GEOMETRIA ESPACIAL

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

GEOMETRIA ESPACIAL

Vivemos em um mundo tridimensional, então que tal estudarmos as principais figuras tridimensionais e suas propriedades importantes?

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Exercícios Aprofundados: Geometria de Posição, Poliedros e Prismas
2. Exercícios Aprofundados: Pirâmides, Cilindros, Cones, Esferas, Inscrição e Circunscrição de Sólidos e Sólidos de Revolução

GEOMETRIA DE POSIÇÃO, POLIEDROS E PRISMAS

1. (ITA 2020) Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a $2.160°$.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA(S)

a. apenas I.

b. apenas II.

c. apenas III.

d. apenas I e II.

e. apenas II e III.

2. (IME 2020) Um inteiro positivo é escrito em cada uma das seis faces de um cubo. Para cada vértice, é calculado o produto dos números escritos nas três faces adjacentes. Se a soma desses produtos é 1105, a soma dos seis números das faces é:

a. 22

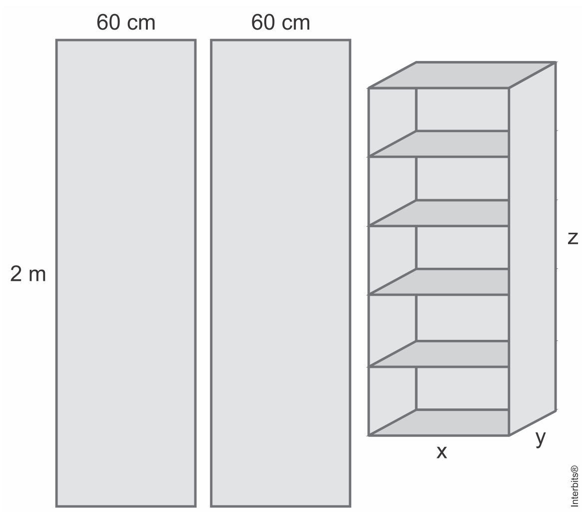
b. 35

c. 40

d. 42

e. 50

3. (ESPM 2018) Um marceneiro dispunha de 2 placas de madeira iguais, medindo 60 cm por 2 m. Sem sobrepor as placas, ele fez exatamente 7 cortes retilíneos, dividindo-as em peças retangulares, com as quais construiu a estante mostrada abaixo, sem sobra alguma de material.



Supondo desprezíveis as espessuras dos cortes e das placas, podemos afirmar que o volume $V = x \cdot y \cdot z$ ocupado pela estante, em cm^3 é igual a:

a. 264.000

b. 176.000

c. 198.000

d. 236.000

e. 218.000

4. (ITA 2018) Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas $3\text{ cm}, 4\text{ cm}$ e $5\text{ cm}.$ Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a. 10.

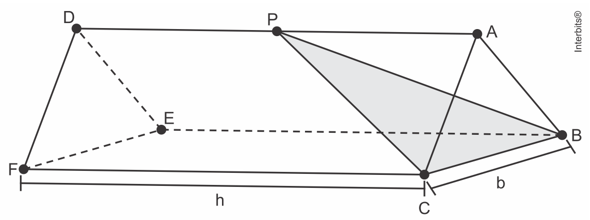
b. 12.

c. 15.

d. 20.

e. 30.

5. (UERJ 2018) A imagem a seguir ilustra um prisma triangular regular. Sua aresta da base mede b e sua aresta lateral mede h.



Esse prisma é seccionado por um plano $BCP,$ de modo que o volume da pirâmide $ABCP$ seja exatamente $\frac{1}{9}$ do volume total do prisma.

Logo, a medida de $\overline{AP}$ é igual a:

a. $\frac{h}{9}$

b. $\frac{h}{3}$

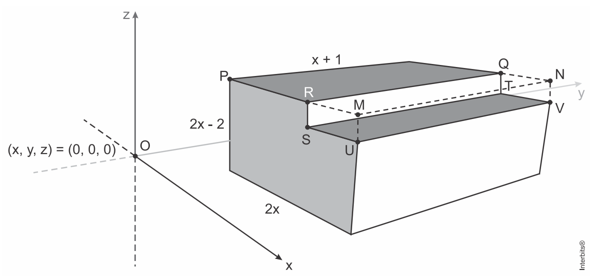
c. $\frac{2h}{3}$

d. $\frac{5h}{6}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Considere o texto e a imagem para responder à(s) questão(ões) a seguir.

A figura indica, em linha cheia, um prisma reto com faces, duas a duas, em planos perpendiculares ou em planos paralelos. Três de suas arestas medem $2x, 2x-2$ e $x+1,$ como indicado no desenho. O prisma está no sistema cartesiano $XYZ,$ com uma face contida no plano XY e com arestas paralelas ao eixo x ou ao eixo y. Sabe-se, ainda, que P, Q, R, S, T, U e V são vértices do prisma, que O é a origem do sistema XYZ e que todas as medidas de comprimento da figura estão em centímetros.



