FUNÇÃO COMPOSTA E INVERSA

1. FUNÇÃO COMPOSTA

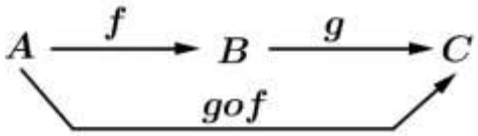
A composição de funções consiste na aplicação sucessiva de funções. Muitas vezes busca-se uma expressão única que substitua essas aplicações sucessivas, em outros casos descobrir valores da função composta ou das funções originais ou estudar seus domínios. Isso aparece em diversos exercícios e os conceitos a seguir vão nos ajudar a lidar com cada uma dessas questões.

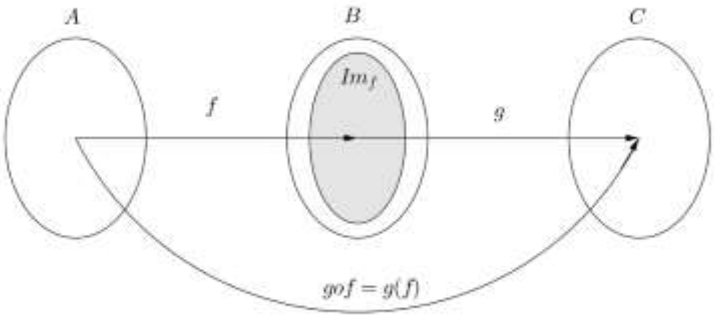
Dados os conjuntos A, B e C e as funções $f: A \to B$, definida por $y = f(x)$, e $g: B \to C$, definida por $z = g(y)$, chama-se função composta de g com f a função $h = (gof): A \to C$, definida por:

$$\mathbf{z = (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Assim, a função $(g \circ f)$ pode ser entendida como uma função única que apresenta o mesmo resultado que as aplicações sucessivas de f e g.

O diagrama de flechas a seguir ilustra esse conceito:





Na definição acima, adotamos o contradomínio de f coincidente com o domínio de g. No caso geral, a condição para que a função $(g \circ f)$ esteja definida é que a imagem de f esteja contida no domínio de g.

A composição de funções não é comutativa: $g \circ f \neq f \circ g$. Pode acontecer, inclusive, de só uma das funções $(f \circ g)$ ou $(g \circ f)$ estar definida.

PROBIZU

A sentença aberta que define $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é obtida de $g(x)$ substituindo-se x pela expressão de $f(x)$.

Exemplo: Sejam as funções reais $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$, calcule as expressões de $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 4 \cdot (2x-3) - 5 = 4x^2 - 4x - 8$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 4x - 5) = 2 \cdot (x^2 + 4x - 5) - 3 = 2x^2 + 8x - 13$

2. FUNÇÃO INVERSA

A função inversa está relacionada à ideia de relação inversa, ou seja, se na função original a entrada x corresponde a uma saída y, na função inversa a entrada y corresponde à saída x. Isso é abordado em diversas situações, como encontrar a expressão ou valores da função inversa, a forma do seu gráfico e suas características, inclusive associada à composição de funções. Vamos agora ver como fazer tudo isso nos conceitos apresentados a seguir e nos exercícios seguintes.

Se f é uma função de A em B, bijetora, a relação inversa de f é uma função de B em A, chamada função inversa de f e denotada por f^{-1} e também é bijetora.

A definição acima resulta nas seguintes expressões:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

A função inversa é composta pelos pares ordenados obtidos pela inversão da ordem dos elementos dos pares ordenados da função original.

Assim, se a função $f: A \to B$ associa cada elemento $x \in A$ a um elemento correspondente $y \in B$, a função f^{-1}, inversa de f, associa a cada elemento $y \in B$, o elemento correspondente $x \in A$.

Exemplo: Seja a função bijetora $f(x) = 2x + 1$, encontre o valor de $f^{-1}(7)$.

Observe que para essa questão não é necessário obter a expressão de f^{-1}, apenas usar a definição de relação inversa.

$$f^{-1}(7) = x \Leftrightarrow f(x) = 7$$

Vamos usar a expressão de $f(x)$ para encontrar o valor de x tal que $f(x) = 7$:
$f(x) = 2x + 1 = 7 \Leftrightarrow x = 3$

Daí se conclui que:
$f^{-1}(7) = 3$.

PROBIZU

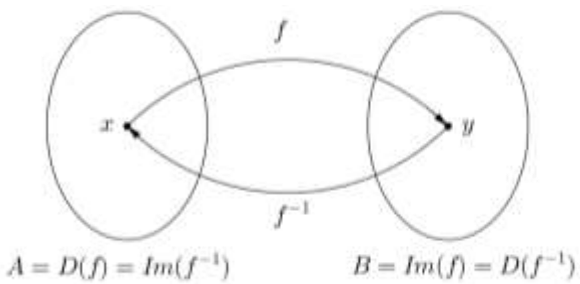
Uma função só possui inversa se ela for bijetora.

No caso de funções que não são bijetoras, a relação inversa está definida, mas ela não é uma função, pois pode haver elementos no conjunto de partida que não estejam relacionados a ninguém ou a mais de um elemento no conjunto de chegada.

O domínio da função inversa é a imagem da função original e a imagem da função inversa é o domínio da função original.

$$D(f^{-1}) = Im(f) \text{ e } Im(f^{-1}) = D(f)$$

Esses conceitos podem ser observados nos diagramas de flecha seguintes:



PROBIZU

Para encontrar a imagem de uma função bijetora, basta encontrar o domínio da sua função inversa.

Exemplo: Encontre a imagem de $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Vamos começar encontrando a inversa de f.

$$y = f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y+1}{y}$$

Substituindo-se a variável y por x, temos: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$

Observe agora que o domínio de f^{-1} é $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^*$, pois o denominador x deve ser não nulo.

Mas sabemos que **a imagem de uma função inversível é igual ao domínio da sua função inversa**, então a imagem de f é $Im_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^*$.

A função inversa da função inversa é a função original.

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

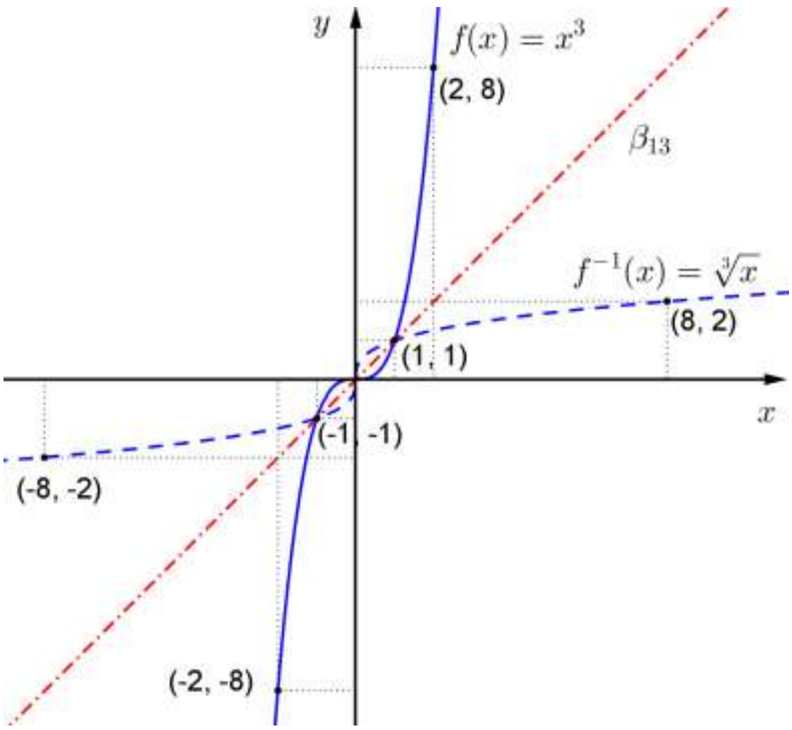
O resultado da aplicação da função composta de f^{-1} com f sobre um elemento $x \in D_f$ é o próprio x, ou seja, a composição da função inversa com a função original é a função identidade.

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ \forall x \in D_f$$

O resultado da aplicação da função composta de f com f^{-1} sobre um elemento $x \in D_{f^{-1}}$ é o próprio x, ou seja, a composição de uma função com a sua inversa é a função identidade.

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x,\ \forall x \in D_{f^{-1}}$$

Como $(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (β_{13}), como pode ser visto no exemplo abaixo:



2.1. OBTENÇÃO DA FUNÇÃO INVERSA

Diversos exercícios solicitam que se encontre a expressão da função inversa, identificando o seu domínio. A seguir vamos apresentar duas maneiras de fazer isso.

1º Método:

Na expressão $y=f(x)$, efetuamos as operações algébricas necessárias a fim de obter uma expressão de x em função de y. Essa é a expressão da função inversa, ou seja, $x=f^{-1}(y)$.

Ao final, pode ser efetuada a substituição da variável x por y, e vice-versa, resultando a expressão $y=f^{-1}(x)$, onde $x\in D_{f^{-1}}$.

Exemplo: Obtenha a expressão da função inversa da função bijetora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $y=2x-4$.

$$y=2x-4\Leftrightarrow 2x=y+4\Leftrightarrow x=\frac{y}{2}+2\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y}{2}+2\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}+2$$

2º Método:

Sabemos que $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$. Vamos, inicialmente, obter a expressão de $f\left(f^{-1}(x)\right)$, substituindo x por $f^{-1}(x)$ na expressão de $f(x)$. Na expressão encontrada, efetuamos as operações algébricas necessárias para isolar $f^{-1}(x)$.

Exemplo: Obtenha a expressão da função inversa da função bijetora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $y=2x-4$.

