen}\ 2\theta$$

Temos

$x \pm y = 2a\ \text{sen}\theta\ \text{sen}\ 2\theta + a\cos\theta\cos 2\theta \mp a\ \text{sen}\theta\cos 2\theta \pm 2a\cos\theta\ \text{sen}\ 2\theta =$

$= 2a\ \text{sen}\theta\ .\ 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta + a\cos\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \mp a\ \text{sen}\ \theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \pm$

$\pm\ 2a\cos\theta\ .\ 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta =$

$= 4a\ \text{sen}^2\theta\cos\theta + a\cos^3\theta - a\cos\theta\ \text{sen}^2\theta \mp a\ \text{sen}\ \theta\cos^2\theta \pm a\ \text{sen}^3\theta \pm 4a\ \text{sen}\theta\cos^2\theta =$

$= 3a\ \text{sen}^2\theta\cos\theta \pm 3a\ \text{sen}\theta\cos^2\theta + a(\cos^3\theta \pm \text{sen}^3\theta) =$

$= a(\cos^3\theta \pm 3\cos^2\theta\text{sen}\theta + 3\cos\theta\text{sen}^2\theta \pm \text{sen}^3\theta) = a(\cos\theta \pm \text{sen}\theta)^3$

Assim,

$x + y = a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^3$ e $x - y = a(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^3$

Como

$$x + y = a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^3 \Longleftrightarrow (x+y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x+y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 = a^{\frac{2}{3}}(1 + \operatorname{sen}2\theta) \qquad (I)$$

e

$$x - y = a(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^3 \Longleftrightarrow (x-y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x-y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(1 - \operatorname{sen}2\theta) \qquad (II)$$

Fazendo (I) + (II), temos

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(1 + \operatorname{sen}2\theta) + a^{\frac{2}{3}}(1 - \operatorname{sen}2\theta) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

09. Sejam P um ponto interior de um triângulo equilátero MNQ de lado 2λ, $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = y$, $\overline{PC} = z$ as respectivas distâcias do ponto P aos lados $\overline{MN}$, $\overline{MQ}$ e $\overline{NQ}$ e $xy = xz = yz = \frac{\lambda^2}{9}$. Então, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é :

a) $3\frac{\lambda^2}{2}$

b) $5\frac{\lambda^2}{4}$

c) $7\frac{\lambda^2}{3}$

d) impossível de ser obtido, pois a posição do ponto P não está determinada no triângulo.

e) n.d.a.

alternativa: ver comentário

A questão 9 não tem resposta única, uma vez que os dados do enunciado do problema são incompatíveis:

$$xy = xz = yz = \frac{\lambda^2}{9} \text{ equivale a } x = y = z = \frac{\lambda}{3}$$

Por outro lado, para que x = z, o ponto P deve ser o baricentro do triângulo. Mas, se os lados do triângulo eqüilátero medem 2λ, a distância do baricentro a qualquer lado é igual a $\frac{\lambda\sqrt{3}}{3}$ e portanto $x = y = z = \frac{\lambda\sqrt{3}}{3}$

Nestas condições, os dados do problema são contraditórios.
De uma contradição conclui-se qualquer coisa, logo todas as **alternativas servem**

10. Seja z um número complexo. Se $z + \frac{1}{z}$ é um número real então podemos afirmar:

a) $z \neq 0$ e $Re z \geq 0$.
b) $Im\ z = 0$ ou $|z| = 1$
c) é necessariamente um número real.
d) $z^2 = -1$.
e) n.d.a.

alternativa B

Sendo $z = x + yi$, temos

$$z + \frac{1}{z} = (x + yi) + \frac{1}{(x + yi)} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) i$$

Para que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ devemos ter $Im\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$

isto é $y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \iff \frac{y(x^2 + y^2) - y}{x^2 + y^2} = 0 \iff$

$$\iff \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2} = 0 \iff \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ \vee \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} Im(z) = 0 \\ \vee \\ |z| = 1 \end{array} \right.$$