6. (INSPER 2018) Se os volumes do prisma, indicado na figura, e do paralelepípedo reto-retângulo $MRSUNQTV$, tracejado na figura, são, respectivamente, iguais a $1.264\ cm^3$ e $80\ cm^3$, então a medida de x, em centímetros, é um número

a. primo.

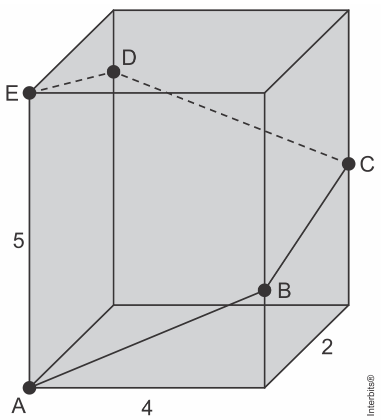
b. múltiplo de 11.

c. múltiplo de 13.

d. múltiplo de 3.

e. par.

7. (ESPM 2017) Em volta do paralelepípedo reto-retângulo mostrado na figura abaixo será esticada uma corda do vértice A ao vértice E, passando pelos pontos B, C e D.



De acordo com as medidas dadas, o menor comprimento que essa corda poderá ter é igual a:

a. 15

b. 13

c. 16

d. 14

e. 17

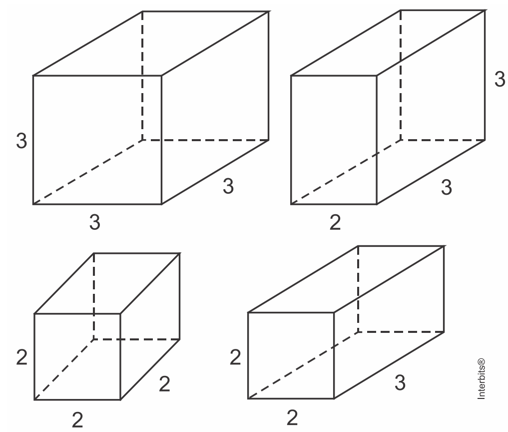
8. (UFJF-PISM 2 2017) Um quebra-cabeça tem 8 peças, sendo:

- 01 peça cúbica com $2\ cm$ de lado

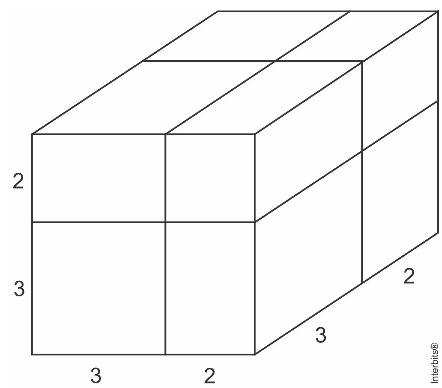
- 01 peça cúbica com $3\ cm$ de lado

- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas $2\ cm \times 2\ cm \times 3\ cm$

- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas $3\ cm \times 3\ cm \times 2\ cm$



Além disso, o quebra-cabeça montado é um cubo $5 \times 5 \times 5$ conforme ilustração abaixo.



Se pintarmos todas as faces do cubo montado, após desmontá-lo podemos afirmar que as peças:

a. cúbicas totalizam 5 faces não pintadas.

b. cúbicas totalizam 5 faces pintadas.

c. 2x2x3 totalizam 16 cm^2 de área de faces não pintadas.

d. 3x3x2 totalizam 63 cm^2 de área de faces não pintadas.

e. não cúbicas totalizam 15 faces não pintadas.

9. (UEM-PAS 2016) Assinale o que for correto.

01. O tronco de uma pirâmide de base quadrada, cuja altura é igual à aresta da base, é um poliedro regular.

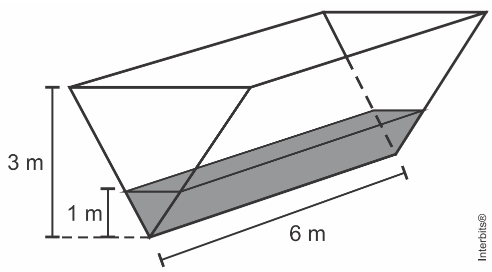
02. Considere dois prismas de bases hexagonais congruentes. Suponha que eles tenham a mesma altura, porém um tem arestas laterais perpendiculares à base e o outro tem arestas que formam um ângulo de 15 graus com a base. Então o prisma inclinado tem volume maior que o prisma reto.

04. Considere um cone reto e um tetraedro regular cujas áreas da base são iguais. Se a aresta do tetraedro tiver o mesmo comprimento que a geratriz do cone e o raio da base do cone for menor que $\frac{1}{4}$, então a área da superfície total do cone é maior que a área da superfície do tetraedro.