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x\Leftrightarrow 2\cdot f^{-1}(x)-4=x\Leftrightarrow 2\cdot f^{-1}(x)=x+4\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}+2$$

Muitas vezes, para obter a expressão da função inversa, é necessário identificar, dentre as possíveis expressões encontradas, aquela que corresponde ao domínio adotado para a função original.

Exemplo: (ITA 1987) Considere $x=g(y)$ a função inversa da seguinte função: "$y=f(x)=x^2-x+1$, para cada número real $x\geq\frac{1}{2}$". Nestas condições, a função g é assim definida:

a) $g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}$, para cada $y\geq\frac{3}{4}$.

b) $g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{1}{4}}$, para cada $y\geq\frac{1}{4}$.

c) $g(y)=\sqrt{y-\frac{3}{4}}$, para cada $y\geq\frac{3}{4}$.

d) $g(y)=\sqrt{y-\frac{1}{4}}$, para cada $y\geq\frac{1}{4}$.

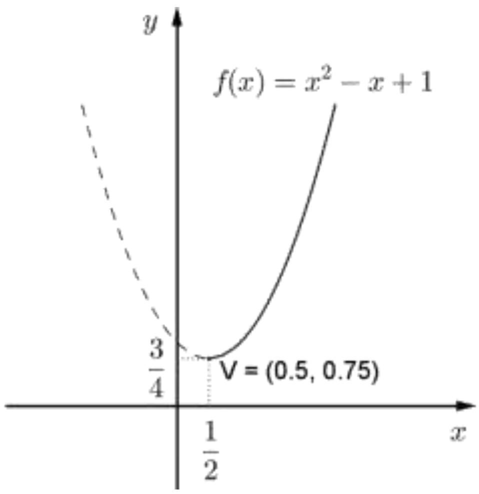
e) $g(y)=\frac{3}{4}+\sqrt{y-\frac{1}{2}}$, para cada $y\geq\frac{1}{2}$.

RESOLUÇÃO: (a)

$$y=f(x)=x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-x+(1-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1-y)}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{y-\frac{3}{4}}$$

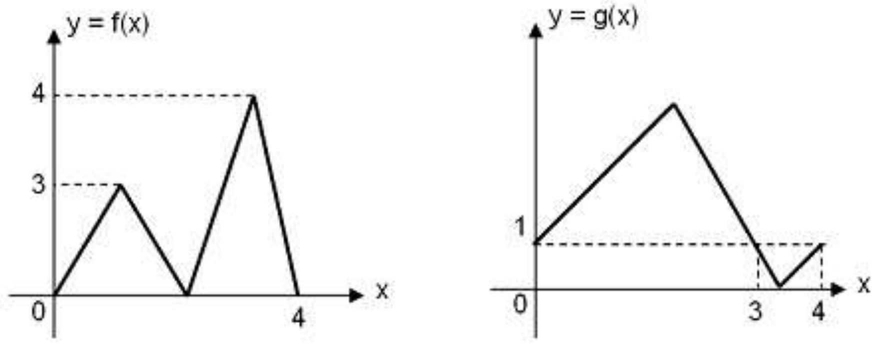
$$x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow g(y)=x=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}},\ y\geq\frac{3}{4}$$



Observe que $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ é o vértice da parábola. A condição $x\geq\frac{1}{2}$ define que se busca a função inversa do ramo direito da parábola. A função $f:\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\to\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$ é bijetora e, portanto possui inversa.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (CPII 2008) Duas funções reais f e g, ambas de domínio $[0,4]$, estão representadas graficamente abaixo:



O número de elementos do conjunto solução da equação $g[f(x)]=1$ é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

2. (EsPCEx 2010) Considere a função real $g(x)$ definida por: $g(x)=\begin{cases} 5^x, \text{ se } x \leq 1 \\ \dfrac{-3x^2}{4}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{17}{4}, \text{se } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$. O valor de $g(g(g(1)))$ é

a) 0

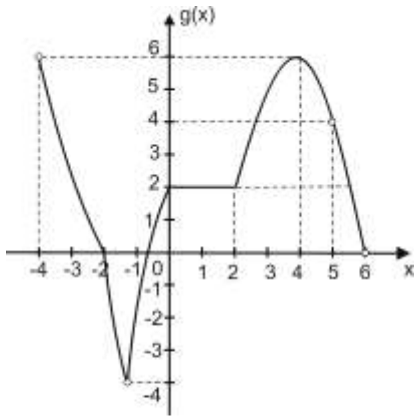
b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

3. (EPCAR 3º ano 2005) Considere a figura abaixo, gráfico da função real g tal que $g: D \to]-4,6]$.



É correto afirmar que

a) os elementos do conjunto D, domínio de g, são os mesmos do conjunto I, imagem de g.

b) o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 5 \text{ e } g(x) = \pi\}$ possui exatamente 2 elementos.

c) $3 \cdot [g(g(g(-2)))] < g(4)$

d) a função g é sobrejetora, mas não é injetora.

4. (AFA 2000) Dadas f e g, duas funções reais definidas por $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = \text{sen}x$, pode-se afirmar que a expressão de $(f \circ g)(x)$ é

a) $\text{sen}x\cos^2 x$

b) $-\text{sen}(x^3 - x)$

c) $-\text{sen}x\cos^2 x$

d) $\text{sen}x^3 - \text{sen}x$

5. (AFA 2001) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = \log_{x+1} x$. O domínio de $(g o f)(x)$ é o conjunto dos números reais x, tais que

a) $0 < x < 1$ ou $x > 3$

b) $x < 1$ ou $x > 3$

c) $1 < x < 3$ e $x \neq 0$

d) $x > 3$

6. (AFA 2002) Sejam as funções g e f definidas por $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=\begin{cases} 2, \text{ se } |x|>2 \\ -1, \text{ se } |x|\le 2 \end{cases}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x-2$. Sobre a composta $(g\circ f)(x)$, é correto afirmar que

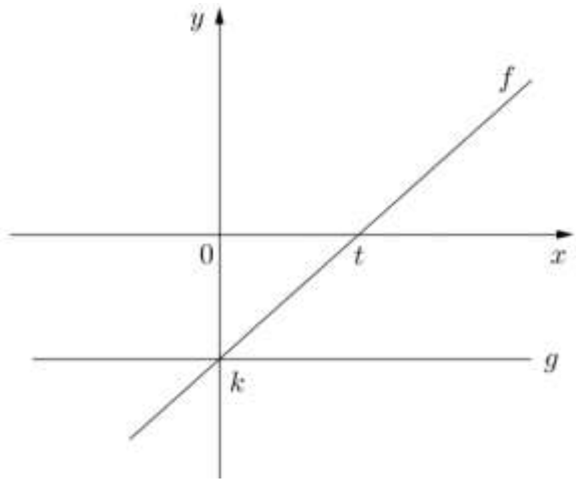
a) se $x\ge 1$, então $(g\circ f)(x)=-1$.

b) se $x<0$, então $(g\circ f)(x)=2$.

c) se $x\le -1$, então $(g\circ f)(x)=-1$.

d) se $x<1$ e $x\ne 0$, então $(g\circ f)(x)=-1$.

7. (AFA 2003) Analise o gráfico abaixo das funções f e g e marque a opção correta.



a) O gráfico da função $h(x)=g(x)-f(x)$ é uma reta ascendente.

b) O conjunto imagem da função $s(x)=f(g(x))$ é $\mathbb{R}$.

c) $f(x)\cdot g(x)\ge 0$, $\forall x\ge t$.

d) $g(f(x))=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

8. (AFA 2004) Considere as funções reais $(f\circ g)(x)=\begin{cases} 4x^2-6x-1 \text{ se } x\ge 1 \\ 4x+3 \text{ se } x<1 \end{cases}$ e $g(x)=2x-3$.

Com base nessas funções classifique as afirmativas abaixo em VERDADEIRA(S) ou FALSA(S).

I. $f(x)$ é par.

II. $f(x)$ admite inversa em todo seu domínio.

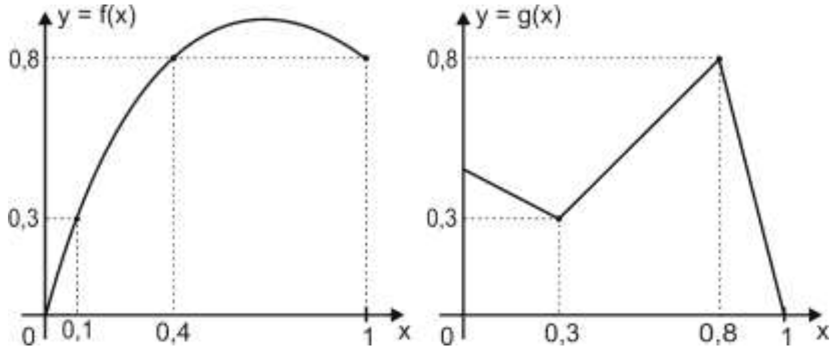
III. $f(x)$ é crescente em $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1\}$ e em $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge -1\}$.

IV. se $x<-6$ então $f(x)>-3$.

A sequência correta é

a) V, V, F, V
b) F, F, V, F
c) F, F, V, V
d) F, V, V, F

9. (AFA 2005) Observe os gráficos abaixo, das funções f e g, definidas no intervalo $[0,1]$.



Com base nos gráficos, assinale a alternativa FALSA.