11. Seja $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_o$, onde $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_o$ são reais e $a_m \neq 0$ e $a_o \neq 0$. Se $f(1)$ é solução real da equação $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$ e $f(-1) = 2f(1)$ e $a_o = 2f(-1)$, então podemos afirmar:

a) f(x) tem somente raízes reais positivas.
b) f(x) tem somente raízes negativas.
c) f(x) tem somente raízes reais inteiras.
d) f(x) não tem raízes reais inteiras.
e) n.d.a.

alternativa E

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots . a_1 + a_o$

$a_m, a_{m-1}, \ldots\ldots a_1, a_0 \in R \qquad a_m \neq 0$ e $a_0 \neq 0$

$f(1)$ é solução de

$$2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14 \quad (I)$$

Resolvendo (I):

$$(I) \iff 2^{x-3} + 2^{x-4} - 2^{x-2} + 2^{x-1} = 14 \iff$$

$$\iff 2^{x-4}(2 + 1 - 4 + 8) = 14 \iff 2^{x-4} \cdot 7 = 14 \iff 2^{x-4} = 2 \iff \boxed{x = 5}$$

temos $\boxed{f(1) = 5}$

Como $f(-1) = 2f(1)$ temos $\boxed{f(-1) = 10}$

como $a_0 = 2f(-1)$ temos $\boxed{a_0 = 20}$

Assim

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + 20$$

As informações dadas permitem-nos apenas afirmar que no intervalo $]-1; 1[$ a equação pode ter 2K raízes reais($K \in N$); não podemos dizer se existem, se são inteiras ou não, negativas ou não, neste intervalo ou em outro qualquer.

12. Se numa esfera de raio R, circunscrevemos um cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera, é dado por:

a) $3\pi R^3$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi R^3$

c) $3\sqrt{3}\pi R^3$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

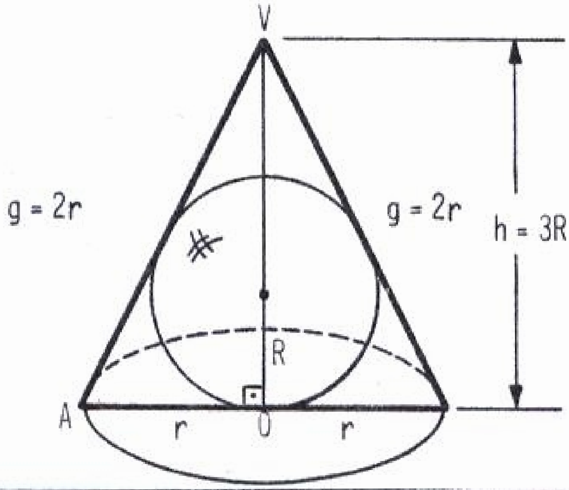
e) n.d.a.

alternativa A

$\triangle VAO$: $(2r)^2 = r^2 + (3R)^2$

$r = R\sqrt{3}$ (pois $r > 0$)

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi (R\sqrt{3})^2 \cdot 3R \iff \boxed{V = 3\pi R^3}$



13. Sejam x_1, x_2, x_3,...,x_6 raízes do polinômio

$P(x) = 6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6$, então:

a) P(x) admite mais de duas raízes negativas.

b) $\sum_{j=1}^{6} x_j > \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{x_j}$

c) P(x) admite duas raízes irracionais.

d) $\sum_{j=1}^{6} x_j = 0$ pois P(x) = 0 é uma equação recíproca.

e) n.d.a.

alternativa E

Sendo $P(x) = 6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6$

a equação P(x) = 0 é recíproca de 2ª espécie e grau par; isto significa que admite 1 e -1 como raízes. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

1	6	-35	56	0	-56	35	-6
-1	6	-29	27	27	-29	6	0
	6	-35	62	-35	6	0	

Vamos resolver a equação

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

aplicando a transformação $y = x + \frac{1}{x}$ (I)