08. A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles.

16. Todo poliedro é convexo.

10. (INSPER 2016) Um tanque, inicialmente vazio, tem a forma de prisma triangular regular e suas paredes têm espessuras desprezíveis. Após algum tempo despejando água no tanque, um cano de vazão $3\sqrt{3}\text{ m}^3$ por minuto o encheu parcialmente, tendo a água ocupado o espaço de um prisma triangular regular, conforme indicado na figura.



Funcionando na mesma vazão, o tempo necessário para que o cano **acabe de encher** o tanque é de 5 minutos e t segundos, sendo que t é um número no intervalo

a. $[1, 12]$.

b. $[13, 24]$.

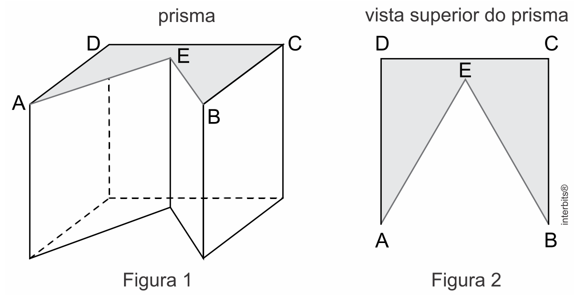
c. $[25, 36]$.

d. $[37, 48]$.

e. $[49, 59]$.

11. (UNESP 2016) Um cubo com aresta de medida igual a x centímetros foi seccionado, dando origem ao prisma indicado na figura 1. A figura 2 indica a vista superior desse prisma, sendo que

AEB é um triângulo equilátero.



Sabendo-se que o volume do prisma da figura 1 é igual a $2(4-\sqrt{3})\text{cm}^3$, x é igual a

a. 2

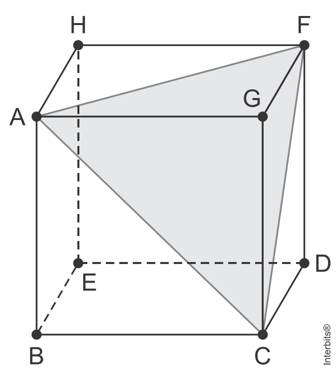
b. $\frac{7}{2}$

c. 3

d. $\frac{5}{2}$

e. $\frac{3}{2}$

12. (UERJ 2020) A imagem a seguir representa um cubo com aresta de 2 cm. Nele, destaca-se o triângulo AFC.



A projeção ortogonal do triângulo AFC no plano da base $BCDE$ do cubo é um triângulo de área y.

O valor de y, em cm^2, é igual a:

a. 1

b. $\frac{3}{2}$

c. 2

d. $\frac{5}{2}$

13. (UEM 2016) Considerando conhecimentos sobre Geometria Espacial, assinale o que for **correto**.

01. Se r e s são duas retas no espaço, com $r \cap s = \varnothing$, então a única possibilidade para r e s é que sejam paralelas.

02. Dados três pontos colineares A, B e C, no espaço, então não existe nenhum plano que contenha esses três pontos.

04. Se π, ρ e σ são planos distintos no espaço, então $\pi \cap \rho \cap \sigma$ pode determinar uma única reta, ou um único ponto, ou pode ser vazia.

08. Se r e s são duas retas reversas no espaço, então existe um plano que contém a reta s e é paralelo à reta r.

16. Seja α um plano e $P \notin \alpha$. Para calcular a distância do plano α ao ponto P basta escolher um ponto $Q \in \alpha$ qualquer e calcular a distância entre P e Q.

14. (ITA 2013) Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

a. III.

b. I e III.

c. II e III.

d. III e IV.

e. I e II e IV.

15. (ESPCEX (AMAN) 2013) Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento AB sobre um plano α é a metade da medida do segmento AB, então a reta AB faz com α um ângulo de 60°;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

a. apenas I e II

b. apenas II e III

c. I, II e III

d. I, II e IV

e. II, III e IV

16. (UEPG 2016) Considerando os planos α e β, e as retas r e s, assinale o que for correto.

01. Se $\alpha \cap \beta = s$, $r \parallel s$, $r \not\subset \alpha$ e $r \not\subset \beta$, então $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$.

02. Se $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$, $s \subset \alpha$, $s \perp r$, então $s \perp \beta$.

04. Se $r \subset \beta$ e $s \perp r$, então $s \perp \beta$.

08. Se $\alpha \parallel \beta$, $r \perp \alpha$, então $r \perp \beta$.

16. Se $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$, então $\alpha \parallel \beta$.

17. (UNESP 1992) No espaço tridimensional consideram-se duas retas r e s e os conjuntos: A, de todos os planos por r, B, de todos os planos por s. Descrever o conjunto A ∩ B, nos seguintes casos:

a. r e s são paralelas;

b. r e s são reversas.