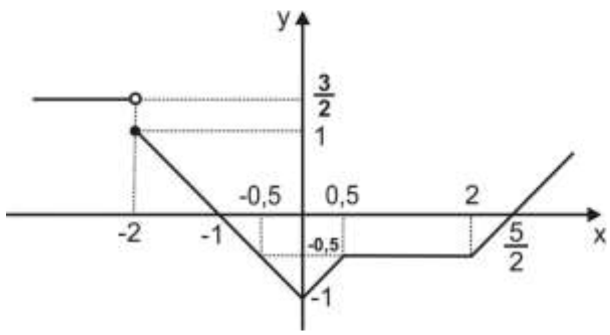
a) $g(f(0,4)) \geq g(f(x)),\ \forall x \in [0,1]$.

b) $g(f(0,05)) > g(f(0,1))$

c) $g(g(x)) = x,\ \forall x \in [0,3;0,8]$

d) $g(f(0,6)) > g(f(1))$

10. (AFA 2005) Seja f a função real cujo gráfico se apresenta a seguir:



Analisando o gráfico, é INCORRETO afirmar que

a) $f(f(1)) = f(0,5)$.

b) $f(x)+1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(0) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

d) se $g(x) = f(x) - 1$, então $g(-2) = f\left(\frac{5}{2}\right)$.

11. (AFA 2006) Dadas as funções reais f e g definidas por $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ e $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$, sabendo-se que existe $(g\circ f)(x)$, pode-se afirmar que o domínio de $g\circ f$ é

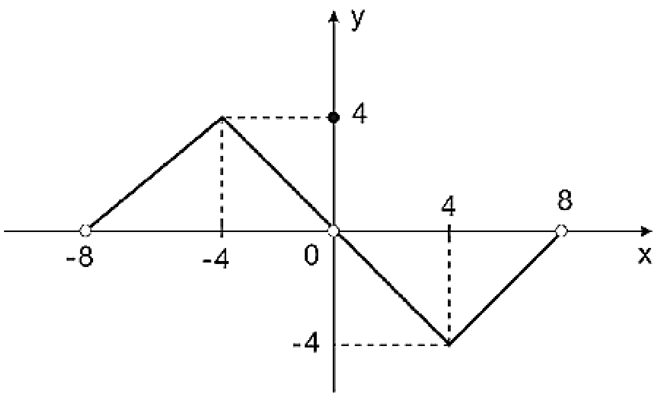
a) $\mathbb{R}-]2,3[$

b) $\mathbb{R}-[2,3]$

c) $\mathbb{R}-\{2,3\}$

d) $\mathbb{R}^*-[2,3]$

12. (AFA 2007) No gráfico abaixo está representada a função real $f:A\to B$. Classifique em (V) verdadeira ou (F) falsa cada proposição a seguir sobre a função f.



( ) No conjunto A existem apenas 15 números inteiros.

( ) Se $B=[-4,4]$, então f é sobrejetora, mas não é injetora.

( ) A composta $(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)(4)=f(4)$ ou $f(-4)$.

( ) f é função par.

Tem-se, então, a sequência correta

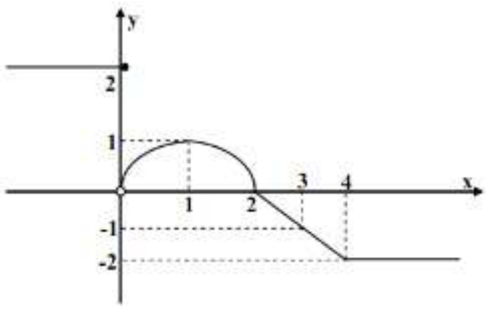
a) V – F – V – F

b) F – V – F – V

c) F – F – V – V

d) V – V – F – F

13. (AFA 2010) Analise o gráfico abaixo da função real $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



Se h é uma função real tal que $h(x)=g(x)+2$, então, marque alternativa verdadeira.

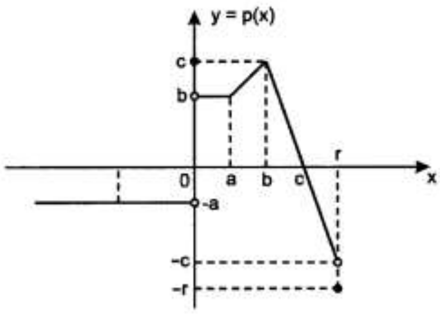
a) $(hohoh\ldots oh)(0)=4$

b) $(hohoh)(3)>(hohohoh)(2)$

c) Se $y=h\left(h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$ então $y\in]2,3[$

d) Se $x=h\left(h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)$ então $x\in]1,2[$

14. (AFA 2011) Considere o gráfico da função real $p:A\to B$



Analise as alternativas abaixo e, a seguir, marque a FALSA.

a) $p(x)\le 0 \Leftrightarrow \{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0 \text{ ou } c\le x\le r\}$.

b) $p(p(p(p(p(r)))))=p(p(p(p(r))))$.

c) Existe um único $x\in A$ tal que $p(x)=c$.

d) $Im(p)=\{-r\}\cup]-c,c]$.

15. (AFA 2011) Considere o conjunto $A=\{0,1,2,3\}$ e a função $f:A\to A$ tal que $f(3)=1$ e $f(x)=x+1$, se $x\neq 3$. A soma dos valores de x para os quais $(f\circ f\circ f)(x)=3$ é

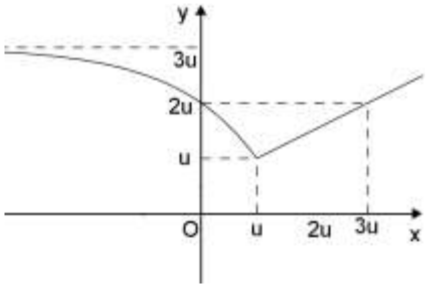
a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

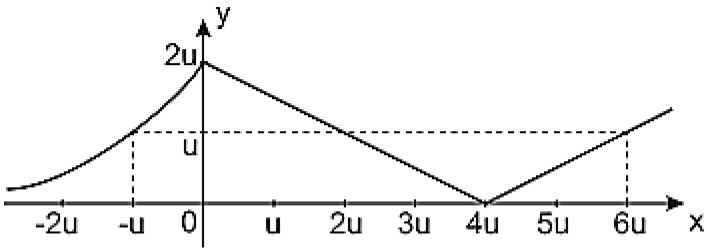
16. (AFA 2012) Considere a figura abaixo que representa um esboço do gráfico da função real f



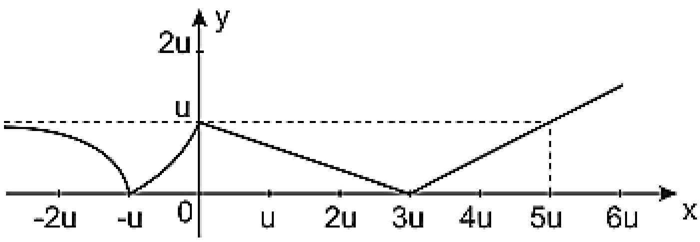
Sabe-se que $g(x) = f(x) - 3u$, $h(x) = g(x+u)$ e $j(x) = |h(x)|$.

Um esboço do gráfico que melhor representa a função j é

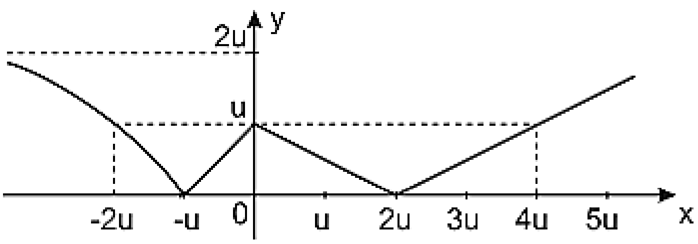
a)



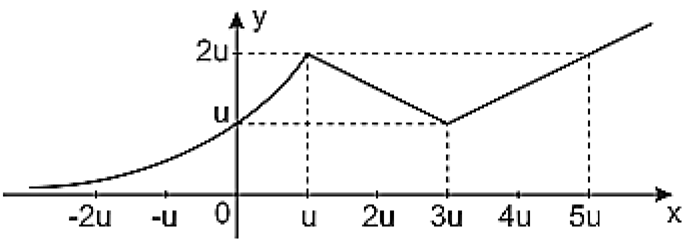
b)



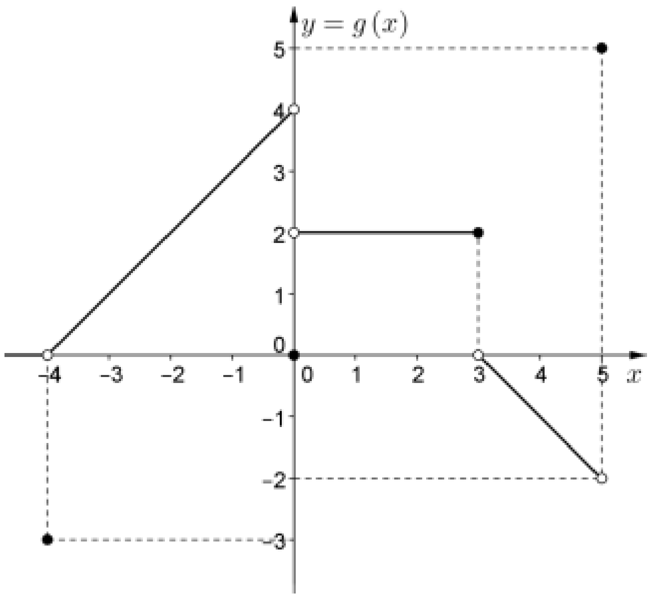
c)



d)



17. (AFA 2015) Considere o gráfico da função $g: A \to A$ abaixo e marque (V) verdadeiro ou (F) falso.



( ) A função g possui exatamente duas raízes.

( ) $g(4) = -g(-3)$

( ) $\text{Im}(g) = \{-3\} \cup]-2,4[$

( ) A função definida por $h(x) = g(x) + 3$ NÃO possui raiz.

