MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

A estatística é uma área da matemática voltada para coleta de dados, análise de informação, interpretação de dados numéricos e estudo de fenômenos naturais, a etapa em que ocorre o tratamento de dados, pode ser separada em dois grupos: medidas de tendência central e medidas de dispersão. Nessa apostila, abordaremos esses dois grupos.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de tendência central (também conhecido como medidas de posição), buscam caracterizar o conjunto de valores da variável analisada. Por exemplo, ao dizermos que no mês de dezembro o Rio de Janeiro apresentou uma temperatura média de 32°, estamos usando um único dado para representar a temperatura de todos os dias de dezembro. As medidas mais usadas nestes casos são a média aritmética simples, média aritmética ponderada, moda e mediana. Além delas, temos a média geométrica e a média harmônica, cobrada com menos frequência.

Média Aritmética Simples

Considere uma variável S, com o conjunto de valores $S = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ com n elementos. Chamamos de média aritmética simples de S, a razão entre a soma dos elementos do conjunto S e a quantidade n de elementos do conjunto, ou seja:

$$S = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_n}{n}$$

Generalizando:

$$S = \frac{\sum x_i}{n}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Maria fez hora extra no trabalho durante 4 meses (janeiro, fevereiro, março, abril) e foi remunerada pelas horas que fez a mais, mas o valor não era fixo. Maria ganhou R$200 no primeiro mês (janeiro), R$300 no segundo (fevereiro), R$400 no terceiro (março) e R$300 no quarto (abril). Quanto ela ganhou em média por mês?

Resolução: Basta somarmos todos os ganhos obtidos por Maria nos quatro meses e dividir o resultado por quatro:

$$\frac{200 + 300 + 400 + 300}{4} = 300$$

Maria recebeu uma média de R$300,00 por mês durante esses quatro meses. E, se Maria precisasse trabalhar pelo mês de maio também e recebesse R$300 por essas horas, qual seria a média extra ganha por ela nos cinco meses?

$$\frac{200 + 300 + 400 + 300 + 300}{5} = 300$$

Maria teria recebido uma média de R$300,00 por mês durante os cinco meses. Mas, se Maria tivesse ganho a mais uma quantia fixa de 100 reais por mês, qual seria a média extra ganha por ela?

$$\frac{200 + 100 + 300 + 100 + 400 + 100 + 300 + 100}{4} = 400$$

Neste caso, Maria teria recebido uma média de R$400,00 por mês durante os quatro meses. Agora, se Maria precisasse trabalhar pelo mês de maio também e por esse mês ganhasse 550 reais, qual seria a média extra ganha por ela?

$$\frac{200 + 300 + 400 + 300 + 550}{5} = 350$$

Aí Maria teria recebido uma média de R$350,00 por mês durante os cinco meses. E, caso Maria passasse por problemas pessoais, deixasse de trabalhar durante o mês de janeiro, trabalhando somente em fevereiro, março e abril, qual seria a média extra ganha por ela?

$$\frac{300 + 400 + 300}{3} = 333{,}33$$

Observações:

1. A média aritmética de um conjunto de valores não sofre alteração quando inserimos ou retiramos dele um valor igual à sua média aritmética.
2. Quando adicionarmos a mesma quantia em todos os valores de um conjunto, a média aritmética do conjunto aumenta essa quantidade.
3. A média aritmética de um conjunto de valores aumenta quando inserimos nele um valor maior que a sua média aritmética. Quando o valor inserido é menor que a média aritmética do conjunto, a média deste diminui.

4. A média aritmética de um conjunto de valores aumenta quando retiramos dele um valor menor que sua média aritmética. Quando o valor retirado é maior que a média aritmética do conjunto, a média deste diminui.

Média Aritmética Ponderada

A média aritmética ponderada é usada quando os valores do conjunto possuem pesos diferentes. Considere uma variável S, com o conjunto de valores $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n\}$, com n elementos, cujos pesos respectivamente são $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n\}$, a média aritmética ponderada de S é resultado da razão entre a soma dos produtos de cada elemento de S por seu respectivo peso, e a soma dos pesos dos elementos de S. ou seja:

$$S = \frac{\sum P_i . x_i}{\sum P_i}$$

Generalizando:

$$\frac{x_1 . p_1 + x_2 . p_2 + x_3 . p_3 + x_4 . p_4 + x_5 . p_5 + \cdots + x_n . p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + \cdots + p_n}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Diego participou de um concurso para um emprego na área do Direito, onde foram realizadas provas de Português, Matemática, História, e conhecimentos gerais. Essas provas tinham peso 3, 3, 3 e 2, respectivamente. Sabendo que Diego tirou 8,0 em Português, 7,0 em Matemática, 9,0 em História e 7,5 em Conhecimentos Gerais. se para ser aprovado a média tinha que ser superior a 7,6. Qual foi a média que ele obteve, ele conseguiu a aprovação?

$$\frac{8.3 + 7.3 + 9.3 + 7{,}5.2}{11} = 7{,}9$$

A média obtida por Diego foi de 7,9. Ele conseguiu ser aprovado no concurso por 7,9 > 7,6.