18. (UFJF-PISM 2 2015) Sejam r uma reta e β_1 e β_2 dois planos no espaço, considere as seguintes afirmações:

I. Se $r \cap \beta_1 = \{P_1\}$ e $r \cap \beta_2 = \{P_2\}$, com P_1 e P_2 pontos distintos, então β_1 é paralelo a β_2.

II. $r \cap \beta_1 = \varnothing$ e $r \cap \beta_2 = \varnothing$, então β_1 é paralelo a β_2 ou β_1 é coincidente de β_2.

III. Se existem dois pontos distintos em $r \cap \beta_1$, então $r \cap \beta_1 = r$.

É **CORRETO** afirmar que:

a. Apenas I é verdadeira.

b. Apenas II é verdadeira.

c. Apenas III é verdadeira.

d. Apenas I e II são verdadeiras.

e. Apenas II e III são verdadeiras.

19. (UEM-PAS 2015) Sejam π_1 e π_2 dois planos que se interceptam, determinando uma reta r. Seja s uma reta que intercepta π_1 em um único ponto $A \notin r$ e intercepta π_2 em um único ponto $B \notin r$. Considerando esses dados, assinale o que for **correto**.

01. Pelo ponto A existe uma única reta paralela a r.

02. Por qualquer ponto P de r, é possível traçar uma reta paralela a s inteiramente contida em π_2.

04. A reta perpendicular ao plano π_2 pelo ponto B é ortogonal à r.

08. Existe ao menos um ponto C em r, tal que o triângulo ABC é isósceles.

16. Existe um plano perpendicular a π_1 e a π_2 simultaneamente.

20. (ESC. NAVAL 2013) Nas proposições abaixo, coloque **V** na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e **F** quando for falsa.

( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

( ) Se uma rota é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

( ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro

( ) Se três planos são dois a dois perpendiculares , eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a. F – F – V – F – V

b. V – F – V – V – F

c. V – V – F – V – V

d. F – V – V – V – V

e. V – V – V – V – V

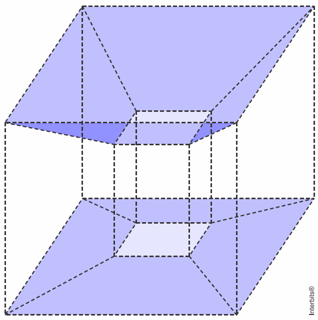
ANOTAÇÕES

GABARITO

1. [B]

[I] É possível construir um poliedro com 16 faces quadrangulares, 16 vértices e 32 arestas.

Observe o poliedro não convexo abaixo:



Assim, a afirmação [I] é falsa.

[II] Como o poliedro é convexo, é válida a relação de Euler, logo,

$$V + 10 = 16 + 2$$
$$V = 8$$

Daí,

$$S = (8 - 2) \cdot 360°$$
$$S = 2160°$$

Assim, a afirmação [II] é verdadeira.

[III] Se existe tal poliedro, segue que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots \geq 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \ldots$$
$$2A \geq 3 \cdot (F_3 + F_4 + F_5 + \ldots)$$
$$2 \cdot 22 \geq 3 \cdot 15$$
$$44 \geq 45 \quad (\text{Absurdo!})$$

Logo, a afirmação [III] é falsa.

Portanto, apenas a afirmação [II] é verdadeira.

2. [B]

Os números escritos nas faces do cubo são os inteiros x, y, z, w, t e v.

Do enunciado, segue que:

$$ytv + yvz + zwv + wtv + xyt + xtw + xyz + xzw = 1105$$
$$yv \cdot (t + z) + wv \cdot (t + z) + xt \cdot (y + w) + xz \cdot (y + w) = 1105$$
$$v \cdot (t + z) \cdot (y + w) + x \cdot (y + w) \cdot (t + z) = 1105$$
$$(t + z) \cdot (y + w) \cdot (v + x) = 1105$$
$$(t + z) \cdot (y + w) \cdot (v + x) = 5 \cdot 13 \cdot 17$$

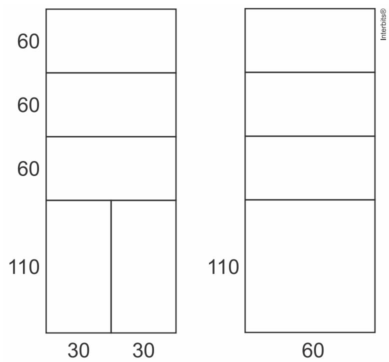
Como x, y, z, w, t e v são inteiros positivos, sem perda de generalidade, podemos adotar $t + z = 5$, $y + w = 13$ e $v + x = 17$.