( ) $(g \circ g \circ g \circ \ldots \circ g)(-2) = 2$

A sequência correta é

a) F – V – F – F – V

b) F – F – V – F – V

c) F – V – F – V – F

d) V – V – F – F – V

18. (EFOMM 2012) Se $f_0(x)=\frac{x}{x+1}$ e $f_{n+1}=f_o \circ f_n$ para $n=0,1,2,\ldots$ então $f_n(x)$ vale:

a) $\frac{x}{x+n}$

b) $\frac{(n+1)x}{x+1}$

c) $\frac{nx}{x+1}$

d) $\frac{x}{(n+1)x+1}$

e) $\frac{x}{nx+1}$

19. (EFOMM 2014) Se $g(x)=9x-11$ e $f(g(x))=g\left(\frac{x}{9}+1\right)$ são funções reais, então $f(16)$ vale

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

20. (EN 2014) Considere f e g funções reais de variável real definidas por, $f(x)=\frac{1}{4x-1}$ e $g(x)=2x^2$. Qual é o domínio da função composta $(f \circ g)(x)$?

a) $\mathbb{R}$

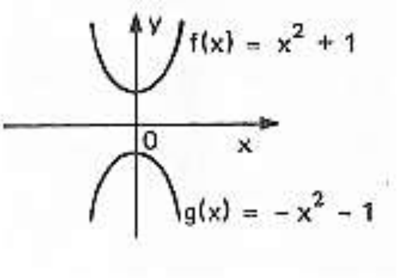
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ e } x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

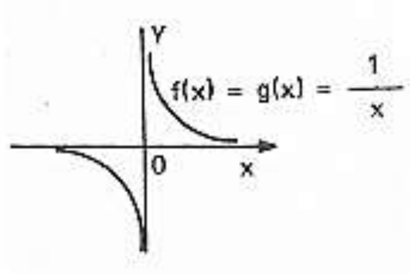
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$

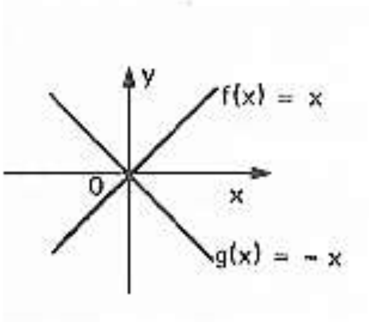
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

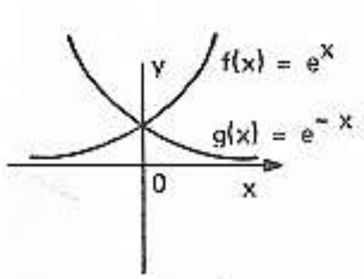
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{4} \text{ e } x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

21. (CPII 2007) Assinale a opção que apresenta o gráfico de duas funções reais inversas:

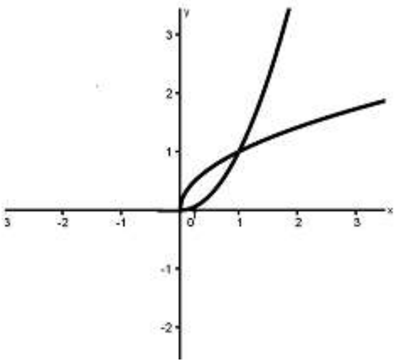
a) 

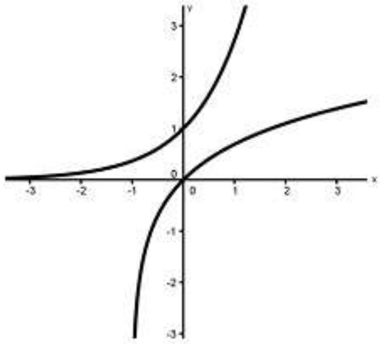
b) 

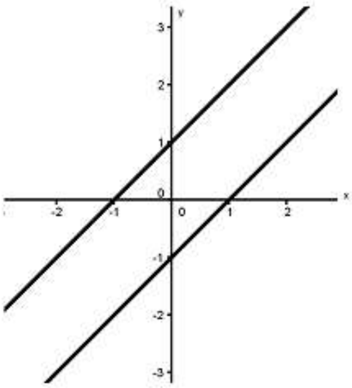
c) 

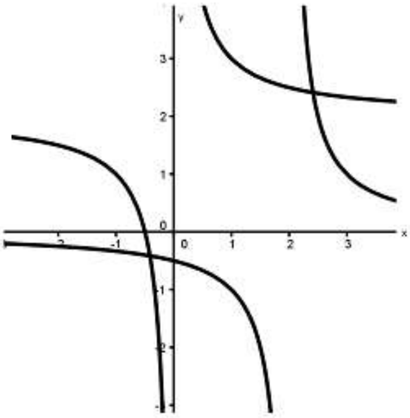
d) 

22. (CPII 2013) Em qual dos planos cartesianos a seguir NÃO estão representados os gráficos de duas funções inversas?

a) 

b) 

c) 

d) 

23. (IFC 2009) Dada a função $f(x)=x^2-2x+3$, definida para $x \geq 1$, a expressão da sua função inversa $\left(f^{-1}(x)\right)$ é:

a) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-4}\ (x \geq 4)$

b) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}\ (x \geq 2)$

c) $f^{-1}(x)=\sqrt{2x}+\sqrt{3x}$

d) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+4}\ (x \geq -4)$

24. (EPCAR 3° ano 2006) Dada a função real f, tal que $f(5x+3)=x$. Sendo f^{-1} a inversa de f, pode-se afirmar que

a) $f^{-1} \circ f(5)=28$

b) f^{-1} é função ímpar.

c) $(f \circ f)(-7)=1$

d) $\left(f \circ f^{-1}\right)(x)=x$

25. (EsPCEx 1995) Sejam as funções $f:\mathbb{R}_+ \to [-3,+\infty[$ e $g:\mathbb{R}_+ \to [2,+\infty[$, definidas respectivamente por $f(x)=3x^2-3$ e $g(x)=2x^2+2$. Se $h(x)=g\left(f(x)\right)$, então o valor de $h^{-1}(10)$, onde $h^{-1}(x)$ é a função inversa de $h(x)$, é:

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

26. (EsPCEx 2004) Sejam as funções reais $f(x)$ e $g(x)$. Se $f(x)=x+2$ e $f(g(x))=\frac{x}{2}$, pode-se afirmar que a função inversa de $g(x)$ é:

a) $g^{-1}(x)=\frac{f(x)}{2}$

b) $g^{-1}(x)=\frac{x+4}{2}$

c) $g^{-1}(x)=f(x)$

d) $g^{-1}(x)=2f(x)$

e) $g^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$

27. (AFA 1997) Seja $f:[1,+\infty)\to[-3,+\infty)$ a função definida por $f(x)=3x^2-6x$. Se $g:[-3,+\infty)\to[1,+\infty)$ é a função inversa de f, então $[g(6)-g(3)]^2$ é

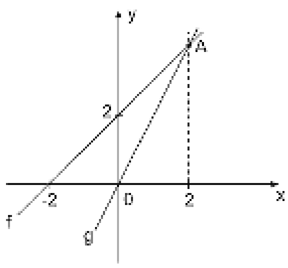
a) 5

b) $2\sqrt{6}$

c) $5-2\sqrt{6}$

d) $-5+2\sqrt{6}$

28. (AFA 2007) No gráfico abaixo estão representadas as funções reais f e g sendo $A=f\cap g$.



É FALSO afirmar sobre as mesmas funções que

a) $(fog)(x)\ge 0 \Rightarrow g(x)\ge -2$.

b) se $s(x)=\sqrt{\frac{-1}{(f(x))^{100}.(g(x))^{101}}}$, então o domínio de s é dado por $\mathbb{R}_-^*-\{-2\}$.

c) se $h:\mathbb{R}\to B$ tal que $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, então h será bijetora se $B=[-2,+\infty[$.

d) o gráfico da função j definida por $j(x)=\frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$ possui pontos no 4º quadrante.

29. (AFA 2007) A função f definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+7, \text{ se } x \geq 2 \\ 2x-1, \text{ se } -1<x<2. \\ -x^2-2x-4, \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$

a) não admite inversa porque não é injetora.

b) admite inversa e uma das sentenças que define a mesma é $y=-1-\sqrt{-x-3}$ se $x \leq -3$.

c) não admite inversa porque existem valores de x com várias imagens.

d) admite inversa f^{-1} tal que $f^{-1}(-5)=-2$.

30. (AFA 2012) Considere as proposições abaixo e as classifique em (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) Nas funções reais $g: C \to A$ e $f: A \to B$, se existe a função composta $(f \circ g): P \to S$, então $P=C$ e $S=B$.

( ) Se $h:\{m,n,p\} \to \{m,n,p\}$ é uma função tal que $h(m)=p$, $h(n)=m$ e $h(p) \neq n$, então h é uma função injetora.

( ) Se $f:\{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$ é uma função tal que $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ se } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2 \\ x, \quad \text{ se } x=2 \\ x-1, \text{ se } x=1 \end{cases}$, então $(f \circ f \circ f)^{-1}(x)=1$ se, e somente se, $x=0$.

A sequência correta é

a) F – F – V

b) V – V – F

c) F – V – F

d) V – V – V

31. (EN 2005/2015) Considere as funções reais $f(x)=\dfrac{100}{1+2^{-x}}$ e $g(x)=2^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Qual é o valor da função composta $(g \circ f^{-1})(90)$?

a) 1

b) 3

c) 9

d) $\dfrac{1}{10}$

e) $\dfrac{1}{3}$

32. A função inversa de $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ é

a) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\log_{10}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

b) $f^{-1}(x)=\log_{10}(2-x)$

c) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\log_{10}(2x-1)$

d) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}\log_{10}\left(\dfrac{2x}{2-x}\right)$

e) $f^{-1}(x)=\log_{10}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

GABARITO

1.