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0 \iff$$

$$\iff 6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \iff$$

$$\iff 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \quad \text{(II)}$$

e como $y = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow \left(y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \iff y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

temos, de (I) e (II), que

$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0 \iff 6y^2 - 12 - 35y + 62 = 0 \iff$

$$\iff 6y^2 - 35y + 50 = 0 \iff \left| \begin{array}{l} y = \frac{5}{2} \\ \quad \vee \\ y = \frac{10}{3} \end{array} \right.$$

Como $y = \frac{1}{x} + x$, temos

$$\frac{1}{x} + x = \frac{5}{2} \vee \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3} \iff \left| \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ \quad \vee \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \vee x = 2 \\ \vee \\ x = \frac{1}{3} \vee x = 3 \end{array} \right.$$

As raízes da equação $P(x) = 0$ são, pois, $1, -1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3$

14. Se $a > 1$, o valor real de m para o qual a equação $x^3 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0$ tenha raízes em progressão aritmética, é dado por:

a) $m = \log_e a - 8$ ou $m = -9a$

b) $m = \log_e a - 9$

c) $m = \dfrac{15}{\log_e a}$

d) $m = -\frac{9}{8} \log_e a$

e) n.d.a.

alternativa C

Sejam raízes da equação

$x^3 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0 \quad (a > 1)$

os números $\alpha - r, \alpha, \alpha + r$ (pois formam PA)

Utilizando uma das relações de Girard, temos

$(\alpha - r) + \alpha + (\alpha + r) = 9 \iff \alpha = 3$

Como 3 é raiz, temos

$(3)^3 - 9(3)^2 + (\log_e a^m + 8)(3) - \log_e a^m = 0 \iff$

$\iff 27 - 81 + 3 \log_e a^m + 24 - \log_e a^m = 0 \iff$

$\iff 2 \log_e a^m = 30 \iff \log_e a^m = 15 \iff$

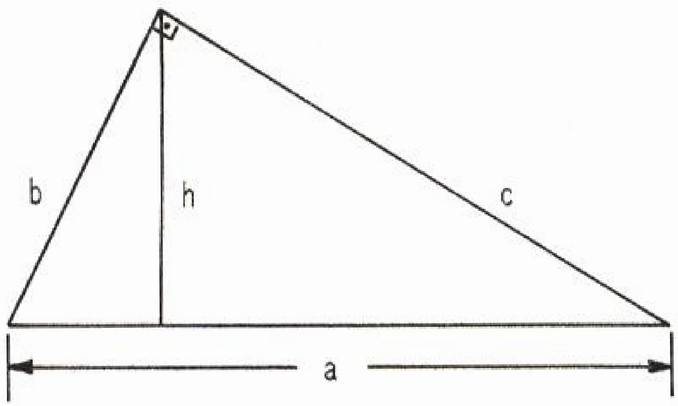
$\iff m \log_e a = 15 \iff m = \dfrac{15}{\log_e a}$

15. Os catetos $\underline{b}$ e $\underline{c}$ de um triângulo retângulo de altura h(relativa à hipotenusa), são dados pelas seguintes expressões: $b = \sqrt{k + \frac{1}{k}}$ e $c = \sqrt{k - \frac{1}{k}}$ onde k é um número real maior que 1. Então o valor de h em função de k é:

a) $\dfrac{\sqrt{k^2 - 1}}{2k}$ c) $\dfrac{\sqrt{1 + k^2}}{-1 - k^2}$

b) $\dfrac{k^2 - 1}{k^2 - 2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2(k^2 - 1)}}{2k}$ e) n.d.a.

alternativa E



$b = \sqrt{k + \frac{1}{k}}$

$c = \sqrt{k - \frac{1}{k}}$

$k > 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longleftrightarrow a^2 = k + \frac{1}{k} + k - \frac{1}{k} \Longleftrightarrow a^2 = 2k$ $a = \sqrt{2k}$ (pois $a > 0$)

$$h = \frac{bc}{a} \Longleftrightarrow h = \frac{\sqrt{k + \frac{1}{k}} \cdot \sqrt{k - \frac{1}{k}}}{\sqrt{2k}} \Longleftrightarrow \boxed{h = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\frac{k^4 - 1}{2k}}}$$