Portanto,

$$x + y + z + w + t + v = 5 + 13 + 17$$
$$x + y + z + w + t + v = 35$$

3. [C]

Do enunciado, uma maneira de se fazer os cortes é:



Daí,

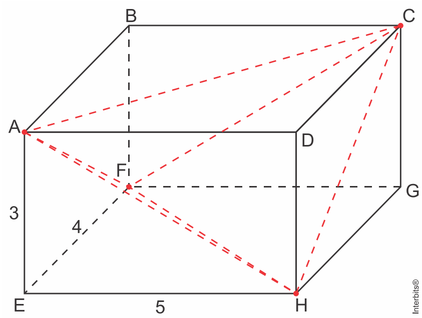
$$x = 60,\ y = 30 \text{ e } z = 110$$

Portanto,

$$V = 60 \cdot 30 \cdot 110$$
$$V = 198\,000 \text{ cm}^3$$

4. [D]

Do enunciado, temos:



Como $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo retângulo, $AFEH$, $HADC$, $CGFH$ e $FABC$ são tetraedros trirretangulares.

$V_{AFEH} = V_{HADC} = V_{CGFH} = V_{FABC} = V_1$

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 10$

Sendo V o volume do tetraedro $ACFH$ e V_2 o volume do paralelepípedo.

$V = V_2 - 4 \cdot V_1$
$V = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 10$
$V = 20\ cm^3$

5. [B]

Calculando:

$V_{prisma} = S_{base} \cdot h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot \overline{PA} = \frac{1}{9} \cdot V_{prisma}$

$\frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot \overline{PA} = \frac{1}{9} \cdot S_{base} \cdot h \Rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{3}$

6. [A]

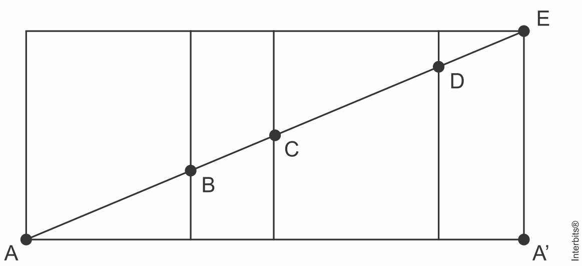
Desde que a soma dos volumes dos dois sólidos corresponde ao volume de um prisma reto de dimensões $2x, 2x-2$ e $x+1,$ vem

$2x \cdot (2x-2) \cdot (x+1) = 1264 + 80 \Leftrightarrow (x-1) \cdot x \cdot (x+1) = 336.$

Logo, sendo $x-1, x$ e $x-1$ três inteiros positivos, por inspeção, concluímos que $x = 7,$ ou seja, um número primo.

7. [B]

Considere a planificação da superfície lateral do paralelepípedo, na qual está indicado o comprimento mínimo, $AE,$ da corda.



Portanto, sendo $\overline{AA'} = 12$ e $\overline{A'E} = 5,$ pelo Teorema de Pitágoras, vem

$\overline{AE}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'E}^2 \Rightarrow \overline{AE}^2 = 12^2 + 5^2$

$\Rightarrow \overline{AE} = 13.$

8. [D]

O número total de faces pintadas das 8 peças é igual a $4 \cdot 6 = 24.$ Destas, $2 \cdot 3 = 6$ são cúbicas. Logo, temos $12 - 6 = 6$ faces cúbicas não pintadas. Ademais,

Cada peça do tipo $2 \times 2 \times 3$ apresenta uma face 2×2 e duas faces 2×3 não pintadas. Logo, as faces não pintadas deste tipo totalizam $3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 48\,cm^2.$

Cada peça do tipo $3 \times 3 \times 2$ apresenta uma face 3×3 e duas faces 2×3 não pintadas. Assim, as faces não pintadas deste tipo totalizam $3 \times 3 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 63\,cm^2.$

As peças não cúbicas totalizam $6 \cdot 6 = 36$ faces. Portanto, como foram pintadas $2 \times 3 \times 3 = 18$ faces destas peças, segue que o número de faces não pintadas é $36 - 18 = 18.$

9. 08.

[01] Falsa. Um tronco de pirâmide de bases quadradas possui faces laterais na forma de trapézios isósceles. Portanto, não é um poliedro regular.

[02] Falsa. Sabemos, pelo Princípio de Cavalieri, que os prismas descritos têm volumes iguais.

[04] Falsa. Sejam r, g e $\ell,$ respectivamente, o raio do cone, a geratriz do cone e a aresta do tetraedro. Se as áreas das bases são iguais, então

$\pi r^2 = \frac{g^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow g = \frac{2\sqrt{\pi}r}{\sqrt[4]{3}}.$

Desse modo, a área lateral do cone é dada por

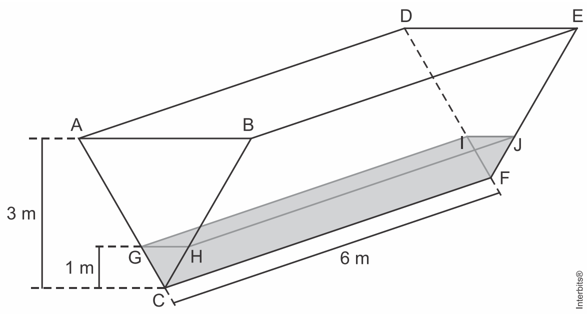
$\pi r \frac{2\sqrt{\pi}r}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}} \pi r^2.$

Por outro lado, sendo a área lateral do tetraedro igual a $3\pi r^2,$ podemos concluir que a área total do cone é menor do que a área total do tetraedro, qualquer que seja o valor de $r.$

[08] Verdadeira. De fato, a secção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles cujas medidas dos lados congruentes correspondem à geratriz do cone e cuja base tem medida igual ao diâmetro da base do cone.