$g(x)=1 \Leftrightarrow x=0,\ x=3 \text{ ou } x=4$

$g[f(x)]=1 \Leftrightarrow f(x)=0,\ f(x)=3 \text{ ou } f(x)=4$

$f(x)=0$ para três valores de x

$f(x)=3$ para três valores de x

$f(x)=4$ para um valor de x

Logo, $g[f(x)]=1$ para $3+3+1=7$ valores de x.

RESPOSTA: D

2.

$g(1)=5^1=5$

$g(g(1))=g(5)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

$g(g(g(1)))=g(3)=-\frac{3}{4}\cdot 3^2+\frac{3}{2}\cdot 3+\frac{17}{4}=2$

RESPOSTA: C

3.

a) INCORRETA

O domínio de g é $D=]-4,6[-\{a,5\}$, onde $a\in]-2,-1[$ e $I=]-4,6]$. Logo, $D\neq I$.

b) INCORRETA

A reta horizontal $y=\pi$ intersecta o gráfico de $g(x)$ em dois pontos, um deles no intervalo $]2,4[$ e o outro no intervalo $]5,6[$. Logo, o conjunto $\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{2}<x<5 \text{ e } g(x)=\pi\}$ possui apenas um elemento.

c) INCORRETA

$g(-2)=0 \Rightarrow g(g(-2))=g(0)=2 \Rightarrow g(g(g(-2)))=g(2)=2$

$g(4)=6=3\cdot g(2)$

d) CORRETA

A função g é sobrejetora, pois sua imagem é igual a seu contradomínio e não é injetora, pois há retas horizontais, traçadas por pontos do contradomínio, que intersectam o gráfico em mais de um ponto.

RESPOSTA: D

4.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\operatorname{sen}x)=(\operatorname{sen}x)^3-\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}x\cdot(\operatorname{sen}^2x-1)=\operatorname{sen}x\cdot(-\cos^2x)=-\operatorname{sen}x\cos^2x$$

RESPOSTA: C

5.

$$f(x)=y\Rightarrow(gof)(x)=g(y)=\log_{y+1}y\Rightarrow\begin{cases}y>0\\ y+1>0\Rightarrow y>0\\ y+1\neq 1\end{cases}$$

$$f(x)=x^2-4x+3>0\Leftrightarrow x<1\text{ ou }x>3$$

RESPOSTA: B

6.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-2)=\begin{cases}2,\text{ se }|x-2|>2\\ -1,\text{ se }|x-2|\leq 2\end{cases}$$

$$|x-2|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x-2\leq 2\Leftrightarrow 0\leq x\leq 4$$

$$|x-2|>2\Leftrightarrow x-2<-2\text{ ou }x-2>2\Leftrightarrow x<0\text{ ou }x>4$$

$$\Rightarrow(g\circ f)(x)=\begin{cases}2,\text{ se }x<0\text{ ou }x>4\\ -1,\text{ se }0\leq x\leq 4\end{cases}$$

RESPOSTA: B

7.

$g(x)=k$

$f(x)=mx+k$, onde $m>0$ e $k<0$

a) INCORRETA

$h(x)=g(x)-f(x)=k-(mx+k)=-mx$ que é uma função decrescente.

b) INCORRETA

$s(x)=f(g(x))=f(k)$ que possui um valor único e negativo.

c) INCORRETA

$$f(x)\cdot g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot k\geq 0 \overset{k<0}{\Leftrightarrow} f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\leq t$$

d) CORRETA

$$g(f(x))=k=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

RESPOSTA: D

8.

$$y=g(x)=2x-3\Leftrightarrow g^{-1}(y)=x=\frac{y+3}{2}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$$

1°) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=4x^2-6x-1$ se $x\geq 1$

$$f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)=4\left(g^{-1}(x)\right)^2-6\cdot g^{-1}(x)-1 \text{ se } g^{-1}(x)\geq 1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=4\cdot\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-6\cdot\left(\frac{x+3}{2}\right)-1 \text{ se } \frac{x+3}{2}\geq 1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x^2+3x-1 \text{ se } x\geq -1$$

2°) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=4x+3$ se $x<1$

$$f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)=4\left(g^{-1}(x)\right)+3 \text{ se } g^{-1}(x)<1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=4\cdot\left(\frac{x+3}{2}\right)+3 \text{ se } \frac{x+3}{2}<1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=2x+9 \text{ se } x<-1$$

Portanto, $f(x)=\begin{cases} x^2+3x-1 \text{ se } x\geq -1 \\ 2x+9 \text{ se } x<-1 \end{cases}$.

I. FALSA

Contra exemplo: $f(-1)=-3\neq 3=f(1)$

II. FALSA

Como $f(0)=-1=f(-5)$, a função $f(x)$ não é bijetora em todo o seu domínio e, consequentemente, não admite inversa em todo o seu domínio.

III. VERDADEIRA

Se $x<-1$, então $f(x)=2x+9$ que é crescente em $]-\infty,-1[$.

Se $x \geq -1$, então $f(x) = x^2 + 3x - 1$ é crescente, pois a abscissa do vértice da parábola é $x_V = \frac{-3}{2} = -1{,}5$ o que implica que a função é crescente em $[-1{,}5; +\infty[$.

IV. FALSA

Se $x < -6$, então $f(x) < f(-6) = 2 \cdot (-6) + 9 = -3$.

Outra maneira de encontrar $f(x)$ é efetuar operações algébricas em $(f \circ g)(x)$ a fim de representá-la em função de $g(x)$.

Se $x \geq 1$, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x^2 - 6x - 1 = (4x^2 - 12x + 9) + (6x - 9) - 1 = (2x-3)^2 + 3 \cdot (2x-3) - 1 =$$
$$= (g(x))^2 + 3 \cdot g(x) - 1$$

$$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1) = 2 \cdot (1) - 3 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 3x - 1 \text{ se } x \geq -1$$

Note que, na expressão $f(g(x)) = (g(x))^2 + 3 \cdot g(x) - 1$, substituímos $g(x)$ por x, por isso devemos ter $x \geq -1$.

Se $x < 1$, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x + 3 = 2 \cdot (2x - 3) + 6 + 3 = 2 \cdot g(x) + 9$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 9 \text{ se } x < -1$$

RESPOSTA: B

9.

a) VERDADEIRA

$$g(f(0{,}4)) = g(0{,}8) = 0{,}8 \geq g(f(x)),\ \forall x \in [0{,}1]$$

Note que $0{,}8$ é o valor máximo de $g(x)$.

b) VERDADEIRA

No intervalo $[0; 0{,}3]$, $g(x)$ é decrescente.

Logo, se $0 < f(0{,}05) < f(0{,}1) = 0{,}3$, então $g(f(0{,}05)) > g(f(0{,}1))$.

c) VERDADEIRA

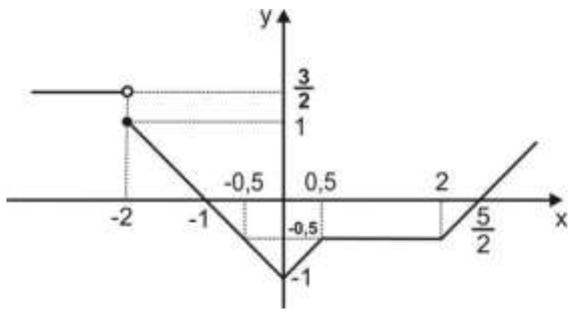
No intervalo $[0,3;0,8]$, o gráfico de $g(x)$ é uma reta que liga o ponto $(0,3;0,3)$ ao ponto $(0,8;0,8)$. Portanto, se $x \in [0,3;0,8]$, temos $g(x)=x$, o que implica $g(g(x))=g(x)=x$.

d) FALSA

No intervalo $[0,8;1]$, a função $g(x)$ é decrescente. Assim, se $f(0,6)>0,8$, então $g(f(0,6))<g(0,8)=g(f(1))$.

RESPOSTA: D

10.



a) $f(f(1))=f(0,5)$ (CORRETA)

$f(1)=-0,5 \Rightarrow f(f(1))=f(-0,5)=-0,5=f(0,5)$

b) $f(x)+1>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (INCORRETA)

$f(x)\geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)+1\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f(0)\leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (CORRETA)

$f(x)\geq f(0)=-1, \forall x \in \mathbb{R}$

d) se $g(x)=f(x)-1$, então $g(-2)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ (CORRETA)

$g(-2)=f(-2)-1=1-1=0=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$

RESPOSTA: B

11. Para que $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, devemos ter $x\in D_f$ e $f(x)\in D_g$.

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$ ou $x\geq 3$

$f(x)\in D_g \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}>0 \Leftrightarrow x\neq 2$ e $x\neq 3$

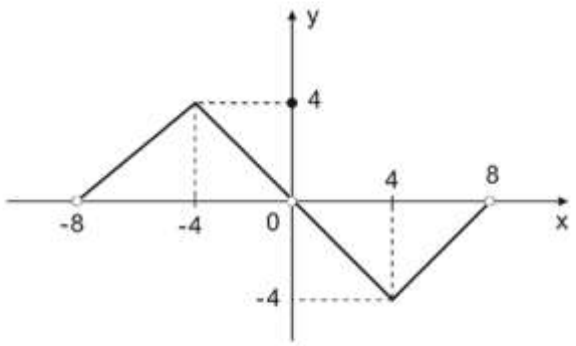
Fazendo a interseção das duas condições, temos:

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<2 \text{ ou } x>3\}=\mathbb{R}-[2,3]$.

Atenção para os extremos do intervalo!

RESPOSTA: B

12.



(V) No conjunto A existem apenas 15 números inteiros.

O domínio de f é $A=]-8,8[$ que contém 15 números inteiros. Observe que $f(0)=4$.