16. Sejam $y = F(x) = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$ uma função real de variável real e, $x = x_n (n = 1,2,3,4,\ldots)$ uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Nestas condições, uma das alternativas abaixo é correta:

a) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1,2,3,\ldots)$ constitui uma progressão aritmética de razão, a^r.

b) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1,2,3,\ldots)$ é uma progressão geométrica de razão, $-a^r$.

c) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1,2,3,\ldots)$ não é progressão aritmética e nem progressão geométrica.

d) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1,2,3,\ldots)$ é uma progressão geomé -

trica de razão $q > 1$, se admitirmos que $a < 1$.
e) n.d.a.

alternativa E

$$\left.\begin{array}{l} F(x_n) = a^{x_n} \\ x_n = x_1 + (n-1) \cdot r \end{array}\right| \Longrightarrow F(x_n) = a^{x_1 + (n-1)r} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow F(x_n) = a^{x_1} \cdot a^{(n-1) \cdot r} \Longleftrightarrow F(x_n) = a^{x_1} \cdot (a^r)^{n-1}$$

Assim $F(x_n)$ é uma P.G. de primeiro termo a^{x_1} e razão a^r.

Note que para $a<1$ e $r>0$, temos $q<1$

17. Consideremos a função real de variável real definida por : $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & \text{se } x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \\ 2x - 5, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Se $a = \log_2 1024$ e $x_o = a - 6$, então o valor da função $f(x)$ no ponto x_o, $f(x_o)$, é dado por:

a) $f(x_o) = 1$ c) $f(x_o) = 3$
b) $f(x_o) = 2$ d) $f(x_o) = \frac{1}{8}$ e) n.d.a.

alternativa C

$a = \log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

$x_o = a - 6 = 10 - 6 = 4$

$f(x_o) = f(4)$; como $4 > 3$ temos que $f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$

18. Qual das funções definidas abaixo é bijetora?

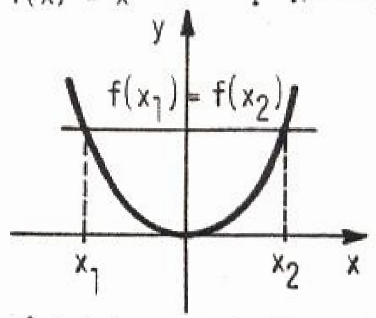
Obs.: $R^+ = \{x \in R;\ x \geqslant 0\}$ e $[a,b]$ é o intervalo fechado.

a) $f : R \to R^+$ tal que $f(x) = x^2$.
b) $f : R^+ \to R^+$ tal que $f(x) = x + 1$
c) $f : [1,3] \to [2, 4]$ tal que $f(x) = x + 1$

d) f : [0,2] ⟶ R tal que f(x) = sen x **e) n.d.a.**

alternativa C

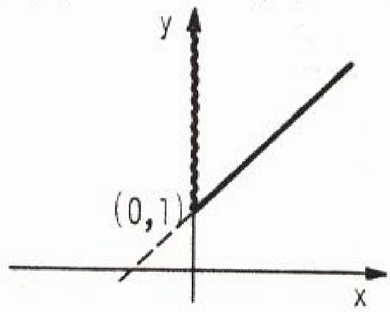
A) $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$



não é injetora, pois temos

$x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$

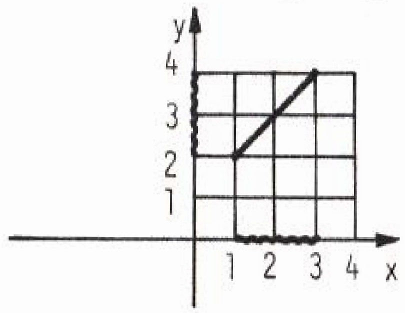
B) $f(x) = x + 1$ $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$



temos $Im(f) = [1, +\infty[\neq \mathbb{R}^+$,

f não é sobrejetora.