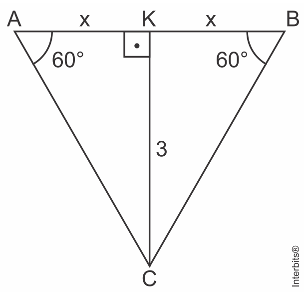
[16] Falsa. Existem poliedros côncavos.

10. [B]



$V_{ABCDEF} = V_{GHCIJF} + V_{ABHGDEJI}$, onde V_{ABCDEF}, V_{GHCIJF} e $V_{ABHGDEJI}$ são, respectivamente, o volume do prisma $ABCDEF$, $GHCIJF$ e o volume do tanque que falta ser preenchido.

Cálculo do volume do prisma $ABCDEF$



No triângulo AKC,

$$tg60° = \frac{3}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{3}{x}$$

$$x\sqrt{3} = 3$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Sendo S_{ABC} a área do triângulo ABC,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3$$

$$S_{ABC} = 3\sqrt{3}$$

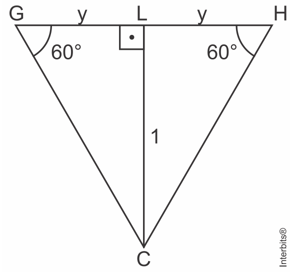
Assim,

$$V_{ABCDEF} = S_{ABC} \cdot 6$$

$$V_{ABCDEF} = 3\sqrt{3} \cdot 6$$

$$V_{ABCDEF} = 18\sqrt{3}$$

Cálculo do volume do prisma $GHCIJF$



No triângulo GLC,

$$tg60° = \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{y}$$

$$y\sqrt{3} = 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sendo S_{GHC} a área do triângulo GHC,

$$S_{GHC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1$$

$$S_{GHC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim,

$$V_{GHCIJF} = S_{GHC} \cdot 6$$

$$V_{GHCIJF} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6$$

$$V_{GHCIJF} = 2\sqrt{3}$$

Logo,

$$18\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + V_{ABHGDEJI}$$

$$V_{ABHGDEJI} = 16\sqrt{3}$$

Como a vazão do cano é $3\sqrt{3}\ m^3$ por minuto, após z minutos, serão preenchidos $3\sqrt{3}z\ m^3$.

Então,

$$3\sqrt{3}z = 16\sqrt{3}$$

$$z = \frac{16}{3} \text{ minutos}$$

$$z = \frac{15}{3} \text{ minutos} + \frac{1}{3} \text{ minuto}$$

$$z = 5 \text{ minutos} + \frac{1}{3} \cdot 60 \text{ segundos}$$

$$z = 5 \text{ minutos} + 20 \text{ segundos}$$

Logo,

$$t = 20 \text{ segundos}$$

$13 \le 20 \le 24,$ portanto, t é um número no intervalo $[13, 24].$

11. [A]

Com os dados do enunciado, pode-se calcular:

$$V_{prisma} = 2\left(4-\sqrt{3}\right) = x \cdot \left(x^2 - \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)$$

$$V_{prisma} = 2 \cdot \left(4-\sqrt{3}\right) = \frac{x^3}{4} \cdot \left(4-\sqrt{3}\right) \to \frac{x^3}{4} = 2 \to x^3 = 8 \to x = 2$$

12. [C]

A projeção ortogonal do triângulo AFC no plano da $BCDE$ do cubo corresponde ao triângulo $BDC.$ Portanto, segue que $y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2\,cm^2.$

13. 04 + 08 = 12.

[01] Falso. Tais retas podem ser reversas (não coplanares).

[02] Falso. Existe plano que contém os três pontos, porém é necessário ao menos mais um ponto não colinear aos outros para determinação do plano.

[04] Verdadeiro. A intersecção de planos pode resultar em reta, plano ou conjunto vazio.

[08] Verdadeiro. Existe um plano que contém a reta s e é paralelo à reta $r.$

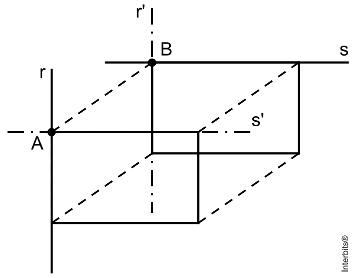
[16] Falso. A distância medida se dá através do comprimento ser uma reta que contenha o ponto P e o ponto $Q,$ e que seja perpendicular ao plano.