(F) Se $B=[-4,4]$, então f é sobrejetora, mas não é injetora.

f não é sobrejetora, pois a ordenada $y=0$ não é imagem de nenhum elemento do domínio. Note que a reta horizontal $y=0$ não corta o gráfico em nenhum ponto. Observe ainda que f realmente não é injetora, pois há retas horizontais que cortam o gráfico em dois pontos.

(V) A composta $(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)(4)=f(4)$ ou $f(-4)$.

Seja $f^n(x)=\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n \text{ vezes}}(x)$ e considerando que $f(4)=-4$ e $f(-4)=4$, então

Se n é par $f^n(4)=f(-4)$.

Se n é ímpar $f^n(4)=f(4)$.

Vamos demonstrar por indução finita que isso é verdade para n ímpar (o resultado para n par será uma consequência imediata).

Seja $n=2k+1$, com $k\in\mathbb{Z}$. Sabemos que a afirmação é verdadeira para $k=0$, pois $f^1(4)=f(4)$.

Supondo que $f^{(2k+1)}(x)=f(4)$ (hipótese de indução), então

$f^{(2k+3)}(4)=\left(f\circ f\circ f^{(2k+1)}\right)(4)=f\left(f\left(f^{(2k+1)}(4)\right)\right)=f\left(f\left(f(4)\right)\right)=f\left(f(-4)\right)=f(4)$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $f^n(4)=f(4)$ para n ímpar.

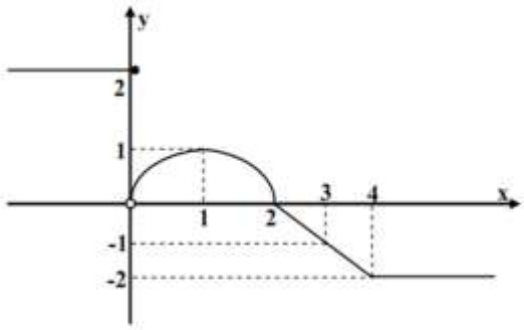
(F) f é função par.

A função f não é par, pois o gráfico não é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Note que se tivéssemos $f(0)=0$, a função f seria ímpar, pois o gráfico seria simétrico em relação à origem.

RESPOSTA: A

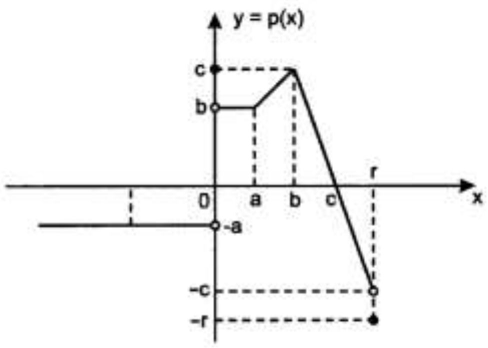
13.



$$y=h\left(h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)=h(h(a))=h(b)\in\,]3,4[$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right)\in\,]0,1[\,\Rightarrow a=h\left(\frac{1}{2}\right)\in\,]2,3[$$
$$g(a)\in\,]-1,0[\,\Rightarrow b=h(a)\in\,]1,2[$$
$$g(b)\in\,]0,1[\,\Rightarrow h(b)\in\,]2,3[$$

RESPOSTA: C

14.



a) $p(x)\le 0 \Leftrightarrow \{x\in\mathbb{R} \mid x<0 \text{ ou } c\le x\le r\}$ (VERDADEIRA)

O conjunto corresponde à abscissa dos pontos do gráfico que se encontram abaixo do eixo Ox, ou seja, que possuem ordenada negativa.

b) $p(p(p(p(p(r)))))=p(p(p(p(r))))$ (VERDADEIRA)

$p(r) = -r \Rightarrow p(p(r)) = p(-r) = -a \Rightarrow p(p(p(r))) = p(-a) = -a$.

Assim, $p\left(p\left(p\left(p\left(p(r)\right)\right)\right)\right) = p\left(p\left(p\left(p(r)\right)\right)\right) = -a$.

c) Existe um único $x \in A$ tal que $p(x) = c$ (FALSA)

$p(0) = p(b) = c$

d) $\text{Im}(p) = \{-r\} \cup]-c, c]$ (VERDADEIRA)

O conjunto $\text{Im}(p) = \{-r\} \cup]-c, c]$ corresponde à projeção do gráfico sobre o eixo das ordenadas (Oy).

RESPOSTA: C

15.

$A = \{0,1,2,3\}$

$f: A \to A$
$f(3) = 1$
$f(x) = x + 1, \text{se } x \neq 3$

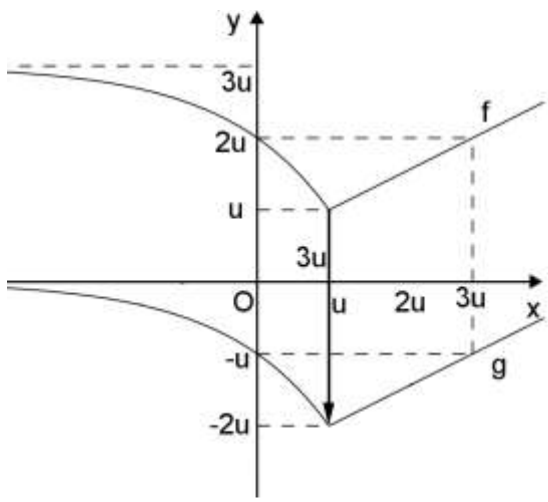
$\Rightarrow f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$

$(f \circ f \circ f)(x) = 3 \Rightarrow f(f(f(x))) = 3 \Leftrightarrow f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$

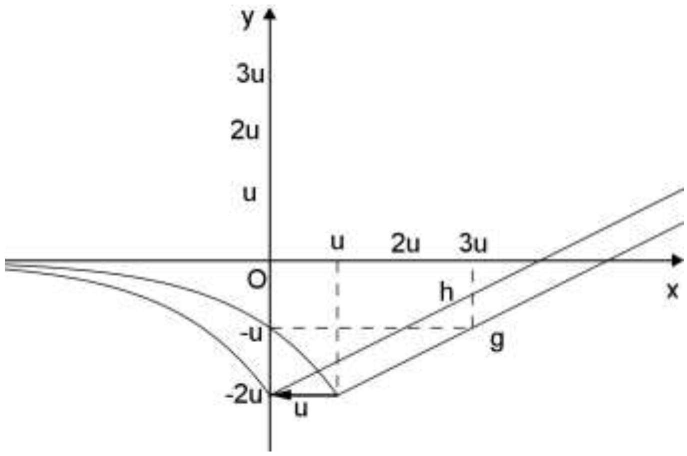
Logo, a soma dos valores de x tais que $(fofof)(x) = 3$ é $0 + 3 = 3$.

RESPOSTA: B

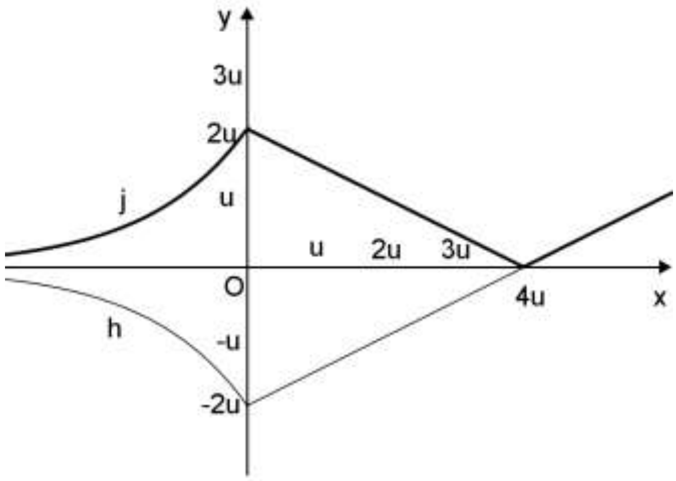
16. Como $g(x) = f(x) - 3u$, o gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f deslocando-o 3u verticalmente para baixo.



Como $h(x)=g(x+u)$, o gráfico de h pode ser obtido a partir do gráfico de g deslocando-o horizontalmente u para a esquerda.



Como $j(x)=|h(x)|$, o gráfico de j pode ser obtido a partir do gráfico de h espelhando-se as partes negativas em relação ao eixo Ox.



Logo, o gráfico que melhor representa a função j é o da opção (a).

RESPOSTA: A

17.

A função g é dada por $g(x)=\begin{cases} -3 & \text{se } x=-4 \\ x+4 & \text{se } -4<x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 2 & \text{se } 0<x\le 3 \\ -x+3 & \text{se } 3<x<5 \\ 5 & \text{se } x=5 \end{cases}$.

(F) A função g possui exatamente duas raízes.

A função g possui apenas uma raiz $x=0$.

(V) $g(4) = -g(-3)$

$$\left.\begin{array}{l} g(4) = -4+3 = -1 \\ g(-3) = -3+4 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g(4) = -g(-3)$$

(F) $\text{Im}(g) = \{-3\} \cup]-2,4[$

A imagem de g é $\text{Im}(g) = \{-3\} \cup]-2,4[\cup \{5\}$.

(F) A função definida por $h(x) = g(x)+3$ NÃO possui raiz.

$h(-4) = g(-4)+3 = -3+3 = 0$, ou seja, $x = -4$ é raiz de h.

(V) $(g \circ g \circ g \circ \ldots \circ g)(-2) = 2$

$$g(-2) = 2 \wedge g(2) = 2 \Rightarrow (g \circ g \circ g \circ \ldots \circ g)(-2) = g\left(g\left(\ldots g\left(g(-2)\right)\right)\right) = g\left(g\left(\ldots g(2)\right)\right) = 2$$

Note que, como $g(2) = 2$, então $(g \circ g \circ g \circ \ldots \circ g)(2) = 2$, qualquer que seja o número de composições.