Média Geométrica

A média geométrica é outra possível medida de tendência central, comum de se ver em progressões geométricas, por ser uma propriedade desse assunto. Para um conjunto de valores $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n\}$, com n elementos a determinação da média geométrica é dada pela raiz de índice n dos produtos dos elementos pertencentes a S.

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . \dots . x_n}$$

Utilizando o produtório, temos que a média geométrica é:

$$M_g = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

Média Harmônica

A média harmônica é um tipo de média que menos aparece no cotidiano, utilizada geralmente em questões que as variáveis são inversamente proporcionais. Dessa maneira, seja $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}$ o conjunto de n elementos, todos diferentes de zero, a média harmônica desses n elementos pertencentes a S é a razão entre o número total de elementos sobre a soma dos inversos elementos de S, isto é:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Simplificando a expressão pelo somatório, temos:

$$M_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Moda

Em uma fábrica de material de construção trabalham 10 pessoas, nove operários e um gerente. Cada operário ganha 2 salários mínimos por mês, já o gerente ganha 82 salários mínimos. O salário médio dos funcionários é 10. Porém, nesse caso a média de dez salários não representa bem o conjunto de dados, visto que a maioria dos empregados ganha dois salários mínimos por mês. Logo, o conjunto de dois salários mínimos representa a maior frequência, esse valor é chamado de moda do conjunto.

Chamamos de moda o que ocorre com maior frequência em um conjunto de dados, ou o valor mais comum (que mais se repete) referente a um conjunto.

Caso ocorra de dois elementos do mesmo conjunto possuir a frequência máxima, o conjunto será bimodal; se tivermos três valores com frequência máxima, o conjunto será trimodal. Já os conjuntos com dois ou mais valores com a frequência máxima são conhecidos como multimodais. Há, ainda, a situação em que o conjunto é amodal, ou seja, o conjunto não apresenta valores repetidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Em um grupo de 10 pessoas, foi feito uma pesquisa com a finalidade de saber quantos aparelhos celulares tinham na casa de cada um. Os resultados obtidos foram:

$$\{3,3,4,2,1,3,3,2,4,3\}$$

Valor	Frequência absoluta
1	1
2	2
3	5
4	2

Através da tabela podemos observar que a maior frequência é 3, sendo repetido 5 vezes durante a pesquisa, **logo 3 será a moda**.

2. Um professor de Biologia chamado Jubilut propôs aos alunos a realização de um trabalho sobre genética, cuja nota poderia ser igual a 1,2 ou 3. Depois de analisar os trabalhos entregues por todos os alunos dessa turma, Jubilut montou a tabela abaixo, que representa os percentuais de alunos que obtiveram cada uma das notas possíveis.

Nota	Percentual de alunos
1	20%
2	45%
3	35%

Qual é a moda das notas obtidas pela turma nesse trabalho?

Resolução:

Note que 45% representa a nota com maior frequência, portanto, **a moda é 2**.

Mediana

Em um teste para seleção de novos integrantes para o time de basquete de um clube, os selecionados tem 1,82 m; 1,85 m; 1,86 m; 1,84 m e 1,87 m.

Ao colocarmos as alturas em ordem crescente, temos:

$$1{,}82 < 1{,}84 < 1{,}85 < 1{,}86 < 1{,}87$$

Note que o selecionado para o teste cuja altura ocupa a posição central é o que tem a altura de 1,85 m. Esse valor é chamado de mediana do conjunto de dados.

Número Ímpar de Elementos

Se a quantidade n de termos for um número ímpar, determinamos a mediana da seguinte forma:

Encontramos a posição do termo central P de um conjunto com quantidade n ímpar de elementos da seguinte forma:

$$P = \frac{n+1}{2}$$

A mediana será o elemento que ocupa a posição P quando o conjunto é ordenado de forma crescente ou decrescente. Ou seja:

> A mediana de qualquer conjunto com número ímpar de elementos é representada pelo termo que ocupa a posição central, quando os dados são colocados em posição crescente ou decrescente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Encontre a mediana dos termos abaixo:

$$\{2,4,6,8,10,12,14\}$$

Resolução:

Como é possível observar, o conjunto apresentado possui 7 termos logo, para acharmos a posição do termo que será a mediana, faremos:

$$P = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Importante! O número 4 não será o valor da nossa mediana, ele será a posição em que a nossa mediana ocupa. Portanto, **a mediana deste conjunto é 8**.