14. [D]

I. Falsa. Duas retas paralelas e coplanares não são concorrentes.

II. Falsa. Duas retas paralelas paralelas não têm ponto comum e não são reversas.

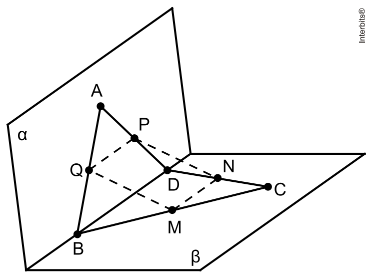
III. Verdadeira. Considere a figura.



Sejam r e s duas retas reversas.

Tomando um ponto A da reta $r,$ existe uma única perpendicular comum a r e s que intersecta a reta s no ponto $B,$ de tal modo que $B \in r'$ e $r \parallel r'.$ Analogamente, obtemos a reta $s' \parallel s.$ Portanto, os planos $\alpha = (r, s')$ e $\beta = (r', s)$ são os únicos planos paralelos, cada um contendo uma das retas.

IV. Verdadeira. Considere o quadrilátero reverso da figura, com $ABD \in \alpha$ e $BCD \in \beta.$

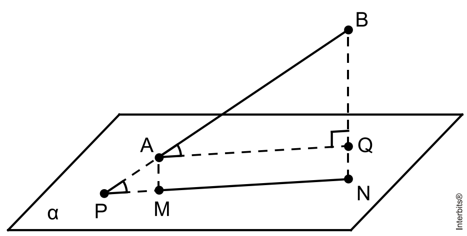


Como PQ é base média do triângulo ABD e MN é base média do triângulo $BCD,$ segue que $PQ \parallel BD$ e $MN \parallel BD.$ Logo, $PQ \parallel MN.$ Similarmente, concluímos que $MQ \parallel NP$ e, portanto, segue-se o resultado.

15. [A]

I. Correta. Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela forma ângulo reto com todas as retas do plano. Além disso, se duas retas formam um ângulo reto, então elas são perpendiculares ou ortogonais.

II. Correta. Considere a figura.



Seja MN a projeção ortogonal de AB sobre $\alpha.$

Sabendo que $\overline{MN} = \overline{AQ} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$ e que $Q\hat{A}B$ é agudo, do triângulo retângulo AQB, obtemos

$$\cos Q\hat{A}B = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos Q\hat{A}B = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \cos Q\hat{A}B = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow Q\hat{A}B = \arccos\frac{1}{2}$$

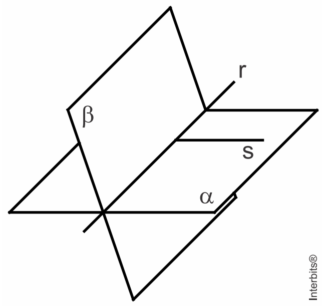
$$\Rightarrow Q\hat{A}B = 60°,$$

Portanto, como $Q\hat{A}B$ e $N\hat{P}B$ são ângulos correspondentes, segue que $N\hat{P}B = 60°$, ou seja, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ faz com α um ângulo de 60°.

III. Incorreta. Se α e β são planos paralelos e γ é um plano que intersecta α e β, então as interseções entre esses planos são retas paralelas.

IV. Incorreta. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos α e β. Se s é uma reta de α, tal que $s \neq r$ e $s \parallel r$, então s não intersecta β.

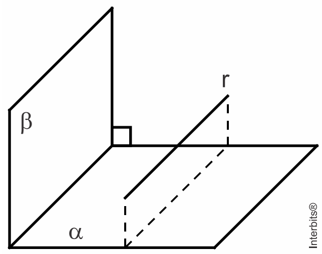
[04] Falsa. Considere a figura.



Basta que o ângulo entre os planos α e β não seja reto.

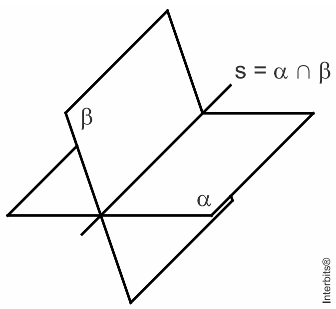
[08] Verdadeira. De fato, o resultado é imediato.

[16] Falsa. Considere a figura, em que α e β são perpendiculares.



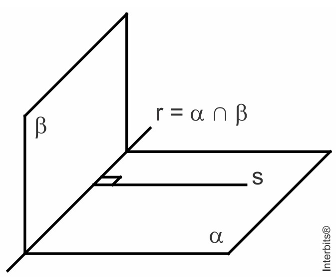
16. 01 + 02 + 08 = 11.

[01] Verdadeira. De fato, considere a figura.



Qualquer reta paralela a s que não esteja contida nem em α e nem em β será paralela a esses planos.

[02] Verdadeira. Considere a figura, em que a reta s é perpendicular ao plano β.