C) $f(x) = x + 1$ $f: [1, 3] \longrightarrow [2, 4]$



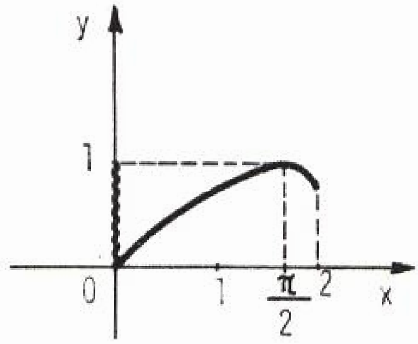
1) f é injetora, pois $\forall x_1, x_2 \in [1, 3]$,

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2) f é sobrejetora, pois $Im(f) = [2, 4]$

portanto é bijetora

D) $f(x) = \text{sen } x$ $f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$



f não é injetora, nem sobrejetora

19. A soma de todos os valores de x que satisfazem à identidade abaixo: $9^{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{3^{1-x}} = -1$ **, é :**

a) 0 **b) 1** **c) 2** **d) 3** **e) n.d.a.**

$$9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1 \Longleftrightarrow \frac{9^x}{9^{\frac{1}{2}}} - \frac{4 \cdot 3^x}{3} = -1 \Longleftrightarrow \frac{(3^x)^2}{3} - \frac{4}{3} \cdot 3^x + 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot (3^x) + 3 = 0$ (equação do 2º grau em (3^x)) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3^x = 1 \vee 3^x = 3$ $\boxed{x = 0 \vee x = 1}$ Assim, a soma das raízes é 1.

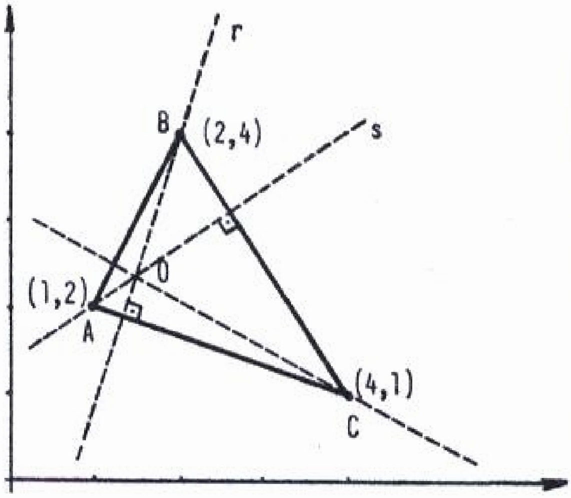
20. Seja o triângulo de vértices A:(1,2); B: (2,4) e C:(4,1), no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. A distância do ponto de encontro das alturas desse triângulo ao lado AC, é :

a) $\frac{9\sqrt{10}}{70}$ c) $8\sqrt{10}$ e) n.d.a.

b) $\frac{9}{70}$ d) $3\sqrt{3}$

alternativa A

Seja r a reta tal que $\left| \begin{array}{l} r \perp \overleftrightarrow{AC} \\ (2,4) \in r \end{array} \right.$



Como $a_{\overleftrightarrow{AC}} = \frac{2-1}{1-4} = -\frac{1}{3}$, temos que $a_r = 3$

(r) $y - 4 = 3(x - 2) \iff y - 4 = 3x - 6 \iff$

$\iff 3x - y - 2 = 0$

Seja s a reta tal que $\left| \begin{array}{l} s \perp \overleftrightarrow{BC} \\ (1,2) \in s \end{array} \right.$

Como $a_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{4-1}{2-4} = -\frac{3}{2}$, temos $a_s = \frac{2}{3}$

(s) $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \iff 3y - 6 = 2x - 2 \iff 2x - 3y + 4 = 0$

O é a intersecção de r e s:

$\left| \begin{array}{l} 3x - y - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{array} \right. \iff x = \frac{10}{7}\ ;\ y = \frac{16}{7}$

A equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + 3y - 7 = 0$

A distância de O à reta $\overleftrightarrow{AC}$ é dada por:

$$\frac{\left|1 \cdot \frac{10}{7} + 3 \cdot \frac{16}{7} - 7\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\frac{9}{7}}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{70}$$