RESPOSTA: A

18.

$$f_0(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0\left(f_0(x)\right) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0\left(f_1(x)\right) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}$$

Vamos então supor que $f_n(x) = \dfrac{x}{(n+1)x+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e provar que esse resultado é verdadeiro pelo Princípio da Indução Finita (P.I.F.).

Já mostramos que a proposição é verdadeira para $n = 0,1,2$.

Supondo que $f_k(x) = \dfrac{x}{(k+1)x+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então temos:

$$f_{k+1}(x) = f_0 \circ f_k(x) = f_0\left(f_k(x)\right) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right) = \frac{\frac{x}{(k+1)x+1}}{\frac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{x}{(k+2)x+1}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, conclui-se que $f_n(x)=\frac{x}{(n+1)x+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

RESPOSTA: D

OBSERVAÇÃO

O Princípio da Indução Finita (P.I.F.) estabelece que, se uma determinada propriedade é válida para $\mathbf{n=n_0}$ e, supondo que ela seja válida para $\mathbf{n=k\geq n_0}$, pode-se concluir que ela também é válida para $\mathbf{n=k+1}$, então a propriedade é válida para todo número natural $\mathbf{n\geq n_0}$.

19. Vamos identificar o valor de x para o qual $g(x)=16$.

$g(x)=9x-11=16 \Leftrightarrow 9x=27 \Leftrightarrow x=3$

Portanto, $g(3)=16$.

Fazendo $x=3$ na expressão $f(g(x))=g\left(\frac{x}{9}+1\right)$, temos:

$$f(g(3))=g\left(\frac{3}{9}+1\right) \Leftrightarrow f(16)=g\left(\frac{4}{3}\right)=9\cdot\frac{4}{3}-11=1$$

RESPOSTA: A

20.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{4\cdot g(x)-1} \Rightarrow 4g(x)-1\neq 0 \Leftrightarrow g(x)\neq\frac{1}{4}$$

$$g(x)\neq\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x^2\neq\frac{1}{4} \Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$D_{(f\circ g)}=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq-\frac{1}{2\sqrt{2}} \wedge x\neq\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$$

RESPOSTA: B

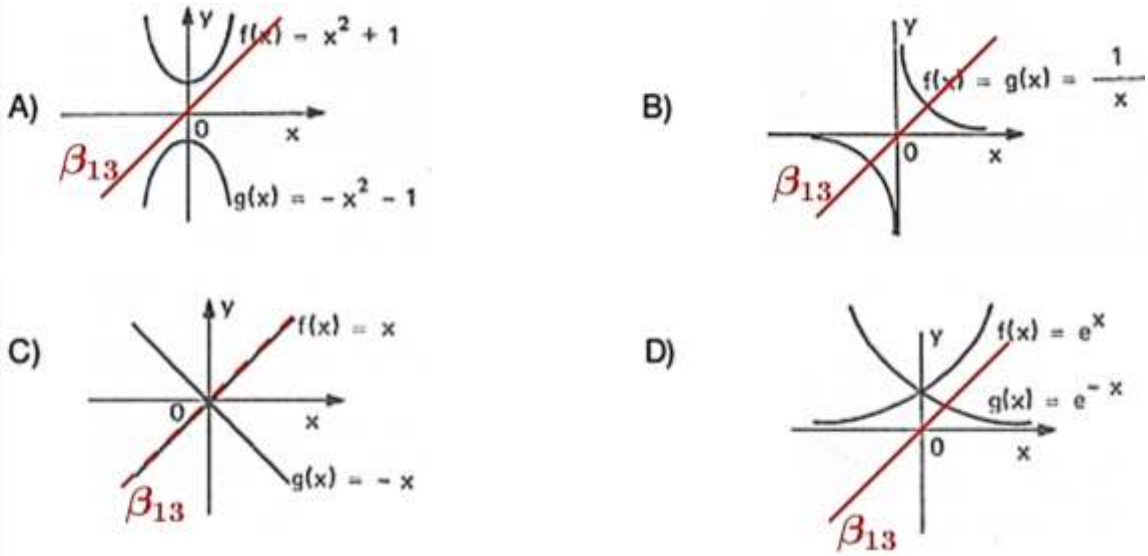
21. O gráfico de uma função e sua função inversa são simétricos em relação à reta $y=x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares – β_{13}).

Nas alternativas A), C) e D) não há essa simetria.

Na alternativa B), o gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$ é simétrico em relação à β_{13}. Logo, ela é igual à sua inversa, que é o que está indicado na figura.

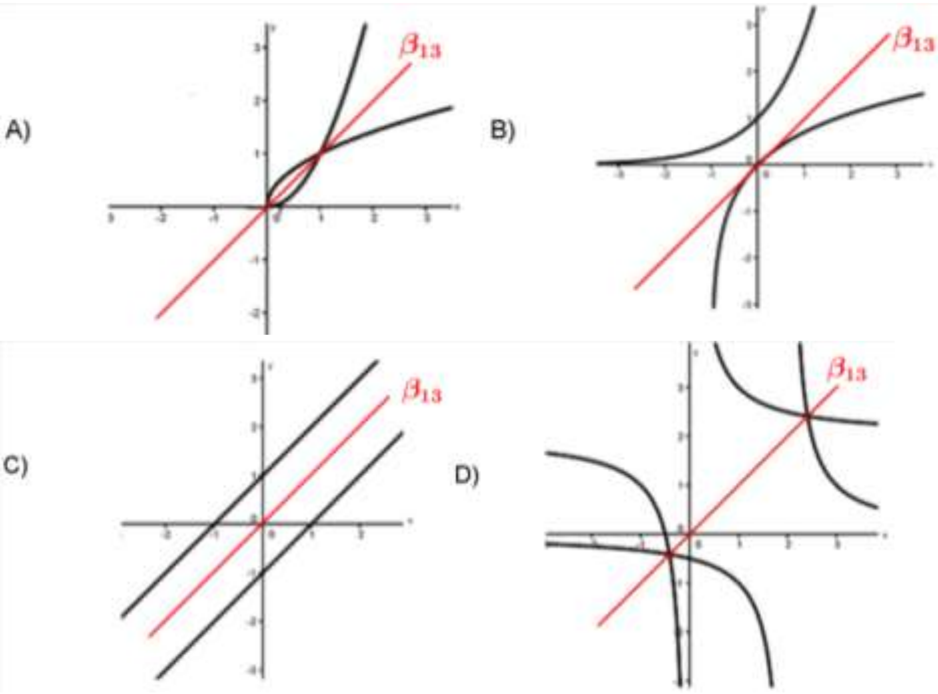
Na alternativa C), por outro lado, o gráfico de $f(x)=x$ também é simétrico em relação à β_{13} (na verdade é a própria). Logo, ela também á igual à sua inversa, mas a opção indica outra função.

Portanto, a alternativa correta é B).



RESPOSTA: B

22. O gráfico de uma função e sua função inversa são simétricos em relação à reta $y=x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares – β_{13}). Na alternativa B), não há essa simetria.



RESPOSTA: B

23.

$$y=f(x)=x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x+(3-y)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(3-y)}}{2} \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{y-2},\ y\geq 2$$

Como $x\geq 1$, então $x=1+\sqrt{y-2}$, $y\geq 2$.

Invertendo as variáveis, temos: $f^{-1}(x)=y=1+\sqrt{x-2}$, $x\geq 2$.

RESPOSTA: B

24.

$$f(5x+3)=x \Rightarrow f^{-1}(f(5x+3))=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=5x+3$$

a) $f^{-1}\circ f(5)=28$ (INCORRETA)

$$f^{-1}\circ f(5)=f^{-1}(f(5))=5\neq 28$$

b) f^{-1} é função ímpar. (INCORRETA)

$$f^{-1}(-x)=5(-x)+3=-5x+3$$

Logo, f^{-1} não é par e nem é ímpar.

c) $(f\circ f)(-7)=1$ (INCORRETA)

$$5x+3=-7 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow f(5\cdot(-2)+3)=-2 \Leftrightarrow f(-7)=-2$$

$$5x+3=-2 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow f(5\cdot(-1)+3)=-1 \Leftrightarrow f(-2)=-1$$

$$(f\circ f)(-7)=f(f(-7))=f(-2)=-1$$

Note que poderíamos ter encontrado a expressão de $f(x)$, encontrando a inversa de $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x)=y=5x+3 \Leftrightarrow x=\frac{y-3}{5} \Leftrightarrow f(y)=x=\frac{y-3}{5} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x-3}{5}$$

d) $(f\circ f^{-1})(x)=x$ (CORRETA)

Essa expressão é uma consequência imediata da definição de função inversa.

RESPOSTA: D

25.

$$h^{-1}(10)=k \Leftrightarrow h(k)=10 \Leftrightarrow g(f(k))=10$$

$$g(f(k))=2[f(k)]^2+2=10 \Leftrightarrow [f(k)]^2=4$$

Como $f(k) \in D(g) = \mathbb{R}_+$, então $f(k) = 2$.

$$f(k) = 3k^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow k^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Note que $k > 0$, pois $k \in D(f) = \mathbb{R}_+$.

RESPOSTA: D

26. Vamos, inicialmente, obter a expressão de $g(x)$:

$$f(x) = x + 2 \Rightarrow f(g(x)) = g(x) + 2$$

$$f(g(x)) = g(x) + 2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{2} - 2$$

Vamos agora encontrar a expressão de $g^{-1}(x)$.

$$g(x) = y = \frac{x}{2} - 2 \Leftrightarrow g^{-1}(y) = x = 2y + 4 \overset{(*)}{\Rightarrow} g^{-1}(x) = y = 2x + 4 = 2f(x)$$

(*) Troca de x por y e vice-versa.