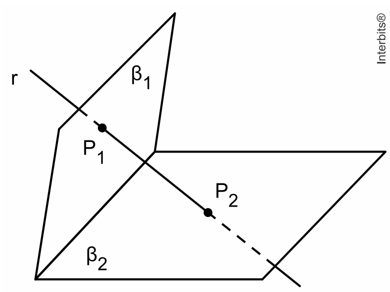
17.

a. Se as retas r e s são paralelas distintas existe um único plano passando por r e s; portanto A∩B é um conjunto unitário. Se as retas são paralelas coincidentes, então A ∩ B = A = B.

b. Se r e s são retas reversas não existe um plano passando por r e s. Logo A∩B = { }

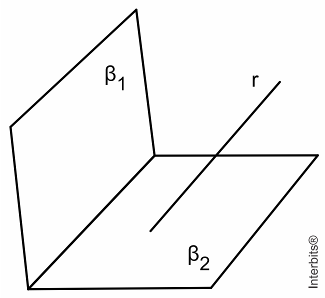
18. [C]

[I] Falsa. Considere a figura.



β_1 e β_2 são secantes.

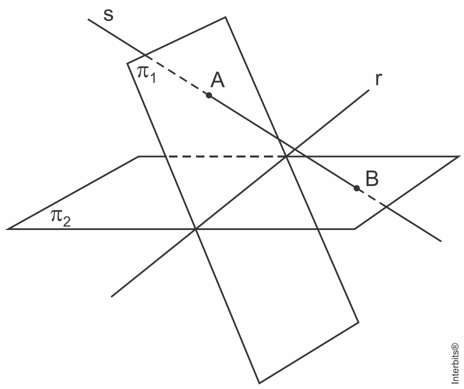
[II] Falsa. Considere a figura.



Tem-se que β_1 e β_2 são secantes e r é paralela a β_1 e β_2.

[III] Verdadeira. De fato, se $r \cap \beta_1 \supset \{P_1, P_2\}$, então $r = \overleftrightarrow{P_1P_2}$ e, portanto, $r \cap \beta_1 = r$.

19. 01 + 04 + 08 + 16 = 29.



[01] Verdadeira. Postulado das paralelas de Euclides.

[02] Falsa. A reta s é secante a π_2, portanto não existe uma reta em π_2 que seja paralela a s.

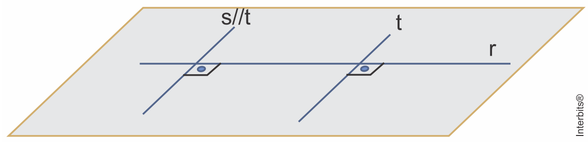
[04] Verdadeira. Uma reta perpendicular a um plano forma um ângulo reto com todas as retas deste plano.

[08] Verdadeira. Toda reta que perpendicular à reta s pelo seu ponto médio que intercepta a reta r, determina em r um ponto equidistante de A e B.

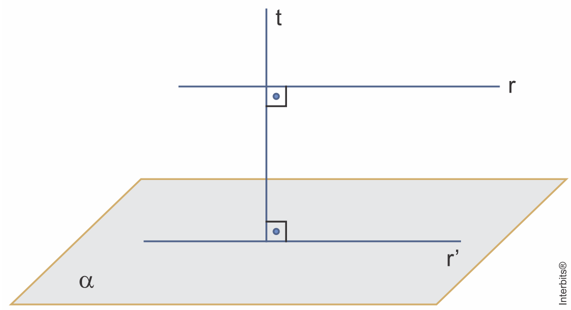
[16] Verdadeira. Podemos considerar que o plano, determinado pelas retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$, com P pertencente a reta r, ambas perpendiculares à reta r, é perpendicular a π_1 e π_2.

20. [D]

[A] Falsa. Ela poderá ser perpendicular a duas retas concorrentes deste plano e neste caso estar contida no plano.



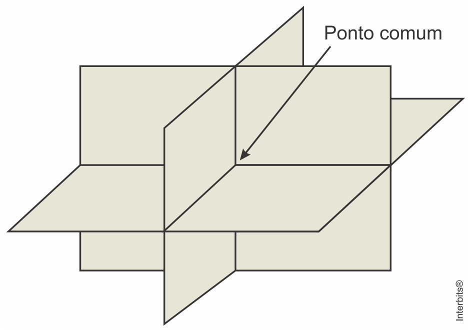
[B] Verdadeira. Toda à reta é paralela à sua projeção ortogonal em um plano qualquer.



[C] Verdadeira, pois formam o mesmo ângulo com o plano.

[D] Verdadeira. Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos entre si, pois formam o mesmo ângulo com esse terceiro plano.

[E] Verdadeiro. Estes três planos dividem o espaço em oito octantes, com apenas um ponto em comum, cada dois planos possuem em comum um única reta e estas três retas se encontram num único ponto.



ANOTAÇÕES