Número Par de Elementos

Agora, dado um conjunto com uma quantidade n de termos, sabendo que essa quantidade é representada por um número par, como determinar a mediana?

Se a quantidade n de termos for um número par, determinamos a mediana da seguinte forma:

Encontramos a posição dos dois termos centrais P_y e P_z de um conjunto com quantidade n par de elementos da seguinte forma:

$$P_y = \frac{n}{2}$$

$$P_z = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$$

A mediana será dada pela média aritmética desses dois termos que ocupam a posição central.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Ache a mediana dos termos abaixo:

$$\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

1. Como é possível observar, o conjunto apresentado possui 8 termos, logo para acharmos a posição dos termos que usaremos para calcular a mediana, faremos;

$$\frac{8}{2} = 4 \quad \text{e} \quad \frac{8+2}{2} = 5$$

Assim, obteremos os termos que ocupam a 4° e 5° posição. O quarto termo é representado pelo número 7, e o quinto pelo número 9.

Agora, afim de obter a mediana, vamos fazer a média aritmética desses termos.

$$\frac{7+9}{2} = 8$$

Portanto, **teremos o 8 como mediana** desse conjunto de dados.

2. Somali, professora de matemática, resolveu aplicar uma prova surpresa, valendo 10 pontos, em suas turmas dos turnos da manhã e tarde. Após corrigir as provas, resolveu calcular a média, moda e mediana dessas notas, afim de conseguir comparar as dificuldades das turmas.

Turma da manhã:	Nota:	Turma da tarde:	Nota:
Fernando	1	Matheus	5
Maria	4	Carlos	6
Claudia	6	Eduarda	4
João	8	Anna Flávia	6
Diego	7	Gabriel	5
Brida	2	Thaíssa	5
Julia	8	Larissa	4
Lucas	2	Hiago	3
Karol	9	Pedro	7
Luiza	3	Beatriz	5

Turma da manhã:

Média: (1+4+6+8+7+2+8+2+9+3)/10=5

Moda: 2 e 8

Mediana: (4+6)/2 = 5

Turma da tarde:

Média: (5+6+4+6+5+5+4+3+7+5)/10=5

Moda: 5

Mediana: (5+5)/2 = 5

Após esses cálculos, o que pode ser analisado?

Podemos observar que as medias entre a turma da manhã e da tarde foi a mesma, mas apesar disso, elas possuem características que se diferem. Exemplo, na turma da manhã, apesar da média ser 5, tem muitos alunos com notas distantes disso (1 e 2) e outras muito altas (8 e 9), o que nos mostra uma turma inconstante. Já a turma da tarde, a maioria dos alunos obtiveram notas próximas a média, dessa forma apresentando uma turma com um rendimento mais constante. Com isso, podemos concluir que a média aritmética, juntamente as outras medidas de tendência central, não são suficientes para traçar o perfil exato de um grupo, ou, conjunto de dados, devido a isso, afim de obter mais precisão, vamos estudar as chamadas medidas de dispersão; a amplitude, a variância e o desvio-padrão.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

As medidas de dispersão são usadas para dar mais precisão as análises de um grupo de dados. Essas medidas analisam a relação dos resultados de uma pesquisa com suas médias.

Amplitude

A amplitude é representada pela diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de um conjunto.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dado o conjunto A= {2,4,6,8,10,12,14,16}, temos que o valor mínimo desse conjunto é 2, e o valor máximo é 16, dessa forma, qual será a sua amplitude?

Amplitude = 16- 2 = 14.

Variância

A variância é calculada usando como referência a média aritmética dos elementos de um conjunto.

Considere a variável X, com $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, cuja média aritmética tem valor representado por $\bar{x}$ e x_i é um elemento qualquer de X, com $i \in \mathbb{N}$.

Denomina- se variância desse conjunto, a medida V calculada pela seguinte expressão:

$$S = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Para calcular a variância de um conjunto de dados, vamos precisar seguir esses passos:

1. Calculamos a média aritmética dos valores do conjunto.
2. Calculamos o quadrado da diferença entre cada elemento do conjunto e a média aritmética já obtida no passo 1.
3. Calculamos a média aritmética dos resultados encontrados no passo 2.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere o conjunto X = {10,20,30,40,50}. Calcule a sua variância.