RESPOSTA: D

27.

$$g(6) = a \Leftrightarrow f(a) = 6 \Rightarrow f(a) = 3a^2 - 6a = 6 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$D_f = [1, +\infty) \Rightarrow a = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow g(6) = 1 + \sqrt{3}$$

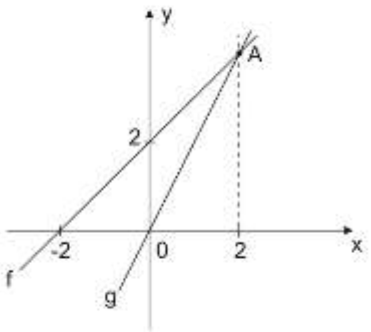
$$g(3) = b \Leftrightarrow f(b) = 3 \Rightarrow f(b) = 3b^2 - 6b = 3 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$D_f = [1, +\infty) \Rightarrow b = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow g(3) = 1 + \sqrt{2}$$

$$[g(6) - g(3)]^2 = \left[\left(1 + \sqrt{3}\right) - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right]^2 = \left[\sqrt{3} - \sqrt{2}\right]^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

RESPOSTA: C

28.



$f(x) = x + 2 \Rightarrow f(2) = 4$

$f(2) = g(2) = 4$

$g(x) = kx \wedge g(2) = 4 \Rightarrow k \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow g(x) = 2x$

a) $(fog)(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq -2$. (CORRETA)

$(fog)(x) = f(g(x)) = g(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq -2$

b) se $s(x) = \sqrt{\dfrac{-1}{(f(x))^{100}.(g(x))^{101}}}$, então o domínio de s é dado por $\mathbb{R}_-^* - \{-2\}$. (CORRETA)

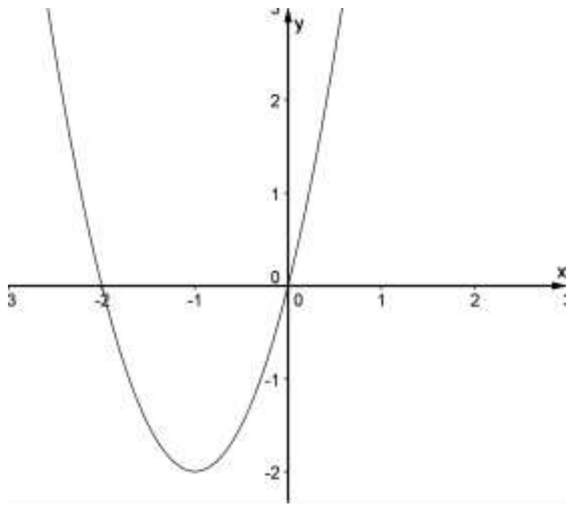
$s(x) = \sqrt{\dfrac{-1}{(f(x))^{100}.(g(x))^{101}}} = \sqrt{\dfrac{-1}{(x+2)^{100}.(2x)^{101}}}$

$(x+2)^{100}.(2x)^{101} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x \neq -2 \Rightarrow D(s) = \mathbb{R}_-^* - \{-2\}$

c) se $h: \mathbb{R} \to B$ tal que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então h será bijetora se $B = [-2, +\infty[$. (ERRADA)

$h(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+2)(2x) = 2x^2 + 4x$ não é injetora, logo não é bijetora.

29.



d) o gráfico da função j definida por $j(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$ possui pontos no 4º quadrante. (CORRETA)

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(x)=x-2 \\ g^{-1}(x)=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow j(x)=\frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}=\frac{x-2}{\frac{x}{2}}=\frac{2x-4}{x}=2-\frac{4}{x}$$

que possui pontos no 4° quadrante, por exemplo, $(1,-2)$.

RESPOSTA: C

29. Analisando a função $f_1(x)=x^2-4x+7$, para $x\ge 2$, observa-se que a abscissa do vértice é $x_V=\dfrac{-(-4)}{2\cdot 1}=2$. Portanto, f_1 é injetora e sua imagem é $\text{Im}(f_1)=[3,+\infty[$.

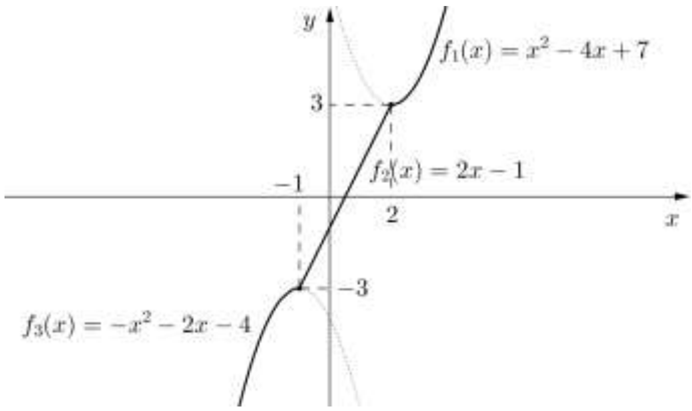
Analisando a função $f_2(x)=2x-1$, para $-1<x<2$, observa-se que ela é injetora e sua imagem é $\text{Im}(f_2)=]-3,3[$.

Analisando a função $f_3(x)=-x^2-2x-4$, para $x\le -1$, observa-se que a abscissa do vértice é $x_V=\dfrac{-(-2)}{2\cdot(-1)}=-1$. Portanto, f_3 é injetora e sua imagem é $\text{Im}(f_3)=]-\infty,-3]$.

Como as três funções são injetoras e suas imagens não possuem interseção, então f é injetora.

A imagem de f é dada por $\text{Im}(f)=\text{Im}(f_1)\cup\text{Im}(f_2)\cup\text{Im}(f_3)=[3,+\infty[\cup]-3,3[\cup]-\infty,-3]=\mathbb{R}$, então f é sobrejetora e, consequentemente, bijetora. Isso implica que f admite inversa.

A seguir está o gráfico de f onde também é possível identificar a bijetividade.



A inversa de $f_1(x)=x^2-4x+7$, para $x\ge 2$, é dada por:

$$y=x^2-4x+7 \Leftrightarrow x^2-4x+(7-y)=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot(7-y)}}{2}=2\pm\sqrt{y-3},\ y\ge 3$$

$$x\ge 2 \Rightarrow x=2+\sqrt{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-3},\ x\ge 3$$

A inversa de $f_2(x)=2x-1$, para $-1<x<2$, é dada por:

$$y=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2},\ -3<x<3.$$

A inversa de $f_3(x)=-x^2-2x-4$, para $x\le -1$, é dada por:

$$y=-x^2-2x-4 \Leftrightarrow x^2+2x+(4+y)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(4+y)}}{2}=-1\pm\sqrt{-y-3},\ y\le -3$$

$$x\le -1 \Rightarrow x=-1-\sqrt{-y-3} \Rightarrow f^{-1}(x)=-1-\sqrt{-x-3},\ x\le -3$$

Logo, a inversa de f é $f^{-1}(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x-3},\ x\ge 3 \\ \dfrac{x+1}{2},\ -3<x<3 \\ -1-\sqrt{-x-3},\ x\le -3 \end{cases}$.

Portanto, a alternativa b) é a correta.

Note que $f^{-1}(-5)=-1-\sqrt{-(-5)-3}=-1-\sqrt{2}$.

É interessante observar que as alternativas a) e c) estabelecem a mesma coisa. Assim, se uma estivesse correta, a outra também estaria. Logo, ambas precisam estar erradas.

RESPOSTA: B

30.

(F) Nas funções reais $g: C \to A$ e $f: A \to B$, se existe a função composta $(f\circ g): P \to S$, então $P=C$ e $S=B$.

Uma condição suficiente para que exista a função composta é $P\subset C$ e $B\subset S$.

(F) Se $h:\{m,n,p\}\to\{m,n,p\}$ é uma função tal que $h(m)=p$, $h(n)=m$ e $h(p)\neq n$, então h é uma função injetora.

Se $h(p)\neq n$, então $h(p)=m$ ou $h(p)=p$, portanto h não é injetora.

(V) Se $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ é uma função tal que $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ se } x\neq 1 \text{ e } x\neq 2 \\ x, \quad \text{ se } x=2 \\ x-1, \text{ se } x=1 \end{cases}$, então $(f\circ f\circ f)^{-1}(x)=1$ se, e somente se, $x=0$.

$$(f\circ f\circ f)^{-1}(x)=1 \Leftrightarrow (f\circ f\circ f)(1)=x \Leftrightarrow x=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(1)=0$$

$$f(1)=1-1=0$$

$$f(0)=0+1=1$$

RESPOSTA: A

31.

$$f^{-1}(90)=k \Leftrightarrow f(k)=90 \Rightarrow f(x)=\frac{100}{1+2^{-k}}=90 \Leftrightarrow 1+2^{-k}=\frac{10}{9} \Leftrightarrow 2^{-k}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2^{k}=9$$

$$\left(g\circ f^{-1}\right)(90)=g\left(f^{-1}(90)\right)=g(k)=2^{\frac{k}{2}}=\left(2^{k}\right)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3$$

RESPOSTA: B

32.

$$y=\frac{10^{x}-10^{-x}}{10^{x}+10^{-x}}=\frac{10^{x}-\frac{1}{10^{x}}}{10^{x}+\frac{1}{10^{x}}}=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1} \Leftrightarrow 10^{2x}y+y=10^{2x}-1$$

$$\Leftrightarrow 10^{2x}(1-y)=1+y \Leftrightarrow 10^{2x}=\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow 2x=\log_{10}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Trocando as variáveis $f^{-1}(x)=y=\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

REFERÊNCIA: Mathematics Today – November 2014 – pg. 10.

RESPOSTA: A