Primeiro vamos calcular a média aritmética desse conjunto:

$$\frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = 30$$

Agora, vamos calcular o quadrado da diferença entre cada elemento e a média 30 achada:

$(10 - 30)^2 = 400$

$(20 - 30)^2 = 100$

$(30 - 30)^2 = 0$

$(40 - 30)^2 = 100$

$(50 - 30)^2 = 400$

Agora afim de obtermos o valor da variância é necessário fazermos a média aritmética dos resultados encontrados acima

$$\frac{400 + 100 + 0 + 100 + 400}{5} = 200$$

2. Considere o conjunto $Y = \{20,25,30,35,40\}$. Calcule a sua variância.

Primeiro vamos calcular a média aritmética desse conjunto:

$$\frac{20 + 25 + 30 + 35 + 40}{5} = 30$$

Agora, vamos calcular o quadrado da diferença entre cada elemento e a média de 30 achada:

$(20 - 30)^2 = 100$

$(25 - 30)^2 = 25$

$(30 - 30)^2 = 0$

$(35 - 30)^2 = 25$

$(40 - 30)^2 = 100$

Agora afim de obtermos o valor da variância é necessário fazermos a média aritmética dos resultados encontrados anteriormente

$$\frac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{5} = 50$$

Analisando os exemplos 1 e 2, é possível perceber que a média aritmética dos elementos do conjunto X é a mesma dos elementos do conjunto Y. Mas os valores dos elementos do conjunto Y são mais próximos de sua média que os elementos do conjunto X, dessa forma falamos que o conjunto Y é mais **homogêneo** que o X, pois seus valores são menos divergentes. Assim, as diferenças (em módulo) entre os valores dos elementos do conjunto Y e a média aritmética são menores, fazendo com que sua variância seja menor do que a do conjunto X no exemplo 1.

Propriedades da variância:

- Ao adicionar um mesmo valor a todos os elementos de um conjunto, a variância do conjunto não se altera.
- Ao multiplicar todos os elementos de um conjunto por uma mesma constante K, a variância do conjunto fica multiplicada por K.
- Ao retirar de um conjunto um elemento cujo valor é igual à média aritmética desse conjunto, a variância do conjunto aumenta.
- Ao inserir em um conjunto um elemento cujo valor é igual à média aritmética do conjunto, a variância do conjunto diminui.

Desvio-padrão

Com o cálculo da variância, vimos sua importância para a análise da homogeneidade de um conjunto de valores, porém como os resultados da diferença entre os valores do conjunto e a média aritmética são elevados ao quadrado, potencializando seus efeitos, o desvio padrão é calculado extraindo a raiz quadrada da variância.

Considere a variável X, com $X=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, cuja média aritmética tem valor representado por $\bar{x}$ e x_i é um elemento qualquer de X, com $i \in \mathbb{N}$..

Denomina-se desvio-padrão desse conjunto de valores a medida σ, calculada pela seguinte expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma avaliação com 5 questões foi aplicada numa turma com 10 alunos. Na tabela ao lado está registrado a quantidade de alunos por número de acertos.

Qual é o desvio padrão do número de acertos dessa avaliação?

Número de acertos	Número de alunos
0	0
1	0
2	0
3	4
4	2
5	4

Resolução:

Inicialmente, vamos calcular a média aritmética dos acertos desses 10 alunos:

$$\frac{0.0 + 1.0 + 2.0 + 3.4 + 4.2 + 5.4}{10} = 4$$

Agora, vamos calcular o quadrado da diferença entre cada elemento do conjunto e a média aritmética, obtida no passo inicial:

(0 – 4) = 16
(1 – 4) = 9
(2 – 4) = 4
(3 – 4) = 1
(4 – 4) = 0
(5 – 4) = 1

Para acharmos o desvio padrão, que é a raiz da variância, vamos calcular agora a média aritmética desses resultados encontrados acima:

$$\frac{0.16 + 0.9 + 0.4 + 4.1 + 2.0 + 4.1}{10} = 0{,}8$$

A variância é 0,8, logo o desvio padrão será $\sqrt{0{,}8}$, que **será aproximadamente 0,9**.

Propriedades do desvio-padrão:

- Ao somarmos um mesmo valor a todos os elementos de um conjunto, o desvio-padrão do conjunto não se altera.
- Ao multiplicarmos todos os elementos de um conjunto por um mesmo valor k, o desvio-padrão do conjunto fica multiplicado por k.
- Ao retirarmos de um conjunto um elemento cujo valor é igual a média aritmética do conjunto, o desvio-padrão do conjunto aumenta.
- Ao inseríramos em um conjunto um elemento cujo valor é igual a média aritmética do conjunto, o desvio-padrão do conjunto diminui.

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut